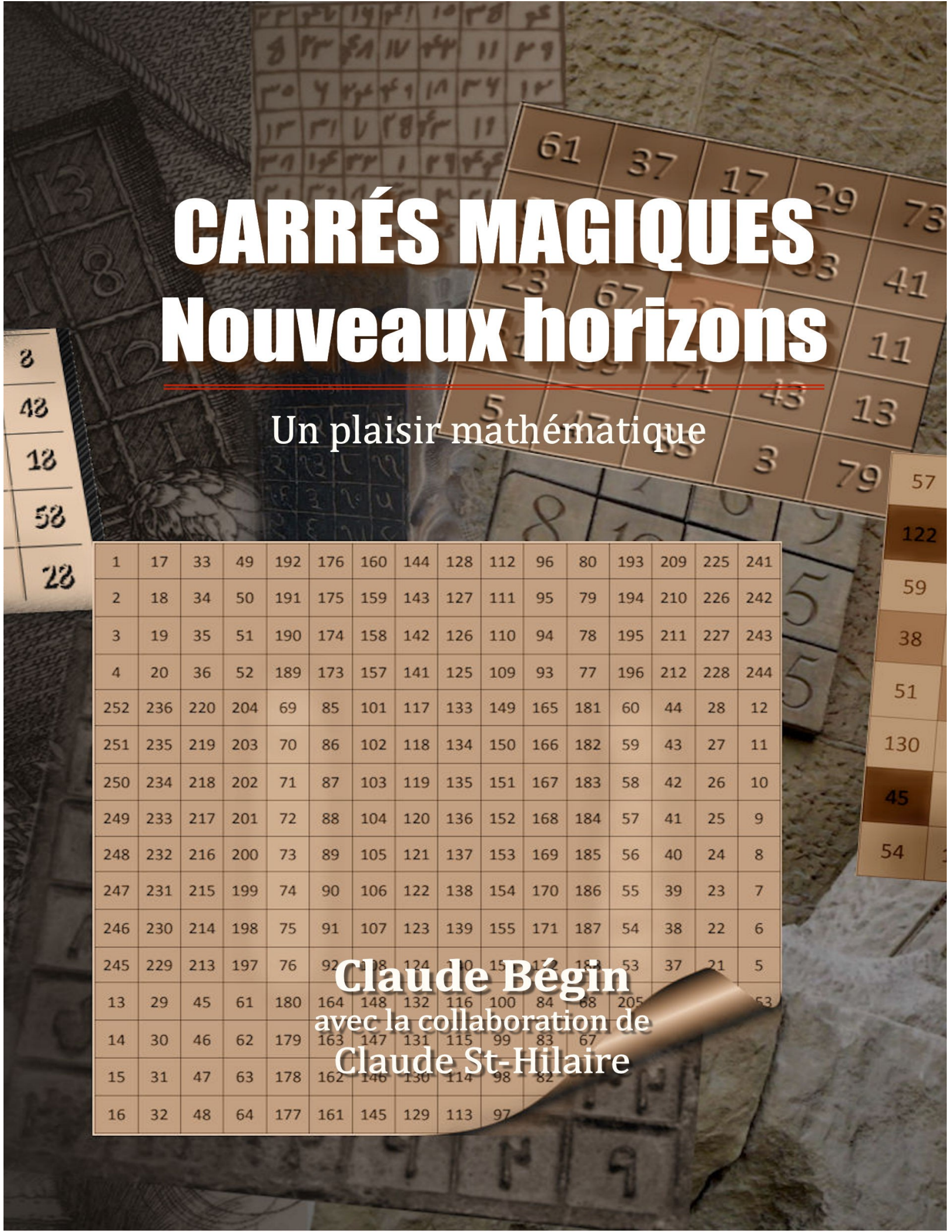
CARRÉS MAGIQUES
Nouveaux horizons

Un plaisir mathématique



Claude Bégin

avec la collaboration de

Claude St-Hilaire

Cette page est laissée vide intentionnellement

Carrés magiques
Nouveaux horizons

© Claude Bégin, 2020

Dépôt légal – Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2021
ISBN 978-2-9820239-0-1 (PDF)

Tous droits réservés pour tous pays par Claude Bégin.
Reproduction par quelque procédé que ce soit et traduction, même partielle, interdites sans l'autorisation de Claude Bégin.

Carrés magiques
Nouveaux horizons
Un plaisir mathématique

Claude Bégin

avec la collaboration de
Claude St-Hilaire

Première Édition
2020

Révision 2026

Boucherville, Québec,
Canada

Ouvrage conçu et réalisé de 2009 à 2021
par **Claude Bégin**
en collaboration avec Claude St-Hilaire
pour les programmes dans MAPLE
avec la contribution technique
de Paul Patenaude pour l'édition en format PDF
et pour la mise en ligne sur le site web carres-magiques.com

Tous les éléments de l'ouvrage avec ses annexes et tous
les programmes sont disponibles sur le site web
carres-magiques.com

Auteur

Claude Bégin a été professeur de mathématiques de 1966 à 1999. Après le baccalauréat, il termine sa scolarité de maîtrise en mathématiques à l'UQAM. Avec l'Agence canadienne de Développement International (ACDI), de 1977 à 1981, il est professeur de mathématiques au Centre Pédagogique Régional (CPR) de Rabat, Maroc où il s'occupe principalement de la formation des homologues Marocains (complément de formation mathématique, didactique, séminaires). Puis il propose la mise en place d'un Concours Mathématique à l'échelle du Maroc, lequel a eu lieu. Il est aussi l'auteur de publications mathématiques : *Cours de mathématiques de Secondaire 5* pour le Ministère de l'Éducation, *Quelques sous-corps algébriquement clos du corps des nombres complexes* (Maroc), *Théorie des Graphes* (Maroc), *Équivalences et Ordres* (Permama), *Théorie des équations* (Permama), *Résolution des équations du troisième et du quatrième degré* (Permama), *Du Triangle de Pascal vers* π, *Problèmes de mathématique*s (Maroc), *Les droites dans le plan et dans l'espace*, *Polygones réguliers rationnellement inscriptibles dans un cercle*, quelques problèmes dans Mathematics Magazine et dans The College Mathematics Journal, *Nouveau procédé de construction de carrés magiques*…

L'Analyse, l'Algèbre, la Théorie des Nombres et la Résolution de Problèmes sont ses principaux centres d'intérêts sans oublier les Carrés Magiques et les Carrés Multiplicatifs et enfin, la Minéralogie.

Il a aussi participé à des Congrès sur l'Enseignement des Mathématiques (Bordeaux, France; Tunis, Tunisie; St-Jacques de Compostelle, Espagne) et fut membre de l'équipe Permama pendant quatre ans (1973 à 1977).

Collaborateur

Claude St-Hilaire a été professeur de mathématiques pendant 35 ans. Il a obtenu son baccalauréat en mathématiques de l'Université Laval. La Résolution de Problèmes a été un de ses principaux centres d'intérêts en plus de militer dans le syndicalisme pendant 20 ans. Il a construit de très beaux programmes avec MAPLE dont celui qui fournit les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Enfin, les carrés magiques ont été un autre de ses centres d'intérêts.

Remerciements

- À nos épouses, Danièle Roméo et Ginette Tremblay pour leur support incessant pendant une bonne dizaine d'années.
- À Ginette Bégin pour ses fichiers EXCEL qui permettent la construction de carrés magiques d'ordres 3 jusqu'à 32.
- À Claude Laflèche pour son aide technique dans les fichiers EXCEL.
- À Jean-Luc Gélinas de la firme InServio Inc. pour la création du site « carres-magiques.com ».
- À Paul Patenaude pour la mise en ligne de tous nos documents sur notre site web et pour la révision éditoriale complète de la version PDF de l'ouvrage.

Bibliographie

- René Descombes (2000) : Les carrés magiques, histoire, théorie et technique du carré magique, de l'Antiquité aux recherches actuelles, Vuibert.
- Clifford A. Pickover (2002) : The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars, Princeton University Press.
- Kathleen Ollerenshaw and David Brée (1998) : Most-Perfect Pandiagonal Magic Squares, Their construction and enumeration, The Institute of Mathematics and its Applications, University Press, Cambridge.
- Edouard Callandreau (1949) : Célèbres Problèmes Mathématiques, Albin Michel.

Liens utiles

- **Site Multimagie**
  http://multimagie.com/
  Nous vous recommandons fortement le site de Christian Boyer, Multimagie.com, qui traite de carrés magiques extraordinaires : les carrés multi-magiques. Celui-ci présente une grande variété de carrés magiques, les carrés de carrés par exemple. Vous y trouverez les carrés multiplicatifs ainsi que les plus récentes découvertes et plus…
- **Site Libero Digiland**
  https://digilander.libero.it/ice00/magic/prime/orderConstant.html
  Vous trouverez sur ce site des carrés premiers parfaits d'ordres 4 à 63. Tout simplement extraordinaire!!!

- **Prime Magic Squares**
  http://oeis.org/A256891
  Ce site nous présente les 27 carrés magiques premiers parfaits d'ordre 3 trouvés par Arkadiusz Wesolowski en avril 2015.
  Plus précisément, nous trouvons le premier nombre premier de 27 suites de 9 nombres premiers consécutifs avec lesquelles nous construirons les 27 carrés magiques.
- **Prime Magic Squares – RecMath**
  http://recmath.org
  Vous trouverez ici deux carrés premiers parfaits d'ordre 3 formés de 9 nombres premiers de 93 chiffres, consécutifs et en progression arithmétique.
- **Order-5 Pandiagonal Magic Squares**
  http://www.magic-squares.net/
  Ce site nous présente le procédé 1-3-5-2-4 lequel nous donne un moyen de construire un nouveau carré pandiagonal à partir d'un carré pandiagonal donné.
- **Magic Squares, Magic Stars & Other Patterns**
  http://recmath.org/Magic%20Squares/
  Ce site présente un grand nombre de carrés magiques, pandiagonaux, ultra-magiques, …
- **Prime Numbers Magic Squares**
  http://www.magic-squares.net/primesqr.htm

Mise en garde

Cet ouvrage a été construit en trois parties, soit

- la **Partie 1** qui présente les principales notions sur les carrés magiques ainsi que leurs principales propriétés.
  Cette partie comporte sa propre table des matières, un développement important, un glossaire des termes importants, des propositions de problèmes et les solutions de ces problèmes.
  La Partie 1 comporte sa propre pagination.

- La **Partie 2** propose de nouveaux procédés de construction de carrés magiques notamment pour les carrés d'ordre 4, 5, 6 et 8. On y propose aussi un glossaire et environ 400 problèmes.
  Cette partie comporte aussi sa propre table des matières.
  La Partie 2 comporte sa propre pagination.

- La **Partie 3** est formée de compléments d'informations sous la forme de 34 annexes, dont le listage des programmes pour les applications MATHEMATICA et MAPLE.
  Cette partie comporte aussi sa propre table des matières.
  Chaque annexe comporte sa propre pagination.

Remarque : L'ouvrage en entier, peu importe sa version, est l'ensemble des trois Parties décrites ci-dessus.

Avant propos

Les carrés magiques existent déjà depuis plusieurs siècles et de nombreuses façons de les construire ont été découvertes tout au long de ces siècles. Un des plus spectaculaires est un carré magique d'ordre 4 trouvé par Dürer au seizième siècle. Il est formé des nombres entiers de 1 à 16 et sa somme magique est 34 (car 34 est la somme obtenue dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale). Aujourd'hui, nous savons que nous pouvons atteindre cette somme 34, de 86 façons différentes en faisant la somme des nombres situés dans quatre cases distinctes. Dürer le savait-il? Vous pouvez trouver, sur Internet, une grande quantité d'informations historiques ainsi que les procédés de construction de carrés magiques qui existent déjà depuis très longtemps. C'est pourquoi nous allons passer rapidement à l'étude des carrés magiques et à la présentation d'un tout nouveau procédé pour les construire.

L'approche utilisée ici est plutôt algébrique tout en ne négligeant pas l'aspect géométrique des carrés magiques. Le premier but a été la construction de nombreux et nouveaux carrés magiques d'ordre 4.

> Tout ça parce qu'un samedi soir, un magicien monte sur scène avec un carré 4 x 4 à remplir. Il demande à un spectateur de lui fournir un nombre entier entre 50 et 100. Cette fois, ce fut 82. Rapidement, le magicien remplit les seize cases du carré qui devient un carré magique de somme 82. La somme des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est 82, appelée **somme magique**. La somme des quatre coins, des quatre cases centrales donne aussi 82. Le magicien nous montre ainsi vingt façons différentes de choisir quatre cases qui totalisent l'entier 82.

Mais comment fait-il? Cet objet mathématique est tout simplement extraordinaire!!! En fait, nous verrons que le magicien construisait un carré magique appelé un Dürer, caractérisé par 24 façons différentes d'arriver à la somme 82 (et non 20 façons). De plus, certains Dürer nous permettent de trouver la somme magique jusqu'à 86 façons différentes en faisant la somme des nombres entiers situés dans quatre cases distinctes.

> Je ne comprends pas ce qui se passe et je laisse tout cela de côté en me disant que j'allais y revenir plus tard. Mais voilà qu'un ami mentaliste m'invite à un souper-spectacle pendant lequel il nous refait le coup du carré magique! Encore vingt façons d'arriver à la somme donnée au hasard par un spectateur.
>
> Revenu à la maison, la commande est énorme!!! Je me dis qu'il est temps de réagir et de trouver une explication à tout cela. La grande aventure « Carrés Magiques » commence ce jour-là.

La Partie 1 de l'ouvrage présenté ici portera sur la construction de carrés magiques d'ordre 4 qui auront le plus grand nombre de figures magiques, une **figure magique** étant un groupe de quatre cases distinctes dont la somme des nombres qui s'y trouvent est la somme magique. Voilà un de nos objectifs. Pour ce faire, nous avons trouvé un carré magique général M d'ordre 4 qui permet de construire que des carrés magiques d'ordre 4 et de les construire tous. Puis en imposant des figures magiques à M, nous avons construit des classes (espaces vectoriels sur les nombres réels) de carrés magiques qui possèdent tous les mêmes figures magiques caractéristiques.

Ces classes ont été nommées : sous-espace des Dürer, des super-Dürer, des super-Dürer-alpha, des super-Dürer-bêta, des A-Dürer, des diaboliques et des diaboliques-alpha. Le célèbre carré magique d'Albert Dürer étant un diabolique-alpha. Nous avons choisi ces noms en l'honneur de Dürer.

Vous pourriez fabriquer d'autres classes (sous-espaces) de carrés magiques en imposant la ou les figures magiques que vous désirez. Nous verrons cela au chapitre 5 de la Partie 2 de l'ouvrage.

Puis la tentation devient trop forte, nous devons aller voir les carrés magiques 3×3, les 5×5 et pourquoi s'arrêter là? Il y a de très beaux 6×6 et 8×8. Finalement, nous décidons de considérer les carrés magiques $n \times n$ où n est un entier plus grand ou égal à un. La grande aventure « Carrés Magiques » devient encore plus grande!!!

Dans nos carrés magiques, nous acceptons de placer dans ceux-ci, tout ce qui s'additionne. Pourquoi pas des nombres réels, des nombres complexes, des polynômes, des fonctions quelconques et même des carrés magiques. Mais avant tout, notre premier objectif est de construire des carrés magiques formés d'entiers positifs (> 0) tous différents, que nous appelons **carrés magiques presque normaux**. Notre deuxième objectif est de construire des carrés magiques formés d'entiers consécutifs à partir de 1, appelés **carrés magiques normaux**. Puis notre troisième objectif est de construire des carrés magiques dans lesquels nous trouvons le plus grand nombre possible de figures magiques.

L'ouvrage que nous présentons ici est en **trois parties**. **La Partie 1** s'adresse à tous et n'exige à peu près pas de connaissances mathématiques. Vous y trouverez les notions de base ainsi qu'une galerie de carrés magiques lesquels présentent des propriétés étonnantes. Également, un procédé pour construire un carré magique de toutes les tailles.

Vous voulez construire un carré magique 8×8 qui sera normal, très facile!!! Vous voulez un presque normal 35×35, très facile mais aussi, il faudra compter quelques heures!!! Ce dernier carré magique, une fois construit, sera un objet mathématique extraordinaire!!!

La Partie 2 demande une certaine formation mathématique : connaissance des espaces vectoriels, de la notion de dimension, de l'algèbre linéaire en général. Nous présentons certains

théorèmes avec la démonstration complète mais aussi d'autres avec seulement les idées de base pour que vous puissiez compléter la preuve.

La **Partie 3** propose un grand nombre de programmes qui permettent la construction de carrés magiques ayant des propriétés spéciales. On y trouve 34 annexes qui sont des compléments d'informations. Par exemple, l'annexe 18 vous présente des carrés magiques d'ordre 3 formés de 9 nombres premiers consécutifs. Quant aux programmes, par exemple, vous trouverez un programme qui permet de construire tous les carrés magiques normaux d'ordre 4; il y en a 7040. On peut télécharger ces programmes sur le site Web carres-magiques.com. On propose aussi des fichiers qui permettent la construction de carrés magiques pour les ordres 3 à 24 (MATHEMATICA), 3 à 32 (EXCEL) et des programmes pour les ordres 3 à 28 (MAPLE). Dans tous les cas, la construction est très simple et fait appel à seulement trois variables. Il vous suffit d'attribuer une valeur entière à chaque variable et le carré magique est aussitôt construit. Nous disons valeur entière, car nous préférons des carrés formés d'entiers!!!

Dans la **Partie 2**, nous avons un chapitre sur les **carrés multiplicatifs** dans lesquels nous faisons le produit des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale. Si ce produit est le même, appelé **produit magique**, nous disons que notre carré est **multiplicatif**.

Chaque fois que nous construisons une nouvelle classe de carrés magiques, nous allons toujours nous demander s'il est possible d'en obtenir qui soient au moins presque normaux et même qui soient normaux et dans ce cas, combien il y en a.

Par exemple, nous avons fabriqué la classe (sous-espace) des super-Dürer-alpha qui sont des carrés magiques d'ordre 4 caractérisés par 68 figures magiques. Cela signifie que tous ces carrés possèdent les mêmes 68 figures magiques. De plus, nous avons montré qu'il n'existe que **huit** super-Dürer-alpha normaux. Ils sont dans le chapitre 5 de la Partie 2.

De même pour les carrés multiplicatifs; peuvent-ils n'être formés que d'entiers tous différents et ≥ 1 ? Nous montrerons que oui.

À la fin de chaque chapitre se trouvent des problèmes qui permettent un approfondissement des sujets traités.

Nous vous présenterons un certain nombre de conjectures et nous souhaitons que celles-ci deviennent des théorèmes dans un avenir rapproché!!! Pour établir ces conjectures, nous avons tenu compte d'un grand nombre de cas particuliers (très souvent quelques centaines) et de notre intuition et ce, avec un degré de confiance très élevé.

Suggestions :

> Pour l'étude des carrés magiques d'ordre 4, gardez près de vous le carré (*) de 5.1, chapitre 5 de la Partie 2.
> Dans la section 4.3.1 du chapitre 4 de la Partie 2, gardez près de vous les notations utilisées pour les rotations des carrés.

Revenons aux fichiers « Ordre 3 », « Ordre 4 »… Ceux-ci sont construits à partir de trois algorithmes appelés ALG-1, ALG-2 et ALG-3 (voir Partie 2, chapitre 11).

ALG-1 nous permet de construire des carrés magiques d'ordres impairs. Pour chaque ordre impair $n \geq 3$, nous avons une structure générale qui nous permet de construire une infinité de carrés arithmétiques (voir le glossaire de la Partie 1) d'ordre $n = 2k + 1$. En suivant une toute petite règle, nous pouvons construire une infinité de carrés arithmétiques presque normaux dont au moins un qui sera normal. Pour construire tous ces carrés magiques d'ordre n, nous n'avons besoin que de trois variables a, r et t. Vous donnez à chacune de ces variables une valeur et il en résultera un carré magique arithmétique qui de plus, sera associatif (voir 12 du glossaire de la Partie 1). Mais à partir de cette structure générale, nous n'obtenons pas tous les carrés arithmétiques. D'en obtenir une infinité n'est déjà pas si mal!!!

Il en sera de même avec ALG-2 qui nous permet de construire des carrés magiques d'ordres pairs multiples de 4. Pour chaque ordre pair multiple de 4 à partir de $n = 4$, nous avons une structure générale qui nous permet de construire une infinité de carrés arithmétiques d'ordre $n = 4k$. En suivant la même petite règle, nous pouvons construire une infinité de carrés arithmétiques presque normaux dont au moins un qui est normal. De plus, ces carrés sont tous associatifs.

Enfin, ALG-3 nous permet de construire des carrés magiques d'ordres pairs non multiples de 4. Pour chaque ordre pair non multiple de 4 à partir de $n = 6$, nous avons une structure générale qui nous permet de construire une infinité de carrés arithmétiques d'ordre $n = 4k + 2$. En suivant la même petite règle, nous pouvons construire une infinité de carrés arithmétiques presque normaux dont au moins deux qui sont normaux. En général, ils ne sont pas associatifs.

La structure générale des carrés magiques d'ordre 3, par exemple, est un carré magique dans lequel nous trouvons des expressions algébriques dans chacune de ses neuf cases. Nous pourrions avoir dans une case l'expression a. Nous pouvons alors attribuer à a la valeur que nous voulons. Dans chacune des autres cases, nous devons attribuer la même valeur à a dans l'expression qui s'y trouve. Si nous avons posé a = 4, alors dans l'expression S – a – b , nous devons remplacer a par 4, b par sa valeur et S par la sienne. Voyons cette structure générale :

$$\begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix} \quad (*)$$

Ce carré d'ordre 3 est magique, car la somme obtenue dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est toujours la même soit S. Nous y voyons trois variables qui sont, a, b

et S. Une des cases renferme l'expression S – a – b, par exemple. Donnons aux trois variables les valeurs a = 4, b = 9 et S = 15. Nous obtenons alors le carré magique :

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

ou

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Le premier carré à gauche est sous forme matricielle tandis que celui de droite est sous forme standard. Dans l'ouvrage, nous utiliserons les deux formes. Ici, la somme magique est 15.

Le carré magique (*) est **la structure générale** des carrés magiques d'ordre 3. Cela signifie que (*) ne génère que des carrés magiques d'ordre 3 et les génère tous. Cette structure générale n'est cependant pas unique. Si nous avions une autre structure générale (**), alors celle-ci, semblable à (*), nous donnerait également tous les carrés magiques d'ordre 3. Nous dirions alors que les structures (*) et (**) sont équivalentes.

Donc quand nous disons « voici **la** structure générale des carrés magiques d'ordre 12 », cela ne doit pas laisser sous-entendre qu'elle est unique. Nous pourrions aussi dire « voici **une** structure générale…», ce qui laisse sous-entendre qu'il y en a d'autres. Mais les autres sont équivalentes!

Vous trouverez, sur le CD, les fichiers « Ordre 3 », « Ordre 4 » jusqu'à « Ordre 24 » dans MATHEMATICA, jusqu'à « Ordre 32 » dans EXCEL et au moins jusqu'à « Ordre 28 » dans MAPLE. Ces fichiers vous permettent de construire, pour tous ces ordres, un carré magique normal et une infinité de carrés magiques presque normaux. Tous les carrés magiques ainsi construits sont des carrés arithmétiques; de plus, ils sont associatifs pour les carrés d'ordres impairs et pour ceux d'ordres pairs multiples de 4. Pour construire un carré magique normal d'ordre n, il suffit d'attribuer aux variables a, r et t les valeurs suivantes : a = 1, r = 1 et t = n ou a = 1, r = n et t = 1. Pour avoir un presque normal, il suffit d'attribuer à a, une valeur entière > 0, une valeur entière > 0 à r et une valeur entière > 0 à t avec t > (n – 1) r. Par exemple, pour n = 8, nous pouvons prendre a = 5, r = 3 et t = 22 ou tout entier > 21. Nous voyons qu'alors, il existe une infinité de carrés arithmétiques presque normaux. Notons ici que l'ordre d'un carré magique nous indique sa taille. Le petit carré ci-haut est d'ordre 3. Nous disons aussi que c'est un 3×3.

Chaque triplet (*a* ; *r* ; *t*) détermine donc un carré magique. Et oui, trois nombres suffisent!!!

Dans chaque fichier, vous trouverez la structure générale qui vous permettra de construire une infinité de carrés magiques presque normaux et au moins un carré normal. Ceux-ci sont tous arithmétiques (voir chapitre 11). Cependant, cette structure ne vous donne pas tous les carrés arithmétiques. C'est le cas avec MATHEMATICA.

Avec EXCEL, vous trouverez les trois carrés de base avec lesquels nous obtenons la structure générale, illustrée dans MATHEMATICA mais non dans EXCEL. Vous pouvez voir aussi les trois carrés de base dans MATHEMATICA.

Avec MAPLE, nous avons un premier programme qui vous permet de construire des carrés arithmétiques pour tous les ordres impairs à partir de $n = 3$. Cependant, pour imprimer ces carrés, il ne faut pas que l'ordre soit trop grand. Pour les voir à l'écran, sans problème, nous allons jusqu'à $n = 53$. Nous pourrons choisir un plus grand n si nous avons un plus grand écran!!! Ce programme se nomme **CM-arith-2k + 1.**

Notre deuxième programme, **CM-arith-4k**, permet de construire des carrés arithmétiques pour tous les ordres pairs multiples de 4 à partir de $n = 4$. Notre écran nous permet d'aller jusqu'à l'ordre $n = 44$.

Notre troisième programme, **CM-arith-4k + 2**, permet de construire des carrés arithmétiques pour tous les ordres pairs non multiples de 4 à partir de $n = 6$. Notre écran nous permet d'aller jusqu'à l'ordre $n = 46$.

Dans chacun de ces trois programmes, il vous faut préciser la valeur de n, l'ordre du carré normal que vous voulez construire. Pour les presque normaux, il vous faudra préciser la valeur de n, a, r et t, tout en respectant $t > (n - 1)\, r$ ou $r > (n - 1)\, t$, condition suffisante pour avoir un presque normal sachant que déjà, a, r et t prennent des valeurs entières > 0.

Dans la mesure du possible, nous chercherons toujours le nombre de figures magiques que possède un carré magique c'est-à-dire sa fréquence que nous notons f(S) où S est sa somme magique.

Nous verrons que parmi les carrés magiques, certains sont remarquables :

Les ultra-magiques et les hyper-magiques.
Certains carrés d'ordre 4, les super-Dürer-alpha par exemple (il n'y a que 8 normaux).
Carrés magiques formés exclusivement de nombres premiers.
Carrés magiques formés exclusivement de nombres composés.
Carrés magiques formés exclusivement de fonctions.
Carrés k-multi-magiques.
Carrés doublement magiques.
Carré magique d'ordre 8 qui renferme un seul nombre premier, par exemple.
Et ainsi de suite…

Puis les carrés multiplicatifs dans lesquels la multiplication remplace l'addition. Nous savons qu'à chaque carré magique correspond un carré multiplicatif et qu'à chaque carré multiplicatif correspond un carré magique.

Nous verrons aussi quelques cubes magiques parfaits.

On nous demande souvent à quoi servent les carrés magiques.

1 Au plaisir qu'ils nous donnent. Ils sont des objets mathématiques extraordinaires d'une grande beauté!!! Il nous est facile d'admirer certains carrés magiques ou cubes magiques ou carrés multiplicatifs de la même façon que nous pouvons admirer « La Ronde de nuit » de Rembrandt ou les symphonies de Mahler!!!
2 Ils nous permettent de résoudre plus simplement certains problèmes de mathématique.
3 Ils servent dans l'industrie du tissage.
4 Certains magiciens les utilisent.
5 On les utilise en biologie.

Dans notre ouvrage, l'expression « carré magique » reviendra très souvent puisque c'est le sujet de l'ouvrage. Par contre, quand le contexte le permettra, nous pourrons simplement utiliser le mot « carré ».

Vous trouverez les notations et symboles à la fin du glossaire 2 de la Partie 2.

Dans la Partie 1 de l'ouvrage, vous trouverez un grand nombre de carrés magiques numérotés. Par exemple, nous ferons référence au carré 20, au carré 28, au carré 34…

Toujours dans la Partie 1, nous parlerons de sections au lieu de chapitres. Il y en a 13 en tout. Nous ferons aussi référence à certains problèmes. Par exemple, le problème 59 de 5.18. Vous le trouverez dans le chapitre 5, section 5.18 dans la Partie 2.

Vue d'ensemble de l'ouvrage

Partie 1 – Introduction aux carrés magiques

Section	Contenu de la section	Page
1.	Introduction : carré magique, ordre du carré, somme magique, figure et figure magique, carré magique normal et presque normal, carré premier et super-premier, fréquence d'un carré magique.	3
2.	Caractéristiques d'un carré magique, diagonales et fréquence. 2.1 Caractéristiques d'un carré magique d'ordre n. 2.2 Les diagonales grandes et brisées et carré magique pandiagonal. 2.3 Fréquence de la somme magique.	6
3.	Galerie de carrés magiques : carré ultra-magique, carré hypermagique, ultra-figure et super-figure.	10
4.	Construction des carrés magiques d'ordre 3.	27
5.	Construction de carrés magiques d'ordre 4 : les super-Dürer-alpha.	30
6.	Construction de carrés magiques d'ordres n > 2, nouveau procédé.	36
7.	Comment construire vos carrés magiques d'ordre 4?	49
8.	Problème du cavalier et carré magique.	52
9.	Magie avec Dürer.	54
10.	Glossaire 1.	58
11.	Problèmes.	66
12.	Remarque importante.	68

Partie 2 – Les carrés magiques et les carrés multiplicatifs

Note : chacun des chapitres 1 à 15 de la Partie 2 comporte sa propre pagination

1. Introduction 1
2. Opérations sur les carrés magiques, espaces vectoriels 2
3. Structures générales des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, formés de carrés magiques et dimensions 4

4. Les carrés magiques d'ordre 1, 2 et 3 13
   - 4.1 Les carrés magiques d'ordre 1 13
   - 4.2 Les carrés magiques d'ordre 2 14
   - 4.3 Les carrés magiques d'ordre 3, première structure générale 14
     - 4.3.1 Carrés magiques normaux et équivalents
     - 4.3.2 Seconde structure générale pour l'ordre 3
     - 4.3.3 Quelques propriétés
     - 4.3.4 Carrés magiques d'ordre 3 formés de neuf entiers différents donnés à l'avance
     - 4.3.5 Comment fabriquer des carrés magiques spéciaux?
     - 4.3.6 Carrés magiques formés de nombres premiers
     - 4.3.7 Les fréquences des sommes
     - 4.3.8 Problèmes

5. Les carrés magiques d'ordre 4. 1
   - 5.1 Introduction. 1
   - 5.2 Calcul du nombre de figures magiques avec MATHEMATICA. 3
   - 5.3 L'espace vectoriel E4 des carrés magiques d'ordre 4. 4
   - 5.4 Le sous-espace des Dürer. 7
   - 5.5 Le sous-espace des super-Dürer. 13
   - 5.6 Le sous-espace des super-Dürer-alpha. 17
   - 5.7 Le sous-espace des super-Dürer-bêta. 24
   - 5.8 Illustration des fréquences. 27
   - 5.9 Le sous-espace des A-Dürer. 28
   - 5.10 Le sous-espace des diaboliques. 33
   - 5.11 Le sous-espace des diaboliques-alpha. 42
   - 5.12 Relation entre les diaboliques et les diaboliques-alpha. 50
   - 5.13 Une observation importante. 53
   - 5.14 Répartition des entiers dans un carré magique normal d'ordre 4; nouvelle classification des 7040 normaux. 54
   - 5.15 Carrés magiques spéciaux d'ordre 4. 61
   - 5.16 Un problème. 69
   - 5.17 Résumé. 71

5.18 Problèmes. 71

6. Les carrés magiques d'ordre 5. 1
6.1 Introduction. 1
6.2 Les Ariane. 4
6.3 Les ultra-magiques d'ordre 5. 7
6.4 Les ultra-magiques-alpha. 14
6.5 Problèmes. 17

7. Carrés ultra-magiques et hyper-magiques. 1
7.1 Introduction. 1
7.2 Carrés hyper-magiques d'ordre 6. 10
7.3 Condition nécessaire pour avoir un pandiagonal d'ordre pair. 17
7.4 Problèmes. 22

8. Des carrés magiques spectaculaires. 1
8.1 Introduction. 1
8.2 Des carrés magiques d'ordre 8 très spéciaux : les Gauss. 3
8.3 Les hyper-magiques-alpha. 13
8.4 Les ultra-magiques-bêta. 18
8.5 Carrés magiques associatifs d'ordres pairs. 21
8.6 Problèmes. 25

9. Produit matriciel de carrés magiques. 1
9.1 Introduction. 1
9.2 Produit matriciel de carrés magiques. 1
9.3 Le procédé AB^2 et les puissances impaires d'un carré magique. 3
9.4 Autres produits. 9
9.5 L'inverse d'un carré magique. 10
9.6 Problèmes. 18

10. Carrés magiques premiers. 1
10.1 Introduction. 1
10.2 Carrés premiers ordinaires. 1
10.3 Carrés premiers parfaits. 3
10.4 Carrés hyper-premiers. 15
10.5 Carrés premiers d'ordre 3. 20
10.5.1 L'OCTUOR « 12 P ».
10.6 Problèmes. 26

11. Les carrés arithmétiques. 1
11.1 Introduction. 1

11.2 Carrés arithmétiques d'ordre n. 1
11.3 Théorème fondamental des carrés magiques; nouveau procédé de construction. 6
11.4 Problèmes. 29

12. Les carrés magiques fonctionnels. 1
12.1 Introduction. 1
12.2 Quelques exemples. 1
12.3 Un carré très spécial. 6
12.4 D'autres carrés fonctionnels. 10
12.5 Problèmes. 32

13. Les carrés magiques de Christian Boyer. 1
13.1 Introduction. 1
13.2 Les carrés k-multi-magiques. 2
13.3 Les carrés multiplicatifs. 8
13.4 Carrés magiques de puissances. 14
13.5 Le plus petit tri-magique, un petit penta-magique et deux bi-magiques. 17
13.6 Les cubes magiques parfaits. 19
13.7 Problèmes. 23

14. Varia
14.1 Les carrés magiques d'ordre 3 formés d'entiers carrés. 1
14.2 Indépendance, dépendance et degré de dépendance de deux carrés magiques. 6
14.3 Des diviseurs universels pour les carrés magiques d'ordre 3. 9
14.4 Comment perdre un cerf-volant. 14
14.5 Deux grandes curiosités. 18
14.6 Carrés magiques et entiers modulo (k). 21
14.7 Six décompositions d'un carré magique en une somme de carrés magiques. 24
14.8 Carré magique de fréquence k généré par une structure générale de fréquence k. 37
14.9 Un tour de magie. 41
14.10 Les carrés magiques associatifs. 45
14.11 Nouveau carré magique à l'aide de quatre permutations. 47
14.12 Carrés magiques composés. 49
14.13 Des carrés composés surprenants d'ordre 5 et quelques curiosités. 55
14.13.1 Des carrés verticaux-alpha, horizontaux-alpha et plus.
(Voir Partie 3, annexe 5).
14.14 Carrés magiques et permutations. 70
14.15 Carrés magiques et structures algébriques. 78

14.15.1 Introduction.
14.15.2 Structures de groupes, d'anneaux et de corps.
14.15.3 Inverse d'un carré magique.
14.16 Des triplets spéciaux de carrés magiques. 83
14.16.1 Introduction.
14.16.2 Solution de l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = zn$.
14.16.3 Construction des triplets.
14.16.4 Un triplet déterminé par M, un carré premier 2-multi-magique.
14.17 Carrés magiques de sommes consécutives. 90
14.17.1 Carrés doublement magiques.
14.17.2 Carrés magiques emboités.
14.18 Problèmes. 120

15. Les carrés multiplicatifs. 1
15.1 Introduction. 1
15.2 Les carrés multiplicatifs d'ordre 3. 4
15.3 Les carrés multiplicatifs d'ordre 4. 21
15.3.1 Les carrés m-Dürer.
15.3.2 Les carrés m-super-Dürer.
15.3.3 Le carré d'Edwards.
15.4 Les carrés multiplicatifs d'ordres ≥ 5 et des m-ultra-magiques d'ordre 5. 63
15.5 Les carrés m-hyper-magiques et des m-hyper-magiques d'ordre 6. 74
15.6 Relation entre les carrés magiques et les carrés multiplicatifs. 87
15.7 Problèmes. 98

16. Glossaire 2, notations et symboles.

Solutions des problèmes de la Partie 2

Partie 3 – Les annexes et les programmes

La Partie 3 de cet ouvrage propose 34 annexes qui sont des compléments d'informations. Par exemple, dans l'annexe 18, vous trouverez 10 carrés premiers parfaits d'ordre 3 (formés de 9 nombres premiers consécutifs) trouvés par Harry L. Nelson en 1988. Avant 1988, aucun carré premier parfait d'ordre 3 n'était connu.

Puis, vous trouverez des fichiers et programmes EXCEL (annexe 21), MATHEMATICA (annexe 22) et MAPLE (annexe 23). Ces annexes vous donnent le nom des fichiers et programmes ainsi qu'une brève description de chacun. Avant d'avoir accès à ceux-ci, nous vous suggérons fortement de consulter les annexes 21, 22 et 23.

Quant à l'annexe 23, vous y trouverez les programmes dans MAPLE construits par Claude St-Hilaire, lesquels ont apporté au texte un bon nombre de données nouvelles. Par exemple, nous savons qu'il existe 3456 Dürer parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Les deux programmes pour construire les m-ultra-magiques d'ordre 5 et les m-hyper-magiques d'ordre 6 méritent, comme aux échecs, un prix de beauté!!!

Annexe 1 : **Quelques structures générales**
Cette annexe présente les principales structures générales qui permettent la construction de nombreux carrés magiques et carrés multiplicatifs.

Annexe 2 : **Quelques conjectures et observations**
Les conjectures présentées ici peuvent être vues comme autant de projets de recherches.

Annexe 3 : **Carrés magiques emboités appelés r-tours**
Dans une r-tour, chaque carré magique M devient un autre carré magique si nous ajoutons une bordure autour de M. Vous verrez comment construire une r-tour. Par exemple, dans une 8-tour impaire, vous trouverez 8 carrés magiques d'ordres impairs.

Annexe 4 : **Réflexion sur les inverses**
L'inverse par rapport à quelle multiplication?

Annexe 5 : **Des carrés verticaux-alpha, horizontaux-alpha et plus**
Ce sont des carrés magiques exceptionnels. Dans chaque colonne (rangée), tous les entiers se terminent par le même chiffre, différent d'une colonne (rangée) à l'autre.

Annexe 6 : **Lemme sur les diagonales brisées**
Nous montre comment les diagonales, grandes et brisées, se rencontrent à l'intérieur et à l'extérieur du carré. Il sert à démontrer l'algorithme ALG-1.

Annexe 7 : **Excursion dans les nombres premiers**
Cette annexe explore les nombres premiers et les n-uplets de nombres premiers.

Annexe 8 : **Suite de 16 nombres premiers consécutifs**
Nous construisons des carrés premiers parfaits d'ordre 4.

Annexe 9 : **Carré à la fois magique et multiplicatif**
Nous connaissons des carrés presque normaux qui sont à la fois magiques et multiplicatifs; ils sont d'ordres 7, 8 et 9 (voir chapitre 13 de la Partie 2). La présente annexe montre qu'il n'existe pas de tels carrés pour les ordres 3 et 4.

Annexe 10 : **Diviseurs universels**
Carré semi-magique d'ordre *n* qui divise tous les carrés magiques et semi-magiques d'ordre *n*.

Annexe 11 : **Carrés magiques avec k nombres premiers**
Vous voulez construire un carré magique d'ordre 6 qui contient exactement 5 nombres premiers, c'est très simple!!!

Annexe 12 : **5040 permutations, 5040 carrés magiques d'ordre 5**
Nous permutons les chiffres de tous les entiers d'un carré magique pour obtenir un nouveau carré magique de même somme!!!

Annexe 13 : **Preuves des théorèmes 14.14 et 14.15**
Ces théorèmes montrent qu'il existe une infinité de carrés composés presque normaux et une infinité de carrés presque normaux qui renferment n^2 entiers consécutifs dont un seul est premier.

Annexe 14 : **Preuve du théorème 14.9**
On donne ici la dimension de l'espace vectoriel des carrés magiques de sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale.

Annexe 15 : **Polynômes rationnels à valeurs entières**
On indique ici quand un polynôme à coefficients rationnels prend des valeurs entières lorsque la variable est un entier.

Annexe 16 : **Structure générale des hyper-magiques d'ordre 10**
Cette annexe nous permet de construire des hyper-magiques d'ordre 10. L'annexe 16 en présente un presque normal.

Annexe 17 : **Réflexion sur les rotations d'un carré**
On propose ici une façon de noter ces rotations.

Annexe 18 : **Carrés magiques d'ordre 3 avec 9 nombres premiers consécutifs**
Nous donne les 27 carrés premiers parfaits connus d'ordre 3.

L'annexe 18.1, présente 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 trouvés à l'aide de 3 p-générateurs. Nous en avons maintenant 50 en date du 26 juillet 2020.

Annexe 19 : **Comment j'ai trouvé ALG-1**
Montre le cheminement qui conduit à l'algorithme ALG-1 lequel nous permet de construire des carrés arithmétiques associatifs d'ordres impairs.

Annexe 20 : **Applications de carrés magiques**
Cette annexe présente quelques applications des carrés magiques.

Annexe 21 : **Les fichiers EXCEL**
Le fichier proposé permet de construire une infinité de carrés magiques d'ordres 3 à 32.

Annexe 22 : **Les fichiers MATHEMATICA**
Ces fichiers (programmes) vous permettent de construire des carrés magiques d'ordres 3 à 24. D'autres vous donnent, pour un carré magique, le nombre de figures magiques, ses 8 équivalents, etc.

Pour utiliser ces programmes, vous devez disposer de l'application MATHEMATICA.

Annexe 23 : **Les programmes MAPLE**
Cette annexe vous présente un grand nombre de programmes dans MAPLE dont CM-arith-2k+1 qui vous permet de construire des carrés magiques (arithmétiques) d'ordres impairs. Un autre nous donne les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4 et les 880 primitifs, etc.

Pour utiliser ces programmes, vous devez d'abord disposer de l'application MAPLE. Téléchargez le dossier « Programme-MAPLE » comprenant les programmes et décompressez-le sur le bureau de votre ordinateur. Pour ouvrir un programme, chargez d'abord le programme Maple et allez choisir votre programme dans le dossier « Programmes-Maple » sur le bureau de l'ordinateur.
Note : ne pas essayer d'ouvrir un programme en double-cliquant dessus avant de charger le programme Maple.
Ouvrez ensuite l'application MAPLE, choisissez « Bureau » comme dossier des programmes à ouvrir, puis choisissez le programme à utiliser.

Annexe 24 : **Le procédé ± r ± t et ± t ± r pour construire les équivalents**
Une autre approche pour construire les équivalents d'un carré magique.

Annexe 25 : **Suites arithmétiques dans un carré magique**
On montre comment construire un carré magique dont les n^2 nombres forment une suite arithmétique.

Annexe 26 : **L'espace vectoriel des m-Dürer (MD*)**
On montre que nous sommes bien en présence d'un espace vectoriel sur R. Aussi, nous montre comment nous trouvons la structure générale des m-Dürer à partir de la structure générale des Dürer.

Annexe 27 : **Carrés magiques vers carrés multiplicatifs**
On y verra comment construire une structure générale de carrés multiplicatifs à partir d'une structure générale de carrés magiques.

Annexe 28 : **Une autre structure générale pour les Dürer**
Celle-ci est plus simple que la première!!!

Annexe 29 : **Problèmes supplémentaires**
Vous pouvez proposer un nouveau problème (avec solution) sur les carrés magiques ou multiplicatifs que nous ajouterons à l'annexe 29 en indiquant l'auteur de chaque problème.
L'annexe 29.1 présente des solutions aux problèmes de l'annexe 29.

Annexe 30 : **Les carrés géométriques**
Semblables aux carrés arithmétiques (chapitre 11), les carrés géométriques sont des carrés multiplicatifs tels que les nombres de ceux-ci forment un tableau géométrique (voir page 2 de l'annexe 30).

Annexe 31 : **Carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 avec les centres de 1 à 49**
Il est faux de croire que ces carrés ont toujours S/n comme centre. À la fin, vous trouverez le bel-intrus-9587. La case centrale renferme le seul nombre premier du carré soit 9587.

Annexe 32 : **Carrés m-ultra-magiques presque normaux**
On montre quelques propriétés des m-ultra-magiques et comment en construire un d'ordre 5.

Annexe 33 : **24 permutations d'où 24 carrés d'ordre 10**
On observera ici un groupe de 24 carrés magiques d'ordre 10 avec des propriétés remarquables.

Annexe 34 : **Projets de recherches; divers**
On propose quelques projets de recherches ainsi que deux carrés magiques avec date de naissance.

Partie 1

Introduction aux carrés magiques

Table des matières

Contenu de la section

Section		Page
1.	Introduction : carré magique, ordre du carré, somme magique, figure et figure magique, carré magique normal et presque normal, carré premier et super-premier, fréquence d'un carré magique.	3
2.	Caractéristiques d'un carré magique, diagonales et fréquence. 2.1 Caractéristiques d'un carré magique d'ordre n. 2.2 Les diagonales grandes et brisées et carré magique pandiagonal. 2.3 Fréquence de la somme magique.	6
3.	Galerie de carrés magiques : carré ultra-magique, carré hyper-magique, ultra-figure et super-figure.	10
4.	Construction des carrés magiques d'ordre 3.	27
5.	Construction de carrés magiques d'ordre 4 : les super-Dürer-alpha.	30
6.	Construction de carrés magiques d'ordres n > 2, nouveau procédé.	36
7.	Comment construire vos carrés magiques d'ordre 4?	49
8.	Problème du cavalier et carré magique.	52
9.	Magie avec Dürer.	54
10.	Glossaire 1.	58
11.	Problèmes.	66
12.	Remarque importante.	68

1. Introduction

Les carrés magiques sont des objets mathématiques remarquables. Ils sont connus depuis plusieurs siècles avant J.-C. et ont fasciné presque tous les mathématiciens ainsi que tous ceux qui aiment les jeux d'esprit.

Considérons le carré suivant, formé de seize cases dans lesquelles se trouve un nombre par case :

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

Carré 1

Si vous additionnez tous les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque grande diagonale, vous trouvez toujours la même somme soit 34. Pour cette raison, nous dirons que notre carré est **magique.** Le carré ci-haut est un **carré magique** de **somme magique** 34. C'est aussi un carré **d'ordre 4** ou encore un 4x4. Cela signifie que nous y trouvons 16 cases carrées de même taille disposées en 4 rangées et 4 colonnes formant ainsi le grand carré.

Nous trouvons dans la littérature sur les carrés magiques de nombreux procédés de construction. Ceux-ci nous permettent de construire des carrés magiques de tous les ordres. Nous pouvons construire des carrés magiques d'ordre 3, 4, 5, 6, …, n où n est un entier quelconque plus grand que zéro. Ces différents procédés nous permettent, en général, de construire un seul carré magique formé des entiers de 1 à n^2 . Par exemple, de 1 à 25 si le carré est d'ordre 5 et de 1 à 144 si le carré est d'ordre 12. De plus, ces procédés sont très différents selon que l'ordre est un entier impair ou pair et les procédés lorsque l'ordre est impair sont plus simples que lorsque celui-ci est pair.

Nous n'allons pas présenter ici ces procédés que vous pouvez trouver dans de nombreux ouvrages sur les carrés magiques et sur Internet. Cependant, nous présenterons une toute nouvelle méthode qui vous permettra de construire autant de carrés magiques que vous le désirez, pour un ordre donné.

Revenons au carré magique ci-haut. Cet objet est extraordinaire car il est formé de 16 entiers différents et non seulement toutes les rangées, colonnes et grandes diagonales ont pour somme 34, mais aussi la somme des 4 coins (4 + 1 + 13 + 16 = 34) et la somme des 4 cases centrales donne également 34 (10 + 11 + 7 + 6 = 34). Nous verrons plus loin que dans ce carré magique,

nous pouvons obtenir la somme 34 de 86 façons différentes en faisant la somme des entiers situés dans 4 cases différentes. En voici quelques exemples : 9 + 10 + 14 + 1 = 5 + 15 + 11 + 3 = 3 + 9 + 10 + 12 = 10 + 6 + 16 + 2 = 34. Cela est tout à fait extraordinaire!!!

Soit maintenant un carré magique d'ordre n dont la somme magique est S. Un groupe de n cases distinctes est appelé **figure**. Si la somme des nombres situés dans une figure est égale à S, alors nous dirons que cette figure est une **figure magique.** Enfin, si notre carré magique ne renferme que des entiers strictement positifs (>0) et tous différents deux à deux, alors celui-ci sera dit **presque normal** et si tous les entiers sont consécutifs, le plus petit étant 1, alors notre carré sera dit **normal**.

Le carré 1 est un carré normal puisqu'il renferme les entiers consécutifs de 1 à 16. Notons qu'un carré normal est aussi presque normal. Voyons quelques carrés magiques d'ordre 3, 4 et 5 :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Carré 2

71	79	83	103
97	107	109	23
157	113	7	59
11	37	137	151

Carré 3

Le carré 2 est un carré magique d'ordre 3 et de somme magique S = 15. De plus, il est normal puisqu'il renferme tous les entiers consécutifs de 1 à 9 et il possède 8 figures magiques soient les 3 rangées, les 3 colonnes et les 2 grandes diagonales.

Le carré 3 est un carré magique d'ordre 4 et de somme magique S = 336. Ce carré est presque normal puisque les 16 nombres sont des entiers strictement positifs et tous différents. Il possède 25 figures magiques. De plus, ce carré magique est **premier** car les 16 entiers qu'il contient sont tous des nombres premiers; nous dirons simplement que c'est un **carré premier**. Il peut même arriver que la somme magique d'un carré premier soit aussi un nombre premier; nous dirons alors que c'est un **carré super-premier**.

Quant aux figures magiques, nous pouvons les trouver lorsque l'ordre du carré n'est pas trop grand mais déjà avec n = 5, si le carré est normal, nous avons 1394 figures magiques. Le carré normal d'ordre 8 renferme 35 154 340 figures magiques! Le carré normal d'ordre 10 renferme, quant à lui, 78 132 541 528 figures magiques!!! Absolument incroyable!!!

Voilà pourquoi nous pouvons trouver plus facilement les figures magiques d'un carré d'ordre 4 et de certains carrés d'ordre 5. Par exemple, nous connaissons les 52 figures magiques que possèdent tous les carrés magiques qui appartiennent à la « classe » des super-Dürer laquelle sera présentée dans la Partie 2 de l'ouvrage, au chapitre 5, section 5.5, pages 13 à 17.

Terminons en disant **qu'aujourd'hui**, trouver le nombre de figures magiques d'un carré normal d'ordre 50 000, est tout à fait impossible!! Quant à demain, qui sait?

18	31	13	12	34
17	39	21	4	27
19	24	8	15	42
1	9	56	40	2
53	5	10	37	3

Carré 4

1	8	15	19	22
14	17	21	3	10
23	5	9	12	16
7	11	18	25	4
20	24	2	6	13

Carré 5

Le carré 4 est un carré magique d'ordre 5 et de somme magique S = 108. C'est un carré magique presque normal et il possède 626 figures magiques. Les 4 coins ne forment pas une figure; cependant la somme est 108.

Le carré 5 est un carré magique d'ordre 5 et de somme magique S = 65. C'est un carré magique normal et il possède 1394 figures magiques.

Une question importante ici : comment faisons-nous pour trouver le nombre de figures magiques dans un carré magique? Nous avons construit, dans MATHEMATICA, un petit programme (voir 5.2 dans la partie 2 et le fichier « Le compte » dans la Partie 3, annexe 22) qui vous permet de trouver le nombre de figures magiques d'un carré magique dont l'ordre n varie de 3 à 7 (dans la mesure où la mémoire de votre ordinateur est suffisante). Dans MAPLE, le programme nous permet de trouver le nombre de figures magiques et de les illustrer pour les cas n = 3, 4 et 5 (voir Illustration-figures dans la Partie 3, annexe 23). Mentionnons ici que MATHEMATICA et MAPLE sont des logiciels de mathématiques très puissants!!!

Le nombre de figures magiques que possède un carré magique est appelé la **fréquence** du carré et nous la notons **f(S**). Ainsi pour le carré 4, f(108) = 626 et f(65) = 1394 pour le carré 5.

Déterminer le nombre de figures magiques dans un carré magique n'est jamais facile sauf lorsque l'ordre du carré est petit : n < 11. Déjà, le nombre de figures magiques dans un carré magique normal d'ordre 10 est 78 132 541 528. Dans un carré normal d'ordre 12, nous n'avons pas calculé le nombre de figures magiques mais nous savons que ce nombre est énormément supérieur à 138 519 474 164 632.

Une autre difficulté est de savoir combien il existe de carrés magiques normaux d'ordre n. Pour n = 3, il en existe 8 mais pour n = 4, nous en sommes à 7040. Pour n = 5, il existe un nombre impressionnant de carrés magiques normaux soit 2 202 441 792. Pour n > 5, on ne connaît qu'une approximation du nombre de carrés magiques normaux.

Nous pouvons trouver une infinité de carrés magiques presque normaux pour tous les ordres supérieurs à 2; cependant, le nombre de carrés magiques normaux sera toujours un nombre fini.

2. Caractéristiques d'un carré magique, diagonales et fréquence

2.1 Caractéristiques d'un carré magique d'ordre n :

D'abord, nous devons nous assurer que le carré est bien magique en trouvant la somme des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale ce qui nous fait $2n+2$ sommes à trouver. Si ces $2n+2$ sommes sont égales au même nombre S, alors le carré est magique de somme magique S.

Ici, n représente la taille du carré, ce qui signifie que notre carré est formé de n rangées de n cases et de n colonnes de n cases donc qu'il renferme $n \times n = n^2$ nombres.

Quand le carré est magique, la somme S de la première rangée est la somme magique du carré.

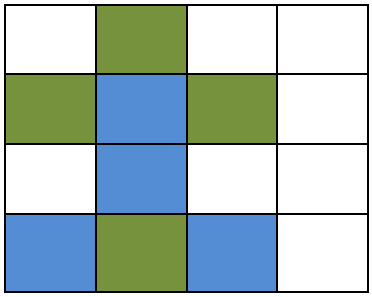
Le carré est **presque normal** s'il renferme que des entiers strictement positifs et différents 2 à 2.

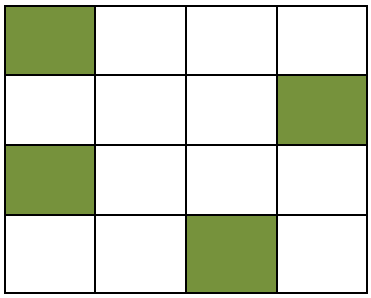
Le carré est **normal** s'il renferme tous les entiers de 1 à n^2 .

Une figure magique dans un carré magique d'ordre n est un groupe de n cases distinctes dont la somme est la somme magique. Notez que deux cases distinctes peuvent contenir le même nombre. Une case se distingue d'une autre case si elle n'occupe pas la même position dans le carré. La première case située à gauche dans la première rangée en haut est la même que la première case en haut située dans la première colonne à gauche. Cette case est différente de la première case située à droite dans la première rangée du haut. En résumé, un carré magique est formé de n^2 cases distinctes.

La fréquence d'un carré magique de somme magique S est le nombre de figures magiques que possède ce carré et se note f(S). Nous dirons aussi que c'est la fréquence de la somme S.

Dans la mesure du possible, nous essayerons de trouver toutes les figures magiques d'un carré magique. Certaines figures magiques sont plus intéressantes que d'autres :



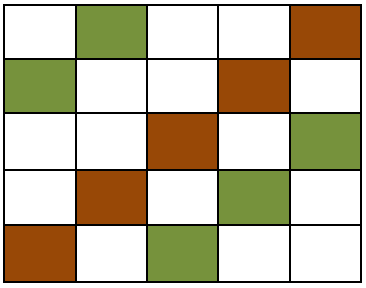


Dans le carré de gauche, la figure en vert ressemble à un cerf-volant tandis que la figure en bleu ressemble à une fusée; dans le carré de droite, la figure est plutôt quelconque.

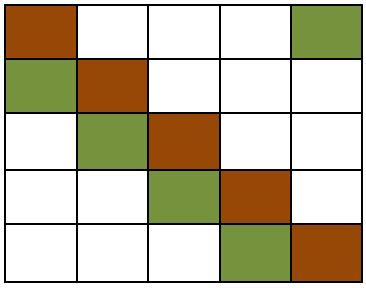
2.2 **Les diagonales grandes et brisées et carré magique pandiagonal**

Il n'existe que deux grandes diagonales, la secondaire (en brun dans le carré de gauche) et la principale (en brun dans le carré de droite). Puis il y a les diagonales brisées (en vert dans chaque carré). Nous parlerons de diagonales brisées secondaires et de diagonales brisées principales. Une diagonale brisée secondaire (carré de gauche) est formée de deux branches (petites diagonales) parallèles à la grande diagonale secondaire, l'une d'un côté et l'autre, de l'autre côté de la grande diagonale secondaire. L'une des branches contient k cases et l'autre branche, n – k cases. Le total des cases dans une diagonale, grande ou brisée, est toujours n.

De même pour les diagonales brisées principales.



Grande diagonale secondaire



Grande diagonale principale

Dans le carré de gauche, on voit, en brun, la grande diagonale secondaire et en vert, une diagonale brisée (première branche : 2 cases, deuxième branche : 3 cases; n = 5, k = 2, n – k = 3.

Dans le carré de droite, on voit, en brun, la grande diagonale principale et en vert, une diagonale brisée (première branche : 1 case, deuxième branche : 4 cases; $n=5$, $k=1$, $n-k=4$).

Dans tout carré d'ordre $n \geq 3$, nous avons 2 grandes diagonales, $2n-2$ diagonales brisées donc en tout, $2n$ diagonales.

Nous dirons diagonale au lieu de grande diagonale et diagonale brisée quand ce sera le cas.

Les diagonales principales sont : la grande diagonale principale et les diagonales brisées parallèles à la grande diagonale principale; les diagonales secondaires sont : la grande diagonale secondaire et les diagonales brisées parallèles à la grande diagonale secondaire.

Dans un carré magique, si toutes les diagonales brisées sont des figures magiques, alors nous dirons que notre carré est **pandiagonal.**

2.3 Fréquence de la somme magique

Considérons les carrés magiques normaux d'ordre n .

Le tableau suivant indique le nombre de figures ainsi que le nombre de figures magiques (fréquence du carré) pour les carrés magiques normaux d'ordre 3 à 10 :

n	Somme magique	Nombre de figures	Nombre de figures magiques
3	15	84	8
4	34	1820	86
5	65	53130	1394
6	111	1 947 792	32 134
7	175	85 900 584	957 332
8	260	4 426 165 368	35 154 340
9	369	260 887 834 350	1 537 408 202
10	505	17 310 309 456 440	78 132 541 528

Pour n = 3 jusqu'à n = 7, nous avons utilisé une seule fois le fichier « Le compte » de MATHEMATICA que vous trouverez dans la Partie 3, annexe 22, et nous avons obtenu directement le résultat . Le travail a donc été fait en une seule étape . Pour n = 8, 9 et 10, nous avons toujours utilisé le même programme mais à plusieurs reprises comme suit :

Pour n = 8, nous avons fait deux groupes de 32 entiers et avons fait le travail en neuf étapes.

Pour n = 9, nous avons fait deux groupes (41 et 40 entiers) et fait le travail en dix étapes.

Pour n = 10, nous avons fait aussi deux groupes de 50 entiers et fait le travail en onze étapes.

Dans un carré magique normal d'ordre 11, le nombre de figures magiques serait calculé en douze étapes. Nous avons trouvé, avec seulement deux étapes, le nombre suivant :

3 690 757 207 013

Le nombre exact de figures magiques sera très supérieur!!!

Dans le un carré magique normal d'ordre 12, le nombre de figures magiques serait calculé en treize étapes. Nous avons trouvé, avec une seule étape, le nombre incroyable suivant :

138 519 474 164 632

Le nombre exact de figures magiques sera énormément supérieur!!!

Nombre de figures = $\dfrac{(n^2)!}{n!\,(n^2-n)!}$ Somme magique = $\dfrac{n^3+n}{2}$

$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n$: par exemple : $6! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720.$

La somme magique d'un carré magique normal est donné par :

$$S = \frac{1+2+3+\ldots+(n^2-1)+n^2}{n} = \frac{n^2\,(n^2+1)}{2n} = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n^3+n}{2}$$

Pour tout entier $n \geq 3$, il existe au moins un carré magique normal et sa somme magique est donnée par $S = \dfrac{n^3+n}{2}$. Évidemment, deux carrés magiques normaux d'ordre n ont la même somme magique.

Pour simplifier, nous dirons qu'un carré magique est de somme S au lieu de dire qu'il est de somme magique S.

La fréquence $f(S)$ de la somme magique S s'appelle aussi la fréquence du carré magique et représente le nombre de figures magiques que possède ce carré.

Les fréquences (nombre de figures magiques) du tableau ci-haut ont été calculées également avec MAPLE à l'aide d'un programme plus rapide que « Le compte ». Vous le trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programmes 03 et 27.

Nous allons maintenant passer à la galerie de carrés magiques. Vous y verrez un grand nombre de carrés magiques dont certains sont remarquables. Chaque carré sera numéroté afin que nous puissions nous y référer tout au long de cet ouvrage. Chacun sera accompagné de ses principales caractéristiques.

Ensuite, nous verrons comment construire des carrés magiques.

3. Galerie de carrés magiques

Tous les carrés qui suivent sont magiques. Nous allons donner, pour chacun, ses principales caractéristiques.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Carré 6

Le carré 6 est normal d'ordre 3. S = 15 et f(15) = 8. Ce carré est l'un des huit carrés magiques normaux d'ordre3. Les sept autres sont obtenus par rotations planaire ou spatiale. En voici deux :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Carré 7

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Carré 8

Le carré 7 est obtenu du carré 6 par une rotation planaire de -90°, soit dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le carré 8 est obtenu du carré 6 par une rotation planaire de -90° suivie d'une rotation spatiale de 180° est-ouest (voir glossaire 1).

Aux rotations près, nous considérons avoir un seul carré magique normal d'ordre 3, le carré 6, par exemple. Nous dirons alors du carré 6 qu'il est **primitif**. Les sept autres sont ses **équivalents**.

3/2	2/7	31/14
43/21	4/3	13/21
19/42	50/21	7/6

Carré 9

43	67	109
139	73	7
37	79	103

Carré 10

Le carré 9 est un carré magique d'ordre 3; S = 4 et f(4) = 8. Ce carré magique est formé de nombres rationnels non entiers.

Le carré 10 est un carré magique d'ordre 3 presque normal; S = 219 et f(219) = 8. Ce carré magique est premier puisqu'il renferme neuf nombres premiers. Sa somme, 219, n'est pas un nombre premier.

12	12	12
12	12	12
12	12	12

Carré 11

9	19	5
7	11	15
17	3	13

Carré 12

Le carré 11 est un carré magique d'ordre 3 avec S = 36. Il n'est pas presque normal. Ce carré magique est dit **trivial** car nous trouvons le même nombre dans chaque case. Le nombre de façons de choisir trois cases distinctes parmi les neuf du carré est 84 d'où f(36) = 84.

Le carré trivial formé du nombre 1 nous sera très utile dans la construction de carrés magiques.

Le carré 12 est magique d'ordre 3 avec S = 33 et f(33) = 8. Il est formé de 9 entiers qui forment une suite arithmétique de raison 2 : 3 5 7 9 11 13 15 17 19. Ce carré est presque normal.

Dans tous les carrés magiques d'ordre 3 présentés jusqu'à maintenant, vous pouvez observer que la somme magique est égale à 3 fois le nombre de la case centrale. En est-il toujours ainsi?

La réponse est oui et la démonstration sera demandée en exercice (section 11, problème 4). Cette propriété est particulière aux carrés d'ordre 3. Cependant, si n est un entier impair supérieur à 3, alors nous pouvons toujours trouver un carré magique d'ordre n tel que sa somme magique soit égale à n fois le nombre de la case centrale. D'un autre côté, nous connaissons 25 carrés magiques d'ordre 5, de somme magique S = 65 dont les nombres centraux varient de 1 à 25. Donc, la somme magique n'est pas toujours égale à n fois le nombre central.

9	12	12	21
17	13	13	11
22	14	14	4
6	15	15	18

Carré 13

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

Carré 14

Le carré 13 est magique d'ordre 4. S = 54 et f(54) = 86. Il n'est pas presque normal. Remarquez que les deux colonnes centrales sont identiques et formées de quatre entiers consécutifs.

Le carré 14 est un carré magique d'ordre 4. S=34 et f(34) = 86. Il est normal. Nous verrons dans la partie 2 de cet ouvrage que le carré 14 est un **diabolique**, à cause de ses 86 figures magiques spéciales et que tous les diaboliques non triviaux ont les mêmes 86 figures magiques. De plus, nous verrons que les seize nombres dans tous les diaboliques forment une suite arithmétique. Le procédé de construction d'un diabolique est indiqué dans le carré 14 grâce aux quatre couleurs. Enfin, si un diabolique non trivial a pour somme magique S, alors f(S) = 86 et Il n'existe que deux diaboliques normaux dont l'un est obtenu de l'autre par une rotation planaire de 180°.

314	159	265	358
317	306	200	273
275	348	242	231
190	283	389	234

Carré 15

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Carré 16

Le carré 15 est magique d'ordre 4 avec S = 1096 et f(1096) = 52. C'est un carré presque normal. Vous pouvez observer que la première rangée du haut renferme les douze premiers chiffres du nombre π. En effet, $\pi = 3{,}14159\,26535897....$ Ce carré est un A-Dürer car il possède toutes les figures magiques caractéristiques de tous les A-Dürer (voir 5.9 dans la partie 2). Par exemple, chaque carré d'ordre 2 situé dans chaque coin est une figure magique (314 + 159 + 317 + 306 = 1096; 242 + 231 + 389 + 234 = 1096 …). De plus, si vous additionnez les nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré, vous trouverez toujours 548 soit la moitié de la somme magique (314 + 234 = 200 + 348 = 273 + 275 = 265 + 283 = 548 = …).

Le carré 16 est magique d'ordre 4 avec S = 34 et f(34) = 86. C'est un carré normal. C'est aussi un super-Dürer-alpha (voir 5.6 de la partie 2). Tous les super-Dürer-alpha sont pandiagonaux; vous pouvez vérifier que toutes les diagonales brisées sont des figures magiques (8 + 2 + 9 + 15 = 4 + 11 + 13 + 6 = 34 = …). Une autre propriété magnifique : tout carré d'ordre deux situé dans le carré 16 est une figure magique (1 + 8 + 14 + 11 = 14 + 11 + 4 + 5 = 11 + 2 + 5 + 16 = 34 = …). Il y a un cerf-volant (14 + 8 + 2 + 10), une fusée (2 + 16 + 10 + 6), … . Nous verrons, également dans la partie 2, une propriété remarquable que possèdent tous les super-Dürer-alpha, laquelle propriété nous a conduit au nouveau procédé de construction de carrés magiques qui vous sera présenté sous peu. Un carré magique qui aura cette propriété sera appelé **carré arithmétique**.

Nous allons voir maintenant deux carrés magiques plutôt exceptionnels. Ils seront tous les deux formés de seize entiers de quatre chiffres et ces seize entiers seront tous différents.

Le carré 17 est magique d'ordre 4 et de somme magique S = 17 776. Il est presque normal. À partir du carré magique 17, nous pouvons construire 23 nouveaux carrés de la façon suivante : nous allons prendre chaque entier du carré 17 et lui appliquer une permutation de ses chiffres. Nous allons utiliser la même permutation pour chaque entier. Par exemple, la permutation :

$$abcd \rightarrow bdac$$

laquelle appliquée à 5641 donnera 6154 et appliquée à 3247 donnera 2734. Nous placerons 6154 dans le carré 18, dans la case correspondante à la case qui contenait 5641 dans le carré 17. Nous ferons de même avec 2734 et tous les autres. Voilà le carré 18.

5641	2325	3553	6257
2437	7373	4525	3441
5335	2631	3247	6563
4363	5447	6451	1515

Carré 17

6154	3522	5335	2765
4723	3377	5542	4134
3553	6123	2734	5366
3346	4754	4165	5511

Carré 18

Nous pouvons construire ainsi vingt deux autres carrés comme le 18 puisque le nombre de permutations possibles de quatre chiffres différents est de 24. Maintenant arrivent deux questions : le carré 18 est-il magique et si c'est le cas, quelle est sa somme magique?

La réponse est oui. Le carré 18 est magique et sa somme magique est aussi 17 776. Il en sera de même pour les vingt deux autres carrés. **Extraordinaire !!!** Nous avons donc ici vingt quatre carrés magiques de même somme magique et chacun est obtenu d'un autre par une même permutation appliquée à tous ses entiers. Vous trouverez l'explication du oui dans la section 14.14 du chapitre 14, «carrés magiques et permutations»; vous verrez aussi comment construire ces vingt quatre carrés magiques. Ajoutons que pour les carrés 17 et 18, f (17 776) = 52.

16	9	23	12	5
22	15	1	19	8
4	18	7	25	11
10	21	14	3	17
13	2	20	6	24

Carré 19

59	56	63	102	77
1	90	79	58	129
113	39	67	85	53
97	68	75	80	37
87	104	73	32	61

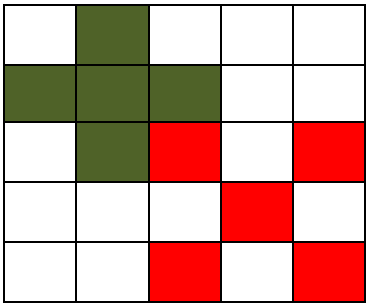
Carré 20

Le carré 19 est un carré magique normal d'ordre 5. Sa somme magique est S = 65. Ce carré renferme 1394 figures magiques d'où f(65) = 1394. Son centre est 7 donc, la somme magique 65 n'est pas toujours égale à 5 fois le nombre central. Enfin, ce carré magique est **pandiagonal** puisque toutes ses diagonales brisées sont des figures magiques.

Le carré 20, appelé **Ariane**, est un carré magique d'ordre 5 presque normal. Sa somme magique est S = 357 et f(357) = 380. Nous trouvons dans tous les Ariane six fusées verticales et cinq fusées horizontales qui sont des figures magiques. Nous avons illustré dans le carré 20, trois fusées verticales : 56 + 90 + 39 + 97 + 75 = 357 = 63 + 79 + 67 + 80 + 68 = 102 + 58 + 85 + 37 + 75. À vous de trouver les huit autres. Il existe une infinité d'Ariane et tous ont en commun 109 figures magiques (voir 6.2, partie 2) dont les onze fusées.

1	15	22	8	19
23	9	16	5	12
20	2	13	24	6
14	21	10	17	3
7	18	4	11	25

Carré 21



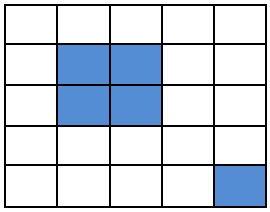
Carré 21 a

Le carré 21 est un carré magique normal d'ordre 5, de somme S = 65 avec f(65) = 1394. Il est pandiagonal. De plus, chaque fois que nous prenons deux entiers en positions symétriques par rapport au centre du carré, nous obtenons 26 soit 2S/5. Nous avons illustré quelques exemples : 15 + 11 = 26 (en rouge); 8 + 18 = 26 (en vert); 23 + 3 = 26 (en bleu); 2 + 24 = 26 (en brun). Un tel carré magique est appelé **ultra-magique.** Nous verrons, dans la partie 2, que tous les ultra-magiques d'ordre 5 ont en commun 362 figures magiques ; celles-ci seront présentées dans la Partie 3, annexe 23, programme 08.

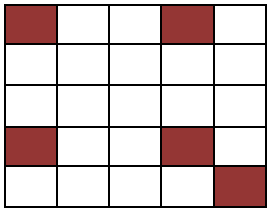
Il existe 128 carrés magiques normaux comme le carré 21. Ils ont tous 13 dans la case centrale. Vous pourrez trouver les 128 dans la Partie 3, annexe 23, programme 08.

Le carré 21a illustre deux figures magiques du carré 21. La première, en rouge, est une figure magique, quelle que soit sa position dans le carré 21; nous la retrouvons donc neuf fois et nous dirons que cette figure est une **super-figure**. La deuxième, en vert, est une autre figure magique, quelle que soit sa position dans le carré 21 et nous la retrouvons, elle aussi, neuf fois. C'est également une super-figure.

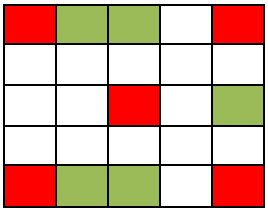
Les carrés 21b, 21c et 21d illustrent d'autres figures magiques du carré 21.



21 b

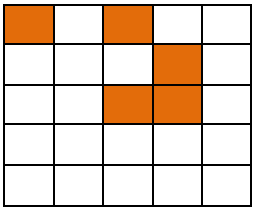


21 c

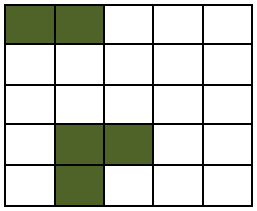


21 d

Nous retrouvons, dans le carré 21, 16 fois la figure de 21b, 4 fois la figure de 21c, 8 fois la figure en vert de 21d et 1 fois la figure en rouge de 21d. Ce sont aussi des super-figures. Voyons deux autres figures magiques spéciales :

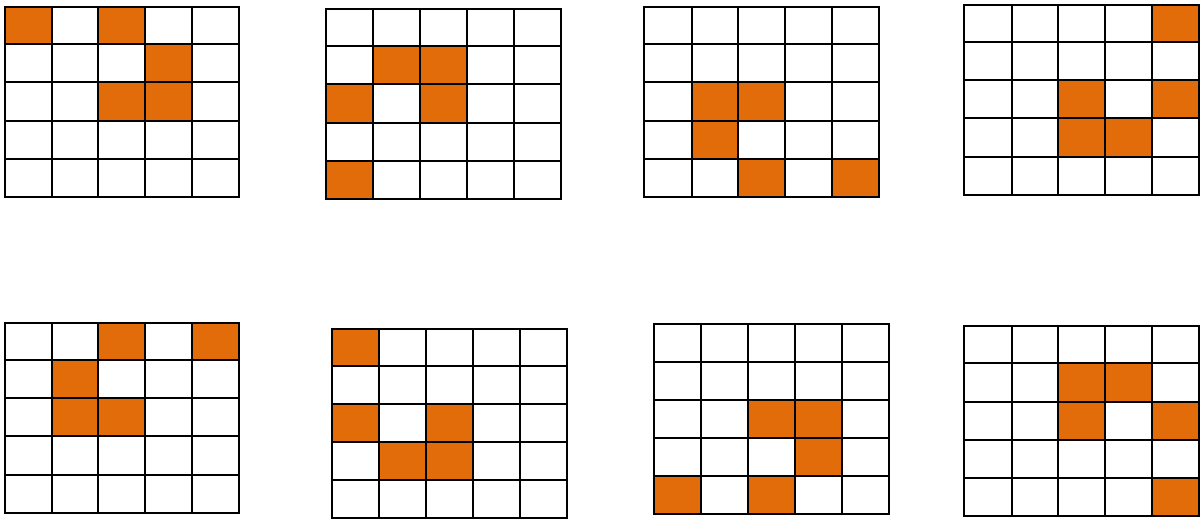


Carré 21 e



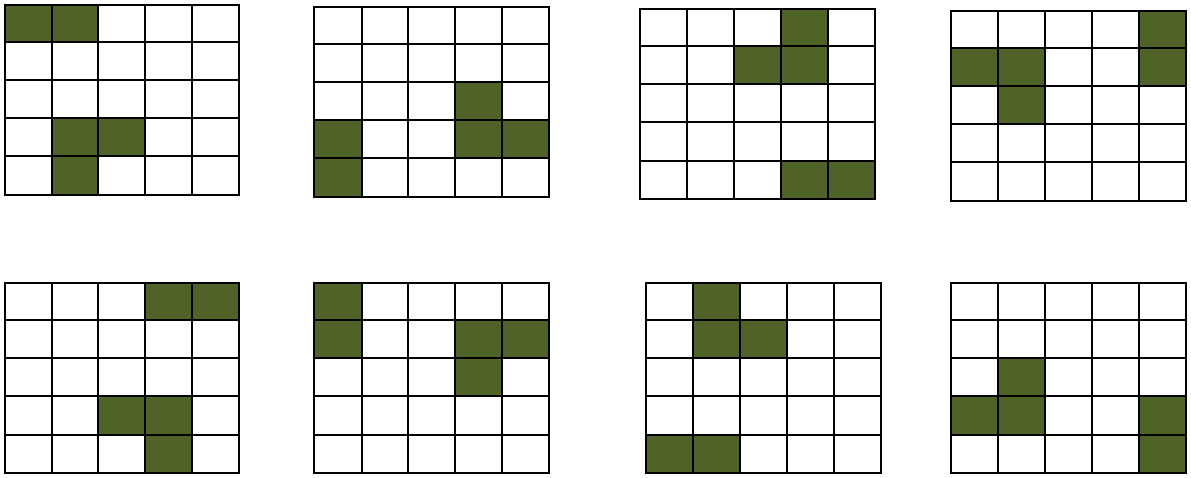
Carré 21 f

À partir de la figure du carré 21e, nous pouvons en construire sept autres en la tournant de 90°, 180° et 270°, puis en la regardant par derrière, nous en aurons une autre que nous allons aussi tourner de 90°, 180° et 270°. Ces huit figures, issues de la figure 21e, sont appelées les figures équivalentes de la figure 21e. Maintenant, si ces huit figures sont des figures magiques dans le carré 21, alors nous dirons que la figure 21e est une **ultra-figure**. Effectivement, la figure 21e est une ultra-figure pour le carré21; il en est de même de la figure 21f. Voyons pourquoi :



Ces huit figures équivalentes, dans la position indiquée dans les huit carrés ci-haut, sont des figures magiques dans le carré21. C'est pour cela que la figure 21e est une ultra-figure.

Les huit figures équivalentes suivantes, dans la position indiquée dans les huit carrés ci-dessous, sont des figures magiques dans le carré21. C'est pourquoi la figure 21f est une ultra-figure.



Terminons en disant que les figures que nous venons de voir font partie des 362 figures magiques que tous les ultra-magiques d'ordre 5 ont en commun. Un carré ultra-magique normal d'ordre 5 possède, en plus des 362 figures magiques communes à tous les ultra-magiques d'ordre 5, 1032 figures magiques de plus, lesquelles ne sont pas nécessairement communes à tous les ultra-magiques.

Les ultra-magiques : des carrés fantastiques!!! Voyons maintenant un carré d'ordre 6 :

37	70	16	43	64	22
31	30	52	57	4	78
56	51	35	24	83	3
41	20	62	47	14	68
27	80	6	53	54	32
60	1	81	28	33	49

Carré 22

Le carré 22 est un carré magique d'ordre 6 de somme magique S = 252 avec f(252) = 15 058. Qui oserait penser que ce carré magique renferme 15 058 figures magiques!!!

Il est presque normal et pandiagonal. Mais il y a encore plus!! Chaque fois que nous prenons un petit carré d'ordre 2, et il y en a 25, la somme des quatre cases donne toujours 168 soit :

$$\frac{4S}{n} = \frac{4 \times 252}{6} = 168$$

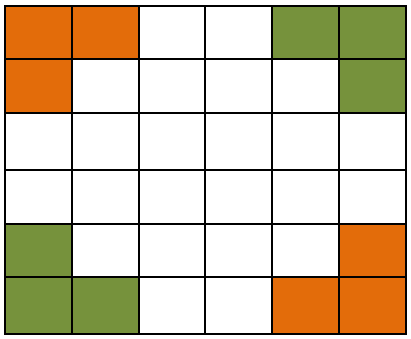
De plus, sur toute diagonale, grande ou brisée, la somme de deux nombres séparés de deux autres nombres, donne toujours 84 soit :

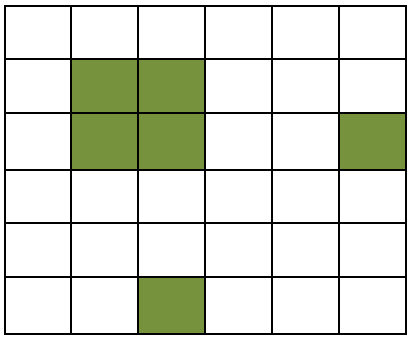
$$\frac{2S}{n} = \frac{2 \times 252}{6} = 84$$

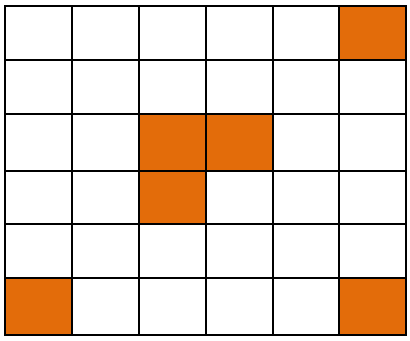
Un tel carré magique est appelé **hyper-magique**.

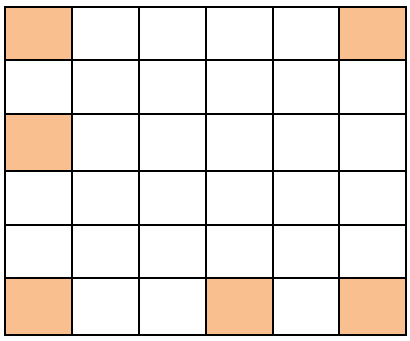
Voici une autre propriété : si nous rattachions la première colonne à gauche à la dernière colonne à droite, par exemple, en faisant un cylindre de notre carré, nous obtiendrions 5 nouveaux carrés d'ordre 2, de somme 168. Par exemple : 56 + 41 + 3 + 68 = 168.

Il en serait de même avec la première rangée du haut et la dernière rangée du bas. Par exemple : 43 + 64 + 28 + 33 = 168. Suivent quelques figures magiques de ce carré :









Voici un extraordinaire carré magique d'ordre 8; il est presque normal de somme S = 556.

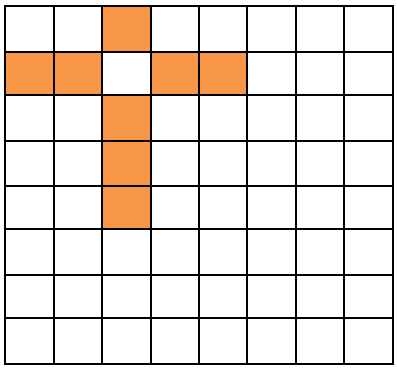
57	67	75	49	68	86	94	60
122	32	104	50	111	13	85	39
59	65	77	47	70	84	96	58
38	116	20	134	27	97	1	123
51	73	69	55	62	92	88	66
130	24	112	42	119	5	93	31
45	79	63	61	56	98	82	72
54	100	36	118	43	81	17	107

Carré 23

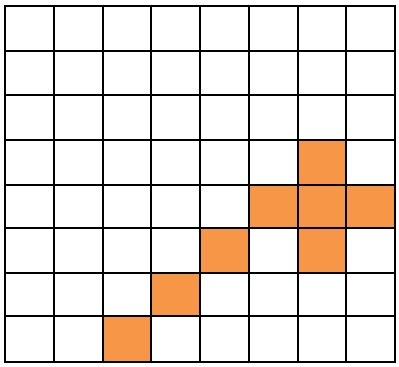
Il possède les propriétés suivantes :

1) Il est pandiagonal.
2) Si nous faisons la somme des 4 cases de tout carré d'ordre 2 inclus dans ce carré, et il y en a 49, alors nous trouvons toujours 278 soit S/2. Par exemple : 92 + 88 + 93 + 5 = 278.
3) La somme des 4 coins de tout carré d'ordre 4 donne 278.
   Par exemple : 27 + 123 + 72 + 56 = 278 soit les 4 cases bleues.
4) La somme des 4 coins de tout carré d'ordre 6 donne 278.
   Par exemple : 122 + 13 + 98 + 45 = 278 soit les 4 cases rouges.
5) La somme des 4 coins de tout carré d'ordre 7 donne 278.
   Par exemple : 32 + 39 + 107 + 100 = 278 soit les 4 cases blanches.
6) La somme des 4 coins du carré d'ordre 8 donne aussi 278 = 57 + 60 + 107 + 54.

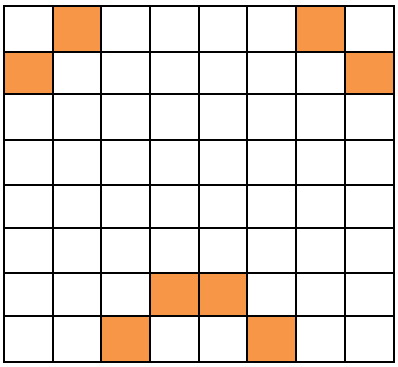
7) Si nous rattachions la première colonne à gauche à la dernière colonne à droite, par exemple, en faisant un cylindre de notre carré, nous obtiendrions 7 nouveaux carrés d'ordre 2, de somme 278. Par exemple : 38 + 51 + 123 + 66 = 278. Il en serait de même avec la première rangée du haut et la dernière rangée du bas. Par exemple : 68 + 86 + 43 + 81 = 278. Ainsi, nous aurions 14 nouveaux carrés d'ordre 2 de somme 278.
8) Le carré23 possède entre autres les 14 figures magiques suivantes :



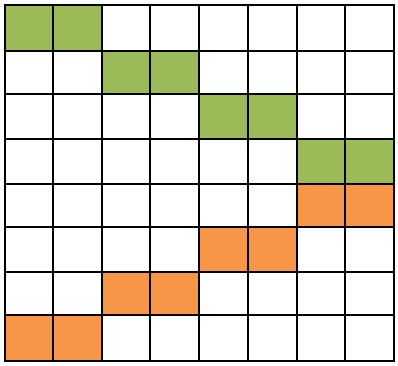
Carré 23 a



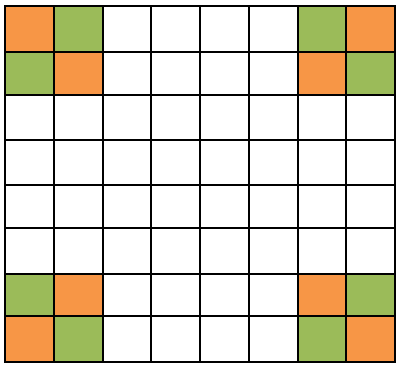
Carré 23 b



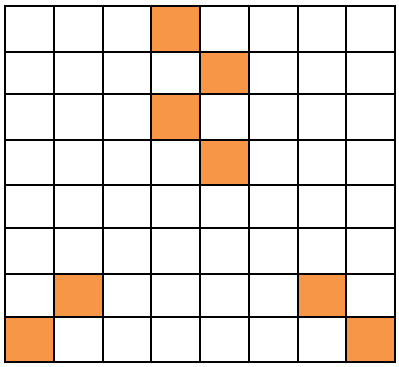
Carré 23 c



Carré 23 d



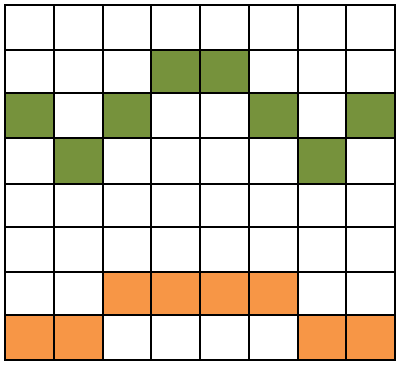
Carré 23 e



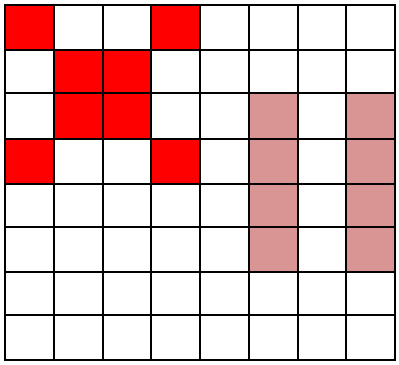
Carré 23 f

La figure magique du bas dans le carré 23d reste magique si nous la déplaçons verticalement; si nous la retournons à l'aide d'une rotation spatiale de 180° (figure du haut), elle reste magique et même si nous la déplaçons verticalement.

Les 2 figures magiques (en vert et en orangé) du carré 23e sont des super-figures.

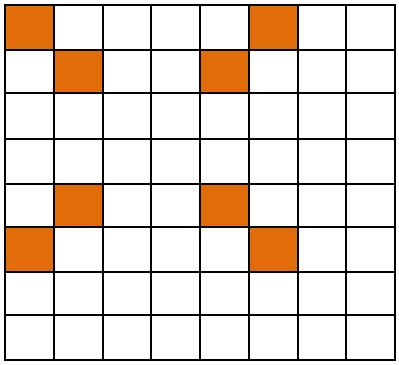


Carré 23 g

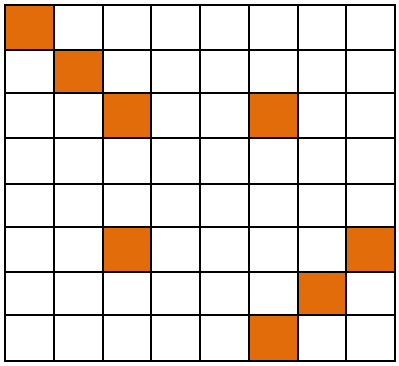


Carré 23 h

Fantastique!!! La figure du bas dans le carré 23g est une super-figure. Donc, peu importe la façon de placer cette figure dans le carré 23, nous aurons une figure magique. Dans le carré 23h, la figure de gauche, en rouge, est une super-figure; ce n'est pas le cas de la figure de droite qui est cependant magique. Revenons au carré 23g et regardons la figure du haut. Celle-ci n'est pas une super-figure; cependant, elle est magique et si nous la déplaçons verticalement, elle reste magique. De plus, si nous la retournons de 180°, elle reste magique même si nous la déplaçons verticalement.



Carré 23 i



Carré 23 j

La figure du carré 23i est une super-figure et il en est de même de la figure du carré 23j!!!

Nous avons vu que le carré normal d'ordre 8 possède exactement 35 154 340 figures magiques !!! Nous ne serions pas surpris que le carré 23, qui est presque normal, renferme plusieurs millions de figures magiques!!!

Petit voyage en Espagne :

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Carré 24

Nous appelons le carré 24, le Gaudi. Il se trouve sur la façade de la Passion de la basilique Sagrada Familia à Barcelone, Espagne. Sa somme magique est S = 33, l'âge du Christ à sa mort. De plus, f(33) = 88. Son seul défaut : ses deux répétitions!!! C'est le sculpteur et peintre Josep Subirachs qui a placé ce carré magique sur la façade de la Passion. Il est **presque certain** que Subirachs a transformé le carré magique d'Albert Dürer (voir problème 14) afin d'obtenir le Gaudi et ce, d'une manière très simple.

11	23	139	31	227
137	103	29	73	89
127	113	83	101	7
151	43	17	173	47
5	149	163	53	61

Carré 25

59	107	71	23	53
13	37	113	61	89
43	41	83	79	67
101	19	17	103	73
97	109	29	47	31

Carré 26

Le carré 25 est un carré super-premier; en effet, les 25 entiers qu'il contient sont des nombres premiers et sa somme magique S = 431 est aussi un nombre premier. C'est un carré presque normal et f(431) = 388.

Le carré 26 est un magnifique carré super-premier. En effet, il renferme 25 nombres premiers **consécutifs** allant de 13 à 113. Sa somme magique est le nombre premier 313 et f(313) = 676.

Nous avons trouvé le carré 26 sur le site suivant et nous vous invitons à le visiter sans faute :

http://digilander.libero.it/ice00/magic/prime/orderConstant.html

1	17	33	49	192	176	160	144	128	112	96	80	193	209	225	241
2	18	34	50	191	175	159	143	127	111	95	79	194	210	226	242
3	19	35	51	190	174	158	142	126	110	94	78	195	211	227	243
4	20	36	52	189	173	157	141	125	109	93	77	196	212	228	244
252	236	220	204	69	85	101	117	133	149	165	181	60	44	28	12
251	235	219	203	70	86	102	118	134	150	166	182	59	43	27	11
250	234	218	202	71	87	103	119	135	151	167	183	58	42	26	10
249	233	217	201	72	88	104	120	136	152	168	184	57	41	25	9
248	232	216	200	73	89	105	121	137	153	169	185	56	40	24	8
247	231	215	199	74	90	106	122	138	154	170	186	55	39	23	7
246	230	214	198	75	91	107	123	139	155	171	187	54	38	22	6
245	229	213	197	76	92	108	124	140	156	172	188	53	37	21	5
13	29	45	61	180	164	148	132	116	100	84	68	205	221	237	253
14	30	46	62	179	163	147	131	115	99	83	67	206	222	238	254
15	31	47	63	178	162	146	130	114	98	82	66	207	223	239	255
16	32	48	64	177	161	145	129	113	97	81	65	208	224	240	256

Carré 27

Si nous regardons chaque colonne du carré 27, nous trouvons toujours, de haut en bas, 4 entiers consécutifs, puis 8 autres entiers consécutifs et enfin, 4 entiers consécutifs. Les 256 entiers de ce carré semblent être trop bien organisés à un point tel que nous pouvons nous demander si ce carré d'ordre 16 est magique. En général, les nombres d'un carré magique sont plutôt dans un «certain désordre».

Et oui, le carré 27 est bien magique. Il est normal de somme S = 2056. Nous verrons dans la deuxième partie de cet ouvrage que ce carré est un carré arithmétique et qu'il a été construit avec un nouveau procédé, lequel vous sera présenté un peu plus loin. Il est aussi associatif!!!

Le nombre de figures magiques de ce carré, soit f(2056), est de plusieurs centaines de milliards et ne sera pas trouvé ici car le calcul serait trop long et pénible et que la mémoire de notre ordinateur n'est pas suffisante pour un calcul rapide.

Nous présentons maintenant un autre extraordinaire carré magique d'ordre 8 :

16	33	48	1	62	19	30	51
61	20	29	52	15	34	47	2
12	37	44	5	58	23	26	55
57	24	25	56	11	38	43	6
3	46	35	14	49	32	17	64
50	31	18	63	4	45	36	13
7	42	39	10	53	28	21	60
54	27	22	59	8	41	40	9

Ce carré 28 est un hyper-magique-alpha

C’est un carré magique **normal** de somme S = 260 et f(260) = 35 154 340, le nombre de figures magiques dans ce carré!!!

C’est aussi un **carré hyper-magique** puisque nous avons les 3 propriétés suivantes :

a) Il est d’ordre pair.
b) Chaque petit carré d’ordre 2 à l’intérieur du carré 28 a pour somme 130 soit 4S/n = 4S/8 = S/2. Par exemple : 42 + 39 + 27 + 22 = 130.
c) Sur chaque diagonale (grande ou brisée), 2 nombres séparés de 3 autres ont pour somme 65 soit 2S/n = 2S/8 = S/4. Par exemples : 3 + 62 = 65; 33 + 32 = 65.

Voici de très belles conséquences de la propriété b) :

i) La somme des 4 coins de tous les carrés d’ordre 4 à l’intérieur du carré 28 est 130.
ii) La somme des 4 coins de tous les carrés d’ordre 6 à l’intérieur du carré 28 est 130.
iii) La somme des 4 coins du carré 28 est 130.

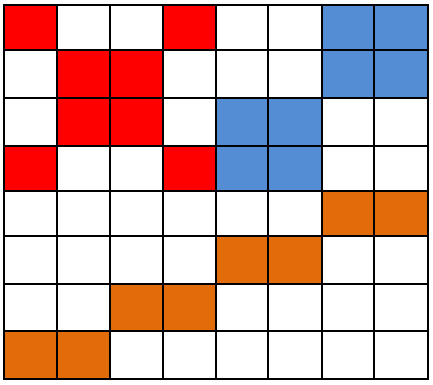
Deux conséquences de la propriété c) :

i) Le carré est pandiagonal.
ii) La somme des 4 coins de tous les carrés d’ordre 5 à l’intérieur du carré 28 est 130.

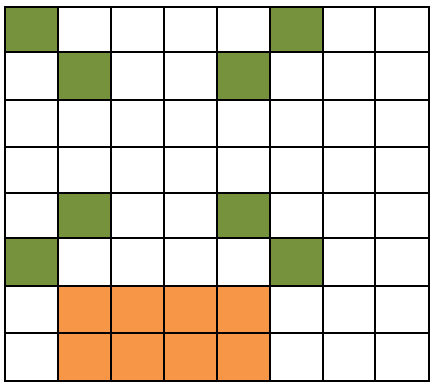
Voici une autre propriété : si nous rattachions la première colonne à gauche à la dernière colonne à droite, par exemple, en faisant un cylindre de notre carré, nous obtiendrions 7 nouveaux carrés d’ordre 2, de somme 130. Par exemple : 57 + 3 + 6 + 64 = 130.

Il en serait de même avec la première rangée du haut et la dernière rangée du bas. Par exemple : 48 + 1 + 22 + 59 = 130.

Nous retrouvons donc, dans le carré 28, 49 + 14 = 63 petits carrés d’ordre 2 dont la somme est 130. Nous avions le même résultat avec le carré 23. Voyons maintenant quelques figures magiques du carré 28 :

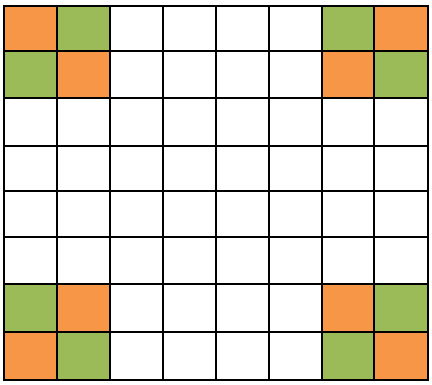


Carré 28 a

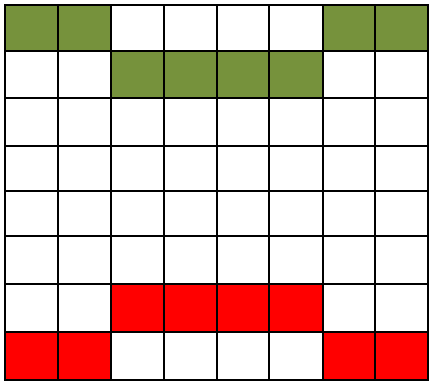


Carré 28 b

Les 5 figures magiques dans les carrés 28a et 28b sont des super-figures.

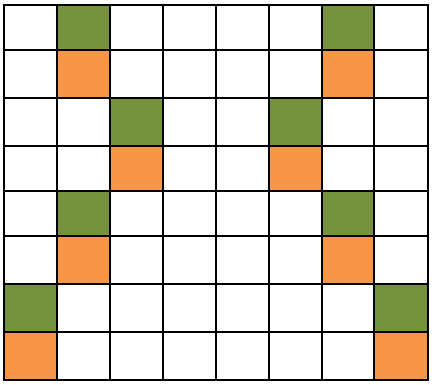


Carré 28 c

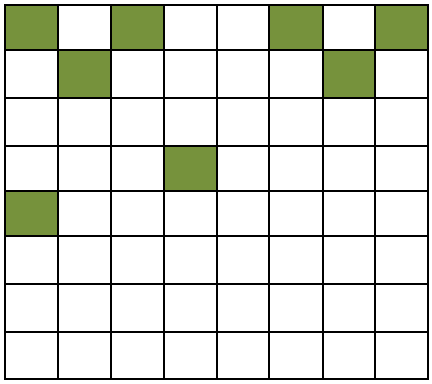


Carré 28 d

Les deux figures du carré 28c sont des super-figures. Dans le carré 28d, la figure du bas est magique et même si nous la déplaçons verticalement, elle reste magique. Si nous la renversons (figure du haut), elle reste magique et même si nous la déplaçons verticalement.



Carré 28 e



Carré 28 f

Dans le carré 28e, la figure en vert est une figure magique formée de deux branches; celle de gauche est de somme 130 et nous passons d'une case à l'autre par un mouvement de cavalier; il en est de même de la branche de droite. Il en est aussi de même de la figure magique de l'autre couleur. De plus, les huit cases de gauche forment une figure magique de même que les huit cases de droite.

La figure du carré 28f est tout simplement magique.

Un carré hyper-magique qui possède les 5 figures magiques et la demi-figure que nous verrons dans le glossaire 1, s'appelle **hyper-magique-alpha**. Il possède aussi les figures magiques que nous venons d'illustrer ci-haut et bien d'autres!!! Nous venons de voir un bon nombre de carrés magiques qui possèdent des propriétés remarquables et nous pourrions en allonger la liste.

Nous verrons aussi dans la deuxième partie de cet ouvrage d'autres carrés magiques avec de très belles figures magiques. Mais aussi, un grand nombre de résultats très intéressants. Par exemple, les seize nombres dans tous les diaboliques forment une suite arithmétique; un diabolique (non trivial) étant un carré magique d'ordre 4 qui est caractérisé par 86 figures magiques ce qui signifie que tous les diaboliques non triviaux possèdent exactement ces mêmes 86 figures magiques. De plus, tous les diaboliques non triviaux possèdent exactement 86 figures magiques.

Avant de passer à la construction de carrés magiques, voyons les objectifs que nous poursuivons à travers tout cet ouvrage :

1. **Construire des carrés magiques presque normaux de tous les ordres n > 2.**
2. **Construire au moins un carré magique normal pour tous les ordres n > 2.**
3. **Construire des carrés magiques qui possèdent le plus grand nombre possible de figures magiques.**
4. **Construire des carrés magiques qui possèdent des figures magiques imposées.**
5. **Construire des nouveaux carrés magiques qui renferment dans leurs cases autre chose que des nombres.**
6. **Apprendre au lecteur comment construire un carré magique qui renferme les figures magiques qu'il désire.**
7. **Découvrir de très beaux résultats sur les carrés magiques.**

4. Construction des carrés magiques d'ordre 3

Nous allons commencer la construction des carrés magiques par ceux d'ordre 3. En effet, les carrés magiques d'ordre 1, soit un petit carré dans lequel nous plaçons un nombre, ne présentent aucun intérêt. Quant aux carrés magiques d'ordre 2, il est très facile de montrer qu'ils sont tous triviaux c'est-à-dire qu'ils renferment tous le même nombre dans chaque case (voir le carré 11).

A	B
B	A

Si dans la première rangée, nous plaçons le nombre A dans la première case et le nombre B dans la deuxième case alors la deuxième rangée sera obligatoirement celle de la figure. Pour que le carré soit magique, il faut et il suffit que 2A = 2B donc A = B. Le carré sera alors trivial. Voilà pourquoi nous commençons par les carrés d'ordre 3.

Dans cette première partie de notre ouvrage , nous allons vous donner un moyen très simple pour construire tous les carrés magiques d'ordre 3. Cependant , dans la partie 2, vous trouverez les explications théoriques.

a + t	a + 2 r + 2 t	a + r
a + 2 r	a + r + t	a + 2 t
a + r + 2 t	a	a + 2 r + t

Carré 29

C'est ce carré magique de somme S = 3a + 3r + 3t qui vous permettra de construire tous les carrés magiques d'ordre 3. Si vous avez un carré magique d'ordre 3, il provient obligatoirement du carré 29. Celui-ci est une **structure générale** des carrés magiques d'ordre 3.

Pour en construire un, il suffit d'attribuer aux variables a, r et t, la valeur que vous désirez et d'effectuer quelques petits calculs. Par exemple, avec a = 2, r = 3 et t = 4, vous trouvez :

6	16	5
8	9	10
13	2	12

Carré 30

C'est un carré magique de somme S = 27; en effet, S = 3a + 3r + 3t = 3x2 + 3x3 + 3x4 = 27 = 3 x 9.

Il est clair que pour construire un carré formé d'entiers positifs, il suffit d'attribuer aux variables a, r et t, des valeurs entières positives. Voyons un deuxième exemple avec a = 2, r = 2 et t = 4 :

6	14	4
6	8	10
12	2	10

Carré 31

Ce carré magique est de somme S = 24 et présente 2 répétitions (deux 6 et deux 10).

Notre premier objectif n'est pas atteint; en effet, nous souhaitons construire des carrés magiques au moins presque normaux. Pour éviter les répétitions dans un carré d'ordre 3, il suffit d'appliquer la règle suivante :

Lorsque a, r et t sont > 0 et que t > 2 r ou r > 2 t, alors il n'y a pas de répétition.

Dans le carré précédent, nous avons eu des répétitions car la règle n'a pas été respectée; nous avions r = 2 et t = 4 or 4 n'est pas plus grand que 2x2 = 4. Si nous prenons avec a = 2 et r = 2, t = 5 ou 6 ou 7 ou …ou tout entier plus grand que 4, nous n'aurons aucune répétition.

Avec cette règle, nous pouvons fabriquer une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre 3.

Pouvons-nous maintenant construire un carré normal? Oui et l'encadré suivant nous dit comment.

Pour construire un carré magique normal d'ordre 3, il suffit de poser :
a = 1 ; r = 1 ; t = 3 ou a = 1 ; r = 3 ; t = 1

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Carré 32

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Carré 33

Nous obtenons ainsi les carrés 32 et 33 respectivement et nous pouvons observer que l'un est obtenu de l'autre par une rotation spatiale de 180° est-ouest. En fait, si vous regardez le carré 32 par derrière, vous verrez le carré 33.

Un fait intéressant : le centre de tous les carrés magiques d'ordre 3 est toujours le tiers de la somme magique. La somme magique du carré normal d'ordre 3 est (1 + 2 + 3 + … + 8 + 9)/3 = 45/3 = 15 et le centre est donc 15/3 = 5. Nous montrerons ce résultat dans la section 11, problème 4, à la fin de la première partie de l'ouvrage.

Remarquez le centre et la somme magique des carrés 29, 30 et 31.

Il n'existe que 8 carrés normaux d'ordre 3 dont 7 découlent du premier (le carré 32 par exemple). Celui-ci sera dit **primitif** et les 7 autres, ses **équivalents** (voir le glossaire). Nous vous invitons à trouver les 6 autres carrés magiques normaux qui s'ajoutent aux carrés 32 et 33.

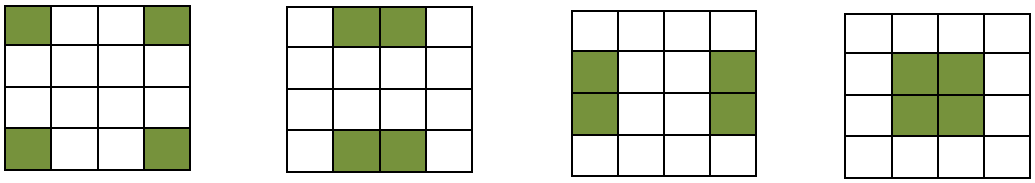
Vous pouvez maintenant construire des carrés magiques d'ordre 3 aussi bien normaux que presque normaux.

Pour éviter les calculs, vous pourriez utiliser soit EXCEL, soit MATHEMATICA soit MAPLE, les deux derniers étant des logiciels de mathématiques très puissants.

5. Construction de carrés magiques d'ordre 4 : les super-Dürer-alpha

Nous allons présenter ici une structure générale qui va nous permettre de construire des carrés magiques d'ordre 4 extraordinaires!!! Ces carrés sont appelés **super-Dürer-alpha**.

Tous les carrés magiques d'ordre 4 possèdent 14 figures magiques qui les caractérisent : les 4 rangées, les 4 colonnes, les 2 grandes diagonales et les 4 figures magiques qui suivent :



Il existe des carrés magiques d'ordre 4 qui possèdent exactement 14 figures magiques donc les 14 figures magiques que nous venons de présenter.

Il est faux de prétendre que si les 4 coins forment une figure magique, cela est dû au fait que nous avons là un carré très spécial!!!Le carré d'Albert Dürer par exemple.

Un carré magique d'ordre 4 peut posséder plus que 14 figures magiques. Les super-Dürer-alpha en possèdent 68 et tous les super-Dürer-alpha possèdent ces mêmes 68 figures magiques. Vous les trouverez dans la deuxième partie de l'ouvrage.

Il n'existe que 8 super-Dürer-alpha normaux que voici (sous forme matricielle) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \\ 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 15 & 1 & 14 \\ 5 & 10 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 13 & 2 \\ 9 & 6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

1 2 3 4

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 14 & 11 \\ 16 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 13 & 2 \\ 9 & 6 & 12 & 7 \\ 4 & 15 & 1 & 14 \\ 5 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 15 & 10 \\ 13 & 12 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

5 6 7 8

Ces 8 carrés magiques normaux possèdent tous exactement 86 figures magiques; il en est de même de tous les carrés magiques normaux d'ordre 4. Par contre, ces 8 carrés ont tous en commun les 68 figures magiques qui caractérisent les super-Dürer-alpha. Quant aux 18 autres figures magiques (86 – 68 = 18), elles ne sont pas forcément les mêmes d'un carré à l'autre.

Voici maintenant une **structure générale** des super-Dürer-alpha :

a + 3 r	a + t	a + 3 r + 3 t	a + 2 t
a + 2 r + 3 t	a + r + 2 t	a + 2 r	a + r + t
a	a + 3 r + t	a + 3 t	a + 3 r + 2 t
a + r + 3 t	a + 2 r + 2 t	a + r	a + 2 r + t

Carré 34

Pour construire un carré magique super-Dürer-alpha, il suffit d'attribuer aux variables a, r et t, un nombre réel. Si ce sont des entiers positifs, alors les seize nombres du carré seront des entiers positifs et si nous ne voulons aucune répétition, alors il suffira de prendre r > 3 t ou t > 3 r. Ainsi, vous pourrez construire une infinité de carrés magiques presque normaux qui seront tous des super-Dürer-alpha donc qui possèderont tous les mêmes 68 figures magiques caractéristiques des super-Dürer-alpha.

Pour construire un super-Dürer-alpha normal, il suffira de prendre a = 1, r = 1 et t = 4 ou encore a = 1, r = 4 et t = 1. Dans le premier cas, nous obtenons le carré normal numéroté 3 parmi les 8 normaux présentés plus haut et de même dans le deuxième cas, nous obtenons le carré numéroté 5.

Quant aux 68 figures magiques que possède tout super-Dürer-alpha, vous les trouverez dans la seconde partie de l'ouvrage. Nous allons tout de même en présenter certaines un peu plus loin.

16	9	4	5
3	6	15	10
13	12	1	8
2	7	14	11

Carré 35

17	18	56	31
52	35	13	22
5	30	44	43
48	39	9	26

Carré 36

23	4	29	6
22	13	16	11
2	25	8	27
15	20	9	18

Carré 37

Le carré 34 est une structure générale des super-Dürer-alpha.

Le carré 35 est obtenu avec a = 13, r = 1 et t = -4; c'est le huitième carré normal cité plus haut.

Le carré 36 est presque normal et est obtenu avec a = 5, r = 4 et t = 13.

Le carré 37 est presque normal et est obtenu avec a = 2, r = 7 et t = 2.

Si a, r et t sont > 0 et si r > 3 t ou t > 3 r, alors il n'y aura aucune répétition.

Pour construire un carré magique normal d'ordre 4, il suffit de poser :
a = 1 ; r = 1 ; t = 4 ou a = 1 ; r = 4 ; t = 1

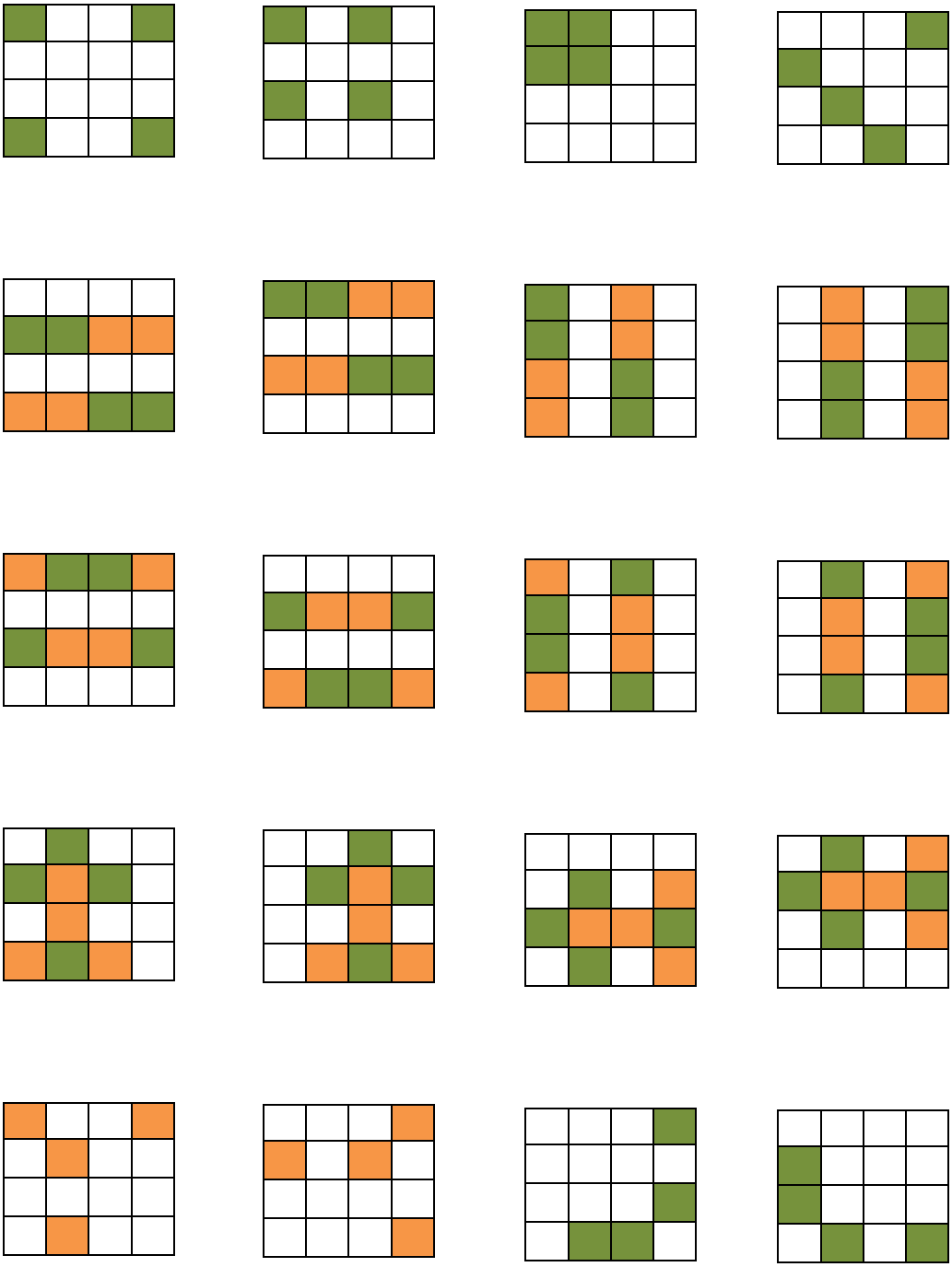
Dans le premier encadré, la condition pour ne pas avoir de répétition est suffisante mais non nécessaire. En effet, le carré 35 est défini avec une valeur négative pour t (ici t = -4) et nous n'avons pas de répétition; notez que nous avons r > 3 t. Avec a = 1, r = 1 et t = -1, nous avons bien r > 3 t et pourtant, il y a des répétitions. Construisez ce carré.

Avec le deuxième encadré, nous pouvons déjà construire deux carrés normaux mais ici, des super-Dürer-alpha, il y en a 8. Comment construire les 6 autres?

Nous verrons, dans la deuxième partie, comment nous avons trouvé ces 8 super-Dürer-alpha. Les connaissant, il est facile de trouver les valeurs de a, r et t qui permettent la construction des

huit. Par exemple, comment obtenir celui qui est numéroté 7? Ce carré nous indique, selon le carré 34, que a = 4, a + r = 8 et a + t = 3; cela nous donne a = 4, r = 4 et t = -1.

Passons aux principales figures magiques que possèdent tous les super-Dürer-alpha.



Tous les super-Dürer-alpha possèdent les figures magiques illustrées ci-haut. Mais il y en a d'autres :

a) Les rangées, les colonnes et les deux grandes diagonales.
b) Toutes les diagonales brisées (tous les super-Dürer-alpha sont pandiagonaux).
c) Ils sont tous hyper-magiques.

Vous trouverez les 68 figures magiques caractéristiques des super-Dürer-alpha dans la deuxième partie, chapitre 5, section 5.6.

Vous avez maintenant la possibilité de construire des carrés magiques d'ordre 4 extraordinaires qui contiennent tous les 68 figures magiques qui caractérisent les super-Dürer-alpha.

Un super-Dürer-alpha normal contient toujours 18 figures magiques supplémentaires d'où 86.

Terminons avec ces quelques résultats :

Tous les carrés magiques normaux d'ordre 4 possèdent exactement 86 figures magiques.

Il existe 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4.

Tous les super-Dürer-alpha non triviaux ont en commun 68 figures magiques.

Il existe seulement 8 super-Dürer-alpha normaux parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4.

Enfin, voyons les fréquences des carrés présentés ci-haut.

Le carré 34 a pour somme magique $S = 4a + 6r + 6t$. On trouve $f(S) = 68$. Voilà pourquoi tous les carrés magiques issus du carré 34 possèdent les mêmes 68 figures magiques.

Le carré 35 a pour somme magique S = 34 et puisqu'il est normal, selon le premier encadré ci-haut, nous avons f(34) = 86.

Le carré 36 a pour somme magique S = 122 et f(122) = 68

. Le carré 37 a pour somme magique S = 62 et f(62) = 68.

Remarque 1: en affichant les 68 figures magiques du carré 37, nous trouvons les 68 figures magiques de la structure générale des super-Dürer-alpha (voir le carré 34).

Pour trouver les 68 figures magiques du carré 37, nous utilisons un programme dans MAPLE qui fait très bien le travail. Vous le trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 03.

Remarque 2: les super-Dürer-alpha numérotés de 1 à 8 présentés plus haut ont été mis sous la forme matricielle plutôt que dans un carré. Nous retrouverons souvent cette forme qui permettra une économie d'espace.

Nous allons maintenant voir comment construire des carrés magiques d'ordre n lorsque n > 2. Ce procédé est un **tout nouveau procédé** qui vous permettra de construire des carrés magiques de tous les ordres. Ainsi, vous pourrez construire un carré normal d'ordre 17 aussi bien qu'un carré normal d'ordre 18 ou d'ordre 20.

Vous pourriez aussi construire un carré normal d'ordre 1255 mais vous n'auriez plus de plaisir à fabriquer un tel carré qui renfermerait 1 575 025 nombres!!! Techniquement, cela serait plutôt compliqué et qui apprécierait ce carré magique?

Être devant un carré magique d'ordre 20 nous semble une limite raisonnable; celui-ci renferme déjà 400 nombres.

Le procédé qui sera présenté dans la section suivante peut être employé sans ou avec ordinateur . Évidemment , avec ordinateur , cela est plus rapide et nous évite tous les calculs même s'ils sont simples. EXCEL, MATHEMATICA ou MAPLE peuvent vous faciliter la tâche.

Dans la Partie 3, annexe 22, vous trouverez , par exemple avec MATHEMATICA , les fichiers « ordre 3 », « ordre 4 », « ordre 5 », …, « ordre 24 », lesquels vous permettront de construire des carrés magiques d'ordres 3 à 24.

Allons maintenant à la section 6.

6. Construction de carrés magiques d'ordres n > 2, nouveau procédé

Ce nouveau procédé de construction de carrés magiques vous est présenté ici sans explications théoriques; vous trouverez ces dernières dans la deuxième partie de cet ouvrage, soit le chapitre 11 qui traite des carrés arithmétiques.

Le procédé exige de trouver trois carrés magiques A, B et C; B sera obtenu de la rotation de -90° (sens des aiguilles d'une montre) du carré A et C sera le carré trivial formé du nombre 1. Il reste à trouver le carré A. Nous aurons trois façons de faire selon que *n* est impair (3 ; 5 ; 7 ; …), pair multiple de 4 (4 ; 8 ; 12 ; 16 ; …) ou pair non multiple de 4 (6 ; 10 ; 14 ; 18 ; …).

Premier cas : $n \geq 3$ est impair (Algorithme **ALG-1**)

Nous allons illustrer la façon de construire A à travers un exemple, un carré d'ordre $n = 7$. La première étape consiste à remplir la diagonale secondaire avec les entiers de 0 à 6 (de 0 à $n - 1$), de haut en bas comme dans le carré suivant :

						0
					1	
				2		
			3			
		4				
	5					
6						

La deuxième étape nous demande de compléter la grande diagonale principale et les petites diagonales avec l'entier qui se trouve déjà sur chacune d'elles. Cela nous donne :

3		2		1		0
	3		2		1	
4		3		2		1
	4		3		2	
5		4		3		2
	5		4		3	
6		5		4		3

La troisième et dernière étape veut que nous complétions chaque diagonale brisée avec l'entier qui s'y trouve déjà (par exemple, la diagonale brisée qui contient 1).

3		2		1		0
	3		2		1	
4		3		2		1
1	4		3		2	
5	1	4		3		2
	5	1	4		3	
6		5	1	4		3

$\rightarrow$

3	6	2	5	1	4	0
0	3	6	2	5	1	4
4	0	3	6	2	5	1
1	4	0	3	6	2	5
5	1	4	0	3	6	2
2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3

Et voilà construit le carré A :

$A =$

3	6	2	5	1	4	0
0	3	6	2	5	1	4
4	0	3	6	2	5	1
1	4	0	3	6	2	5
5	1	4	0	3	6	2
2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3

Pour obtenir le carré B, il suffit de faire subir à A, une rotation de 90° dans le sens horaire.

3	6	2	5	1	4	0
0	3	6	2	5	1	4
4	0	3	6	2	5	1
1	4	0	3	6	2	5
5	1	4	0	3	6	2
2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3

A

6	2	5	1	4	0	3
2	5	1	4	0	3	6
5	1	4	0	3	6	2
1	4	0	3	6	2	5
4	0	3	6	2	5	1
0	3	6	2	5	1	4
3	6	2	5	1	4	0

B

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

C

Pour construire un carré magique d'ordre 7, il suffit de faire *t* A + *r* B + *a* C d'où :

$$\begin{pmatrix} a+6r+3t & a+2r+6t & a+5r+2t & a+r+5t & a+4r+t & a+4t & a+3r \\ a+2r & a+5r+3t & a+r+6t & a+4r+2t & a+5t & a+3r+t & a+6r+4t \\ a+5r+4t & a+r & a+4r+3t & a+6t & a+3r+2t & a+6r+5t & a+2r+t \\ a+r+t & a+4r+4t & a & a+3r+3t & a+6r+6t & a+2r+2t & a+5r+5t \\ a+4r+5t & a+t & a+3r+4t & a+6r & a+2r+3t & a+5r+6t & a+r+2t \\ a+2t & a+3r+5t & a+6r+t & a+2r+4t & a+5r & a+r+3t & a+4r+6t \\ a+3r+6t & a+6r+2t & a+2r+5t & a+5r+t & a+r+4t & a+4r & a+3t \end{pmatrix}$$

Ce carré magique est une structure générale de carrés magiques d'ordre 7. Cela veut dire que pour obtenir un carré d'ordre 7, il suffit d'attribuer une valeur aux variables a, r et t puis d'effectuer les 49 petits calculs. Par exemple, avec a = 2, r = 3 et t = 5, nous trouverons sur la première rangée, à partir de la gauche, a + 6 r + 3 t = 35, a + 2 r + 6 t = 38, a + 5 r + 2 t = 27, … .

Cependant, les calculs peuvent être faits par de bons logiciels de mathématiques.

Nous pouvons également multiplier directement A par le nombre t puis B par le nombre r et C par le nombre a pour ensuite additionner les 3 carrés obtenus.

Les opérations sur les carrés magiques seront présentées dans la deuxième partie de l'ouvrage. Mentionnons ici comment se fait l'addition et la multiplication par un nombre :

a) Multiplier un carré magique de somme S par un nombre t revient à multiplier tous les nombres du carré par le nombre t. Le carré qui en résulte est magique de somme t S.
b) Additionner 2 carrés magiques de somme S et T revient à additionner les nombres qui occupent la même position dans chaque carré. Le carré qui en résulte est magique de somme S + T.

Par exemple : A est le carré de gauche de somme 34, 5A est le carré de droite de somme 5 x 34.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

A

20	75	70	5
25	50	55	40
45	30	35	60
80	15	10	65

5A

Pour l'addition ci-dessous, A est le carré de gauche, B = 5A est le carré du centre et A + B est le carré de droite respectivement de sommes 34, 170 et 204.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

A

20	75	70	5
25	50	55	40
45	30	35	60
80	15	10	65

B = 5A

24	90	84	6
30	60	66	48
54	36	42	72
96	18	12	78

A + B

Nous sommes prêts à construire des carrés magiques d'ordre 7 formés que d'entiers positifs tous différents. Il suffit pour cela de donner aux variables $a, r \, et \, t$, des valeurs entières positives qui respectent soit la condition $t > 6r$ ou la condition $r > 6t$. D'une façon générale, t > (n-1) r ou r > (n-1) t.

Si nous voulons un carré normal, il suffira de prendre $a = 1; r = 1; t = 7$ ou $a = 1; r = 7; t = 1$.

Voici deux carrés magiques normaux d'ordre 7 et de somme $S = 175$:

28	45	20	37	12	29	4
3	27	44	19	36	11	35
34	2	26	43	18	42	10
9	33	1	25	49	17	41
40	8	32	7	24	48	16
15	39	14	31	6	23	47
46	21	38	13	30	5	22

a = 1, r = 1, t = 7

46	21	38	13	30	5	22
15	39	14	31	6	23	47
40	8	32	7	24	48	16
9	33	1	25	49	17	41
34	2	26	43	18	42	10
3	27	44	19	36	11	35
28	45	20	37	12	29	4

a = 1, r = 7, t = 1

Notez que le carré de droite est obtenu du carré de gauche par une rotation planaire de 180° que nous regardons par derrière. Chaque carré renferme 957 332 figures magiques!!!

$a = 3, r = 2, t = 15$, donne un carré magique d'ordre 7 et de somme $S = 378$.

60	97	43	80	26	63	9
7	58	95	41	78	24	75
73	5	56	93	39	90	22
20	71	3	54	105	37	88
86	18	69	15	52	103	35
33	84	30	67	13	50	101
99	45	82	28	65	11	48

Ce carré est presque normal. Il possède 536 000 figures magiques!!!

Ce procédé de construction de carrés magiques d'ordres impairs nous conduit aux propriétés suivantes que nous démontrerons dans la Partie 2 de l'ouvrage, problème 37 de 11.4.

1) Le centre du carré est toujours $\frac{S}{n}$; ici $54 = \frac{378}{7}$ est le centre du carré ci-haut.
2) Dans la rangée centrale, nous trouvons le plus petit nombre juste à gauche du nombre central et le plus grand nombre juste à droite du nombre central, à la condition que $a, r \; et \; t$ soient des nombres positifs.
3) Tous les nombres de la diagonale principale forment une suite arithmétique de raison r. Ils sont consécutifs, le plus petit étant en bas sur la dernière rangée.
4) Tous les nombres de la diagonale secondaire forment une suite arithmétique de raison t. Ils sont consécutifs, le plus petit étant en haut sur la première rangée.

Vous trouverez dans la Partie 3, annexe 22, de cet ouvrage, 22 fichiers MATHEMATICA, appelés « Ordre 3 », « Ordre 4 », … ,« Ordre 24 ». Vous pourrez , en donnant une valeur entière positive à chacune des trois variables , obtenir autant de carrés magiques presque normaux que vous le souhaitez et au moins un carré normal. De même avec EXCEL, annexe 21, « Ordre 3 » à « Ordre 32 ». Toujours dans la Partie 3, annexe 23, vous trouverez le programme 11 dans MAPLE qui vous permettra de construire des carrés magiques d'ordres impairs de 3 à 31. Vous pourrez construire

autant de carrés presque normaux que vous le désirez et au moins un carré normal à l'aide de 3 variables seulement. Ce programme porte le nom : CM-arith-2k+1.

Vous pouvez maintenant construire des carrés magiques normaux et presque normaux de tous les ordres impairs à partir de l'ordre 3. Pour vous aider, vous pouvez vous servir de MATHEMATICA, MAPLE et EXCEL. Sinon, votre crayon fera l'affaire!!

Deuxième cas : $n \geq 4$, est pair multiple de 4 (Algorithme **ALG-2**)

Nous allons illustrer la façon de construire A à travers un carré d'ordre n = 8 en utilisant les entiers de 0 à 7 (de 0 à n-1). Formons la rangée u ainsi :

Rangée u : $0\ 1 \quad 5\ 4\ 3\ 2 \quad 6\ 7$

Le premier groupe renferme les $\frac{n}{4}$ premiers entiers soit ici $0\ 1$ et ce dans l'ordre croissant. Le deuxième groupe renferme les $\frac{n}{2}$ entiers suivants soit ici $5\ 4\ 3\ 2$ et ce dans l'ordre décroissant. Enfin, le troisième groupe renferme les $\frac{n}{4}$ entiers suivants soit ici $6\ 7$ et ce dans l'ordre croissant. Formons maintenant la rangée v en renversant la rangée u (v est la rangée u lue de droite à gauche), ce qui donne :

Rangée v : $7\ 6 \quad 2\ 3\ 4\ 5 \quad 1\ 0$

Le carré A sera formé, de haut en bas, par $\frac{n}{4}$ rangées u, $\frac{n}{2}$ rangées v et de nouveau $\frac{n}{4}$ rangées u.

Nous obtenons alors :

0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7

Carré A

Le carré B est obtenu par une rotation de -90° (90° dans le sens horaire) du carré A et le carré C est le trivial formé du nombre 1.

Nous avons donc les 3 carrés suivants :

0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7

Carré A

0	0	7	7	7	7	0	0
1	1	6	6	6	6	1	1
5	5	2	2	2	2	5	5
4	4	3	3	3	3	4	4
3	3	4	4	4	4	3	3
2	2	5	5	5	5	2	2
6	6	1	1	1	1	6	6
7	7	0	0	0	0	7	7

Carré B

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Carré C

Pour construire un carré magique d'ordre 8, il suffit de faire t A + r B + a C. Pour obtenir un carré magique presque normal, vous n'avez qu'à choisir a, r et t, des entiers positifs, en respectant la règle $r > 7t$ ou $t > 7r$ ($r > (n-1)t$ ou $t > (n-1)r$).

Pour avoir un carré normal, il suffit de prendre a = 1, r = 1, t = 8 ou a = 1, r = 8, t = 1.

La construction de carrés magiques d'ordres pairs divisibles par 4 (4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; …) est donc d'une grande simplicité.

Voyons quelques exemples :

$a=1; r=1; t=8 \; et \; a=1; r=8; t=1$, nous donnent les deux carrés normaux suivants :

1	9	48	40	32	24	49	57
2	10	47	39	31	23	50	58
62	54	19	27	35	43	14	6
61	53	20	28	36	44	13	5
60	52	21	29	37	45	12	4
59	51	22	30	38	46	11	3
7	15	42	34	26	18	55	63
8	16	41	33	25	17	56	64

a = 1 ; r = 1 ; t = 8

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

a = 1 ; r = 8 ; t = 1

Ils sont de somme S = 260 et ils possèdent 35 154 340 figures magiques.

En prenant a = 2, r = 3 et t = 22, nous obtenons le carré presque normal suivant :

2	24	133	111	89	67	134	156
5	27	130	108	86	64	137	159
171	149	52	74	96	118	39	17
168	146	55	77	99	121	36	14
165	143	58	80	102	124	33	11
162	140	61	83	105	127	30	8
20	42	115	93	71	49	152	174
23	45	112	90	68	46	155	177

a = 2 ; r = 3 ; t = 22

Ce carré magique est de somme S = 716.

Vous pouvez maintenant construire des carrés magiques normaux et presque normaux de tous les ordres pairs divisibles par 4 à partir de n = 4.

Ce procédé de construction de carrés magiques d'ordres pairs divisibles par 4 nous conduit aux propriétés suivantes que nous démontrerons dans la Partie 2 de l'ouvrage, problème 38 de 11.4.

1) Dans chaque colonne, nous trouvons, de haut en bas, $\frac{n}{4}$ nombres qui forment une suite arithmétique de raison r, $\frac{n}{2}$ nombres qui forment une autre suite arithmétique de raison r, $\frac{n}{4}$ nombres qui forment une suite arithmétique de raison r.
2) Les deux grandes diagonales sont formées de n nombres qui forment une suite arithmétique de raison $(r+t)$ pour la grande diagonale principale et de raison $(r-t)$ pour la grande diagonale secondaire.
3) Sur les rangées, les trois suites arithmétiques sont de raison t.
4) Si a, r et t sont positifs, le plus petit nombre et le plus grand nombre du carré sont situés aux extrémités de la grande diagonale principale, le plus petit étant en haut soit a.

Dans la Partie 3, annexe 23, vous trouverez le programme 12 qui vous permettra de construire des carrés magiques (normaux et presque normaux) d'ordres pairs multiples de 4, de 4 à 28. Ce programme porte le nom de : CM-arith-4k. Aussi, les fichiers « Ordre 4 » à « Ordre 24 » dans MATHEMATICA, annexe 22, et « Ordre 4 » à « Ordre 32 » dans EXCEL, annexe 21.

Troisième cas : $n \geq 6$ est pair non divisible par 4 (Algorithme **ALG-3**)

Nous allons illustrer la façon de construire A à travers un carré d'ordre 10 en utilisant les entiers de 0 à 9. Cette construction est la plus difficile d'entre les trois.

1) Avec ALG-2, construisons d'abord le carré A dans le cas $n = 8$ et ajoutons à A, le carré trivial formé de 1. Nous obtenons le carré suivant appelé carré central d'ordre 8 :

1	2	6	5	4	3	7	8
1	2	6	5	4	3	7	8
8	7	3	4	5	6	2	1
8	7	3	4	5	6	2	1
8	7	3	4	5	6	2	1
8	7	3	4	5	6	2	1
1	2	6	5	4	3	7	8
1	2	6	5	4	3	7	8

2) Nous allons compléter ce carré central d'ordre 8 en ajoutant une bordure autour de celui-ci de façon à obtenir un carré d'ordre 10. Pour construire la première rangée de ce carré d'ordre 10, écrivons les entiers consécutifs de 0 à 9 de gauche à droite. Pour la dernière rangée, écrivons les entiers consécutifs de 0 à 9, de droite à gauche.

Cela nous donne :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	2	6	5	4	3	7	8	
	1	2	6	5	4	3	7	8	
	8	7	3	4	5	6	2	1	
	8	7	3	4	5	6	2	1	
	8	7	3	4	5	6	2	1	
	8	7	3	4	5	6	2	1	
	1	2	6	5	4	3	7	8	
	1	2	6	5	4	3	7	8	
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

3) Il reste à compléter les première et dernière colonnes du carré . Pour ce faire, partons du centre de la colonne incomplète de gauche et plaçons, du centre vers la haut, 9, 0, 9, 0. Puis, du centre vers le bas, 9, 0, 9, 0. Remplissons alors la colonne de droite avec les complémentaires. Nous obtenons :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	6	5	4	3	7	8	9
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
0	8	7	3	4	5	6	2	1	9
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
0	8	7	3	4	5	6	2	1	9
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
0	1	2	6	5	4	3	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

4) Pour obtenir finalement A, il ne reste plus qu'à effectuer les quatre permutations suivantes : le 0 avec le 9 sur les deuxième et dernière rangées, le 1 avec le 8 sur la première rangée et enfin, le 1 avec le 8 sur la rangée $\frac{n+6}{4}=\frac{16}{4}=4$. Voilà le carré :

0	8	2	3	4	5	6	7	1	9
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
0	1	7	3	4	5	6	2	8	9
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
0	8	7	3	4	5	6	2	1	9
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
0	1	2	6	5	4	3	7	8	9
0	8	7	6	5	4	3	2	1	9

0	8	2	3	4	5	6	7	1	9
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
0	1	7	3	4	5	6	2	8	9
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
9	8	7	3	4	5	6	2	1	0
0	8	7	3	4	5	6	2	1	9
9	1	2	6	5	4	3	7	8	0
0	1	2	6	5	4	3	7	8	9
0	8	7	6	5	4	3	2	1	9

Carré A

0	0	9	0	9	9	0	9	9	0
8	1	1	8	8	8	1	1	1	8
7	2	2	7	7	7	7	2	2	2
6	6	6	3	3	3	3	6	6	3
5	5	5	4	4	4	4	5	5	4
4	4	4	5	5	5	5	4	4	5
3	3	3	6	6	6	6	3	3	6
2	7	7	2	2	2	2	7	7	7
1	8	8	1	1	1	8	8	8	1
9	9	0	9	0	0	9	0	0	9

Carré B

B est obtenu de A par une rotation de -90°. Pour fabriquer un carré magique, il suffit de faire :

$$t\,A + r\,B + a\,C$$

Avec $a = 1, r = 1, t = 10$ ou $a = 1, r = 10, t = 1$ nous obtenons deux carrés magiques normaux de somme 505. Notez qu'ils sont primitifs (l'un n'est pas obtenu de l'autre par des rotations).

1	81	30	31	50	60	61	80	20	91
99	12	22	69	59	49	32	72	82	9
98	13	23	68	58	48	38	73	83	3
7	17	77	34	44	54	64	27	87	94
96	86	76	35	45	55	65	26	16	5
95	85	75	36	46	56	66	25	15	6
4	84	74	37	47	57	67	24	14	97
93	18	28	63	53	43	33	78	88	8
2	19	29	62	52	42	39	79	89	92
10	90	71	70	51	41	40	21	11	100

a = 1, r = 1, t = 10

1	9	93	4	95	96	7	98	92	10
90	12	13	87	86	85	14	18	19	81
80	22	23	77	76	75	74	28	29	21
61	62	68	34	35	36	37	63	69	40
60	59	58	44	45	46	47	53	52	41
50	49	48	54	55	56	57	43	42	51
31	39	38	64	65	66	67	33	32	70
30	72	73	27	26	25	24	78	79	71
11	82	83	17	16	15	84	88	89	20
91	99	8	97	6	5	94	3	2	100

a = 1, r = 10, t = 1

$a = 3, r = 2, t = 20$, nous donne la carré magique presque normal suivant de somme S = 1020 :

3	163	61	63	101	121	123	161	41	183
199	25	45	139	119	99	65	145	165	19
197	27	47	137	117	97	77	147	167	7
15	35	155	69	89	109	129	55	175	189
193	173	153	71	91	111	131	53	33	11
191	171	151	73	93	113	133	51	31	13
9	169	149	75	95	115	135	49	29	195
187	37	57	127	107	87	67	157	177	17
5	39	59	125	105	85	79	159	179	185
21	181	143	141	103	83	81	43	23	201

a = 3, r = 2, t = 20

Nous pouvons déjà observer : (voir problème 39 de 11.4)

1) Les grandes diagonales du carré A renferment, dans l'ordre, les entiers de 0 à n – 1, de haut en bas pour la diagonale principale, de bas en haut pour la diagonale secondaire.
2) Les deux grandes diagonales sont formées de n nombres qui forment une suite arithmétique de raison $(r+t)$ pour la grande diagonale principale et de raison $(r-t)$ pour la grande diagonale secondaire.
3) Si $a, r\ et\ t$ sont positifs, le plus petit nombre et le plus grand nombre du carré sont situés aux extrémités de la grande diagonale principale, le plus petit étant en haut soit a.
4) $a=1, r=1, t=n\ ou\ a=1, r=n, t=1$ donnent des carrés magiques normaux primitifs.

Dans la Partie 3, annexe 23, vous trouverez le programme 13 qui vous permettra de construire des carrés magiques d'ordres pairs non multiples de 4, de 6 à 30. Vous pourrez construire autant de carrés presque normaux que vous le désirez et au moins 2 carrés normaux à l'aide de 3 variables seulement . Ce programme porte le nom : CM-arith-4k+2. Aussi avec les fichiers MATHEMATICA , annexe 22, pour les ordres de 6 à 22 et EXCEL, annexe 21, pour les ordres de 6 à 30.

Nous avons maintenant un **nouveau procédé** pour construire des carrés magiques de tous les ordres $n \geq 3$. Vous voulez des carrés magiques presque normaux ou un carré normal, c'est devenu très simple!!! Les répétitions ne nous inquiètent plus!!!

Vous voulez construire 200 carrés magiques d'ordre 16 presque normaux et un carré magique normal, il n'y a plus de problème.

Pour le normal, prenez $a=1, r=1, t=16$.

Pour les 200 presque normaux, prenez $a=3, r=2, t=31, 32, 33, \ldots$ par exemple.

Vous pourrez les trouver avec le fichier « Ordre 16 » dans MATHEMATICA, Partie 3, annexe 22, ou EXCEL, annexe 21, ou avec le programme CM-arith-4k dans MAPLE, annexe 23.

Dans la deuxième partie de l'ouvrage, nous reviendrons sur ce procédé nouveau de construction de carrés magiques afin d'y introduire la partie théorique. Tous les carrés magiques construits avec ce procédé ont tous en commun une même propriété : ils sont **arithmétiques.** Cela signifie que tous les nombres du carré magique peuvent se mettre sous la forme d'un tableau arithmétique c'est-à-dire d'un tableau formé de n suites arithmétiques horizontales de n nombres , celles-ci étant de même raison r. Ce même tableau est aussi formé de n suites arithmétiques verticales de n nombres, celles-ci étant de même raison t.

Quant aux carrés d'ordres impairs et pairs multiples de 4, ils sont tous **associatifs**!!!

7. Comment construire vos carrés magiques d'ordre 4?

Quand vous construisez un carré magique, vous êtes certains que la somme des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale donne le même total appelé somme magique. Votre carré possède donc au moins $2n+2$ figures magiques (les n rangées, les n colonnes et les 2 grandes diagonales). Mais il arrive souvent que le carré magique possède d'autres figures magiques que vous n'avez pas choisies. Cependant, vous pourriez imposer vous-mêmes les figures magiques que vous voulez. Comment?

Nous allons nous en tenir ici aux carrés d'ordre 4 seulement dont voici une structure générale :

a	b	c	S – a – b – c
d	e	f	S – d – e – f
S – 2 a – b – c – d + f + g	g	S – e – f – g	2 a + b + c + d + e – g – S
a + b + c – f – g	S – b – e – g	e + g – c	f + g – a

Carré 38

Le carré 38 est un carré magique de somme S; de plus, tout carré magique d'ordre 4 provient de ce carré. Il renferme 8 variables libres. Pour obtenir un carré magique, il suffit d'attribuer une valeur à chacune des variables et d'effectuer les calculs dans les cases où c'est nécessaire. (Voir partie 2)

Nous trouvons ici f(S) = 14, ce qui montre bien que tout carré magique d'ordre 4 possède au moins 14 figures magiques.

Maintenant, vous aimeriez que la figure formée des quatre cases vertes soit une figure magique. Pour cela, il faut que :

$$a+c+e+(S-d-e-f)=S$$

d'où

$$a+c-d-f=0$$

et finalement

$$f=a+c-d$$

Il vous reste à remplacer f par (a + c – d) partout dans le carré 38 là où vous rencontrez f.

Vous obtiendrez alors le carré magique suivant soit une structure générale pour vos carrés magiques, ceux qui possèdent la figure magique que vous avez imposée :

a	b	c	S – a – b – c
d	e	a + c – d	S – a – c – e
S – a – b – 2 d + g	g	S – a – c + d – e – g	2 a + b + c + d + e – g – S
b + d – g	S – b – e – g	e + g – c	c - d + g

Carré 39

Tous les carrés issus du carré 39 sont des carrés magiques qui possèdent la figure magique que vous avez imposée. Si un carré magique M d'ordre 4 possède votre figure magique imposée, alors M provient du carré 39. Remarquez que le carré 38 possède huit variables libres mais que le carré 39 n'en possède que sept. Bien entendu, puisque vous avez fait disparaitre la variable f!!

Avec S = 34, a = 1, b = 12, c = 14, d = 13, e = 8, g = 9, vous obtenez un carré magique normal qui possède votre figure magique imposée. Cette figure magique en implique automatiquement une autre. Laquelle? Plus le nombre de variables est grand, plus il est difficile de trouver un carré normal. Dans le cas d'un 4x4, nous savons déjà que S = 34 si nous voulons un normal et avec une figure imposée, il restera 6 variables. Quelles valeurs allons-nous donner à ces variables pour obtenir un carré normal ou tout au moins un carré presque normal? Mais dans le

cas d'un 15x15 avec une figure imposée, si nous voulons un normal, alors nous devrons attribuer une valeur entière à 193 variables avec la possibilité de répétitions!!! Le travail sera pénible!!! **Pour se faciliter la tâche, peut-être faut-il imposer plusieurs figures magiques et ainsi diminuer de beaucoup le nombre de variables libres.**

1	12	14	7
13	8	2	11
4	9	15	6
16	5	3	10

S = 34 et f(34) = 86

Si vous désirez imposer une deuxième figure magique, alors vous partirez du carré 39 et vous procèderez de la même façon qu'avec le carré 38. Vous aurez une somme de 4 expressions et vous poserez cette somme égale à S. Vous pourrez alors isoler une variable et faire comme vous avez fait avec la variable f. Cette variable disparaitra alors du carré 39 et vous obtiendrez un nouveau carré qui renfermera 6 variables libres. Les carrés magiques issus de ce dernier carré auront tous vos deux figures magiques imposées.

Vous devez effectuer quelques manipulations algébriques afin de trouver le carré magique général (passage du carré 38 au carré 39 et passage du carré 39 au suivant) à partir duquel vous allez construire les carrés magiques qui auront vos figures magiques imposées.

Ces calculs algébriques peuvent être effectués par des logiciels de mathématiques (MATHEMATICA, MAPLE, EXCEL, …).

8. Problème du cavalier et carré magique

Nous prenons pour acquis que le lecteur connait la marche du cavalier sur un échiquier standard. Le problème du cavalier consiste à parcourir toutes les cases une et une seule fois à partir d'une case donnée.

Pour réaliser un tel exploit, nous pouvons nous servir d'un procédé heuristique qui consiste à déplacer le cavalier sur une case de laquelle nous avons le maximum de cases où aller.

Plaçons 1 sur la case de départ, 2 sur la case suivante, 3 sur la suivante et ainsi de suite, le passage de la case notée n à la case notée n + 1 se faisant toujours avec le cavalier. Nous avons ainsi un carré d'ordre 8 qui renferme tous les entiers de 1 à 64. La question : ce carré peut-il être magique?

8		6		10			
5		9					
	7	4					
			3				
	2						
1							

Ce carré sera-t-il magique?

Le carré ci-haut montre les 9 premiers mouvements du cavalier, la case de départ étant la dernière case de la première colonne dans laquelle se trouve le 1.

En 2003, Stertenbrink et Meyrignac ont donné la réponse à la question posée plus haut et ce, en regardant tous les cas possibles (138,25 jours de calculs à 1 GHz). **Parmi tous les carrés trouvés, aucun n'était magique!!!** Cependant, ils ont trouvé 140 carrés semi-magiques et un des plus intéressants est le suivant car toutes les rangées et toutes les colonnes totalisent 260, une diagonale donne 256 et l'autre, 264. Il a été construit en 1862 par Jaenisch.

15	30	1	50	27	36	63	38
2	51	14	29	64	39	26	35
31	16	49	4	33	28	37	62
52	3	32	13	40	61	34	25
17	42	53	48	5	24	11	60
54	45	20	41	12	57	8	23
43	18	47	56	21	6	59	10
46	55	44	19	58	9	22	7

Carré 40, Jaenisch

Tout simplement remarquable !!! **Ce carré est presque magique !!** Remarquez que ce circuit est **fermé**; en effet, de 64, nous revenons à notre case de départ avec un mouvement de cavalier!!!

En terminant, voyons ce très beau carré magique normal d'ordre 8. Il est dû à Feisthamel. Nous passons des entiers de 1 à 32 à l'aide de 31 mouvements de cavalier puis nous passons de 32 à 33 par un mouvement de tour et enfin, de 33 à 64 à l'aide de 31 mouvements de cavalier.

5	14	53	62	3	12	51	60
54	63	4	13	52	61	2	11
15	6	55	24	41	10	59	50
64	25	16	7	58	49	40	1
17	56	33	42	23	32	9	48
34	43	26	57	8	39	22	31
27	18	45	36	29	20	47	38
44	35	28	19	46	37	30	21

Carré 41, Feisthamel

Le carré 40 est obtenu avec 63 mouvements de cavalier et il est presque magique. Le carré 41 est obtenu avec 62 mouvements de cavalier et un mouvement de tour mais il est magique!!!

Dans les deux cas, le cavalier n'est jamais passé 2 fois sur la même case!!!

9. Magie avec Dürer

Nous allons nous servir d'un carré magique normal d'ordre 4 qui est appelé un «Dürer». Nous verrons cette «classe» de carrés magiques dans la deuxième partie de l'ouvrage (5.4 du chapitre 5). Ils sont caractérisés par 24 figures magiques que nous verrons ici.

Vous êtes entrain de construire un carré magique d'ordre 4 et vous avez déjà placé 12 nombres dans votre carré. Vous demandez à une autre personne, avant de placer les 4 derniers nombres, quelle somme magique S voulez-vous? Vous placez ensuite les 4 derniers nombres et vous obtenez la somme magique S demandée!!! En fait, vous êtes parti d'un Dürer normal et vous avez enlevé les nombres 13, 14, 15 et 16.

13	4	10	7
6	11	1	16
3	14	8	9
12	5	15	2

Carré 42

	4	10	7
6	11	1	
3		8	9
12	5		2

Carré 43

Le carré 42 est un carré magique Dürer car le petit carré d'ordre 2 situé dans le coin en haut et à gauche est une figure magique (c'est cette figure magique qui caractérise les Dürer); en effet, 13 + 4 + 6 + 11 = 34, la somme magique du carré 42.

Vous pouvez observer qu'un seul nombre a été enlevé dans chaque colonne, chaque rangée et chaque diagonale du carré 43. Si vous voulez que le nouveau carré ait pour somme S, alors il vous suffira de placer les quatre nouveaux nombres dans les cases vides de la façon suivante :

A	4	10	7
6	11	1	A+3
3	A+1	8	9
12	5	A+2	2

Carré 44

avec $A = S - 21$.

Ce nouveau carré est toujours un Dürer et il est de somme S. Ainsi, avec $S = 100$, vous obtenez le Dürer suivant :

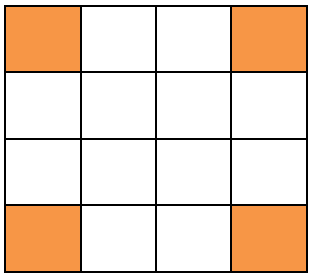
79	4	10	7
6	11	1	82
3	80	8	9
12	5	81	2

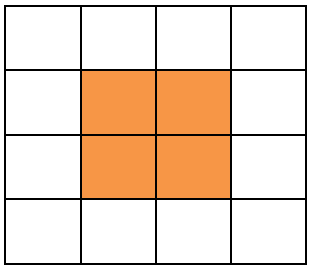
Remarque:

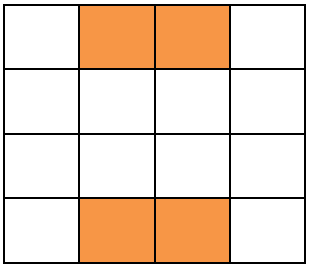
Si vous voulez seulement des entiers positifs et aucune répétition dans votre nouveau carré Dürer, il faudra alors exiger $A \geq 13$ d'où $S - 21 \geq 13$ et finalement $S \geq 34$.

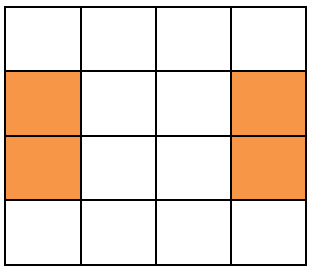
Vous pouvez utiliser ce résultat dans votre spectacle. Il vous faudra trouver le moyen de vous faire donner du public un nombre supérieur ou égal à 34; en demandant, par exemple, jusqu'à quel âge désirez-vous vivre ou encore, à quel âge est décédée votre grand-mère? Vous aurez alors un Dürer formé de 16 entiers positifs tous différents.

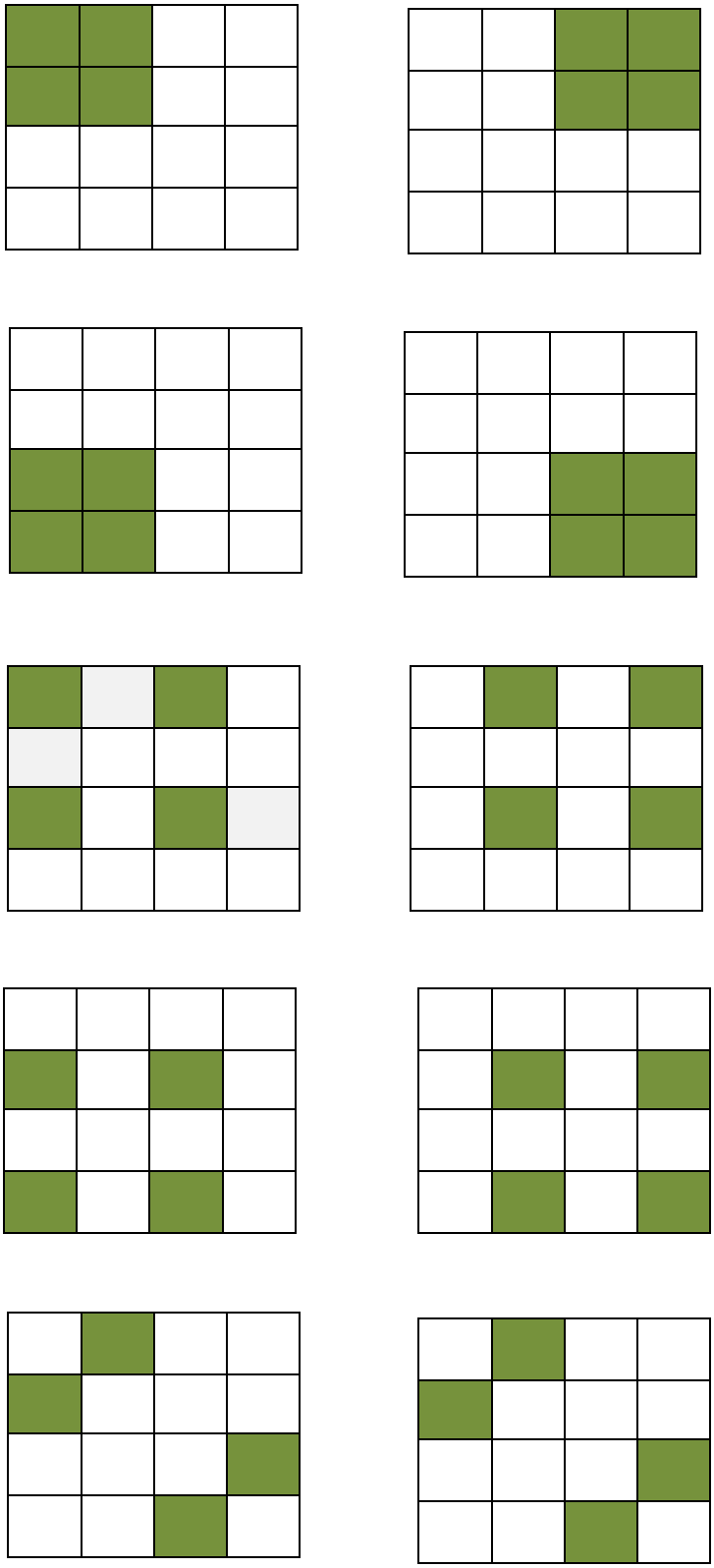
Voici les figures magiques que vous aurez dans votre carré magique Dürer : bien entendu, les quatre rangées, les quatre colonnes et les deux grandes diagonales puis les figures magiques suivantes :











Le Dürer duquel nous sommes partis (carré 42) a été convenablement choisi afin de remplacer **quatre entiers consécutifs**, ici 13, 14, 15 et 16, qui occupaient les cases qui forment le schéma suivant : nous enlevons un nombre par colonne respectivement de gauche à droite, en partant de la case située à gauche dans la première rangée puis en atteignant les 3 autres cases par : mouvement de cavalier, diagonale, mouvement de cavalier. Le carré 42 n'est pas unique; en voici trois autres :

1	16	10	7
6	11	13	4
15	2	8	9
12	5	3	14

Carré 45

A	16	10	7
6	11	13	A+3
15	A+1	8	9
12	5	A+2	14

Carré 46 ; **A = S – 33**

1	8	14	11
10	15	5	4
7	2	12	13
16	9	3	6

Carré 47

A	8	14	11
10	15	5	A+3
7	A+1	12	13
16	9	A+2	6

Carré 48 ; **A = S – 33**

9	8	2	15
14	3	5	12
7	10	16	1
4	13	11	6

Carré 49

A	8	2	15
14	3	5	A+3
7	A+1	16	1
4	13	A+2	6

Carré 50 ; **A = S – 25**

Si dans votre spectacle, vous voulez utiliser vos quatre carrés (44, 46, 48 et 50), alors pour être certain que les 16 nombres obtenus dans votre carré soient tous positifs et tous différents, il vous suffira d'exiger S > 49.

10. Glossaire 1

Les nombres :

1. **Entiers** : ce sont les nombres $\{\ldots ; -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \ldots\}$. Nous les appelons aussi **entiers relatifs**. Il y en a une infinité.
2. **Entiers consécutifs :** ce sont des entiers écrits dans l'ordre croissant ou décroissant et le passage de l'un à l'autre se fait en ajoutant ou retranchant 1. Ainsi, 5, 6, 7, 8 sont des entiers consécutifs contrairement aux entiers 4, 6, 7, 8, 11. Les entiers 10, 9, 8, 7, 6 sont aussi consécutifs.
3. **Entiers naturels :** ce sont les nombres {0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 33, 34, …} ; il y en a une infinité.
4. **Nombres premiers** : ce sont les entiers naturels plus grands que 1 qui se divisent seulement par 1 et par eux-mêmes. Ainsi, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, … sont des nombres premiers. Il y a une infinité de nombres premiers et tout entier > 1 qui n'est pas un nombre premier se décompose en un produit de nombres premiers (théorème fondamental de l'arithmétique). Par exemple : 15 = 3 x 5 et 36 = 2 x 2 x 3 x 3. Notons que tous les nombres premiers sont impairs excepté 2.
5. **Nombres rationnels :** ce sont les nombres qui s'écrivent $\frac{m}{n}$ où m est un entier et n, un entier non nul (différent de 0). $\frac{2}{3}$; $\frac{11}{7}$; $\frac{-4}{13} = \frac{4}{-13} = -\frac{4}{13}$; $\frac{-11}{-6} = \frac{11}{6}$; $\frac{27}{1} = 27$ sont des nombres rationnels. Notez que $\frac{2}{3} = 0,6666666....$, $\frac{0}{3} = 0$, $\frac{5}{4} = 1,25$ et $\frac{8}{7} = 1,142857142857...$ avec le groupe 142857 qui se répète indéfiniment. Il y a une infinité de nombres rationnels entre deux nombres rationnels quelconques.
6. **Nombres réels :** ce sont les nombres qui sont soit rationnels, soit irrationnels. Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme m/n où m est un entier et n, un entier différent de 0. Il y a une infinité de nombres réels entre deux nombres réels donnés. La racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait est toujours un nombre irrationnel; la racine carrée de 13 par exemple.

Les carrés magiques :

7. **Carré arithmétique d'ordre n** : c'est un carré magique d'ordre n tel que tous ses nombres peuvent se mettre sous la forme d'un **tableau arithmétique** d'ordre n. Tous les carrés magiques construits avec le nouveau procédé de construction de carrés magiques présenté dans la section 6 de la Partie 1, sont arithmétiques, quel que soit l'ordre n.

8. **Carré magique** : c'est un carré subdivisé en $n \times n$ cases carrées identiques réparties sur n rangées de n cases et n colonnes de n cases, chaque case contient un seul nombre et la somme des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est toujours égale à un même nombre S. En voici un exemple :

16	9	23	12	5
22	15	1	19	8
4	18	7	25	11
10	21	14	3	17
13	2	20	6	24

Carré 51

Nous avons un carré subdivisé en 5 x 5 = 25 cases identiques réparties sur 5 rangées de 5 cases et sur 5 colonnes de 5 cases avec un seul nombre par case et la somme des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est 65.

9. **Carré hyper-magique :** c'est un carré magique **d'ordre pair** tel que :

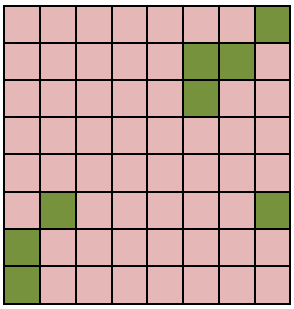
   1. Chaque fois que nous prenons un petit carré d'ordre 2 à l'intérieur du grand carré, la somme des quatre cases est toujours égale à $\frac{4S}{n}$.
   2. Sur toute diagonale, grande ou brisée, la somme de deux nombres séparés par $\frac{n-2}{2}$ autres nombres, est toujours égale à $\frac{2S}{n}$.

   La condition 2. précédente implique à elle seule qu'un hyper-magique est toujours pandiagonal (voir le théorème 7.2 du chapitre 7, partie 2).

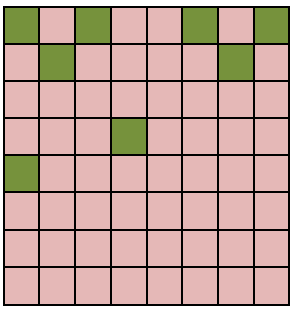
   Les carrés 22 et 28 sont des carrés hyper-magiques. Un carré hyper-magique, donc pandiagonal, formé d'entiers, dont l'ordre pair est non divisible par 4 ne peut pas être normal (voir 7.3 du chapitre 7, partie 2). C'est pourquoi le carré 22, formé d'entiers, d'ordre 6, et 6 n'est pas divisible par 4, n'est pas normal; il est cependant presque normal. Quant au carré 28, il est normal.

   Tous les hyper-magiques sont donc pandiagonaux.

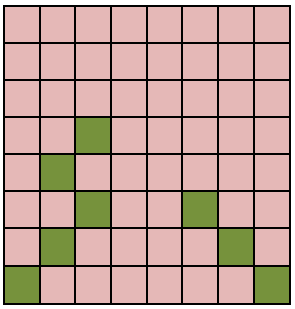
10. **Carré hyper-magique-alpha :** c'est un carré hyper-magique d'ordre 8 qui possède les cinq figures magiques et la demi-figure suivantes :



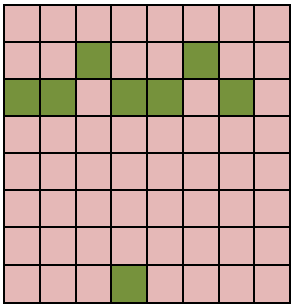
Carré 52



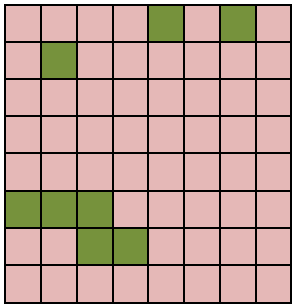
Carré 53



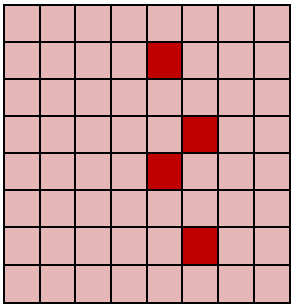
Carré 54



Carré 55



Carré 56



Carré 57

Le carré 57 renferme une demi-figure (quatre cases) de somme $\frac{S}{2}$. Le carré 28 est un hyper-magique-alpha normal.

11. **Carré magique Ariane :** c'est un carré d'ordre 5 qui renferme 11 fusées. Le carré 20 est un carré Ariane; il contient 6 fusées verticales et 5 horizontales et 3 de celles-ci sont illustrées en bleu et vert.
12. **Carré magique associatif :** c'est un carré magique tel que chaque fois que nous prenons deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré, la somme de ceux-ci est toujours égale à $\frac{2S}{n}$. Un carré ultra-magique est donc un carré magique pandiagonal et associatif. Si l'ordre est impair, alors la case centrale renferme $\frac{S}{n}$ (problème 10 de 7.4).
13. **Carré magique diabolique :** c'est un carré magique d'ordre 4 caractérisé par 86 figures magiques. Ses seize nombres forment toujours une suite arithmétique. Pour plus de détails, voir la section 5.10 du chapitre 5 de la partie 2.

14. **Carré magique équivalent :** soient A et B, deux carrés du même ordre. Si B peut être obtenu par une rotation de 0°, 90°, 180° ou 270° de A, alors nous dirons que B est un équivalent de A. Si B peut être obtenu en regardant A par derrière (voir 32 et 33 de ce glossaire), alors ce carré B est aussi un équivalent de A ainsi que ses rotations de 90°, 180° ou 270°. A est donc un équivalent de lui-même et chaque carré A engendre huit carrés équivalents dont lui-même. Il est évident que A magique implique B magique et que B est de même somme magique que A.
15. **Carré magique Gaudi :** c'est le carré magique que Josep Subirachs, sculpteur et peintre catalan, a placé sur la façade de la Passion de la basilique Sagrada Familia à Barcelone, Espagne. Sa somme magique est S = 33, l'âge du Christ à sa mort. C'est le carré 24.
16. **Carré magique normal :** qui renferme tous les entiers consécutifs à partir de 1. Ainsi, un carré magique normal d'ordre 7 renferme tous les entiers consécutifs de 1 à 49.
17. **Carré magique presque normal :** c'est un carré magique qui ne contient que des entiers positifs (> 0) tous différents. Le carré 25 est presque normal.
18. **Carré magique primitif :** tout carré magique, pris individuellement, peut-être considéré comme primitif. Nous dirons que deux carrés magiques A et B, de même ordre, sont primitifs si B n'est pas un équivalent de A donc A n'est pas un équivalent de B. Les carrés 42, 45, 47 et 49 sont primitifs deux à deux. Donc, deux carrés identiques ne sont pas primitifs.
19. **Carré magique trivial :** c'est un carré qui renferme le même nombre dans chaque case.
20. **Carré pandiagonal :** c'est un carré magique dans lequel toutes les diagonales brisées sont magiques.
21. **Carré premier :** carré magique qui contient que des nombres premiers.
22. **Carré semi-magique :** carré dont la somme des nombres de chaque rangée et de chaque colonne est toujours la même, soit S. Si, en plus, la somme des nombres de chaque grande diagonale était égale à S, alors le carré serait magique. Tout carré magique est semi -magique; évidemment, la réciproque est fausse.
23. **Carré super-premier :** c'est un carré premier dont la somme magique est aussi un nombre premier (voir carré 25).
24. **Carré ultra-magique :** c'est un carré magique pandiagonal tel que chaque fois que nous prenons deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré, la somme de ceux-ci est toujours égale à $\frac{2S}{n}$. Dans un ultra-magique d'ordre impair, la case centrale renferme toujours le nombre $\frac{S}{n}$ (voir le problème 10 de 7.4, partie 2). Le carré 21 est un exemple de carré ultra-magique.
25. **Diagonales d'un carré magique :** ce sont les deux grandes diagonales et les diagonales brisées. Les deux grandes diagonales sont la **principale** qui part de la case haut-gauche pour se terminer sur la case bas-droite et la **secondaire** qui part de la case haut-droite pour se terminer sur la case bas-gauche (voir section 2.2). Quant aux diagonales brisées, ce sont les brisées principales et les brisées secondaires. Une diagonale brisée principale est formée de 2 branches (petites diagonales) parallèles à la diagonale principale et situées de part et d'autre de celle-ci. Si une branche est constituée de k cases, alors l'autre branche est formée de n – k cases. Il en est de même des diagonales brisées secondaires. Ici, n est l'ordre du carré.

26. **Figure** dans un carré magique d'ordre n **:** c'est un groupe de n cases distinctes. Deux cases sont distinctes si elles occupent des positions différentes dans le carré. Notons que deux cases distinctes peuvent contenir le même nombre.

27. **Figure complète :** c'est une figure telle que ses cases se retrouvent une seule par rangée, par colonne et par grande diagonale. Dans le carré 42, les cases qui renferment 13, 14, 15 et 16 forment une figure complète. Tout carré d'ordre n > 3 possède une figure complète (voir le problème 59 de 5.18, chapitre 5, Partie 2 de l'ouvrage).

28. **Figure magique dans un carré magique :** c'est une figure dont la somme est égale à la somme magique. La somme d'une figure étant la somme des nombres qui se trouvent dans les cases de la figure. Par définition, une rangée est une figure magique de même qu'une colonne et une grande diagonale. Dans un carré magique d'ordre 4, les quatre coins forment toujours une figure magique de même que les quatre cases centrales.
29. **Fréquence d'un carré magique M :** c'est le nombre de figures magiques que possède le carré magique. La fréquence d'un carré magique M de somme S se note f(S) ou f(M). Un carré magique normal d'ordre 4 a pour somme 34 et f(34) = 86 signifie que le carré renferme 86 figures magiques. Tous les carrés magiques normaux d'ordre 4 renferment 86 figures magiques. Pour tout carré magique normal d'ordre 5, donc de somme S = 65, nous avons f(65) = 1394.
30. **Ordre d'un carré magique :** c'est la taille du carré. S'il est formé de n rangées donc de n colonnes, nous dirons que le carré est d'ordre n. Le carré magique 51 est d'ordre 5. Nous avons vu comment construire des carrés magiques d'ordre n >2.
31. **Permutation** : soit une liste ordonnée d'objets. Une permutation est une action qui consiste à changer l'ordre des objets de la liste. Par exemple, la permutation suivante :

$$\{a;b;c;d;e;f\} \rightarrow \{b;c;a;f;d;e\}$$

Dans la liste de gauche, a occupe la position 1, b occupe la position 2, …

Mais dans la liste de droite, a occupe la position 3, b occupe la position 1, …

C'est pourquoi nous pouvons écrire :

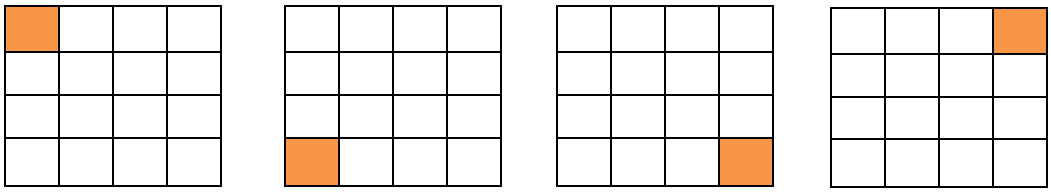
$$1 \rightarrow 3\ ;\ 2 \rightarrow 1\ ;\ 3 \rightarrow 2\ ;\ 4 \rightarrow 5\ ;\ 5 \rightarrow 6\ ;\ 6 \rightarrow 4$$

Ce qui veut dire que l'objet dans la position 1 devient l'objet dans la position 3, …

Si nous appliquons cette permutation à {m, n, p, q, s, t} ainsi qu'au nombre 543 629,

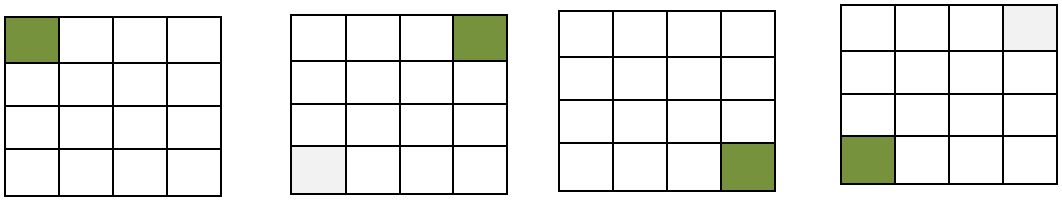
alors, nous obtenons : {n, p, m, t, q, s} et le nombre 435 962.

32. **Rotation d'un carré :** ce sera une rotation de 90°, 180° ou 270° donc dans le sens contraire des aiguilles d'une montre appelé **sens positif**. Une rotation de 0° du carré A nous redonne le carré A.



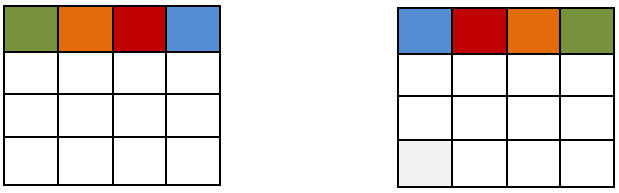
Carré A Rotation de 90°de A de 180°de A de 270°de A

ou une rotation de -90°, -180° ou -270° donc dans le sens des aiguilles d'une montre appelé **sens négatif**.



Carré A Rotation de -90°de A de -180°de A de -270°de A

33. **Rotation spatiale de 180° :**



Carré A Rotation 180° est-ouest de A

Les rotations de 32. sont dites **planaires** parce qu'elles se font dans la plan déterminé par votre feuille de papier. La présente rotation est dite **spatiale** puisque vous retournez votre feuille de papier dans l'espace, ici, de 180° d'est en ouest ou encore, de la droite vers la gauche. Nous pouvons aussi dire que vous regardez le carré A par derrière. Nous notons R_* cette rotation spatiale de 180°.

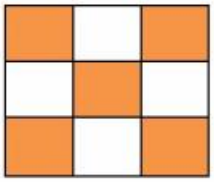
34. **Somme magique :** dans un carré magique, la somme des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale donne toujours le même nombre que nous appelons **somme magique**. Nous la notons habituellement S. Nous dirons souvent «la somme du carré magique» au lieu de «la somme magique du carré magique». La somme du carré 51 est S = 65. Si deux carrés magiques renferment exactement les mêmes nombres, alors ils ont la même somme. Bien entendu, si l'un renferme, par exemple, trois fois le nombre 2 alors l'autre renferme lui aussi trois fois le nombre 2.

35. **Structure générale d'ordre n :** c'est un carré magique général d'ordre n qui renferme une variable libre dans certaines cases et des expressions linéaires formées de ces variables libres dans les autres cases. Par exemple, voir le carré 38 ci-haut. Pour construire un carré magique particulier avec le carré 38, il suffit d'attribuer aux variables

libres a, b, c, d, e, f, g et S, une valeur réelle (chaque variable est remplacée par un nombre réel) et d'effectuer les calculs. Notez que nous considérons toujours la somme magique S comme variable libre. Nous pouvons voir une structure générale comme une **«machine»** à fabriquer des carrés magiques. Voir annexe 1.

36. **Suite arithmétique :** suite de nombres de la forme $a, a+r, a+2r, a+3r, a+4r, \ldots$; nous constatons alors que la différence entre un nombre de la suite et le nombre qui le précède immédiatement est toujours le même nombre r, appelé la **raison** de la suite arithmétique, a étant son premier terme. Une suite arithmétique peut être finie ou infinie : $1, 5, 9, 13, 17$ est une suite arithmétique finie dont le premier terme est 1 et la raison 4. La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique infinie dont le premier terme est 0 et la raison 2. Une suite arithmétique est dite **triviale ou constante** si sa raison est nulle.
37. **Super-figure :** soit donné un carré magique d'ordre n. Choisissons une figure magique que nous allons reproduire à l'extérieur du carré. Nous aurons alors une figure F (sans nombre dans ses cases) que nous pourrons déposer sur le carré et qui couvrira parfaitement la figure magique choisie. Imaginons les cases de F, en verre, de sorte que nous puissions déposer F sur le carré magique, couvrir parfaitement n cases et voir les n nombres situés dans les n cases couvertes par F. Nous dirons que F est une **super-figure** si, peu importe où et comment nous déposons F sur le carré magique, F couvre une figure magique; évidemment F doit couvrir parfaitement n cases du carré magique. Dans le carré magique suivant, nous avons choisi une figure magique (1, 22, 9, 20, 13). Elle est reproduite à droite du carré magique d'où la figure que nous appelons F. Maintenant, plaçons F n'importe où sur le carré magique (ici en vert) et nous couvrirons une figure magique!!!

1	15	22	8	19
23	9	16	5	12
20	2	13	24	6
14	21	10	17	3
7	18	4	11	25



F

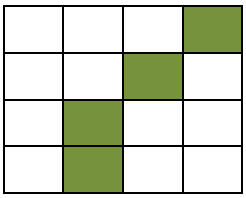
38. **Tableau arithmétique d'ordre n :** c'est un tableau carré d'ordre n tel que ses n rangées forment n suites arithmétiques de même raison r et ses n colonnes forment n suites arithmétiques de même raison t. Voici un tableau arithmétique d'ordre 4 :

a	a + r	a + 2 r	a + 3 r
a + t	a + t + r	a + t + 2 r	a + t + 3 r
a + 2 t	a + 2 t + r	a + 2 t + 2 r	a + 2 t + 3 r
a + 3 t	a + 3 t + r	a + 3 t + 2 r	a + 3 t + 3 r

39. **Ultra-figure :** c'est une figure située en-dehors du carré magique à partir de laquelle nous pouvons en construire sept autres en la tournant de 90°, 180° et 270°, puis en la regardant par derrière, nous en aurons une autre que nous allons aussi tourner de 90°, 180° et 270°. Ces huit figures, issues de la figure initiale sont appelées les figures équivalentes de celle-ci. Maintenant, si ces huit figures sont des figures magiques dans le carré magique, alors nous dirons que c'est une **ultra-figure**. Les figures des carrés 21e et 21f sont des ultra-figures. Notez que les huit figures équivalentes ne sont pas toujours différentes et pour cela, observez les figures des carrés 21b, 21c et la figure rouge de 21d. Enfin, une super-figure est toujours une ultra-figure; cependant, une ultra-figure n'est pas forcément une super-figure. **Il est très important de dire que si nous plaçons une figure équivalente sur le carré, alors c'est cette figure que nous devons voir lorsque nous regardons le carré de façon standard.**

11. Problèmes

1. Un carré d'ordre 36 possède combien de diagonales (les grandes et les brisées)?
2. Combien de figures magiques possède un carré magique normal d'ordre 8?
3. Quelle est la somme magique d'un carré magique normal d'ordre 22? D'ordre 40?
4. Dans tout carré magique d'ordre 3 et de somme magique S, montrez que le nombre central est toujours égal à S/3.
5. Un ami vous dit qu'il vient de fabriquer un carré magique d'ordre 3 avec neuf entiers; de plus, il vous dit que la somme magique de son carré est 2014. Vous lui répondez aussitôt : erreur mon ami!!! Cela n'est pas possible. Expliquez votre remarque.
6. Un carré magique d'ordre 3 renferme neuf nombres premiers. Sa somme magique peut-elle être un nombre premier?
7. Vérifiez que les figures des carrés 28a et 28b sont des super-figures pour le carré 28.
8. Le même ami vous affirme qu'il a construit un carré magique normal d'ordre 3 dont le centre est 6. Vous lui dites : impossible!!! Et le pauvre vous demande pourquoi? Qu'allez-vous lui répondre?
9. Construisez trois carrés magiques d'ordre 5 dont un normal et deux presque normaux.
10. Construisez un carré magique normal d'ordre 6 et un carré magique presque normal d'ordre 6 (ce dernier ne doit pas être normal).
11. Construisez un carré magique normal d'ordre 11, d'ordre 12 et d'ordre 14.
12. Construisez un carré presque normal d'ordre 11, d'ordre 12 et d'ordre 14 (aucun ne doit être normal).
13. Pouvons-nous construire un carré magique normal ou presque normal d'ordre 4 qui aura la figure magique suivante?



14. Voici le célèbre carré magique du peintre, graveur et mathématicien Albert Dürer (1471-1528) :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Carré 58

Vous verrez, dans la deuxième partie de l'ouvrage, que ce carré magique est dans le sous-espace des diaboliques-alpha.

a) Pouvez-vous transformer le carré 58 de façon à obtenir le Gaudi (carré 24)?
b) À partir du carré 58, trouvez un carré magique presque normal dont la somme magique est S = 38.
c) À partir du carré 58, trouvez une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes magiques consécutives à partir de 38.

15. Construisez un carré magique normal d'ordre 7 et trouvez-lui une **figure complète** (voir la définition dans le glossaire 1). De là, construisez 5 carrés magiques presque normaux de sommes consécutives.

16. Le problème 14. ci-haut nous permet de construire des carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de S = 38. Mais nous pouvons faire mieux!!! À partir du carré normal ci-dessous, montrez que vous pouvez construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes magiques consécutives à partir de S = 34. Nous verrons dans la Partie 2 de l'ouvrage , chapitre 5, que tous ces carrés sont des Dürer (les quatre cases du sous-carré d'ordre 2 situé dans le coin haut-gauche forment une figure magique).

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

17. À partir du carré magique normal d'ordre 5 suivant, construisez une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes magiques consécutives à partir de S = 65.

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

18. Trouvez les huit équivalents du carré magique 58 (voir problème 14)

19. Nous avons rencontré, plus haut, le Gaudi (carré 24). Celui-ci contient deux répétitions (deux fois le 10 et deux fois le 14). Il a probablement été obtenu à partir du carré d'Albert Dürer. Il est de somme 33. En utilisant le carré magique normal suivant :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

pouvez-vous construire un carré magique de somme 33 qui serait formé que d'entiers non négatifs tous différents deux à deux?

12. Remarque importante

Dans le numéro 8 du glossaire ci-haut, nous avons donné la définition du carré magique. Pour introduire le concept de carré magique, nous n'avons pas voulu donner une définition trop large dans la première partie de cet ouvrge. Cependant, dans la seconde partie, nous pourrions, dans la définition de carré magique, remplacer «nombres» par «objets mathématiques».

Nous entendons ici par objets mathématiques, des objets que nous pouvons additionner et multiplier par un nombre.

Par exemple, dans les cases de notre carré magique, nous pourrions y trouver des nombres réels, des nombres complexes, des quaternions, des polynômes, des fonctions et même des carrés magiques!!!

Solutions des problèmes de la Partie 1

1) Avec $n = 36$, le nombre de diagonales, grandes et brisées, est $2n = 72$.
2) Voir partie 1, le tableau de la page 8, pour $n = 8$, nous avons $35\,154\,340$ figures magiques.
3) $S = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$. Pour $n = 22$, nous trouvons $S = 5335$. Pour $n = 40$, $S = 32\,020$.
4) Puisque le carré est magique, nous avons :

a	b	c
d	e	f
g	h	k

$$\begin{array}{l} a+e+k=S \\ b+e+h=S \quad \Rightarrow \quad (a+b+c)+3e+(g+h+k)=3S \quad \Rightarrow \quad S+3e+S=3S \\ c+e+g=S \end{array}$$

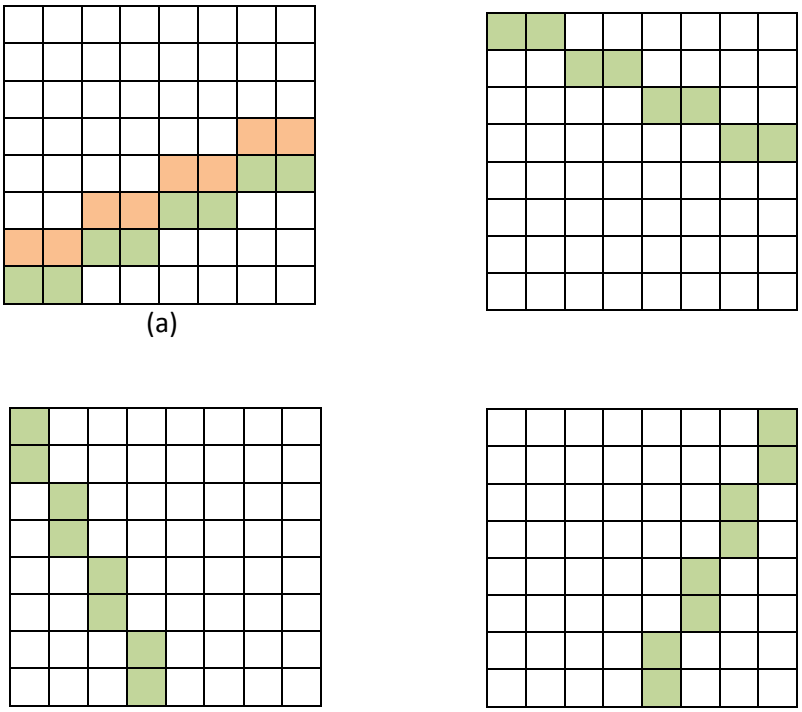
D'où $S = 3e \ et \ e = \dfrac{S}{3}$.

5) Le carré magique d'ordre 3 a donc pour centre un entier d'où :

$$centre = \frac{S}{3} = \frac{2014}{3} = 671{,}333...$$

qui n'est pas un entier. Cela contredit le fait que le centre soit un entier. Un tel carré magique n'existe donc pas.

6) Le centre est donc un nombre premier p. Sa somme magique est 3 x centre = 3p qui n'est pas un nombre premier (3x2, 3x3, 3x5, 3x7, …) ne sont pas premiers.
7) Le carré 28 est un hyper-magique-alpha; vous trouverez ce carré à la page 23 et ses propriétés à la page 24. Excepté l'escalier, il est très facile de montrer que les quatre autres figures sont des super-figures (placées où et comme vous voudrez dans le carré 28, la somme des 8 cases donne toujours 260, la somme magique). Quant à l'escalier, il vous suffira de vérifier 4 positions seulement soient celles indiquées ci bas en vert.
De plus, toutes ces figures sont des super-figures pour la structure générale des hyper-magiques-alpha



(a)

La figure (a) nous montre 4 carrés de somme 130 chacun d'où 520 pour les 4. Puisque l'escalier en vert est de somme 260, il en résulte que l'escalier en orangé est de somme 260. L'escalier est donc une super-figure!!!

Remarque : vous pouvez vérifier que les 8 équivalents de l'escalier sont bien représentés par les 4 positions vertes. Cela suffit pour montrer que l'escalier est une super-figure.

8) Ce carré normal a une somme magique S = 15 d'où le centre qui est forcément 5. Il ne peut donc pas être 6. Votre ami doit refaire ses calculs car un tel carré magique ne peut pas exister!!!
9) Nous vous suggérons de prendre l'algorithme ALG-1 à la page 36. Pour avoir un carré normal, prenez a = 1, r = 1 et t = 5 puis pour avoir un presque normal, prenez a = entier naturel différent de 0, r = entier naturel différent de 0 et t, un entier > 4r. Par exemple, prenez a = 3, r = 2 et t = 9 ou 10 ou 11 ou 12 ou … . NOTE : vous pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.
10) Utilisez l'algorithme ALG-3, page 44. Pour le carré normal, prenez a = 1, r = 1 et t = 6. Pour le presque normal, prenez a = entier naturel différent de 0, r = entier naturel différent de 0 et t, un entier > 5r. Par exemple, prenez a = 3, r = 2 et t = 11 ou 12 ou 13 ou 14 ou … . NOTE : vous pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.
11) Utilisez les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3 respectivement pour l'ordre 11, l'ordre 12 et l'ordre 14. ALG-2 est à la page 41. Pour l'ordre 11, prenez a = 1, r = 1 et t = 11; pour l'ordre 12, a = 1, r = 1 et t = 12; pour l'ordre 14, a = 1, r = 1 et t = 14. NOTE : vous

pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.

12) Pour les presque normaux, prenez a = entier naturel différent de 0, r = entier naturel différent de 0 et t, un entier > (n-1) r. Par exemple, pour l'ordre 14, prenez a = 3, r = 2 et t = 27 ou 28 ou 29 ou … .NOTE : vous pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.

13) La réponse est non car dans un carré normal ou presque normal, les 16 entiers sont tous différents. Si la figure en vert est magique, alors nous avons :

$$a + b + c + d = S \text{ et } a + b + c + e = S \text{ (diagonale)}$$

d'où $d = S - a - b - c$

$e = S - a - b - c$

Nous avons donc d = e. Le carré renferme deux entiers égaux; il ne peut pas être presque normal ni normal.

			a
		b	
	c		
e	d		

14)

a) La réponse est oui. Nous allons tourner le carré 58 de 180° pour obtenir :

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Les 4 cases vertes forment une figure complète. Si nous enlevons 1 dans chaque case verte, alors le carré obtenu est toujours magique et sa somme passe de 34 à 33.

b) Il suffit d'ajouter 1 dans toutes les cases du carré magique 58. Mais une autre façon de faire est d'ajouter 4 dans les 4 cases vertes de la figure complète du carré 58 qui suit:

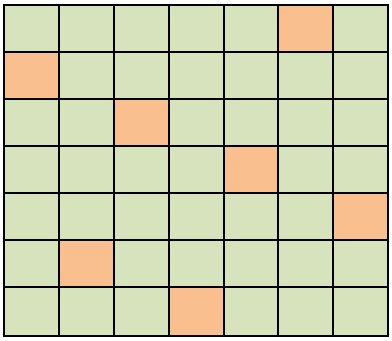
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Carré 58

Avec cette figure complète, en ajoutant 4 dans chacune des 4 cases, nous obtenons un carré magique presque normal de somme 38.

c) Il suffit d'ajouter l'entier k dans toutes les cases de la figure complète avec k > 3. La somme magique sera S = 34 + k. Les sommes seront donc 38, 39, 40, 41, … .

15) Pour construire le carré magique d'ordre 7, utilisez l'algorithme ALG-1 ou encore, de façon équivalente, le fichier EXCEL «Ordre 7». Puis prenez la figure complète suivante :



La somme magique est S = 175. En ajoutant l'entier k dans chacune des 7 cases de la figure complète, la somme deviendra 175 + k. Quelle sera la plus petite valeur de k? Si le plus petit entier dans la figure complète est, par exemple, 40, alors ajoutez 10 dans les 7 cases de façon à avoir 50 et plus. La somme passera à 185 et les valeurs de k seront 10, 11, 12, 13, … . La plus petite valeur de k sera donc k = 10.

16) Avec ce carré magique normal d'ordre 4 et sa figure complète (13, 14, 15, 16), il suffit d'ajouter k dans les 4 cases de la figure complète pour obtenir un carré magique de somme S = 34 + k avec k, un entier positif ou nul. Nous aurons alors les sommes 34, 35, 36, 37, … . Puisque nous avons une figure complète qui renferme les 4 plus grands nombres du carré (figure complète idéale), alors nous pouvons construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 34.

17) Ce carré magique normal, de somme S = 65, possède une figure complète idéale. Il suffit d'ajouter l'entier k dans chacune des 5 cases. Le carré sera toujours magique et sa somme deviendra S = 65 + k. Avec k = 0, 1, 2, 3, … , nous aurons les sommes S = 65, 66, 67, 68, … .

18) Les huit équivalents sont :

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 12 & 1 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 16 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 16 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 1 & 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 14 & 15 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 13 & 8 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

19) La réponse est oui car il existe un carré magique normal d'ordre 4 qui est tel qu'une figure complète contienne les 4 plus petits entiers. Nous avons trouvé ce carré parmi les 880 carrés normaux primitifs (voir Partie 3, annexe 23, programme 01).

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 10 \\ 14 & 11 & 4 & 5 \\ 12 & 13 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 15 & 10 \\ 14 & 11 & 3 & 5 \\ 12 & 13 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Le dernier carré est magique de somme S = 33 et ne présente aucune répétition!!

Partie 2

Les carrés magiques et les carrés multiplicatifs

Table des matières

1. Introduction
2. Opérations sur les carrés magiques, espaces vectoriels
3. Structures générales des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, formés de carrés magiques et dimensions

4. Les carrés magiques d'ordre 1, 2 et 3
   4.1 Les carrés magiques d'ordre 1
   4.2 Les carrés magiques d'ordre 2
   4.3 Les carrés magiques d'ordre 3, première structure générale
      4.3.1 Carrés magiques normaux et équivalents
      4.3.2 Seconde structure générale pour l'ordre 3
      4.3.3 Quelques propriétés
      4.3.4 Carrés magiques d'ordre 3 formés de neuf entiers différents donnés à l'avance
      4.3.5 Comment fabriquer des carrés magiques spéciaux?
      4.3.6 Carrés magiques formés de nombres premiers
      4.3.7 Les fréquences des sommes
      4.3.8 Problèmes

5. Les carrés magiques d'ordre 4.
   5.1 Introduction.
   5.2 Calcul du nombre de figures magiques avec MATHEMATICA.
   5.3 L'espace vectoriel E_4 des carrés magiques d'ordre 4.
   5.4 Le sous-espace des Dürer.
   5.5 Le sous-espace des super-Dürer.
   5.6 Le sous-espace des super-Dürer-alpha.
   5.7 Le sous-espace des super-Dürer-bêta.
   5.8 Illustration des fréquences.
   5.9 Le sous-espace des A-Dürer.
   5.10 Le sous-espace des diaboliques.
   5.11 Le sous-espace des diaboliques-alpha.
   5.12 Relation entre les diaboliques et les diaboliques-alpha.
   5.13 Une observation importante.
   5.14 Répartition des entiers dans un carré magique normal d'ordre 4; nouvelle classification des 7040 normaux.
   5.15 Carrés magiques spéciaux d'ordre 4.
   5.16 Un problème.
   5.17 Résumé.
   5.18 Problèmes.

6. Les carrés magiques d'ordre 5.
   6.1 Introduction.
   6.2 Les Ariane.

6.3 Les ultra-magiques d'ordre 5.
6.4 Les ultra-magiques-alpha.
6.5 Problèmes.

7. Carrés ultra-magiques et hyper-magiques.
7.1 Introduction.
7.2 Carrés hyper-magiques d'ordre 6.
7.3 Condition nécessaire pour avoir un pandiagonal d'ordre pair.
7.4 Problèmes.

8. Des carrés magiques spectaculaires.
8.1 Introduction.
8.2 Des carrés magiques d'ordre 8 très spéciaux : les Gauss.
8.3 Les hyper-magiques-alpha.
8.4 Les ultra-magiques-bêta.
8.5 Carrés magiques associatifs d'ordres pairs.
8.6 Problèmes.

9. Produit matriciel de carrés magiques.
9.1 Introduction.
9.2 Produit matriciel de carrés magiques.
9.3 Le procédé AB^2 et les puissances impaires d'un carré magique.
9.4 Autres produits.
9.5 L'inverse d'un carré magique.
9.6 Problèmes.

10. Carrés magiques premiers.
10.1 Introduction.
10.2 Carrés premiers ordinaires.
10.3 Carrés premiers parfaits.
10.4 Carrés hyper-premiers.
10.5 Carrés premiers d'ordre 3.
10.5.1 L'OCTUOR «12 P».
10.6 Problèmes.

11. Les carrés arithmétiques.
11.1 Introduction.
11.2 Carrés arithmétiques d'ordre n.
11.3 Théorème fondamental des carrés magiques; nouveau procédé de construction.
11.4 Problèmes.

12. Les carrés magiques fonctionnels.
12.1 Introduction.
12.2 Quelques exemples.
12.3 Un carré très spécial.
12.4 D'autres carrés fonctionnels.
12.5 Problèmes.

13. Les carrés magiques de Christian Boyer.
13.1 Introduction.

13.2 Les carrés k-multi-magiques.
13.3 Les carrés multiplicatifs.
13.4 Carrés magiques de puissances.
13.5 Le plus petit tri-magique, un petit penta-magique et deux bi-magiques.
13.6 Les cubes magiques parfaits.
13.7 Problèmes.

14. Varia
14.1 Les carrés magiques d'ordre 3 formés d'entiers carrés.
14.2 Indépendance, dépendance et degré de dépendance de deux carrés magiques.
14.3 Des diviseurs universels pour les carrés magiques d'ordre 3.
14.4 Comment perdre un cerf-volant.
14.5 Deux grandes curiosités.
14.6 Carrés magiques et entiers modulo (k).
14.7 Six décompositions d'un carré magique en une somme de carrés magiques.
14.8 Carré magique de fréquence k généré par une structure générale de fréquence k.
14.9 Un tour de magie.
14.10 Les carrés magiques associatifs.
14.11 Nouveau carré magique à l'aide de quatre permutations.
14.12 Carrés magiques composés.
14.13 Des carrés composés surprenants d'ordre 5 et quelques curiosités.
14.13.1 Des carrés verticaux-alpha, horizontaux-alpha et plus. (Voir Partie 3, annexe 5).
14.14 Carrés magiques et permutations.
14.15 Carrés magiques et structures algébriques.
14.15.1 Introduction.
14.15.2 Structures de groupes, d'anneaux et de corps.
14.15.3 Inverse d'un carré magique.
14.16 Des triplets spéciaux de carrés magiques.
14.16.1 Introduction.
14.16.2 Solution de l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^n$.
14.16.3 Construction des triplets.
14.16.4 Un triplet déterminé par M, un carré premier 2-multi-magique.
14.17 Carrés magiques de sommes consécutives.
14.17.1 Carrés doublement magiques.
14.17.2 Carrés magiques emboîtés.
14.18 Problèmes.

15. Les carrés multiplicatifs.
15.1 Introduction.
15.2 Les carrés multiplicatifs d'ordre 3.
15.3 Les carrés multiplicatifs d'ordre 4.
15.3.1 Les carrés m-Dürer.
15.3.2 Les carrés m-super-Dürer.
15.3.3 Le carré d'Edwards.
15.4 Les carrés multiplicatifs d'ordres ≥ 5 et des m-ultra-magiques d'ordre 5.
15.5 Les carrés m-hyper-magiques et des m-hyper-magiques d'ordre 6.
15.6 Relation entre les carrés magiques et les carrés multiplicatifs.
15.7 Problèmes.

16. Glossaire 2, notations et symboles.

17. Solutions des problèmes de la Partie 2

1. Introduction

La deuxième partie de l'ouvrage s'adresse principalement à tous ceux et celles qui veulent aller plus loin dans l'étude des carrés magiques. La théorie y sera beaucoup plus présente et une bonne base en mathématiques et en particulier en algèbre linéaire sera très utile. Nous allons présenter un bon nombre de nouveaux résultats en y mentionnant les principales idées qui permettront au lecteur de construire ou de compléter la démonstration de ceux-ci. Pour d' autres résultats, les démonstrations seront complètes.

Nous allons voir que l'ensemble des carrés magiques d'ordre *n* formés de nombres réels est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels. La dimension de cet espace est *n* (*n* - 2). Nous allons nous intéresser à de nombreux sous-espaces vectoriels de dimensions inférieures. Dans le cas des carrés magiques d'ordre 4, nous avons créé un certain nombre de sous-espaces vectoriels de différentes dimensions à partir de figures magiques imposées, ce qui est un peu arbitraire. Mais le lecteur peut voir comment nous avons fait et il peut, à son tour, créer de nouveaux sous-espaces avec ses propres figures magiques qu'il imposera.

Une question importante se pose dès que nous avons un sous-espace de carrés magiques qui eux, ont été fabriqués à partir de figures imposées : existe-t-il des carrés magiques normaux dans ce sous-espace? Et si oui, combien y en a-t-il? S'il y en a, alors nous allons tenter de les trouver tous, dans la mesure du possible!!! En effet, les carrés magiques normaux d'ordre 8 sont tellement nombreux que nous n'avons pas encore réussi à en déterminer le nombre exact; il s'agit ici de plusieurs centaines de milliards!!!

De grandes nouveautés se retrouvent dans la partie 2 : les carrés arithmétiques et le nouveau procédé de construction de carrés magiques d'ordre $n \geq 3$ relié au théorème fondamental des carrés magiques. Les carrés fonctionnels dans lesquels des fonctions prennent la place des nombres dans les cases des carrés. Par exemple, la somme magique d'un tel carré magique pourrait être $x^2 + 2\cos(3x)$. Des résultats très intéressants sur les carrés fonctionnels nous attendent. Puis les produits matriciels de carrés magiques. Le résultat d'un tel produit est-il un carré magique? En général, la réponse est non. Le produit est cependant toujours un carré semi-magique. Si A et B sont deux carrés magiques, alors nous sommes certains que le produit AB est semi-magique. Avec de nombreux sous-espaces, nous verrons qu'il arrive souvent que le produit (AB) B soit magique.

Nous verrons aussi que si nous appliquons une certaine permutation à tous les nombres de certains carrés magiques, alors le nouveau carré obtenu est encore magique et de même somme. Tout simplement extraordinaire!!! Il y aura aussi les carrés magiques de sommes consécutives puis les carrés doublement magiques.

Et ce n'est pas fini!!!

2. Opérations sur les carrés magiques, espaces vectoriels

Nous pouvons regarder les carrés magiques comme des matrices carrées. Certains parlent même de matrices magiques.

L'addition de deux carrés magiques de même ordre se fait exactement comme l'addition de deux matrices carrées de même taille.

La **multiplication** d'un carré magique par un nombre réel (un scalaire) se fait de la même façon qu'avec une matrice.

Dans le but de simplifier, nous allons souvent représenter un carré magique par une matrice.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

Ainsi, le carré magique ci-haut peut prendre la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Voyons un exemple d'addition de carrés magiques et de multiplication d'un carré magique par un nombre mais avant, rappelons que nous notons souvent un élément d'une matrice A par a_{ij} qui n'est rien d'autre que l'élément situé à l'intersection de la i-ème rangée et de la j-ème colonne. Si nous appelons B, le carré précédent, alors l'élément b_{23} est le nombre 11 et l'élément b_{42} est le nombre 3.

$$A = \begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 75 & 94 & 97 & 104 \\ 102 & 117 & 120 & 31 \\ 166 & 119 & 14 & 71 \\ 27 & 40 & 139 & 164 \end{pmatrix}$$

$$5B = \begin{pmatrix} 20 & 75 & 70 & 5 \\ 25 & 50 & 55 & 40 \\ 45 & 30 & 35 & 60 \\ 80 & 15 & 10 & 65 \end{pmatrix}$$

Pour faire A + B, nous additionnons les nombres qui occupent les mêmes positions dans chaque carré. L'élément c_{ij} dans A + B s'obtient donc comme suit : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Pour faire 5B, nous devons multiplier chaque nombre de B par 5. L'élément c_{ij} de 5B est donné par $c_{ij} = 5b_{ij}$ et d'une façon générale, l'élément c_{ij} de k B s'écrit $c_{ij} = k\,b_{ij}$.

Il est clair que si A et B sont des carrés magiques respectivement de sommes S et T, alors A + B est un carré magique de somme S + T et k A est un carré magique de somme k S. De plus, les propriétés des opérations sur les matrices s'appliquent aux carrés magiques d'où le théorème 2.1 qui suit. Nous pouvons aussi faire le produit (matriciel) de deux carrés magiques A et B. Ce produit AB, en général, n'est pas un carré magique. Nous verrons dans le chapitre 9 le théorème qui affirme que si A et B sont des carrés magiques respectivement de sommes S et T, alors le produit AB est un carré semi-magique de somme ST. Nous verrons aussi que les puissances impaires de certains carrés magiques sont encore des carrés magiques!

Soient M un carré magique d'ordre n et W, le carré trivial d'ordre n qui renferme l'entier 1 dans toutes ses cases. Ajouter le nombre k dans toutes les cases de M revient à faire M + k W qui est toujours un carré magique. Nous pourrons écrire M + k au lieu de M + kW.

Théorème 2.1 :

L'ensemble des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Les carrés magiques d'ordre n sont donc formés de n^2 nombres réels mais ce que nous voulons, ce sont des carrés magiques formés d'entiers positifs tous différents (carrés presque normaux) ou mieux encore, des carrés magiques formés de tous les entiers consécutifs de 1 à n^2 (carrés normaux). Nous allons en faire un **objectif important : pouvoir construire des carrés magiques normaux et presque normaux. Cet objectif sera atteint!!!**

3. Structures générales des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, formés de carrés magiques et dimensions

Considérons l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre n. Nous allons trouver un carré magique général, formé de n^2 expressions algébriques linéaires, chaque expression renfermant un certain nombre de variables. Pour avoir un carré magique particulier, il suffira de remplacer chaque variable par un nombre réel. Chaque fois que nous ferons cela, nous obtiendrons un carré magique particulier et de plus, tout carré magique sera obtenu de cette façon. Ce carré magique général est appelé **structure générale.** Celle-ci n'est pas unique.

Nous pouvons voir la structure générale comme une «machine» à fabriquer des carrés magiques d'ordre n et à les fabriquer tous. Une autre structure générale est équivalente à la première en ce sens qu'elle permettra de construire les mêmes carrés magiques.

Il est bien évident que cette structure générale dépend de n. Comment allons-nous la construire? **Nous commençons avec n = 3.** Pour que le carré suivant soit magique, il faut avoir :

a	b	c
d	e	f
g	h	k

$$a+b+c=S$$
$$d+e+f=S$$
$$a+d+g=S$$
$$b+e+h=S$$

Il s'ensuit que :

$$c=S-a-b$$
$$f=S-d-e$$
$$g=S-a-d$$
$$h=S-b-e$$

et ainsi, quatre variables (c, f, g, h) ne sont plus dans le carré mais la variable S, elle, vient d'apparaitre. Si nous posons :

$$A=a+b+d+e$$

alors, $c+f=2S-A=g+h$ d'où $k=S-(2S-A)=A-S.$ Ainsi notre carré est semi-magique; la somme dans chaque rangée et chaque colonne donne S et ce, quelle que soit la valeur attribuée aux cinq variables $a, b, d, e, S.$

Maintenant, pour que notre carré soit magique, il faut et il suffit que la somme dans chaque grande diagonale donne S :

$$(*) \quad \begin{cases} a+e+A-S=S \\ (S-a-d)+e+(S-a-b)=S \end{cases}$$

Puis le système $(*)$ est équivalent au système :

$$(**) \quad \begin{cases} d+2e+2a+b=2S \\ d-e \ \ +2a+b=S \end{cases}$$

Il est très important d'observer ici que le système $(**)$ possède une **solution unique** en d et $e.$ Enfin, le système $(**)$ est équivalent au système suivant :

$$(***) \quad \begin{cases} e=\dfrac{S}{3} \\ d=\dfrac{4S}{3}-2a-b \end{cases}$$

Il ne reste plus que trois variables dans notre carré magique : $a, b, S.$ Le voici :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 3

Ce carré est la structure générale des carrés magiques d'ordre 3. D'abord, c'est bien un carré magique de somme S puis, étant donnée l'unicité de la solution du système $(**)$, tout carré magique d'ordre 3 provient de cette structure générale. Ainsi, en faisant varier a, b *et* S dans l'ensemble des nombres réels, nous obtiendrons tous les carrés magiques d'ordre 3 à partir de (1).

Par exemple, avec $a=4,\ b=9,\ S=15$, nous obtenons : $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Puis avec $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{2}{7}$, $S=4$, nous obtenons : $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{2}{7} & \frac{31}{14} \\ \frac{43}{21} & \frac{4}{3} & \frac{13}{21} \\ \frac{19}{42} & \frac{50}{21} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$

Avec $a=\pi, b=\sqrt{2},\ S=5\sqrt{3}$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} & 5\sqrt{3}-\sqrt{2}-\pi \\ \frac{20}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}-2\pi & \frac{5}{\sqrt{3}} & -\frac{10}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}+2\pi \\ -\frac{5}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}+\pi & \frac{10}{\sqrt{3}}-\sqrt{2} & \frac{10}{\sqrt{3}}-\pi \end{pmatrix}$$

Regardons maintenant le cas n = 4. Pour que le carré suivant soit magique, il faut avoir :

a	b	c	i
d	e	f	j
u	g	v	m
r	s	t	k

$$a+b+c+i=S$$
$$d+e+f+j=S$$
$$u+g+v+m=S$$
$$a+d+u+r=S$$
$$b+e+g+s=S$$
$$c+f+v+t=S$$

Il s'ensuit que :

$$i=S-a-b-c$$
$$j=S-d-e-f$$
$$m=S-u-g-v$$
$$r=S-a-d-u$$
$$s=S-b-e-g$$
$$t=S-c-f-v$$

et ainsi, six variables (i, j, m, r, s, t) ne sont plus dans le carré mais la variable S, elle, vient d'apparaitre. Si nous posons :

$$A=a+b+c+d+e+f+u+g+v$$

alors, $i+j+m=3S-A=r+s+t$ d'où $k=S-(3S-A)=A-2S.$ La variable k vient de disparaitre du carré qui lui devient semi-magique. Quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, a, b, c, d, e, f, u, g, v et S, nous obtenons toujours un carré semi-magique.

Maintenant notre carré semi-magique sera magique si et seulement si nous avons :

$$(*) \quad \begin{cases} a+e+v+A-2S=S \\ (S-a-b-c)+f+g+(S-a-d-u)=S \end{cases}$$

lequel est équivalent au système $(**)$ suivant :

$$(**) \quad \begin{cases} u + 2v + a + e + A - u - v = 3S \\ u \qquad + 2a + b + c + d - f - g = S \end{cases}$$

Ce système possède une **solution unique** en u *et* v d'où le système équivalent suivant :

$$(***) \quad \begin{cases} u = S - 2a - b - c - d + f + g \\ v = S - e - f - g \end{cases}$$

Il ne reste plus que huit variables dans notre carré magique : a, b, c, d, e, f, g et S. Le voici :

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & e & f & S-d-e-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & S-e-f-g & 2a+b+c+d+e-g-S \\ a+b+c-f-g & S-b-e-g & -c+e+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 4 *et de somme S*

(2) est la structure générale des carrés magiques d'ordre 4. D'abord, c'est bien un carré magique de somme S puis, étant donnée l'unicité de la solution du système $(**)$, tout carré magique d'ordre 4 provient de cette structure générale. Ainsi, en faisant varier a, b, c, d, e, f, g *et* S dans l'ensemble des nombres réels, nous obtiendrons tous les carrés magiques d'ordre 4 à partir de (2). Par exemple, nous obtenons le carré magique suivant avec :

$$a = 18 \text{ ; } b = 6 \text{ ; } c = 11 \text{ ; } d = 10 \text{ ; } e = 13 \text{ ; } f = 14 \text{ ; } g = 5 \text{ ; } S = 56$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 6 & 11 & 21 \\ 10 & 13 & 14 & 19 \\ 12 & 5 & 24 & 15 \\ 16 & 32 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc construire tous les carrés magiques d'ordre 3 et d'ordre 4 à partir des structures générales (1) *et* (2).

Théorème 3.1 :

Considérons un carré magique d'ordre 3 tel que les variables a *et* b soient des entiers. Alors, tous les nombres du carré magique seront des entiers si et seulement si S est un entier multiple de 3.

Théorème 3.2 :

Les seize nombres d'un carré magique d'ordre 4 sont des entiers dès que les huit variables prennent des valeurs entières.

Si nous donnons aux huit variables, des valeurs entières, alors tous les nombres du carré magique seront des entiers mais quels entiers? Il pourrait y avoir des négatifs et pire encore, des répétitions!!!

Si nous trouvons des négatifs et que le plus petit soit, par exemple, -11, alors il suffira d'ajouter 12 dans toutes les cases et le carré restera magique et ne renfermera que des entiers positifs. Évidemment, nous pourrions tout aussi bien ajouter à toutes les cases un entier ≥ 12.

S'il y a des répétitions après avoir donné à toutes les variables une valeur entière, alors nous regarderons dans la structure générale, les expressions responsables d'une répétition donnée et nous pourrons, en général, la faire disparaître. Cependant, il peut arriver que nous fassions apparaître alors une autre répétition (ou même plusieurs autres). Nous devons donc choisir convenablement les valeurs entières que nous allons attribuer à nos variables, ce qui n'est pas toujours simple.

Ce problème sera résolu un peu plus loin. Par exemple, pour les 4x4, nous allons trouver une structure générale, celle des super-Dürer-alpha, qui nous permettra de construire très facilement une infinité de carrés magiques formés d'entiers positifs, sans répétition.

Terminons en observant que les structures générales $(1)\ et\ (2)$ renferment dans chaque case, une expression linéaire des variables; par exemple, dans (2), nous trouvons les expressions linéaires $S-e-f-g$ et $S-2a-b-c-d+f+g$.

Enfin, énonçons de nouveau un **grand objectif** que nous poursuivons :

Construire des carrés magiques **presque normaux** (tous les nombres du carré sont des entiers ≥ 1 tous différents deux à deux) et des carrés magiques **normaux** (le carré renferme tous les entiers consécutifs de $1\ à\ n^2$).

Nous dirons que ces carrés magiques sont de **beaux carrés**!!!

Enfin, regardons le cas $n \geq 5$. Pour que le carré suivant soit magique, il faut avoir :

a_{11}	a_{12}	a_{13}	. . .	$a_{1(n-1)}$	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	. . .	$a_{2(n-1)}$	b_2
$a_{(n-1)1}$	$a_{(n-1)2}$	$a_{(n-1)3}$	. . .	$a_{(n-1)(n-1)}$	b_{n-1}
c_1	c_2	c_3		c_{n-1}	d

$$(*) \quad \begin{cases} b_i = S - (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \ldots + a_{i(n-1)}) \\ c_j = S - (a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + \ldots + a_{(n-1)j}) \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, (n-1).$$

Ainsi, les variables b_i et c_j vont disparaître du carré tandis que s'ajoutera la variable S .

Posons : $\sum a_{ij} = A \quad où \;\; i, j = 1, 2, 3, \ldots, (n-1).$ Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i = (n-1)S - A = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \quad \text{d'où } d = A - (n-2)S$$

La variable d disparaît et notre carré est semi-magique. Enfin, le carré semi-magique sera magique si et seulement si :

$$(**)\quad \begin{cases} a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{(n-1)(n-1)} + A - (n-2)S = S \\ (S - a_{11} - a_{12} - \ldots - a_{1(n-1)}) + (a_{2(n-1)} + a_{3(n-2)} + \ldots + a_{(n-1)2}) + (S - a_{11} - a_{21} - \ldots - a_{(n-1)1}) = S \end{cases}$$

Nous allons voir que le système (**) est compatible en montrant que deux variables s'exprimeront, **de façon unique**, en fonction des autres variables. Nous choisirons de faire disparaître a_{12} et a_{23}. Le système (**) est équivalent au système suivant :

$$(***)\quad \begin{cases} a_{23} + a_{12} + (\ldots) = (n-1)S \\ a_{12} + (\ldots) = S \end{cases} \qquad n \geq 5$$

et nous voyons que le système possède une **solution unique** en a_{23} *et* a_{12}; ces deux dernières variables s'expriment de façon unique en fonction des $(n^2 - 2n)$ variables qui restent dans le carré. En effet, ce nombre est :

$$(n-1)^2 + 1 - 2 = n^2 - 2n$$

Nous venons de construire une structure générale d'ordre n. De plus, étant donnée l'unicité de la solution du système (***), nous pouvons conclure que cette structure générale génère tous les carrés magiques d'ordre $n \geq 5$.

En observant ces structures générales, pour $n \geq 4$, nous voyons que nos carrés magiques renfermeront seulement des entiers si à nos variables, nous avons attribué des valeurs entières.

À partir des structures générales pour $n \geq 4$, nous pouvons donc affirmer ceci :

Théorème 3.3 :

Si dans la structure générale des carrés magiques d'ordre $n \geq 4$, nous attribuons des valeurs entières à toutes les variables, alors tous les nombres du carré magique ainsi obtenu sont des entiers.

Nous verrons plus loin le théorème fondamental des carrés magiques et le nouveau procédé de construction de carrés magiques lequel a déjà été présenté dans la partie 1. Nous pourrons alors construire des carrés magiques de tous les ordres $n \geq 3$, formés de nombres entiers positifs et tous différents et ce d'une façon très simple. Les répétitions seront choses du passé!!!

Appelons E_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels. Nous pouvons toujours associer à E_n, une structure générale laquelle permettra de construire tous les carrés magiques d'ordre n. Nous dirons que cette structure générale représente E_n.

Nous avons vu que le nombre de variables nécessaires pour construire un carré magique d'ordre n est $n^2 - 2n$. Par exemple, pour construire un carré magique d'ordre 20, nous devrons attribuer à $20^2 - 2\times 20 = 360$ variables, une valeur entière dans la mesure où nous voulons construire un carré magique formé d'entiers. De plus, si nous souhaitons avoir que des entiers différents, nous devrons attribuer 360 entiers différents à nos 360 variables, ce qui est tout de même un certain travail!! Pour construire un carré d'ordre 12, nous aurons besoin de 120 variables.

Le résultat sera un carré magique qui contiendra peut-être des nombres négatifs et peut-être des répétitions. «Réparer» un tel carré n'est pas toujours simple et peut demander un certain temps. «Réparer» signifie ici : faire disparaître le zéro, les négatifs et les répétitions.

Voilà le principal inconvénient de notre approche par les structures générales. Construire un carré normal d'ordre 20 à partir de la structure générale de E_{20} est un travail très difficile pour ne pas dire presqu'impossible!!! Par contre, si nous voulons un carré magique quelconque, il n'y a pas de problème. Si nous le voulons presque normal, c'est déjà plus facile.

Construire un carré magique normal d'ordre 20 avec le nouveau procédé présenté dans la partie 1, section 6, sera un jeu d'enfant!!!

Mais notre approche par les structures générales nous offre un grand nombre de possibilités lorsque l'ordre n'est pas trop grand. Avec $n \leq 8$, nous arrivons à construire des carrés magiques extraordinaires voire fantastiques!!! Nous pourrions aller jusqu'à $n = 12$, ce qui est encore raisonnable!

Nous verrons, plus loin, les nombreux sous-espaces de carrés magiques d'ordre 4 à partir desquels nous avons trouvé des résultats remarquables.

Le nombre minimum de variables libres dans chaque structure générale est la **dimension** de l'espace. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 3.4 :

La dimension de l'espace vectoriel E_n sur le corps $\mathbb{R}$ des réels est $n(n-2)$.

Cela signifie que tout carré magique d'ordre n est une combinaison linéaire de $n(n-2)$ carrés magiques linéairement indépendants qui forment une base de E_n. Cette base découle facilement de la structure générale qui représente E_n.

En imposant des figures magiques à la structure générale de E_n, nous trouverons une nouvelle structure générale qui représentera un sous-espace vectoriel de dimension inférieur à $n(n-2)$. Nous verrons cela de plus près à partir du chapitre 5.

Enfin, ces structures générales ne sont pas uniques; elles dépendent de notre choix des deux dernières variables à éliminer (voir les systèmes (**)).

4. Les carrés magiques d'ordre 1, 2 et 3

4.1 Les carrés magiques d'ordre 1

Il s'agit d'un carré formé d'une seule case dans laquelle nous avons placé un nombre :

35

Par exemple, le carré ci-dessus renferme le nombre 35. Il n'y a qu'une seule rangée, une seule colonne et par défaut, nous dirons que les diagonales se confondent avec la rangée qui elle-même, se confond avec la colonne.

De tels carrés ne présentent pas vraiment d'intérêt. En quelque sorte, ils s'identifient aux nombres réels. Personne ne sera impressionné si nous disons que la somme dans chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale est 35.

Afin de simplifier, nous écrirons un carré magique sous la forme matricielle. Ainsi, le carré ci-haut s'écrira :

$$(35)$$

L'addition de tels carrés se fait comme pour les nombres réels :

$$(35)+(18)=(53)$$

et le produit d'un nombre par un carré se fait comme suit :

$$7(35)=(245)$$

Nous ne reviendrons pas sur ces carrés magiques d'ordre 1.

4.2 Les carrés magiques d'ordre 2

Un carré magique d'ordre 2 est formé de 4 cases et doit obligatoirement avoir la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Puisqu'il est magique, il faut $2A = A + B \; et \; 2B = A + B$ d'où $A = B$. Si un carré d'ordre 2 est magique, il est donc forcément trivial :

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$

Théorème 4.1 :

Un carré d'ordre 2 est magique si et seulement s'il est trivial.

Il est évident que la somme de deux carrés triviaux de sommes S et T est un carré trivial de somme S + T et que le carré trivial de somme S, s'il est multiplié par le nombre k, deviendra un carré trivial de somme k S.

Ces carrés magiques ne sont pas très spectaculaires puisqu'ils sont triviaux. Cependant, les carrés triviaux seront d'une grande utilité un peu plus loin.

4.3 Les carrés magiques d'ordre 3, première structure générale

Un des plus anciens carrés magiques d'ordre 3 est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sa somme est S = 15 et de plus, il est normal puisqu'il renferme tous les entiers de 1 à 9. Un carré magique d'ordre 3 possède une propriété très intéressante : le nombre central est toujours $\frac{S}{3}$. Dans notre exemple, $\frac{S}{3} = \frac{15}{3} = 5$, le centre du carré. Donc, si un carré magique d'ordre 3 est normal, alors son centre doit être le nombre 5. Nous ne pouvons pas construire un carré magique d'ordre 3, de somme S = 36, si son centre n'est pas 12.

Tous les carrés magiques d'ordre 3 proviennent de la structure générale (1) ci-dessous, laquelle a été trouvée dans le chapitre 3 :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 3

En général, nous allons construire des carrés magiques formés d'entiers positifs tous différents (carrés magiques presque normaux) et si possible, des carrés magiques normaux c'est-à-dire des carrés magiques formés de tous les entiers de $1 \; à \; n^2$ (ici, de 1 à 9).

4.3.1 Carrés magiques normaux et équivalents

Nous voulons trouver tous les carrés magiques formés des entiers consécutifs de 1 à 9. Avec MATHEMATICA, nous pouvons construire une table formée de 81 carrés magiques en attribuant à a et à b les valeurs entières de 1 à 9 et à S, la valeur 15. Parmi ces 81 carrés magiques, seulement 8 sont retenus car les 73 autres renferment des entiers négatifs ou nuls ou des entiers qui se répètent et même des entiers autres que ceux de 1 à 9. Voici donc les huit carrés magiques normaux d'ordre 3 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} ; M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} ; M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} ; M_4 = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} ; M_6 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} ; M_7 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} ; M_8 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Cependant, tous proviennent du même carré magique M_1 comme suit :

$$M_1 = R^0(M_1) \; ; \; M_2 = R^1(M_1) \; ; \; M_3 = R^2(M_1) \; ; \; M_4 = R^3(M_1)$$
$$M_5 = R_*(M_1) \; ; \; M_6 = R_*^1(M_1) \; ; \; M_7 = R_*^2(M_1) \; ; \; M_8 = R_*^3(M_1)$$

en précisant que :

La notation $R^0(A)$ définit une rotation planaire de 0° du carré A.

La notation $R^1(A)$ définit une rotation planaire de 90° du carré A.

La notation $R^2(A)$ définit une rotation planaire de 180° du carré A.

La notation $R^3(A)$ définit une rotation planaire de 270° du carré A.

$R_*(A)$ n'est rien d'autre que A vu par derrière. Placez-vous derrière M_1 et vous verrez M_5.

Ainsi, nous pourrions écrire, par exemple : $M_7 = R^2(M_5) = R^2(R_*(M_1)) = R_*^2(M_1)$. Les huit carrés magiques ci-haut s'expriment donc tous à l'aide de M_1 qui sera, par choix arbitraire, notre **carré primitif**. Les sept autres sont les **équivalents** de M_1. Nous parlerons souvent des huit équivalents de M_1 en considérant M_1 comme un équivalent de lui-même. **Voir annexe 17.**

Revenons à $R_*(A)$. De regarder A par derrière est équivalent à effectuer une rotation spatiale de 180°est-ouest de A. C'est aussi équivalent à transposer $R^1(A)$.

Suspendons un carré magique au plafond d'une pièce à l'aide d'une corde d'un mètre et demi. Sans toucher au carré, nous pouvons le regarder de huit façons différentes et voir en tout, huit carrés magiques. Ce sont les huit équivalents. Ceux-ci sont en général différents.

Théorème 4.2 :

Si les quatre coins d'un carré magique d'ordre n renferment des nombres différents, alors les huit équivalents sont différents.

Preuve :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$$

Nous venons d'illustrer les quatre nombres a, b, c, d situés dans les quatre coins d'un carré d'ordre n. Il est évident que si ces quatre nombres sont différents, alors les huit équivalents sont différents.

Si M est symétrique (M est égal à sa transposée), alors il y aura au moins 2 équivalents égaux.

Soit maintenant le carré magique A et ses sept équivalents B, C, D, E, F, G et H définis ainsi :
$B = R^1(A);\ C = R^1(B);\ D = R^1(C);\ E = R_*(A),\ F = R^1(E);\ G = R^1(F); H = R^1(G).$

Nous présenterons toujours les sept équivalents de A dans cet ordre. Maintenant, si dans A, nous considérons le nombre u en position $(i\ ;\ j)$, alors dans ses équivalents, quelle position occupera ce même nombre u? La réponse se trouve dans le tableau suivant :

A	$(i\ ;\ j)$
B	$(n+1-j\,;\,i)$
C	$(n+1-i\,;\,n+1-j)$
D	$(j\ ;\ n+1-i)$
E	$(i\ ;\ n+1-j)$
F	$(j\ ;\ i)$
G	$(n+1-i\,;\ j)$
H	$(n+1-j\,;\,n+1-i)$

Nous appellerons les trois premiers équivalents de A, ses rotations et ses quatre autres, ses transposées. En effet, le tableau nous montre immédiatement les résultats suivants :

$$E=B^t\ ;\ F=A^t\ ;\ G=D^t\ ;\ H=C^t$$

où B^t représente la transposée de B, A^t représente la transposée de A,...

Corollaire 4.3 :

Les huit équivalents de tout carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ sont tous différents.

Théorème 4.4 :

Il n'existe qu'un seul carré magique normal primitif d'ordre 3.

Remarque :

Pendant une rotation planaire ou spatiale, les nombres dans les cases ne changent pas.

4.3.2 Seconde structure générale pour l'ordre 3

À l'aide de plusieurs exemples numériques, nous pouvons observer, dans la structure (1), que les neuf nombres se retrouvent en six suites arithmétiques de trois nombres :

$$(\#) \qquad \begin{matrix} A & A+r & A+2r \\ A+t & A+t+r & A+t+2r \\ A+2t & A+2t+r & A+2t+2r \end{matrix}$$

Les trois suites horizontales sont arithmétiques de raison r et nous constatons que les trois suites verticales sont aussi arithmétiques mais de raison t. Nous trouvons :

$$A = b$$
$$r = a - \frac{S}{3}$$
$$t = \frac{2S}{3} - a - b$$

La nouvelle structure des carrés magiques d'ordre 3 est donc :

$$(1.1) \qquad \begin{pmatrix} A+t+2r & A & A+2t+r \\ A+2t & A+t+r & A+2r \\ A+r & A+2t+2r & A+t \end{pmatrix}$$

$$\textit{Seconde structure générale}$$

où la somme magique est $S = 3A + 3r + 3t$. (Voir problèmes 21 et 23 de 4.3.8)

Notons que les deux structures générales renferment chacune trois variables. Tous les carrés magiques d'ordre 3 s'obtiennent en donnant une valeur réelle à chaque variable, que ce soit dans (1) ou dans (1.1). Cette seconde structure générale est beaucoup plus simple que la première. Il est évident que si A, r, t sont des entiers positifs, alors les neuf nombres du carré sont des entiers positifs. De plus, si $t > 2r \ ou \ r > 2t$, alors les neuf entiers positifs du carré sont tous différents. Ceci est une condition suffisante pour s'assurer que les neuf nombres du carré magique soient neuf entiers positifs tous différents.

Nous savons maintenant comment éviter les répétitions!!!

Théorème 4.5 :

Pour qu'un carré magique d'ordre 3 soit presque normal, il suffit que $A, \ r \ et \ t$ soient des entiers positifs avec $t > 2r \ ou \ r > 2t$. Il sera normal dès que $A = 1, r = 1 \ et \ t = 3$ ou $A = 1, r = 3 \ et \ t = 1$.

Preuve : évident si on observe bien les suites arithmétiques de $(\#)$.

Par exemple, avec $A=13, r=2, t=5,$ nous trouvons le carré magique suivant formé de neuf entiers positifs tous différents ; il est de somme 36.

$$\begin{pmatrix} 6 & 13 & 17 \\ 23 & 12 & 1 \\ 7 & 11 & 18 \end{pmatrix}$$

La condition du théorème 4.5 est suffisante mais non nécessaire; en effet, avec $A=15, r=-2, t=-5,$ nous obtenons le carré magique suivant formé de neuf entiers positifs tous différents ; il est de somme 24.

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 3 \\ 5 & 8 & 11 \\ 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Par contre, avec $A=15, r=2, t=-1,$ nous obtenons le carré magique suivant formé de neuf entiers positifs mais non tous différents; il est de somme 48.

$$\begin{pmatrix} 18 & 15 & 15 \\ 13 & 16 & 19 \\ 17 & 17 & 14 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus loin que le tableau $(\#)$ sera appelé **«tableau arithmétique»** et que le carré magique (1.1) sera appelé **«carré arithmétique».**

4.3.3 Quelques propriétés

Voici trois propriétés que possède tout carré magique d'ordre 3 :

1. Dans tout carré magique d'ordre 3, le centre Y est toujours $\frac{S}{3}$.
2. La somme des quatre coins est toujours égale à $\frac{4S}{3}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ X & Y & X \\ 0 & X & 0 \end{pmatrix}$ La somme des quatre nombres dans les positions X est toujours $\frac{4S}{3}$.

Ces propriétés sont très faciles à montrer en se servant des structures générales (1) ou (1.1).

4.3.4 Carrés magiques d'ordre 3 formés de neuf entiers différents donnés à l'avance

Soient donnés neuf entiers différents. Avec ceux-ci, pouvons- nous construire un carré magique d'ordre 3?

Si ce carré magique est possible, alors la somme S_9 de ces neuf entiers doit être un multiple de 3 puisque la somme magique S est donnée par $S = \frac{S_9}{3}$; de plus, l'entier central est $\frac{S}{3}$ donc S_9 doit être un multiple de 9. Enfin, $\frac{S}{3}$ doit faire partie des neuf entiers donnés à l'avance. Par exemple, pouvons-nous construire un carré magique avec les entiers :

a) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15?$ Non car la somme de ces neuf entiers, 73, n'est pas un multiple de 3 (73 ne se divise pas par 3 dans les entiers).
b) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 13 ; 17?$ Non car la somme de ces 9 entiers, 75, est divisible par 3 mais non par 9.
c) $1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14?$ Non car la somme, 72, est bien divisible par 9 (donc divisible par 3) mais 8 ne se trouve pas dans la liste des 9 entiers donnés.
d) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14?$ Ici, la somme 72 est divisible par 9 et le quotient 8, est bien dans la liste. Le carré magique semble donc possible. Cependant, il ne l'est pas. Si le carré est magique, son centre est 8 et sa somme 24. Le 8 et le 14 sont forcément sur une même rangée, colonne ou diagonale et la somme 8 + 14 = 22 sera augmenté de 1, ce qui donne 23 ou de 3, ce qui donne 25, ou de 5, ce qui donne 27, … . Dans tous les cas, nous n'aurons jamais 24. Le carré ne sera jamais magique.
e) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 11 ; 13 ; 15?$ Enfin, la somme 72 est divisible par 9 et le quotient 8 est bien dans la liste. Cette fois, le carré magique de centre 8 et de somme 24 est possible. Pourquoi? La réponse nous vient de la seconde structure générale. Les neuf entiers se placent dans les suites arithmétiques suivantes :

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{matrix}$$

Les trois suites arithmétiques horizontales sont de raison $r = 2$ et les trois suites arithmétiques verticales, de raison $t = 5$. Voilà pourquoi le carré magique est possible :

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 13 \\ 11 & 8 & 5 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.6 :

Pour que neuf nombres forment un carré magique d'ordre 3, il faut et il suffit que ceux-ci puissent se mettre sous la forme :

$$\begin{matrix} A & A+r & A+2r \\ A+t & A+t+r & A+t+2r \\ A+2t & A+2t+r & A+2t+2r \end{matrix}$$

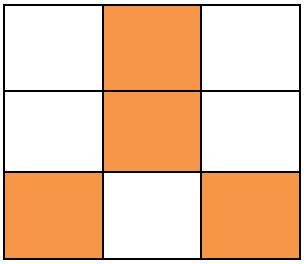
appelé tableau arithmétique.

Autrement dit, qu'ils puissent se mettre sous la forme de six suites arithmétiques dont trois sont horizontales de raison r et trois sont verticales de raison t.

Dès que les neuf nombres sont dans un tableau arithmétique, pour construire le carré magique, il suffit alors de placer les neuf nombres comme dans la structure générale (1.1).

4.3.5 Comment fabriquer des carrés magiques spéciaux?

Avec les structures générales (1) ou (1.1), nous pouvons fabriquer tous les carrés magiques d'ordre 3 formés de nombres réels. Partons de (1.1) et formons un carré magique de somme S qui possède la fusée illustrée ci-dessous :



Cela signifie que la somme des quatre cases donne S. Pour se faire, posons l'égalité suivante :

$$A+(A+t+r)+(A+r)+(A+t) = 3A+3t+3r$$

d'où : $$A = t+r$$

Donc un carré magique d'ordre 3 possède cette fusée si et seulement si $A = t+r$. En remplaçant A par $t+r$ dans (1.1), nous trouvons la structure générale (1.2) des carrés magiques d'ordre 3 munis de cette fusée. La voici :

$$(1.2) \qquad \begin{pmatrix} 2t+3r & t+r & 3t+2r \\ 3t+r & 2t+2r & t+3r \\ t+2r & 3t+3r & 2t+r \end{pmatrix}$$

Notez qu'en remplaçant A par $t+r$, nous avons une variable de moins dans (1.2). Nous dirons que (1.2) renferme deux variables libres; cela signifie qu'il suffit de donner à t et à r une valeur de notre choix afin d'obtenir un carré magique avec fusée. Les structures (1) et (1.1), quant à elles, renferment trois variables libres.

Voyons deux exemples :

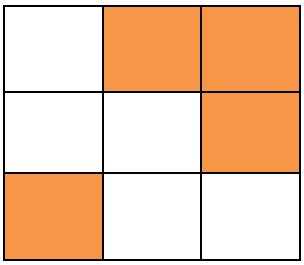
$$S = 24 \qquad\qquad S = 18$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 11 \\ 10 & 8 & 6 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 11 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$t = 3; r = 1 \qquad\qquad t = 4; r = -1$$

Ces deux carrés magiques renferment respectivement la fusée (4; 8; 5; 7) et la fusée (3; 6; 2; 7).

Trouvons maintenant les carrés magiques d'ordre 3 qui possèdent la flèche illustrée ci-dessous :



Un carré magique d'ordre 3 possède cette flèche si et seulement si nous avons l'égalité :

$$A + (A + 2t + r) + (A + 2r) + (A + r) = 3A + 3t + 3r$$

c'est-à-dire si et seulement si : $\qquad A = t - r$

En remplaçant A par $t-r$ dans (1.1), nous obtenons la structure générale (1.3) des carrés magiques d'ordre 3 qui possèdent la flèche illustrée plus haut. La voici :

$$(1.3) \qquad \begin{pmatrix} 2t+r & t-r & 3t \\ 3t-r & 2t & t+r \\ t & 3t+r & 2t-r \end{pmatrix}$$

Nous avons deux variables libres dans cette structure; en fait, l'égalité précédente implique qu'une variable va disparaitre dans (1.1) et ici, nous avons choisi d'éliminer A. Nous aurions pu éliminer la variable t en remplaçant dans (1.1), t par $A+r$ puisque $A=t-r$ est équivalent à $t=A+r$.

Voyons deux exemples :

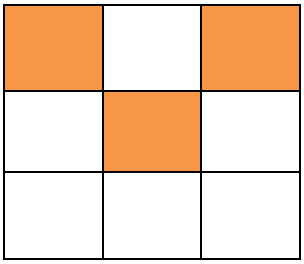
$$S=18 \qquad\qquad S=18$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$t=3;\ r=1 \qquad\qquad t=3; r=2$$

Ces deux carrés magiques renferment la flèche (2 ; 9 ; 4 ; 3) et la flèche (1;9; 5; 3).

Terminons avec la construction d'un carré magique d'ordre 3 qui possède la figure magique illustrée ci-dessous :



Rappelons que dans un carré d'ordre 3, une **figure** est un groupe de 3 cases qui occupent des positions différentes dans le carré. La somme d'une figure est la somme des nombres situés dans ses cases. Une figure est **magique** si la somme des nombres de ses cases donne la somme magique S.

Un carré magique d'ordre 3 possède cette figure magique si et seulement si nous avons l'égalité suivante :

$$(A+t+2r)+(A+t+r)+(A+2t+r) = 3A+3t+3r$$

c'est-à-dire si et seulement si : $\qquad r=-t$

La structure générale (1.4) est donc :

$$(1.4) \qquad \begin{pmatrix} A-t & A & A+t \\ A+2t & A & A-2t \\ A-t & A & A+t \end{pmatrix}$$

Nous constatons que les carrés magiques qui possèdent cette figure magique renferment des nombres qui se répètent. Par exemple :

$$S = 15$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A = 5 ; t = 1$$

Nous verrons, dans la section 4.3.7, que la fréquence de la structure générale (1.4) est $f(3A) = 18$. Cela signifie que tout carré magique qui provient de (1.4) possède au moins 18 figures magiques. Tous les carrés issus de (1.4) ont en commun les 18 figures magiques que nous trouvons dans (1.4). Cependant, il est possible que certains carrés magiques issus de (1.4) en possèdent plus que 18. L'exemple ci-dessus donne $f(15) = 18$. Ce carré possède donc exactement 18 figures magiques. Vous pouvez les trouver sans difficulté!!

Terminons en montrant que tout carré issu de (1.4) possède exactement 18 figures magiques si t est non nul. Nous avons :

$$\begin{pmatrix} A-t & A & A+t \\ A+2t & A & A-2t \\ A-t & A & A+t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AP + tQ$$

où : $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont des carrés magiques.

Notons que Q est de somme 0 et que $f(0) = 18$; donc nous devons conclure qu'il en est de même pour tout carré magique issu de (1.4) avec t non nul.

4.3.6 Carrés magiques formés de nombres premiers

Rappelons qu'un nombre premier est un entier ≥ 2 qui n'est divisible que par 1 et lui-même (il s'agit bien entendu de la divisibilité dans les entiers naturels). Voici les 14 premiers nombres premiers :

$$\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; ...\}$$

Dans une table de nombres premiers, cherchons les suites arithmétiques du théorème 4.6; nous aurons alors un carré magique formé de neuf nombres premiers. Soulignons que cette recherche n'est pas évidente!!

Dans un premier temps, nous trouvons : (7 ; 13 ; 19) ; (31 ; 37 ; 43) ; (55 ; 61 ; 67) soit huit nombres premiers différents d'où le carré magique suivant formé de huit nombres premiers :

$$\begin{pmatrix} 43 & 7 & 61 \\ 55 & 37 & 19 \\ 13 & 67 & 31 \end{pmatrix}$$

Il est de somme magique S = 111.

Ici, nous trouvons beaucoup mieux : (11 ; 29 ; 47) ; (71 ; 89 ; 107) ; (131 ; 149 ; 167) d'où le carré magique :

$$\begin{pmatrix} 107 & 131 & 29 \\ 11 & 89 & 167 \\ 149 & 47 & 71 \end{pmatrix}$$

C'est un carré magique de somme S = 267 formé de neuf nombres premiers tous différents.

Puis, nous trouvons : (5 ; 17 ; 29) ; (47 ; 59 ; 71) ; (89 ; 101 ; 113) d'où le carré magique :

$$\begin{pmatrix} 71 & 89 & 17 \\ 5 & 59 & 113 \\ 101 & 29 & 47 \end{pmatrix}$$

de somme S = 177, formé de neuf nombres premiers tous différents.

Nous pourrions sans aucun doute en trouver d'autres.

Si un carré magique ne renferme que des nombres premiers, alors nous dirons que c'est un **carré magique premier**. Le premier de somme S = 111 n'est pas un carré magique premier tandis que les deux autres avec S = 267 et S = 177, sont des carrés magiques premiers.

Nous avons également construit des programmes dans MAPLE qui nous permettent de trouver des carrés magiques premiers d'ordres 3, 4 et 5 (voir la Partie 3, annexe 23). En voici trois :

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 43 & 67 & 109 \\ 139 & 73 & 7 \\ 37 & 79 & 103 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix}$$

$$S = 219 \qquad\qquad S = 336$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix} 11 & 23 & 139 & 31 & 227 \\ 137 & 103 & 29 & 73 & 89 \\ 127 & 113 & 83 & 101 & 7 \\ 151 & 43 & 17 & 173 & 47 \\ 5 & 149 & 163 & 53 & 61 \end{pmatrix}$$

$$S = 431$$

Le carré (1), d'ordre 3, a pour somme 219, un entier non premier.

Le carré (2), d'ordre 4, a pour somme 336, un entier non premier.

Le carré (3), d'ordre 5, a pour somme 431, un **nombre premier**.

Ce dernier, d'ordre 5, est un **carré magique super-premier** car il est formé de 25 nombres premiers et sa somme magique est aussi un nombre premier!!! Notons que les six carrés magiques ci-haut sont tous presque normaux.

Une question importante se pose ici : existe-t-il un carré magique premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$?

La réponse est oui pour $n = 3, n = 4 \, et \, n = 5$ puisque nous avons (1), (2) et (3) ci-haut. Vous trouverez sur Internet des carrés magiques premiers d'ordres supérieurs à 5 mais pouvons-nous affirmer l'existence d'un carré magique premier presque normal d'ordre n = 28224 ?

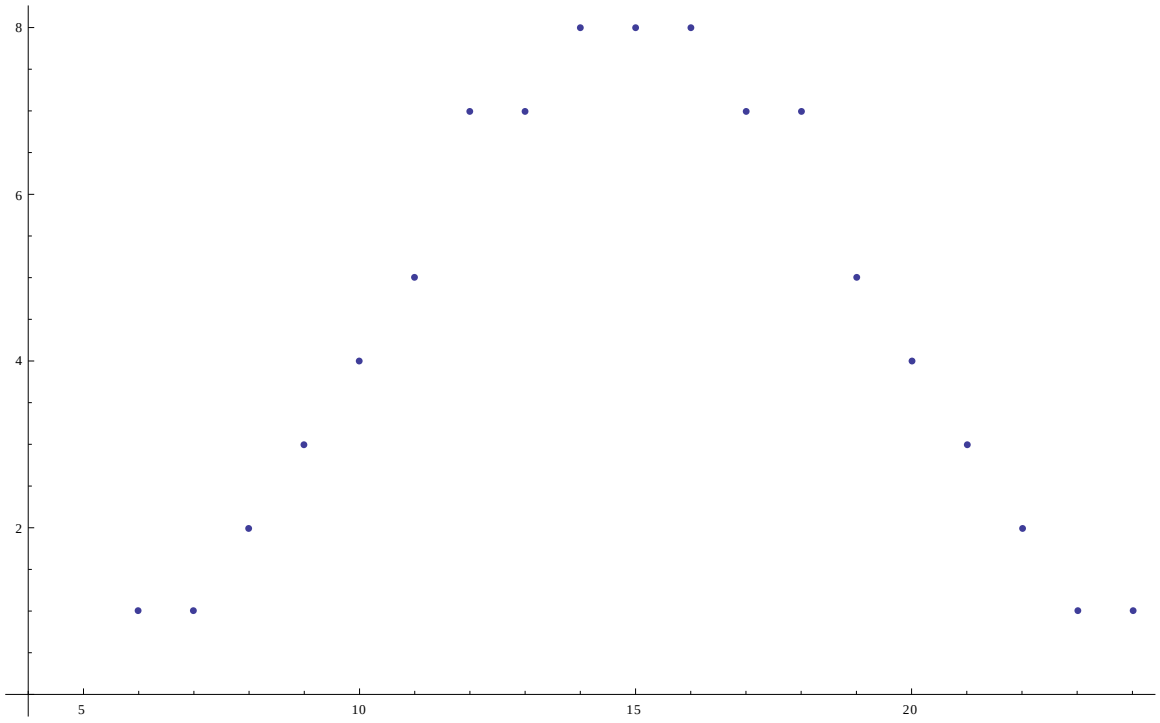
La réponse est toujours **oui** selon le théorème de Green-Tao et son corollaire que nous verrons au chapitre 10.

Oui, il existe un carré magique premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$.

Pour les carrés magiques premiers, retrouvons-nous au chapitre 10.

4.3.7 Les fréquences des sommes

Le tableau suivant indique la fréquence des sommes obtenues à partir des 84 figures d'un carré magique normal d'ordre 3 :



Dans un carré magique d'ordre 3, nous pouvons choisir trois cases distinctes (chacune ayant une position différente des deux autres dans le carré) parmi les neuf, de 84 façons différentes. Les sommes de trois cases varient de 6 = (1 + 2 + 3) à 24 = (7 + 8 + 9). Le tableau ci-haut nous indique que nous avons une seule somme 6, une seule somme 7, deux sommes 8, trois sommes 9, et ainsi de suite.

La somme magique S = 15 apparaît huit fois (les trois rangées, les trois colonnes et les deux grandes diagonales). Les sommes 14 et 16 se trouvent également huit fois. Nous dirons que la fréquence de la somme 15 est 8, ce qui s'écrit $f(15)=8$ et ce qui signifie qu'en faisant toutes les sommes de trois cases différentes, nous trouverons huit fois la somme 15. La fréquence de la somme magique indique aussi le nombre de figures magiques que possède le carré magique.

Nous avons donc :

$$f(6)=1\,;\ f(7)=1\,;\ f(8)=2\,;\ f(9)=3\,;\ f(10)=4\,;\ \ldots\,;\ f(15)=8\,;\ f(16)=8\,;\ \ldots$$

et nous remarquons que la fréquence de la somme magique est la plus élevée.

Au chapitre suivant, nous verrons qu'avec un carré magique normal d'ordre 4, la somme magique 34 apparaît 86 fois!!! C'est beaucoup plus que (les quatre rangées, les quatre colonnes et les deux grandes diagonales)!!!

Comment trouvons-nous ces fréquences? À l'aide de ce petit programme fait dans MATHEMATICA :

```
<<Combinatorica`

A = KSubsets[{liste des n^2 expressions ou nombres du carré}, n ]

B = Expand[Simplify[Plus@@@A]]

Count [B, S]
```

lequel nous permet de trouver la fréquence de la somme S.

Par exemple, considérons le carré magique suivant formé de neuf entiers impairs :

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 17 \\ 15 & 11 & 7 \\ 5 & 19 & 9 \end{pmatrix}$$

Nous plaçons les neuf nombres entre les accolades comme suit : $\{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$ et remplaçons n par 3 et S par 33. MATHEMATICA donne f(33) = 8 ce qui montre que ce carré magique ne renferme que huit figures magiques. Notons que l'ordre des nombres entre les accolades est sans importance. Trouvons maintenant la fréquence des autres sommes.

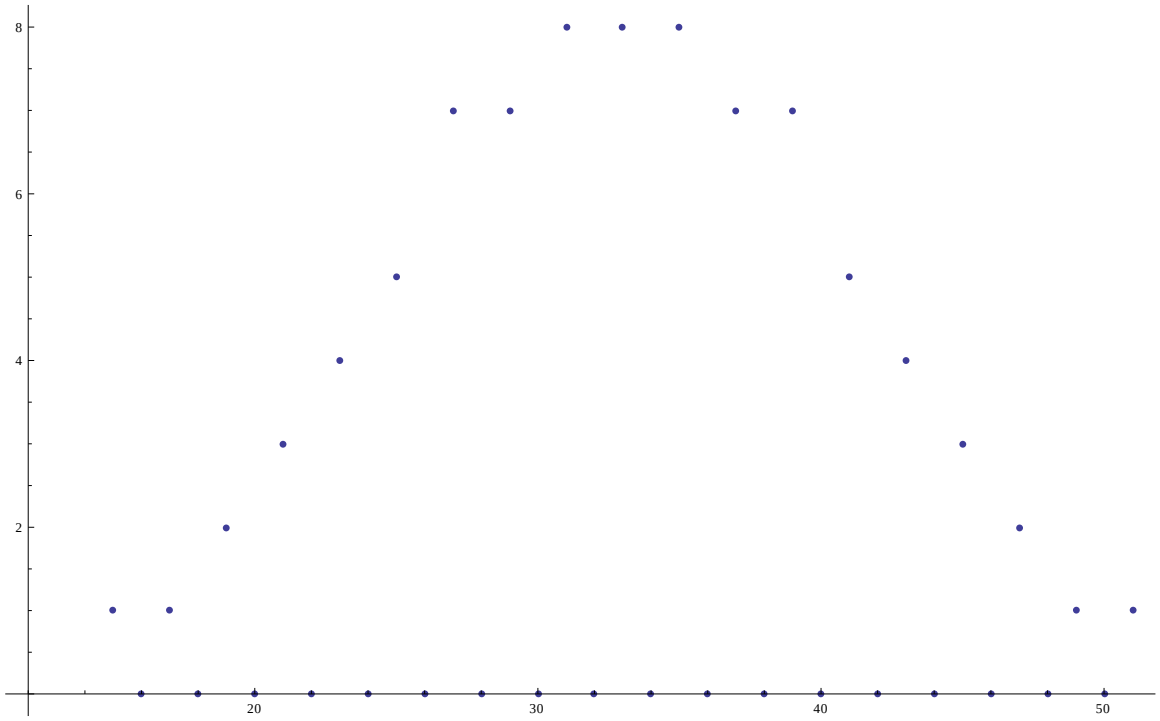
La plus petite somme est 15 et la plus grande somme est 51; la somme magique est S = 33. Nous allons trouver la fréquence de chaque somme allant de 15 à 51 à l'aide du programme ci-haut dans lequel nous changeons Count [B, S] pour Table [Count [B, S], {S, 15, 51}]. Nous trouvons :

$$1;0;1;0;2;0;3;0;4;0;5;0;7;0;7;0;8;0;8;0;8;0;7;0;7;0;5;0;4;0;3;0;2;0;1;0;1$$

Nous pouvons écrire :

$$f(15)=1\,;\ f(16)=0\,;\ f(17)=1\,;\ f(18)=0\,;\ f(19)=2\,;\ \ldots\,;\ f(33)=8\,;\ \ldots$$

ce qui signifie qu'une seule figure est de somme 15, qu'aucune figure n'est de somme 16, que 8 figures sont de somme 33, la somme magique. Ce carré magique possède donc huit figures magiques. Remarquez que si m est un entier pair situé entre 15 et 51, alors $f(m)=0$; en effet, l'addition de trois nombres impairs ne peut jamais donner un nombre pair. Donc dans ce carré, aucune figure n'est de somme paire. Voici le tableau des fréquences :



On observe que la somme magique a la fréquence la plus élevée.

Voyons un autre exemple avec le carré magique suivant :

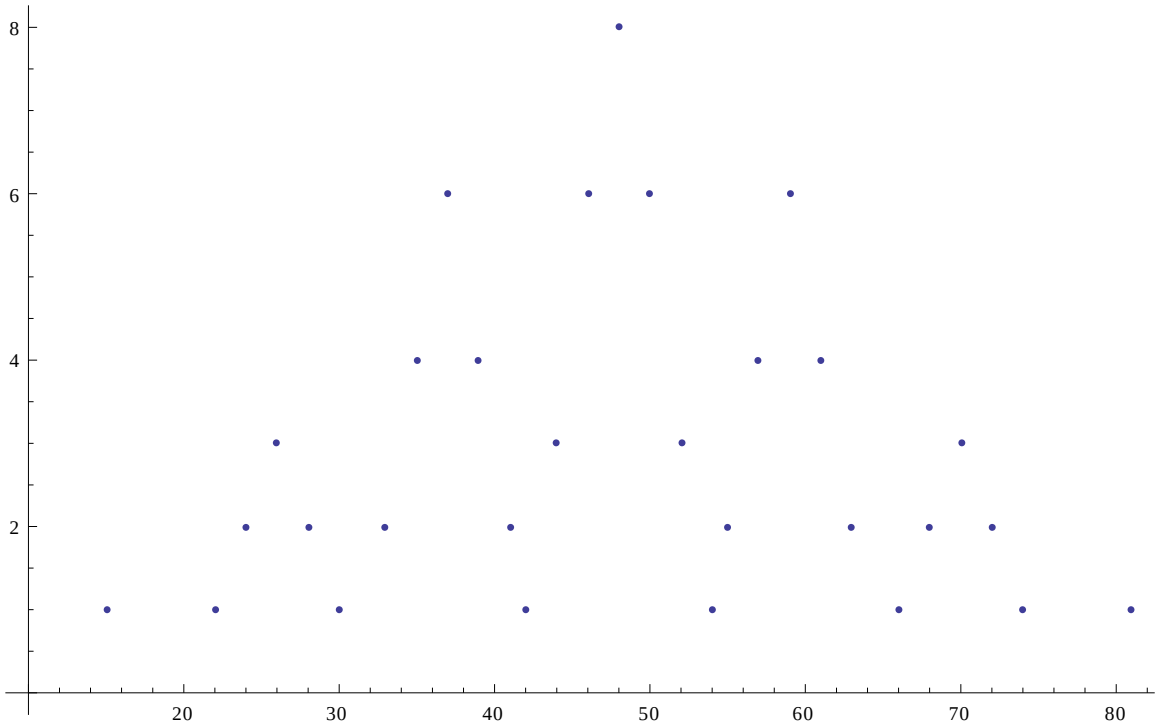
$$S = 48$$

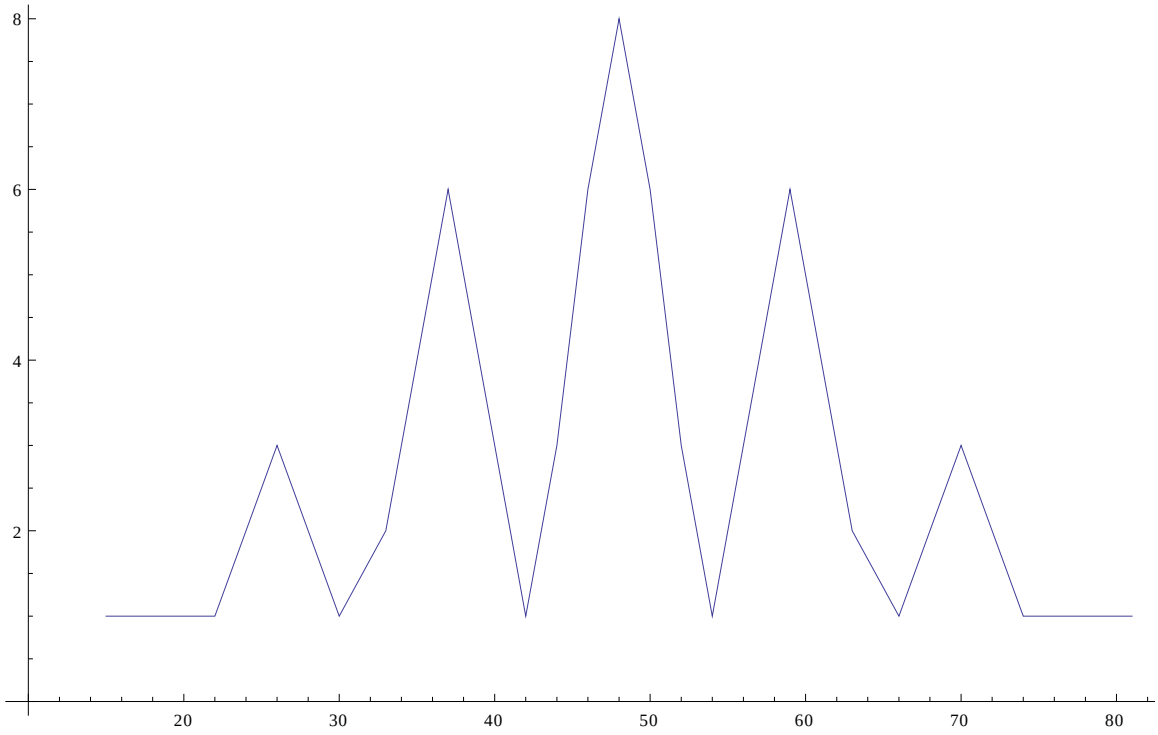
$$\begin{pmatrix} 18 & 3 & 27 \\ 25 & 16 & 7 \\ 5 & 29 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A = 3; r = 2; t = 11$$

La plus petite somme est 15 = (3 + 5 + 7) et la plus grande est 81 = (25 + 27 + 29). Le premier tableau qui suit indique les fréquences non nulles seulement. Ainsi, le point $(16;0)$ n'apparait pas dans le tableau puisque $f(16) = 0$. Comme $f(48) = 8$, le point $(48;8)$ est dans le tableau.

Quant au deuxième tableau, ce n'est rien d'autre que le premier tableau dans lequel les points ont été reliés.





Nous voyons que la fréquence de la somme magique est la plus élevée : $f(48) = 8$.

Enfin, voyons comment le programme ci-haut permet de trouver le nombre de figures magiques d'une structure générale. Prenons la structure (1.4) :

$$\begin{pmatrix} A-t & A & A+t \\ A+2t & A & A-2t \\ A-t & A & A+t \end{pmatrix}$$

et servons-nous de :

```
<<Combinatorica`

A = KSubsets[{A, A, A, A-t, A-t, A+t, A+t, A+2t, A-2t},3]

B = Expand[Simplify[Plus@@@A]]

Count [B, 3A]
```

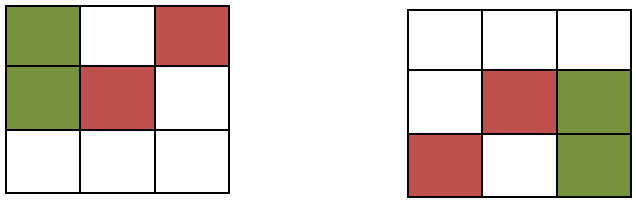
MATHEMATICA donne f (3A) = 18. Cela signifie que tous les carrés magiques issus de (1.4) ont en commun les 18 figures magiques que possède cette structure générale.

Ce programme nous permet de trouver le nombre de figures magiques d'un carré magique d'ordre $3 \leq n \leq 7$. Si $n \geq 8$, alors le travail sera beaucoup plus long et difficile. Enfin, avec n trop grand, le travail deviendra « impossible »!!! Avec $n = 356884225456$ par exemple!!! Évidemment, en tenant compte de nos ordinateurs actuels!!!

Nous avons aussi construit un programme dans MAPLE qui permet de trouver le nombre de figures magiques et de les illustrer pour $n = 3$; 4 ; 5 ; 6. Vous le trouverez dans l'annexe 23.

4.3.8 Problèmes

1) Voici deux carrés magiques d'ordre 3. Montrez que dans chacun, la somme des deux cases vertes est égale à la somme des deux cases rouges.



2) Considérons un carré magique d'ordre 3 qui renferme les nombres suivants :

A	B	C
D	E	F
G	H	K

Démontrez que nous avons :

$$2K = B + D$$
$$2G = B + F$$
$$2A = F + H$$
$$2C = D + H$$

3) Un carré magique d'ordre 3 a pour centre le nombre 80. Trouvez la somme des huit autres cases.

4) Montrez qu'un carré d'ordre 3 n'a pas de figure complète.

5) Dans le carré magique suivant, montrez que la somme des cases bleues est la même que la somme des cases vertes. En déduire que la somme des cases vertes est 4S/3.

A	B	C
D	E	F
G	H	K

6) Dans une case d'un carré magique d'ordre 2, nous trouvons le nombre 19. Quel est ce carré et quelle est sa somme magique?

7) Dans un carré magique d'ordre 3, montrez que la somme des nombres situés dans 2 cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours 2S/3. Pour cela, nous dirons que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont **associatifs**.

8) Démontrez les trois propriétés de 4.3.3, que possèdent tous les carrés magiques d'ordre 3.

9) Voici un carré magique M d'ordre 3 qui est presque normal :

3	y	9
11		17

a) Pouvons-nous avoir y = 19?
b) Trouvez M.

10) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 3 formé de neuf entiers impairs multiples de 7.

11) Est-il possible de construire un carré magique d'ordre 3 formé de neuf nombres premiers dont la somme magique serait un nombre premier?

12) Construisez la structure générale des carrés magiques d'ordre 5 en suivant à la lettre le procédé décrit au chapitre 3.

13) Voici un carré magique d'ordre 3 :

a	b	
	c	

Si a, b et c sont des entiers multiples de 7, alors tous les nombres du carré sont des entiers multiples de 7. Montrez-le.

14) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre 3. Les sommes magiques possibles sont :

$$15\ ;\ 18\ ;\ 21\ ;\ 24\ ;\ 27\ ;\ \ldots;\ 3k\ ;\ \ldots,\ \text{où } k \geq 5 \text{ est un entier.}$$

Montrez-le. Pouvons-nous atteindre toutes ces sommes?

15) Montrez que dans un carré magique normal d'ordre 3, aucun entier impair ne peut occuper un coin.

16) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre 3. Si la somme magique de M est impaire, alors il ne peut pas y avoir un impair dans un coin. Vrai ou faux? Justifiez.

17) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre n > 2 et de somme magique S. Puis considérons le carré M' = 2kM + h où k est un entier > 0 et h est un entier impair > 0.

a) Montrez que M'est magique presque normal.

b) Montrez que M'renferme que des entiers impairs.

c) Quelle est la somme magique de M'?

d) Quand la somme magique de M'est-elle impaire? Est-elle paire?

e) Que devons-nous faire pour que M' renferme que des entiers pairs?

18) À partir de la structure générale (1.1) des carrés magiques d'ordre 3, montrez qu'un carré magique d'ordre 3 renferme que des entiers si et seulement si A, r et t sont des entiers.

19) Soit M un carré magique presque normal d'ordre n et r, un entier positif formé de k chiffres. Le carré magique obtenu de M en ajoutant le nombre r dans toutes ses cases se note $M+r$.

a) Qu'observez-vous dans la carré magique $A=10^k M+r$?

b) Quelle est la somme magique de A ?

20) À partir d'un carré magique normal d'ordre 6, construisez un carré magique presque normal d'ordre 6 tel que ses trente six entiers se terminent tous par 11111. Quelle sera la somme magique de votre carré?

21) Démontrez que les structures générales (1) et (1.1) des carrés magiques d'ordre 3 sont équivalentes c'est-à-dire qu'elles génèrent les mêmes carrés magiques.

22) Montrez qu'il n'existe que 8 carrés magiques normaux d'ordre 3 donc 1 seul primitif.

23) À la page 18, comment avons-nous trouvé A = b, r = a – S/3 et t = 2S/3 – a – b?

5. Les carrés magiques d'ordre 4

5.1 Introduction

En vertu des théorèmes 2.1 et 3.4, E_4 est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, de dimension 8 dont revoici la structure générale déjà établie plus haut :

$$(2)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & e & f & S-d-e-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & S-e-f-g & 2a+b+c+d+e-g-S \\ a+b+c-f-g & S-b-e-g & -c+e+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 4

Tous les carrés magiques d'ordre 4 proviennent de (2). Si nous voulons construire un carré magique normal à partir de (2), alors nous rencontrerons la difficulté suivante : quelles sont les valeurs entières que nous devons attribuer aux sept variables sachant que S = 34? Il arrive fréquemment que nous trouvions des répétitions et des nombres négatifs dans notre carré. Comment les éviter? Nous avons un programme dans MAPLE (voir la Partie 3, annexe 23) qui nous permet de trouver tous les carrés magiques normaux d'ordre 4. Il y en a 7040. Mais en trouver un à partir de cette structure générale (2) n'est pas chose facile. Notez que (2) contient huit variables libres puisque la dimension de E_4 est 8. Cela signifie que nous pourrions trouver dans E_4, huit carrés magiques linéairement indépendants : A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 tels que tout carré magique M d'ordre 4 s'écrive :

$$M = a\,A_1 + b\,A_2 + c\,A_3 + d\,A_4 + e\,A_5 + f\,A_6 + g\,A_7 + S\,A_8$$

Si nous imposons une figure magique à la structure générale (2), alors nous obtiendrons un sous-espace vectoriel (ou simplement sous-espace) dont la dimension sera inférieure à 8. Ainsi, il sera peut-être plus facile de construire un carré normal ? Cependant, plus nous aurons des figures imposées, plus la dimension du sous-espace diminuera et plus il sera facile de trouver les carrés normaux. C'est ce que nous verrons très prochainement dans ce chapitre.

À chaque fois que nous aurons un sous-espace et sa structure générale, nous allons toujours essayer de savoir si ce sous-espace renferme des carrés normaux et si oui, combien en a-t-il. Le **sous-espace est normal** s'il renferme au moins un carré magique normal et s'il en renferme k, nous dirons que **le sous-espace est normal d'ordre k**. S'il n'est pas normal, le sous-espace sera dit **presque normal** s'il renferme au moins un carré magique presque normal.

Nous allons créer des sous-espaces de carrés magiques d'ordre 4 qui seront remarquables quant au nombre de figures magiques qu'ils possèderont. Chaque sous-espace de carrés magiques sera représenté par une structure générale, c'est-à-dire, par un carré magique général lequel renfermera, dans chacune de ses cases, une expression linéaire formée par un certain nombre de variables. En remplaçant chacune de ces variables par un nombre réel, nous obtiendrons un carré magique particulier de ce sous-espace et tous les carrés magiques de ce sous-espace proviendront de la structure générale qui lui est associée.

Pour chaque structure générale E, nous trouverons sa fréquence, notée $f(E)$, laquelle indiquera le nombre de figures magiques que possède E. Donc, si $f(E) = m$, alors tous les carrés magiques issus de E renfermeront ces m figures magiques et possiblement d'autres.

Ce qui veut dire que si A est un carré magique de somme S issu de E, alors nous aurons :

$$f(S) \geq m$$

Cela signifie que tous les carrés magiques issus de E ont en commun ces m figures magiques mais peuvent en avoir d'autres. Nous montrerons qu'il est toujours possible de trouver un carré magique issu de E qui possède **exactement** ces m figures magiques et seulement celles-ci. Donc, tous les carrés magiques issus de E ne peuvent pas avoir en commun plus que m figures magiques. Nous illustrerons ces m figures magiques, dans la mesure du possible, pour chaque sous-espace de carrés magiques d'ordre 4. Nous dirons que ces figures magiques **caractérisent** le sous-espace.

Les sous-espaces de carrés magiques que nous allons construire sont arbitraires. Sauf le sous-espace des carrés magiques d'ordre 4, tous les autres seront construits à partir de celui-ci en imposant des figures magiques que nous allons choisir de façon arbitraire. Cependant, plusieurs de ces figures proviennent du célèbre carré d'Albert Dürer. Nous avons trouvé les 86 figures magiques de ce dernier, et oui, il y en a exactement 86. Nous les verrons plus loin.

Vous allez voir comment nous avons construit les différents sous-espaces présentés dans ce chapitre et comment vous pourriez en construire d'autres. Nous allons souvent faire référence au carré d'ordre 4 suivant afin de nommer les figures magiques ou d'écrire les équations qui vont servir à définir un sous-espace.

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ J & K & M & N \\ P & Q & R & T \end{pmatrix}$$

La première rangée est une figure qui sera notée ABCD, la deuxième colonne BFKQ, le cerf-volant haut gauche EBGQ, le cerf-volant bas droite KRNC, la fusée haut gauche FKPR, la fusée bas droite MGBD, l'escalier JFCD, le cerf-volant gauche haut BEKH, …

Nous parlerons du carré (*) de 5.1 lorsque nous ferons référence au carré ci-haut.

5.2 Calcul du nombre de figures magiques avec MATHEMATICA

Il existe 1820 façons différentes de choisir quatre cases distinctes parmi seize; il y a donc 1820 figures dans tout carré d'ordre 4 d'où 1820 sommes de quatre nombres choisis parmi les seize nombres du carré. Combien de ces sommes égalent la somme magique S?

Dans MATHEMATICA, il faut d'abord ouvrir Combinatorica puis donner la liste des 16 nombres du carré magique tout en indiquant qu'il s'agit d'un carré d'ordre 4. Devant cette liste, on placera la commande KSubsets laquelle trouvera la liste des 1820 quadruplets de nombres (ceux situés dans les cases correspondantes).

Puis, il faudra placer devant cette liste, la commande Plus@@@ qui effectuera la somme des quatre nombres de chaque quadruplet. Il en résultera une liste de 1820 nombres (les 1820 sommes possibles de quatre cases). Enfin, on placera la commande Count qui comptera le nombre de fois que le nombre que vous indiquerez, apparait dans la liste.

Voici le chemin à suivre à travers un exemple :

```
<<Combinatorica`

A = KSubsets[{18,6,11,21,10,13,14,19,12,5,24,15,16,32,7,1},4]

B = Plus@@@A

Count[B,56] puis exécutez.
```

Vous recevrez 52 comme réponse.

Si à la place de 56 (la somme magique) vous aviez mis 54, la réponse aurait été 53. Donc parmi les 1820 sommes, 52 sommes sont égales à 56 et 53 sommes sont égales à 54. En tout, ce carré magique possède 52 figures magiques!!! Nous écrirons $f(56) = 52$.

Qu'en est-il des autres sommes?

À partir de la liste des 16 nombres du carré magique, trouvez la plus petite somme (1 + 5 + 6 + 7 = 19) et la plus grande somme (32 + 24 + 21 + 19 = 96). Remplacez alors Count[B, 56] par :

```
Table[Count[B, k],{k, 19, 96}]
```

puis, exécutez. MATHEMATICA va faire varier k de 19 à 96 et pour chaque valeur de k, il va nous donner sa fréquence.

Nous obtenons une liste de 78 nombres. Le premier indique le nombre de sommes 19, le deuxième indique le nombre de sommes 20, le troisième indique le nombre de sommes 21 et ainsi de suite. Nous pouvons placer ces données dans un tableau comme nous le verrons plus loin.

Prenons la structure générale (2) des carrés magiques d'ordre 4 et de somme magique S puis trouvons la fréquence de (2) soit le nombre de figures magiques que contient (2) .

<<Combinatorica`

A = KSubsets[{liste des 16 expressions du carré (2) },4]

B = Expand[Simplify[Plus@@@A]]

Count[B, S]

La réponse est 14 d'où $f(S)=14$. Donc tous les carrés magiques d'ordre 4 ont en commun 14 figures magiques. Nous pouvons affirmer qu'ils ont tous au moins 14 figures magiques. Nous les illustrerons un peu plus bas.

Nous verrons plus loin qu'avec la structure générale des «super-Dürer», $f(S)=52$. Tous les carrés du sous-espace des super-Dürer ont donc en commun 52 figures magiques. La somme magique S s'y trouve **au moins** 52 fois. Les super-Dürer sont donc des carrés magiques d'ordre 4 qui possèdent un nombre impressionnant de figures magiques!! Mais il y a encore mieux!!!

Nous avons donc ce qu'il faut pour trouver $f(S)$, quel que soit le carré magique d'ordre 4. Dans le cas des carrés magiques d'ordre $n \geq 3$, le processus sera le même tout en précisant l'ordre du carré. Un problème : la mémoire de l'ordinateur!! Pour $3 \leq n \leq 7$, le programme fonctionne très bien et donne directement le résultat attendu. Ce n'est pas le cas avec $n=8,9,10$. Nous y arrivons quand même mais en plusieurs étapes.

Nous appelons ce programme : « Le compte ». Dans MAPLE, le programme s'appelle «Illustration-figures» car en plus de donner le nombre de figures magiques, il les illustre.

5.3 L'espace vectoriel E_4 des carrés magiques d'ordre 4

Les carrés magiques d'ordre 4 ont tous en commun quatorze figures magiques. Il y a les quatre rangées, les quatre colonnes, les deux grandes diagonales et les quatre du théorème suivant :

Théorème 5.1 :

Dans tout carré magique d'ordre 4, nous avons les quatre figures magiques suivantes :

$$\begin{aligned} A+D+P+T &= S \\ F+G+K+M &= S \\ B+C+Q+R &= S \\ E+J+H+N &= S \end{aligned}$$

Preuve :

$$4S = (D+H+N+T)+(P+J+E+A)+(A+F+M+T)+(D+G+K+P) = (2A+2D+2P+2T)+$$
$$(E+F+G+H)+(J+K+M+N) = (2A+2D+2P+2T)+2S$$

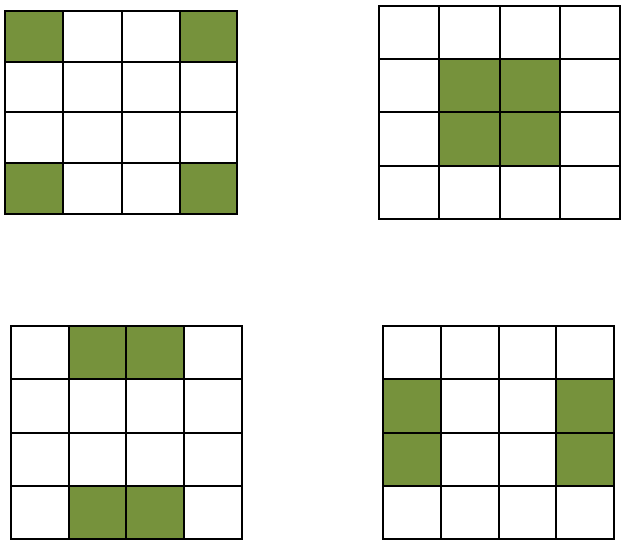
d'où $A+D+P+T = S$. **Les quatre coins forment une figure magique.** Puis nous avons :

$$2S = (A+F+M+T)+(D+G+K+P) = (A+D+P+T)+(F+G+K+M) =$$
$$S+(F+G+K+M)$$

d'où $F+G+K+M = S$. **Les quatre cases centrales forment aussi une figure magique.**

Les deux autres égalités se montrent de la même façon.

Nous venons de trouver quatre nouvelles figures magiques que possèdent tous les carrés magiques d'ordre 4. En voici l'illustration :



Nous avons donc le :

Théorème 5.2 :

Tous les carrés magiques non triviaux d'ordre 4 ont en commun les mêmes quatorze figures magiques.

Les deux carrés magiques suivants possèdent exactement quatorze figures magiques pour le premier à gauche et exactement cinquante quatre figures magiques pour le deuxième à droite dont les quatorze de celui de gauche. Chacun renferme seize entiers différents.

$$\begin{pmatrix} 125 & 109 & 199 & 93 \\ 133 & 189 & 194 & 10 \\ 171 & 142 & 1 & 212 \\ 97 & 86 & 132 & 211 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 14 & 13 & 17 & 16 \\ 10 & 18 & 12 & 20 \\ 7 & 3 & 27 & 23 \\ 29 & 26 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14\,sommes\ S = 526 \qquad 54\,sommes\ S = 60$$

Que les quatre coins d'un carré magique soit une figure magique n'est pas l'affaire d'un carré particulier; c'est l'affaire de tous les carrés magiques d'ordre 4!!!

Le sous-espace des carrés magiques d'ordre 4 est normal d'ordre 7040. Vous trouverez ces 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4 dans la Partie 3, annexe 23, programme 01.

Terminons avec les caractéristiques de l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre 4 :

1. Les figures magiques imposées : les 4 rangées, les 4 colonnes et les 2 grandes diagonales.
2. Cet espace est représenté par la structure générale (2).
3. Il est normal d'ordre 7040.
4. La fréquence de cet espace est la fréquence de sa structure générale (2) soit $f(S) = 14$.
5. Les 14 figures magiques qui caractérisent tous les carrés magiques d'ordre 4 sont les 4 rangées, les 4 colonnes, les 2 grandes diagonales et les quatre figures du théorème 5.1.
6. L'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre 4 est de dimension 8 puisque nous avons 8 variables libres dans (2).

Dire que la fréquence de l'espace est 14 signifie que tous les carrés magiques de cet espace possèdent au moins 14 figures magiques (les 14 figures magiques que tous ont en commun). L'espace est alors caractérisé par ces 14 figures. Voici, en terminant, un carré magique normal :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Il est de somme $S = 34$ et $f(34) = 86$ donc ce carré possède 86 figures magiques.

Théorème 5.3 :

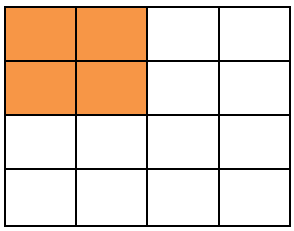
Tous les carrés magiques normaux d'ordre 4 possèdent exactement 86 figures magiques.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le programme «Le compte». Les 16 nombres sont consécutifs de $1 \; à \; 16$, $S = 34$ et nous trouvons $f(34) = 86$.

Nous allons maintenant construire notre premier sous-espace de carrés magiques d'ordre 4, **les Dürer.**

5.4 Le sous-espace des Dürer

Ce sous-espace renferme tous les carrés magiques d'ordre 4 qui possèdent la nouvelle figure magique ABEF. Voyons l'illustration de cette nouvelle figure magique :



Nous appellerons ce sous-espace, le sous-espace **des Dürer.** Ses carrés magiques s'appelleront **carrés magiques Dürer** ou simplement **Dürer.**

Théorème 5.4 :

Dans tout carré magique Dürer, chaque carré d'ordre 2 situé dans chaque coin est une figure magique.

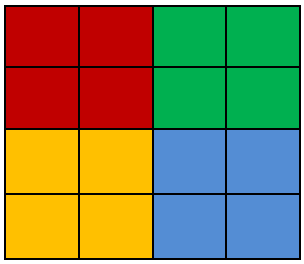
En se référant au carré (*) de la section 5.1, dans tout Dürer, on a :

A + B + E + F = S; C + D + G + H = S; J + K + P + Q = S; M + N + R + T = S

La preuve du théorème 5.4 est très simple :

Nous savons que (A + B + C + D) + (E + F + G + H) = 2S = (A + B + E + F) + (C + D + G + H) et puisque le carré est Dürer, (A + B + E + F) = S. On en conclut que (C + D + G + H) = S. La suite de la preuve est très semblable.

Donc un carré magique d'ordre 4 est Dürer si et seulement si les carrés d'ordre 2, rouge, vert, jaune et bleu sont des figures magiques.



Voici deux carrés magiques d'ordre 4 :

$$\begin{pmatrix} 56 & 61 & 63 & 20 \\ 35 & 47 & 77 & 41 \\ 72 & 66 & 10 & 52 \\ 37 & 26 & 50 & 87 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 56 & 61 & 63 & 20 \\ 35 & 48 & 77 & 40 \\ 72 & 66 & 9 & 53 \\ 37 & 25 & 51 & 87 \end{pmatrix}$$

Ordinaire *Dürer*

Ces deux carrés sont semblables; cependant, celui de gauche est ordinaire tandis que celui de droite est Dürer. Dans les deux cas, S = 200. Remarquez que dans celui de gauche, 56 + 61 + 35 + 47 = 199 tandis que dans celui de droite, un Dürer, 56 + 61 + 35 + 48 = 200, la somme magique. Ils renferment tous les deux, 16 nombres entiers différents.

Pour s'assurer que le carré de droite est Dürer, il suffit de constater que 56 + 61 + 35 + 48 = 200.

En se référant à la structure générale (2) de la section 5.1, on voit bien qu'un carré magique d'ordre 4 est Dürer si et seulement si :

$$a+b+d+e=S$$

Donc, en remplaçant e par $S-a-b-d$ dans la structure générale (2) des carrés magiques d'ordre 4, nous trouvons la structure générale des Dürer.

$$(2.1) \quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & f & a+b-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & a+b+d-f-g & a+c-g \\ a+b+c-f-g & a+d-g & S-a-b-c-d+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Structure générale des Dürer

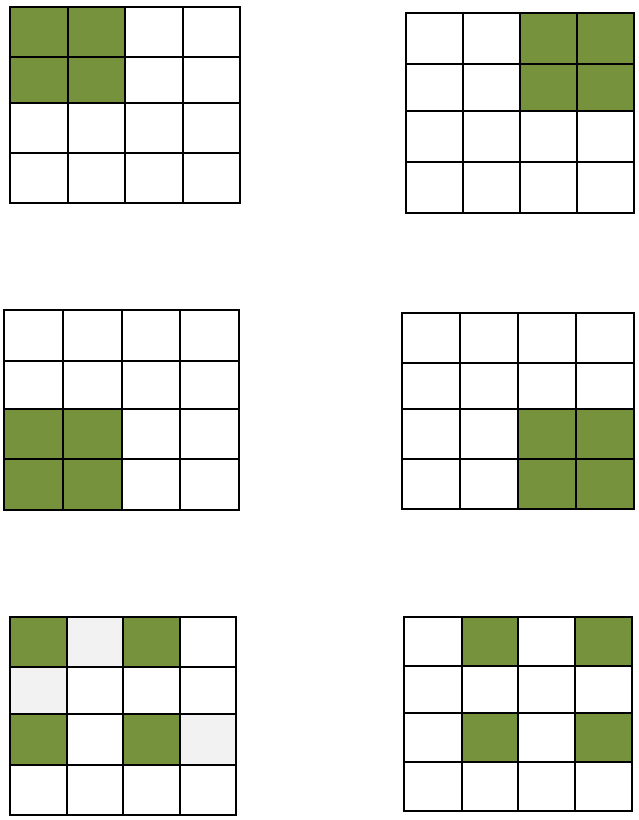
Théorème 5.5 :

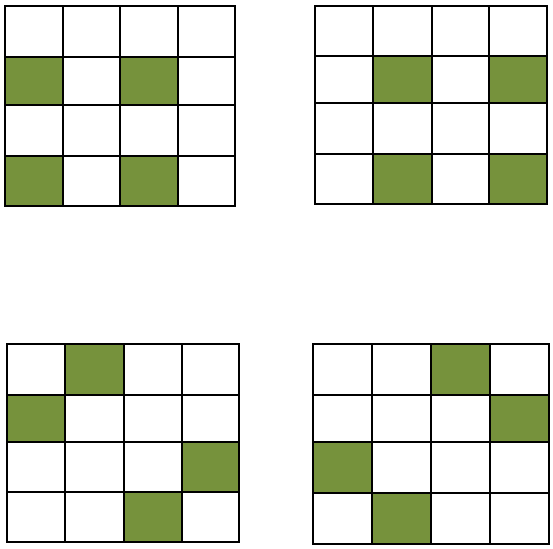
Dans tout carré magique Dürer, nous avons les figures magiques suivantes :

A + C + J + M = S
B + D + K + N = S
E + G + P + R = S
F + H + Q + T = S
B + E + N + R = S
C + H + J + Q = S

Les quatre premières égalités montrent que la somme des quatre coins de tout carré d'ordre 3 à l'intérieur du carré d'ordre 4 est égale à S. Les deux dernières montrent que la somme des quatre cases de deux diagonales brisées (les petites) donne S. La démonstration est très simple si nous utilisons la structure générale (2.1) . Voir aussi les problèmes 44, 45 et 46 de 5.18.

Voici illustrées ces dix nouvelles figures magiques qui découlent des théorèmes 5.4 et 5.5.





Nous pouvons donc affirmer que les Dürer ont vingt quatre figures magiques en commun. De plus, la fréquence de la structure générale (2.1) est $f(S) = 24$ et nous connaissons un Dürer qui possède exactement 24 figures magiques. Pour cela, nous pouvons dire que le sous-espace **des Dürer** est caractérisé par ces 24 figures magiques.

Nous pouvons illustrer les 24 figures magiques du Dürer M plus bas. Ce sont précisément les 24 figures magiques de (2.1), celles que nous venons de montrer ci-haut. Pour cela, nous avons construit un programme dans MAPLE appelé «Illustration-figures» que vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 03.

L'idée est toute simple : la fréquence de la structure générale est $f(S) = k$ et nous connaissons un carré M de fréquence k issu de cette structure générale. À l'aide du programme «Illustration-figures», nous trouvons les k figures magiques de M; ce sont obligatoirement les k figures magiques de la structure générale et donc, tous les carrés magiques issus de cette structure générale ont en commun ces k figures magiques, celles qui caractérisent le sous-espace correspondant.

Nous verrons plus loin qu'il existe toujours un carré magique M de fréquence k issu d'une structure générale de fréquence k .

La fréquence de (2.1) est $f(S) = 24$ et nous connaissons le Dürer suivant qui a 24 pour fréquence.

$$M = \begin{pmatrix} 1143 & 1314 & 1224 & 959 \\ 2096 & 87 & 1162 & 1295 \\ 21 & 1139 & 2252 & 1228 \\ 1380 & 2100 & 2 & 1158 \end{pmatrix}$$

$$S = 4640 \; ; \; f(S) = 24$$

Les vingt quatre figures magiques de M sont précisément les vingt quatre déjà illustrées; ce sont les vingt quatre figures magiques de (2.1), celles qui caractérisent le sous-espace des Dürer.

Voyons les deux Dürer suivants

$$\begin{pmatrix} 1143 & 1314 & 1224 & 959 \\ 2096 & 87 & 1162 & 1295 \\ 21 & 1139 & 2252 & 1228 \\ 1380 & 2100 & 2 & 1158 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 178 & 249 & 259 & 94 \\ 131 & 222 & 197 & 230 \\ 156 & 174 & 187 & 263 \\ 315 & 135 & 137 & 193 \end{pmatrix}$$

$$24\, sommes\; S = 4640 \qquad\qquad 26\, sommes\; S = 780$$

Le carré de gauche est un Dürer qui possède exactement vingt quatre figures magiques tandis que celui de droite est un Dürer qui possède exactement vingt six figures magiques, dont les vingt quatre de celui de gauche. Ils sont tous les deux formés de seize entiers positifs différents.

Théorème 5.6 :

Tous les carrés magiques Dürer non triviaux ont en commun les mêmes vingt quatre figures magiques.

Ce sont les quatorze de tout carré magique d'ordre 4 plus les dix nouvelles illustrées plus haut. Elles sont les vingt quatre figures magiques caractéristiques des Dürer.

Le sous-espace des Dürer est **normal** puisque le carré magique Dürer suivant est normal :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Il est de somme 34 et nous avons $4+5+15+10=34$ ce qui confirme que c'est un Dürer. Il possède 86 figures magiques en vertu du théorème 5.3.

Terminons avec les caractéristiques de ce sous-espace :

1. La figure magique imposée à la structure générale (2) pour obtenir la structure générale (2.1) des Dürer est ABEF.
2. Le sous-espace des Dürer est représenté par la structure générale (2.1).
3. Le sous-espace des Dürer est normal d'ordre 3456 (trouvé avec un de nos programmes dans MAPLE).
4. La fréquence du sous-espace des Dürer est la fréquence de la structure générale (2.1) soit $f(S)=24$.
5. Les 24 figures magiques qui caractérisent tous les Dürer sont les 14 que tous les 4×4 possèdent plus les 10 nouvelles présentées plus haut.
6. Pour savoir si un carré magique d'ordre 4 et de somme S est Dürer, il suffit de montrer que la figure ABEF est magique donc que la somme des quatre nombres du petit carré 2×2 situé dans le coin haut gauche est égale à S.
7. Le sous-espace des Dürer est de dimension 7 puisque (2.1) renferme 7 variables libres.

Si nous choisissons au hasard un carré normal d'ordre 4 parmi les 7040, alors nous avons presqu'une chance sur deux d'avoir un Dürer.

Remarques importantes :

Il est sous-entendu que tous les sous-espaces sont des sous-espaces vectoriels sur le corps des nombres réels. Nous allons utiliser le terme sous-espace dans ce sens.

Nous pouvons vérifier toutes les nouvelles figures magiques à partir de la structure générale correspondante. Par exemple, nous voulons nous assurer, dans un Dürer, que ACJM est bien une figure magique. Nous irons dans la structure générale (2.1) des Dürer et montrerons que :

$$a+c+S-2a-b-c-d+f+g+a+b+d-f-g=S$$

ACJM est donc une figure magique dans la structure générale (2.1) des Dürer et alors, tous les Dürer possèdent cette figure magique.

Comme autre exemple, les quatre coins de tout carré magique d'ordre 4 forment une figure magique. Nous irons dans la structure générale (2) des carrés magiques d'ordre 4 et montrerons que :

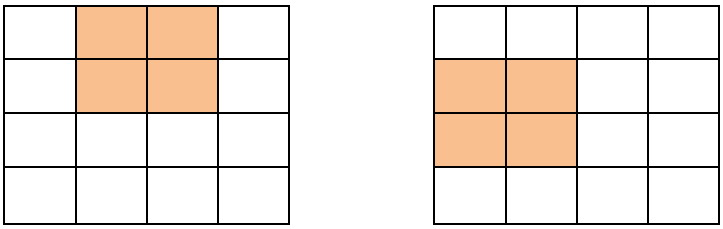
$$a+S-a-b-c+a+b+c-f-g-a+f+g=S$$

ADTP est donc une figure magique dans la structure générale (2) et alors, tous les carrés magiques d'ordre 4 possèdent cette figure magique. La somme des quatre coins donne toujours S, la somme magique.

Nous allons maintenant construire un nouveau sous-espace de carrés magiques d'ordre 4, les super-Dürer. Ce sous-espace est absolument superbe!

5.5 Le sous-espace des super-Dürer

Ce nouveau sous-espace renferme tous les Dürer qui possèdent en plus les nouvelles figures magiques BCFG et EFJK. Voyons l'illustration de ces deux nouvelles figures magiques :



Nous appellerons ce sous-espace, le sous-espace des **carrés magiques super-Dürer** ou simplement, le sous-espace des **super-Dürer**.

Théorème 5.7 :

Dans tout super-Dürer, les neuf sous-carrés d'ordre 2 sont des figures magiques.

La preuve est laissée au lecteur.

Voyons maintenant deux super-Dürer formés de seize entiers positifs différents : le premier possède 52 figures magiques de somme S = 120, le deuxième possède 56 figures magiques de somme S = 102.

$$\begin{pmatrix} 21 & 18 & 22 & 59 \\ 27 & 54 & 26 & 13 \\ 38 & 1 & 39 & 42 \\ 34 & 47 & 33 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 20 & 17 & 21 & 44 \\ 16 & 49 & 15 & 22 \\ 30 & 7 & 31 & 34 \\ 36 & 29 & 35 & 2 \end{pmatrix}$$

$$52\,sommes\ S = 120 \qquad 56\,sommes\ S = 102$$

Trouvons maintenant la structure générale des super-Dürer. En se référant à la structure générale (2.1) des Dürer, nous voyons bien qu'un Dürer est un super-Dürer si et seulement si :

$$b + c + S - a - b - d + f = S$$
$$d + S - a - b - d + g + S - 2a - b - c - d + f + g = S$$

c'est-à-dire, si et seulement si : $$\begin{aligned} f &= a+d-c \\ g &= a+b+c-\frac{S}{2} \end{aligned}$$

En plaçant les expressions de f et g dans la structure générale (2.1) des Dürer, nous obtenons la structure générale (2.2) des super-Dürer :

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

$$Structure\ générale\ des\ \sup er-Dürer$$

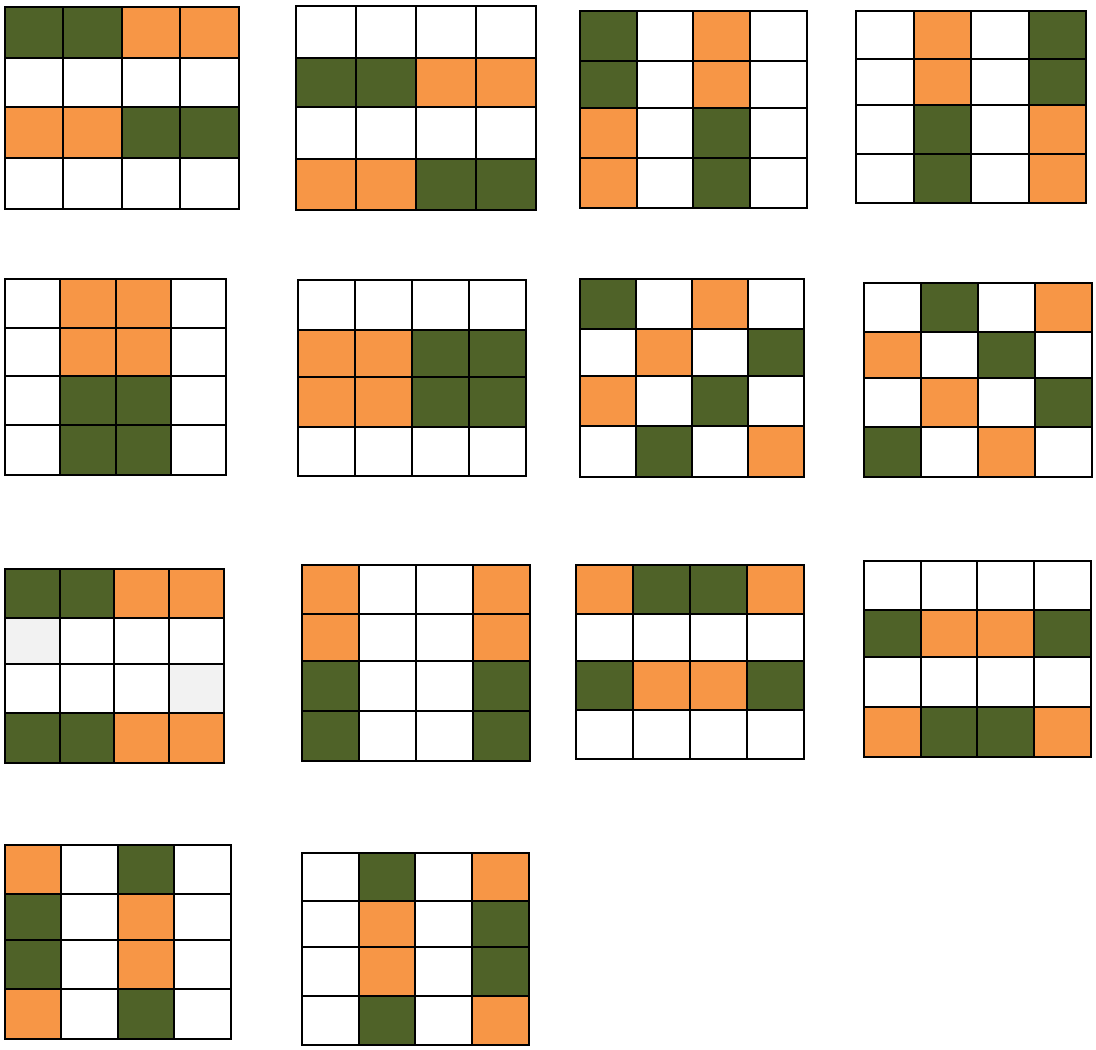
La fréquence de la structure générale (2.2) est $f(S)=52$. Nous avons donc au moins 52 figures magiques dans tout super-Dürer et puisque, plus haut, nous avons trouvé un super-Dürer qui possède exactement 52 figures magiques alors nous dirons que le sous-espace **des super-Dürer** est caractérisé par ces 52 figures magiques :

Théorème 5.8 :

> Tous les super-Dürer non triviaux ont en commun les mêmes 52 figures magiques.

Comment pouvons-nous trouver ces 52 figures magiques? D'abord, nous connaissons les 24 figures magiques que possèdent tous les Dürer. Il nous reste à trouver les 28 autres. Pour nous faciliter la tâche, nous chercherons les 52 figures magiques du super- Dürer présenté plus haut, lequel possède exactement 52 figures magiques de somme 120. Ces 52 figures magiques sont forcément les 52 figures magiques de la structure générale des super-Dürer. Pour se faire, nous utiliserons notre programme «Illustration-figures» construit avec MAPLE.

Voici les 28 autres figures magiques des super-Dürer :



Nous connaissons maintenant les 52 figures magiques qui caractérisent le sous-espace des super -Dürer. Nous pourrions vérifier à partir de la structure générale (2.2) des super- Dürer que ces figures sont bien des figures magiques de (2.2).

Donc dans tout super-Dürer, nous avons pour figures magiques :

4 rangées; 4 colonnes; 2 grandes diagonales;

Les 4 coins du 4x4; les 4 coins des 4 carrés 3x3; les 4 coins des 9 carrés 2x2;

6 rectangles; **les 6 diagonales brisées**;

8 trapèzes isocèles; 8 parallélogrammes.

D'où le résultat suivant : **tous les super-Dürer sont pandiagonaux** c'est-à-dire que toutes leurs diagonales brisées sont des figures magiques.

De plus, sur des exemples, nous avons observé que les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4 étaient des super-Dürer. Pour s'en convaincre, nous avons pris la structure générale (2) des carrés magiques d'ordre 4 et nous avons trouvé à partir de celle-ci, la structure générale des pandiagonaux. Quelle surprise!! La structure générale des pandiagonaux d'ordre 4 est la même que celle des super- Dürer. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 5.9 :

Un carré magique d'ordre 4 est pandiagonal si et seulement s'il est super-Dürer.

Nous avons aussi fait une autre observation très intéressante. Sur toute diagonale (grande ou brisée), la somme de deux cases espacées d'une case est toujours égale à $\frac{S}{2}$; appelons P_1cette propriété. Nous pouvons observer celle-ci à partir de la structure générale (2.2) des super - Dürer.

Tout super-Dürer est pandiagonal et possède la propriété P_1. En plus, les neuf sous-carrés d'ordre 2 situés dans le super-Dürer sont des figures magiques. Nous dirons pour cela que notre super- Dürer, **d'ordre pair**, est un **carré hyper-magique** (Voir chapitre 7).

Le sous-espace des super-Dürer est donc le même que celui des hyper-magiques d'ordre 4.

Vous trouverez, dans la Partie 3, annexe 23, le programme 02 dans MAPLE qui nous permet de trouver tous les super-Dürer normaux. Il nous a permis de trouver qu'il y en a 384 soit **48 primitifs**.

Le sous-espace des super-Dürer est donc normal d'ordre 384. Voici deux super-Dürer normaux :

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \\ 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Terminons avec les caractéristiques du sous-espace des super-Dürer :

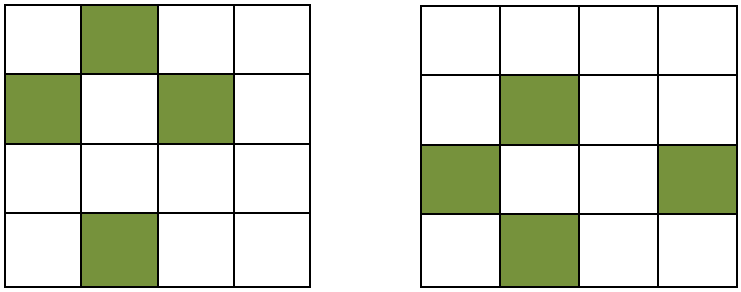
1. Les figures magiques imposées à la structure générale (2.1) des Dürer pour obtenir la structure générale (2.2) des super-Dürer sont BCFG et EFJK.
2. Le sous-espace des super-Dürer est représenté par la structure générale (2.2).
3. Le sous-espace des super-Dürer est normal d'ordre 384.
4. La fréquence du sous-espace des super-Dürer est la fréquence de la structure générale (2.2) soit $f(S) = 52$.
5. Les 52 figures magiques qui caractérisent tous les super-Dürer sont les 24 de tous les Dürer plus les 28 nouvelles présentées plus haut.
6. Pour savoir si un carré magique d'ordre 4 est un super- Dürer, il suffit de montrer que les trois figures ABEF, BCFG et EFJK sont magiques.
7. Le sous-espace des super-Dürer est le même que celui des hyper-magiques d'ordre 4.
8. Donc un super-Dürer est un hyper-magique d'ordre 4.
9. Ce sous-espace est de dimension 5 puisque nous retrouvons 5 variables libres dans (2.2).
10. Si, dans (2.2), les variables libres a, b, c et d prennent des valeurs entières, alors le carré magique sera formé que d'entiers si et seulement si S est un entier pair.

Ce sous-espace est tout simplement extraordinaire!!!

Passons maintenant au sous-espace des super-Dürer-alpha.

5.6 Le sous-espace des super-Dürer-alpha

Ce sous-espace renferme tous les super-Dürer qui possèdent les nouvelles figures magiques EBGQ (cerf-volant vertical haut-gauche) et FJNQ (cerf-volant horizontal gauche-bas). Voici l'illustration de ces deux nouvelles figures magiques :



Nous appellerons ce sous-espace, le sous-espace des **carrés magiques super-Dürer-alpha** ou simplement le sous-espace des **super-Dürer-alpha**.

À partir de la structure générale (2.2) des super-Dürer, nous voyons que les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir un cerf-volant vertical haut-gauche et un cerf-volant horizontal gauche-bas sont :

$$2a + 6b + 4c = 3S \ et \ 2a - 4c + 6d = S$$

d'où $$c=\frac{3S-2a-6b}{4}\ et\ d=\frac{4S-4a-6b}{6}$$

En plaçant les expressions de $c\ et\ d$ dans la structure générale (2.2) des super-Dürer, nous obtenons la structure générale (2.3) des super -Dürer-alpha :

(2.3) $$\begin{pmatrix} a & b & \frac{3S-2a-6b}{4} & \frac{S-2a+2b}{4} \\ \frac{2S-2a-3b}{3} & \frac{S-a}{3} & \frac{10a+6b-S}{12} & \frac{S+2a+6b}{12} \\ \frac{2a+6b-S}{4} & \frac{S+2a-2b}{4} & \frac{S-2a}{2} & \frac{S-2b}{2} \\ \frac{7S-10a-6b}{12} & \frac{5S-2a-6b}{12} & \frac{2a}{3}+b-\frac{S}{6} & \frac{S+2a}{6} \end{pmatrix}$$

$$Structure\ générale\ des\ \sup er-Dürer-alpha$$

La fréquence de la structure générale (2.3) des super- Dürer-alpha est $f(S)=68$.

Voyons maintenant, deux super- Dürer-alpha formés de seize entiers positifs différents. Le premier possède exactement 68 figures magiques de somme S = 136 et le deuxième possède exactement 86 figures magiques de somme S = 34 puisque ce dernier est normal.

$$\begin{pmatrix} 22 & 16 & 67 & 31 \\ 60 & 38 & 15 & 23 \\ 1 & 37 & 46 & 52 \\ 53 & 45 & 8 & 30 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

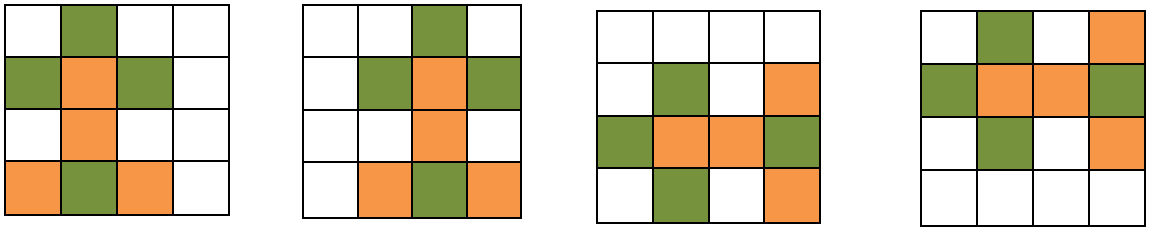
$$68\,sommes\ S=136 \qquad 86\,sommes\ S=34$$

Nous pouvons affirmer que le sous-espace des **super-Dürer-alpha** est caractérisé par 68 figures magiques et énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.10 :

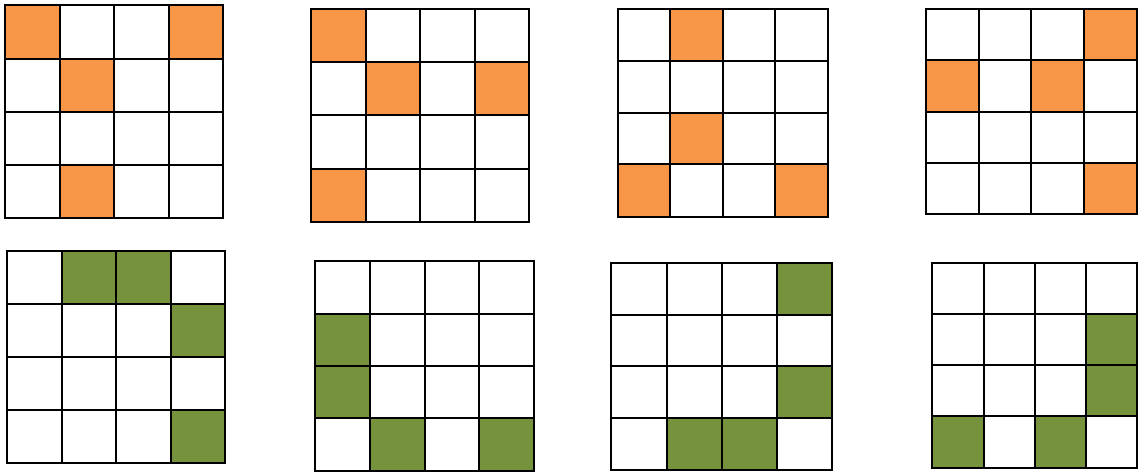
> Tous les super-Dürer-alpha non triviaux ont en commun les mêmes 68 figures magiques.

En trouvant les 68 figures magiques de somme S = 136 du carré ci-haut, nous aurons les 68 figures magiques de la structure générale (2.3). Évidemment, nous avons déjà les 52 figures magiques de tout super- Dürer plus les seize nouvelles figures magiques illustrées ci-dessous :



Nous pouvons vérifier que ces figures sont magiques à partir de la structure générale (2.3), mais sans utiliser celle-ci, nous pouvons démontrer, d'une très belle façon, que dans les deux premiers carrés à gauche, le cerf-volant vertical haut-gauche, qui est une figure magique, implique que les trois autres figures sont aussi magiques. De même pour les deux derniers carrés à droite. Nous pouvons aussi montrer que dans les deux premiers carrés, une figure magique quelconque, parmi les quatre figures illustrées, implique que les trois autres sont aussi magiques; de même pour les deux derniers carrés. (Voir le problème 58 de 5.18).

Nous venons d'illustrer quatre cerfs-volants (en vert) et quatre fusées. Voyons les 8 dernières :



Ce sont les 68 figures magiques qui caractérisent le sous-espace des super-Dürer-alpha.

Nous voulons maintenant trouver tous les carrés magiques normaux super-Dürer-alpha. Avec MATHEMATICA, nous pouvons construire, à partir de la structure générale (2.3), une table formée de 256 carrés magiques en attribuant à a et à b les valeurs de 1 à 16 et à S, la valeur 34. Parmi ces 256 carrés magiques, seulement huit sont retenus car les 248 autres renferment des entiers négatifs ou nuls ou des entiers qui se répètent et même des nombres autres que ceux de 1 à 16. Voici les huit super-Dürer-alpha normaux :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \\ 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 15 & 1 & 14 \\ 5 & 10 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 13 & 2 \\ 9 & 6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

1 2 3 4

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 14 & 11 \\ 16 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 13 & 2 \\ 9 & 6 & 12 & 7 \\ 4 & 15 & 1 & 14 \\ 5 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 15 & 10 \\ 13 & 12 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

5 6 7 8

Les carrés 1, 3, 5 et 7 sont primitifs. Les carrés 2, 4, 6 et 8 sont les équivalents respectivement des carrés 1, 3, 5 et 7.Parmi les 7040 carrés magiques normaux, seulement huit sont des super-Dürer-alpha qui se divisent en deux groupes de quatre primitifs.

Le sous-espace des super-Dürer-alpha est donc normal d'ordre 8. Ce sous-espace est extraordinaire et nous réserve quelques surprises!!!

Dans la structure générale (2.3) des super-Dürer-alpha, nous pouvons observer, avec quelques exemples numériques pour nous guider, que les seize nombres sont réunis en quatre groupes de quatre nombres, ces quatre nombres formant une suite arithmétique. Voici ces groupes :

$$\begin{aligned} &A, A+r, A+2r, A+3r \\ &b, b+r, b+2r, b+3r \\ &B, B+r, B+2r, B+3r \\ &C, C+r, C+2r, C+3r \end{aligned}$$

avec :

$$A = \frac{2a+6b-S}{4}$$
$$B = \frac{-2a+2b+S}{4}$$
$$C = \frac{S-2a}{2}$$
$$r = \frac{2a-6b+S}{12}$$

Ces quatre suites arithmétiques ont la même raison r . De plus, A, b, B et C forment aussi une suite arithmétique de raison $t = \dfrac{S-2a-2b}{4}$ et nous avons : $b = A+t, B = A+2t, C = A+3t.$

La structure générale (2.3) des super-Dürer-alpha devient :

$$(2.4)\qquad \begin{pmatrix} A+3r & A+t & A+3r+3t & A+2t \\ A+2r+3t & A+r+2t & A+2r & A+r+t \\ A & A+3r+t & A+3t & A+3r+2t \\ A+r+3t & A+2r+2t & A+r & A+2r+t \end{pmatrix}$$

Autre structure générale des super *–Dürer –alpha*

La somme magique S s'écrit alors $4A+6r+6t$.

Théorème 5.11 :

Un super- Dürer-alpha est trivial si et seulement si $r=t=0.$

La structure générale (2.4) est très intéressante pour fabriquer des super-Dürer-alpha formés de seize entiers positifs différents.

En effet, les seize nombres du super-Dürer-alpha sont :

$$(**)\qquad \begin{matrix} A & A+r & A+2r & A+3r \\ A+t & A+t+r & A+t+2r & A+t+3r \\ A+2t & A+2t+r & A+2t+2r & A+2t+3r \\ A+3t & A+3t+r & A+3t+2r & A+3t+3r \end{matrix}$$

Nous voyons clairement qu'il est **suffisant** que A, r et t soient des entiers >0 et que $t>3r$ *ou* $r>3t$ si nous voulons un super-Dürer-alpha formé de seize entiers positifs différents. Par exemple, avec $A=5$, $r=2$, $t=7$, nous obtenons le super-Dürer-alpha suivant :

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 32 & 19 \\ 30 & 21 & 9 & 14 \\ 5 & 18 & 26 & 25 \\ 28 & 23 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

Il est formé de seize nombres entiers positifs différents et possède 68 figures magiques de somme S = 74.

Si nous voulons un super-Dürer-alpha normal, il suffit de prendre $A=1$, $r=1$, $t=4$ ou $A=1$, $r=4$, $t=1$.

Théorème 5.12 :

Si A , r *et* t sont des entiers positifs avec $t > 3r$ *ou* $r > 3t$, alors nous aurons un super-Dürer-alpha presque normal ; de plus, il sera normal si nous prenons $A = 1$, $r = 1$, $t = 4$ ou $A = 1$, $r = 4$, $t = 1$.

Le théorème 5.12 nous permet de trouver deux des huit super-Dürer-alpha normaux qui existent. Il est facile de trouver les six autres en donnant des valeurs entières aux variables A, r *et* t.

Avec $A = 1, r = 1, t = 4$, (2.4) nous donne le carré 3 de la liste des huit cités plus haut.

Avec $A = 1, r = 4, t = 1$, (2.4) nous donne le carré 5.

Comment trouver le carré 7? Nous voyons que $A = 4, A + t = 3$ *et* $A + r = 8$ et il est clair que nous obtiendrons ce super-Dürer-alpha avec $A = 4, r = 4$ *et* $t = -1$. Trouvez les cinq autres.

Soit M , le carré général (2.4). Il est facile de montrer que :

$$M = A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que ces trois carrés sont des super-Dürer-alpha respectivement de sommes 4, 6 et 6. On conclut que M est un super-Dürer-alpha de somme $4A + 6r + 6t$. De plus, il est facile de montrer qu'ils sont linéairement indépendants et donc, forment une base du **sous-espace de dimension 3** des super-Dürer-alpha.

Enfin, pour savoir si un carré magique est un super-Dürer-alpha, il suffit de vérifier que les figures ABEF, BCFG, EFJK, EBGQ et FJNQ sont magiques.

Si nous posons $34 = 4A + 6r + 6t$ et que nous remplaçons dans (2.4), t par $\frac{34 - 4A - 6r}{6}$, alors nous obtenons la structure générale (2.5) des super Dürer-alpha de somme 34.

Notez que ceux-ci ne forment pas un espace vectoriel sur les réels.

(2.5)
$$\begin{pmatrix} A+3r & \frac{A-3r+17}{3} & 17-A & \frac{-A-6r+34}{3} \\ -A-r+17 & \frac{-A-3r+34}{3} & A+2r & \frac{A+17}{3} \\ A & \frac{A+6r+17}{3} & -A-3r+17 & \frac{-A+3r+34}{3} \\ -A-2r+17 & \frac{34-A}{3} & A+r & \frac{A+3r+17}{3} \end{pmatrix}$$

$$Structure\ générale\ des\ super-Dürer-alpha\ de\ somme\ 34$$

Cherchons tous les carrés normaux à partir de (2.5). Nous les avons déjà trouvés à partir de (2.3). Nous allons les retrouver ici, d'une façon beaucoup plus simple. Nous voyons bien, selon (2.5), que A doit être un entier tel que $1 \le A \le 16$. De plus, pour que $\frac{A+17}{3}$ soit un entier, il faudra $A = 1\ ou\ 4\ ou\ 7\ ou\ 10\ ou\ 13\ ou\ 16$. Puis r doit être un entier puisque $A+r$ doit être entier et il doit être non nul sans quoi nous aurions au moins quatre fois le même nombre dans le carré. Aussi nous devons avoir :

$$1 \le A+3r \le 16$$
$$\frac{1-A}{3} \le r \le \frac{16-A}{3}$$

A	r	$On\ trouve\ les\ carrés$
1	1 2 3 4 5	3 *et* 5
4	−1 1 2 3 4	1 *et* 7
7	−2 −1 1 2 3	*aucun*
10	−3 −2 −1 1 2	*aucun*
13	−4 −3 −2 −1 1	2 *et* 8
16	−5 −4 −3 −2 −1	4 *et* 6

Les huit carrés normaux super-Dürer-alpha trouvés avec (2.3) étaient numérotés de 1 à 8. Ce sont ceux de la troisième colonne. Avec la structure générale (2.5), nous avons retrouvé ces huit carrés parmi 30. Avec la structure générale (2.3), nous avions trouvé les huit carrés parmi 256. C'est en ce sens que la recherche des carrés normaux est plus simple; nous les trouvons parmi 30 carrés au lieu de 256.

Nous venons de voir trois façons différentes de construire les huit super-Dürer-alpha normaux!!! Nous en verrons une quatrième, **spectaculaire,** dans le chapitre 12 des carrés magiques fonctionnels!!!

Terminons avec les caractéristiques du sous-espace des super Dürer-alpha :

1. Les figures magiques imposées à la structure générale (2.2) des super-Dürer pour obtenir la structure générale (2.3) des super-Dürer-alpha sont les cerfs-volants EBGQ et FJNQ.
2. Le sous-espace des super-Dürer-alpha est représenté par les structures générales (2.3) ou (2.4).
3. Les super-Dürer-alpha de somme 34 sont obtenus de la structure générale (2.5).
4. Le sous-espace des super-Dürer-alpha est normal d'ordre 8.
5. La fréquence du sous-espace des super-Dürer-alpha est la fréquence de la structure générale (2.3) soit $f(S) = 68$.
6. Les 68 figures magiques qui caractérisent tous les super-Dürer-alpha sont les 52 de tous les super-Dürer plus les 16 nouvelles présentées plus haut.
7. Pour savoir si un carré magique d'ordre 4 est un super-Dürer-alpha, il suffit de montrer que les 5 figures ABEF, BCFG, EFJK, EBGQ et FJNQ sont magiques (3 carrés d'ordre 2 plus 2 cerfs-volants).
8. Le sous-espace des super-Dürer-alpha est de dimension 3 puisque (2.3) renferme 3 variables libres (de même que (2.4)).

5.7 Le sous-espace des super-Dürer-bêta

Ce nouveau sous-espace renferme tous les super-Dürer-alpha qui possèdent comme nouvelle figure magique, le cerf-volant vertical bas-gauche BJMQ.

À partir de la structure générale (2.3), la condition nécessaire et suffisante pour avoir cette nouvelle figure magique est :

$$\frac{2(S+3b-a)}{3} = S$$

ou encore :

$$b = \frac{2a+S}{6}$$

En plaçant l'expression de b dans la structure générale (2.3), nous obtenons la structure générale (2.6) des super-Dürer-bêta.

$$\begin{pmatrix} a & \frac{S+2a}{6} & \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} \\ \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} & a & \frac{S+2a}{6} \\ a & \frac{S+2a}{6} & \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} \\ \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} & a & \frac{S+2a}{6} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$Structure\ générale\ des\ super-Dürer-bêta$$

Les quatre nombres dans (2.6) forment une suite arithmétique de raison $r = \frac{S-4a}{6}$. Ainsi, (2.6) devient :

$$\begin{pmatrix} a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$Autre\ structure\ des\ super-Dürer-bêta$$

Si dans (2.6), nous remplaçons S par $4a+6r$, alors nous obtenons (2.7). Puisque a et $4a+6r$ peuvent prendre toutes les valeurs réelles de façon indépendante, alors (2.7) génère tous les super-Dürer-bêta.

Théorème 5.13 :

Un super Dürer-bêta est trivial si et seulement si $r = 0$ donc si et seulement si $a = \frac{S}{4}$.

Un super-Dürer-bêta non trivial est donc formé de quatre nombres différents, chacun apparaissant quatre fois dans le carré.

Théorème 5.14 :

Tous les super-Dürer-bêta non triviaux ont en commun les mêmes 360 figures magiques.

En effet, la fréquence de la structure générale (2.6) est $f(S)=360$ et nous connaissons un super- Dürer-bêta qui possède exactement 360 figures magiques. Nous pouvons donc affirmer que le sous-espace **des super-Dürer-bêta** est caractérisé par 360 figures magiques.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce super-Dürer-bêta possède exactement 360 figures magiques de somme 10. Enfin, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.15 :

Tous les super-Dürer-bêta non triviaux possèdent exactement 360 figures magiques, les mêmes pour tous.

Pour démontrer ce théorème, partons de la structure (2.7) et observons que si M est un super-Dürer-bêta, alors :

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

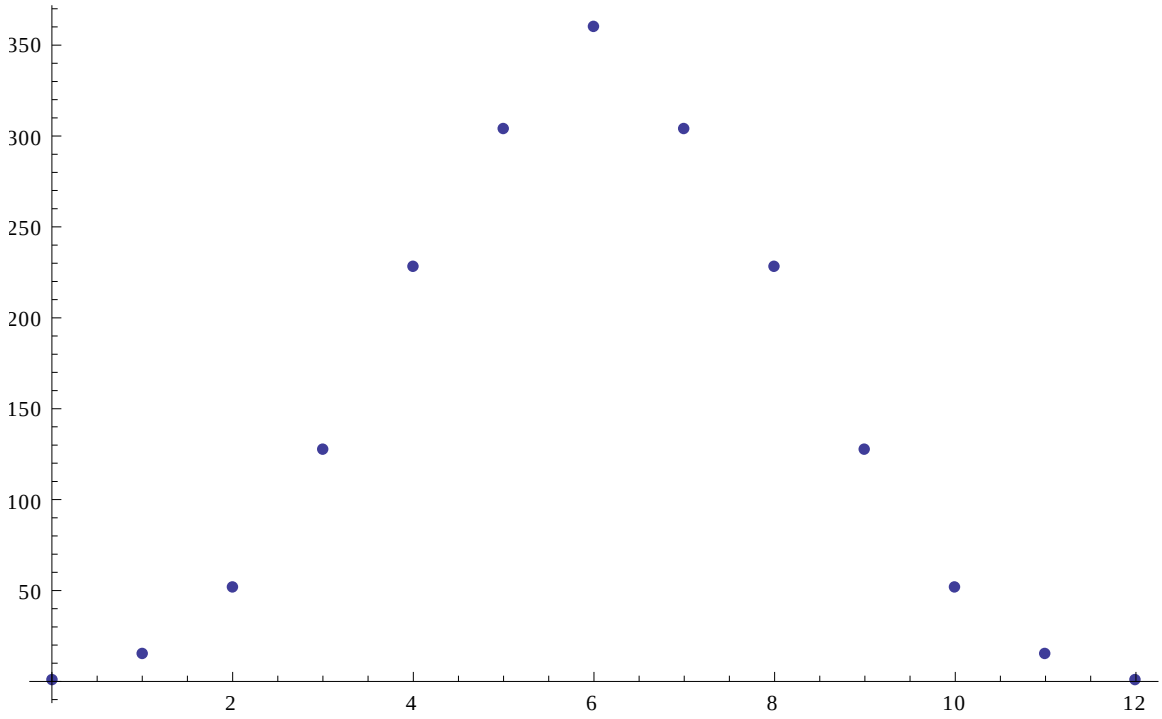
Ces deux carrés magiques sont des super-Dürer-bêta et celui de droite possède exactement 360 figures magiques. Il en résulte que M possède exactement 360 figures magiques (r non nul).

Terminons avec les caractéristiques du sous-espace des super- Dürer-bêta :

1. La figure magique imposée à la structure générale (2.3) des super-Dürer-alpha pour obtenir la structure générale (2.6) des super-Dürer-bêta est le cerf-volant BJMQ.
2. Le sous-espace des super-Dürer-bêta est représenté par les structures générales (2.6) ou (2.7).
3. Le sous-espace des super-Dürer-bêta n'est pas presque normal donc n'est pas normal.
4. La fréquence du sous-espace des super-Dürer-bêta est la fréquence de la structure générale (2.6) soit $f(S)=360$.
5. Tous les super-Dürer-bêta non triviaux possèdent exactement 360 figures magiques et celles-ci sont les mêmes pour tous.
6. Le sous-espace des super-Dürer-bêta est de dimension 2.
7. Les super-Dürer-bêta vont permettre la création de très beaux problèmes d'algèbre!!! (voir 14.15 du chapitre 14 «Carrés magiques et structures algébriques»)

5.8 Illustration des fréquences

Le tableau suivant indique la fréquence des sommes de quatre nombres dans un super-Dürer-bêta non trivial :



$$f(4a)=1\ ;\ f(4a+r)=16\ ;\ f(4a+2r)=52\ ;\ f(4a+3r)=128\ ;\ f(4a+4r)=229\ ;$$
$$f(4a+5r)=304\ ;\ f(4a+6r)=360\ ;\ f(4a+7r)=304\ ;\ f(4a+8r)=229\ ;$$
$$f(4a+9r)=128\ ;\ f(4a+10r)=52\ ;\ f(4a+11r)=16\ ;\ f(4a+12r)=1$$

Remarquez qu'il n'y a que treize sommes possibles dans un super-Dürer-bêta non trivial et que celles-ci sont toutes différentes. **La somme magique est** $S=4a+6r$ **; elle a la fréquence la plus élevée soit 360**.

Deux super-Dürer-bêta non triviaux auront exactement le même tableau de fréquences.

À partir de la structure générale des super-Dürer-alpha (2.3), nous avons ajouté une figure de plus soit le cerf-volant vertical bas-gauche. Cela nous a conduit aux super-Dürer-bêta. Mais ce choix a été tout à fait arbitraire et nous aurions pu choisir une autre figure, l'escalier JFCD, par exemple.

Nous aurions procédé de la même façon que pour les super-Durer-alpha avec le cerf-volant vertical bas-gauche et nous aurions obtenu une autre structure générale que celle des super - Dürer-bêta.

À vous de construire d'autres sous-espaces!!! À nous, aussi, de poursuivre.

5.9 Le sous-espace des A-Dürer

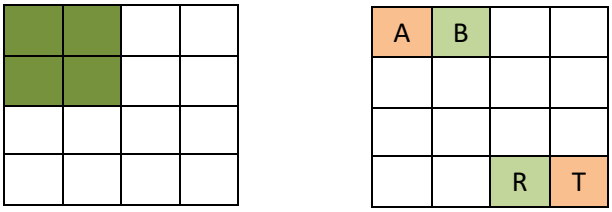
Un carré magique est un **A-Dürer** si et seulement si c'est un Dürer qui possède la propriété suivante: toute paire de cases symétriques par rapport au centre du carré a pour somme $\frac{S}{2}$.

Théorème 5.16 :

Un carré magique est un A-Dürer si et seulement si c'est un Dürer qui vérifie :

$$A+T=B+R=\frac{S}{2}$$

Le théorème 5.16 nous fournit un moyen rapide pour identifier un A-Dürer. En voici l'illustration :



Si nous savons que le carré est magique, alors il suffit de vérifier que le carré d'ordre 2, en vert, est une figure magique et que la somme des cases A et T = la somme des cases B et R = $\frac{S}{2}$.

Preuve :

Pour cela, après avoir vérifié qu'on a un Dürer, nous devons montrer que toute paire de cases symétriques par rapport au centre du carré a pour somme $\frac{S}{2}$. Nous avons déjà : $A+T=\frac{S}{2}$ et $B+R=\frac{S}{2}$.

Puisque (D + P) + (A + T) = S et que (A + T) = $\frac{S}{2}$ alors **D + P =** $\frac{S}{2}$**.**

Puisque (A + B + C + D) + (P + Q + R + T) = 2S = (A + T) + (B + R) + (D + P) + (C + Q) = $\frac{3S}{2}$ + (C + Q) alors **C + Q =** $\frac{S}{2}$**.**

Puisque A + F + M + T = S = (A + T) + (F + M) = $\frac{S}{2}$ + (F + M) alors **F + M =** $\frac{S}{2}$**.**

De même **G + K =** $\frac{S}{2}$**.**

Puisque (B + E) + (N + R) = S = (E + N) + (B + R) = (E + N) + $\frac{S}{2}$ alors **E + N =** $\frac{S}{2}$**.**

Puisque (J + Q) + (C + H) = S = (C + Q) + (J + H) = $\frac{S}{2}$ + (J + H) alors **J + H =** $\frac{S}{2}$**.**

Ce qui montre que notre carré magique est bien un A-Dürer.

À partir de la structure générale (2.1) des Dürer et du théorème 5.16, nous trouvons que les Dürer seront des A-Dürer si et seulement si :

$$g=\frac{S}{2}-f$$
$$d=S-a-c-f$$

Si nous remplaçons d et g par ces valeurs dans la structure générale (2.1) des Dürer, alors nous obtenons la structure générale (2.8) des carrés magiques A-Dürer.

$$(2.8)\qquad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ S-a-c-f & -b+c+f & f & a+b-f \\ \frac{S}{2}-a-b+f & \frac{S}{2}-f & \frac{S}{2}+b-c-f & -\frac{S}{2}+a+c+f \\ -\frac{S}{2}+a+b+c & \frac{S}{2}-c & \frac{S}{2}-b & \frac{S}{2}-a \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques A – Dürer

Théorème 5.17 :

Tous les A-Dürer non triviaux ont en commun les mêmes cinquante deux figures magiques.

Preuve :

La fréquence de la structure générale (2.8) est $f(S)=52$ et nous connaissons un A-Dürer qui possède exactement 52 figures magiques (voir celui de gauche, ci bas). Ses 52 figures magiques sont les 52 figures magiques de (2.8).

Voici deux A-Dürer formés de seize entiers positifs différents :

$$\begin{pmatrix} 19 & 5 & 38 & 50 \\ 33 & 55 & 22 & 2 \\ 54 & 34 & 1 & 23 \\ 6 & 18 & 51 & 37 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 25 & 81 & 53 & 37 \\ 56 & 34 & 62 & 44 \\ 54 & 36 & 64 & 42 \\ 61 & 45 & 17 & 73 \end{pmatrix}$$

52 *figures magiques* 54 *figures magiques*

Celui de gauche est de somme magique $S=112$ avec $f(112)=52$. Celui de droite est de somme magique $S=196$ avec $f(196)=54$.

Nous allons trouver maintenant les 52 figures magiques qui caractérisent les A-Dürer. Voici comment : il existe huit groupes de deux cases symétriques par rapport au centre du carré et ces groupes sont disjoints deux à deux. De plus, la somme de chaque groupe est $\frac{S}{2}$. On peut donc former $C_2^8=28$ figures magiques. Nous dirons que ces 28 figures magiques sont symétriques en ce sens que deux cases d'une figure sont symétriques par rapport au centre du carré et qu'il en est de même des deux autres cases de la même figure. De plus, s'ajoutent les

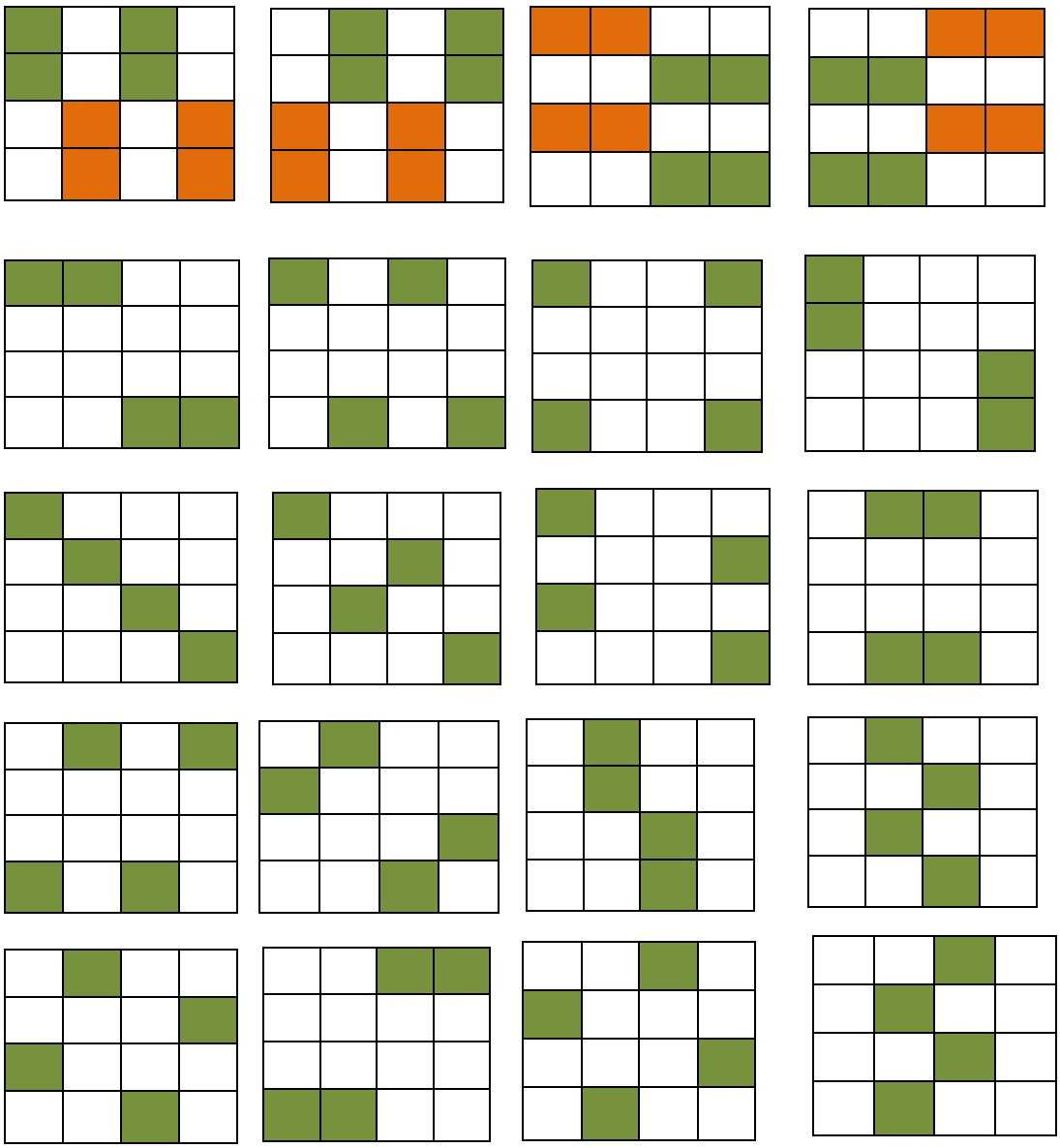
quatre rangées, les quatre colonnes (les deux diagonales sont comprises dans les 28 figures symétriques), les quatre coins des quatre carrés 2x2 situés dans les coins du grand carré, les quatre coins des quatre carrés 3x3, les quatre coins de quatre rectangles 3x2 horizontaux et les quatre coins de quatre rectangles 2x3 verticaux. D'où un total de 52 figures magiques communes à tous les A-Dürer, que nous illustrons ci-dessous :

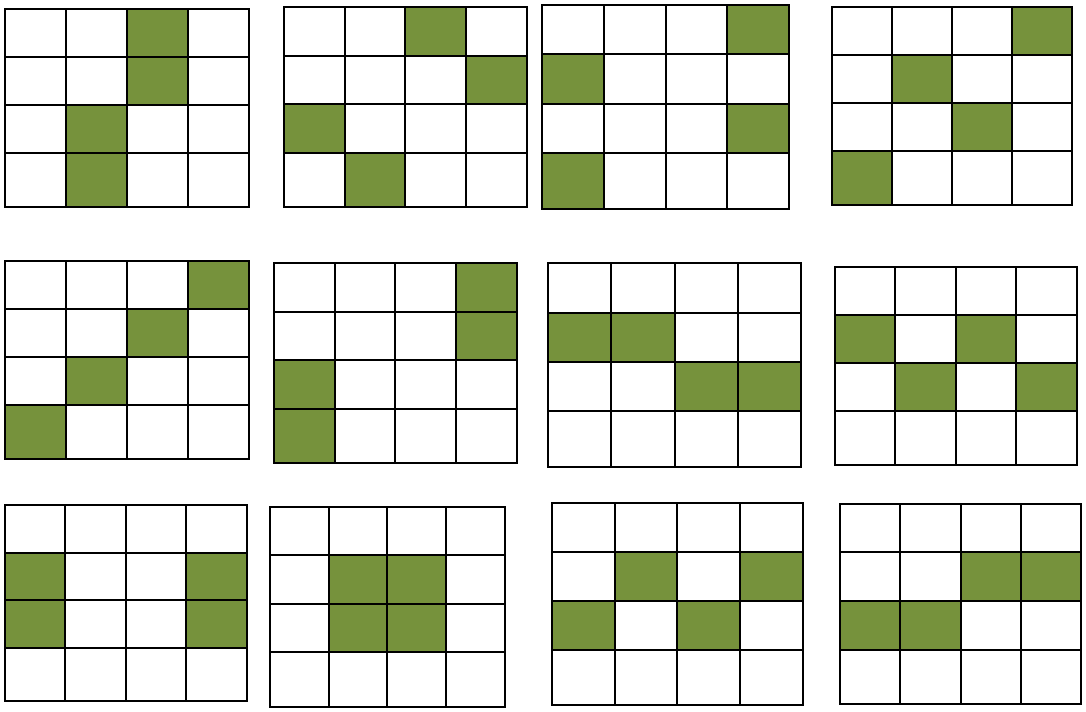
Les quatre rangées

Les quatre colonnes

Les quatre coins des quatre carrés 2×2 de chaque coin du grand carré

Les quatre coins des quatre carrés 3×3 plus les 36 figures magiques suivantes :





Voilà les 52 figures magiques communes à tous les A-Dürer. Celles-ci proviennent du A-Dürer de fréquence 52 vu plus haut. Pour se convaincre que ces figures sont bien magiques, il suffit de le vérifier dans la structure générale (2.8). Pour cela, on additionne les expressions qui correspondent aux cases de la figure considérée et on montre que le résultat est S. Par exemple, montrons que la dernière figure à droite est bien magique :

$$\left(\frac{S}{2}-a-b+f\right)+\left(\frac{S}{2}-f\right)+f+\left(a+b-f\right)=S$$

Les A-Dürer sont donc de très beaux carrés magiques caractérisés par une pseudo-symétrie centrale (la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours égale à la moitié de la somme magique).

Les A-Dürer ont pour ancêtre le célèbre carré d'Albert Dürer qui est un A-Dürer avec quatre cerfs-volants verticaux et quatre fusées verticales. Il possède 86 figures magiques puisqu'il est formé des entiers consécutifs de 1 à 16. Nous verrons plus loin qu'il fait partie des diaboliques-alpha et qu'il possède les 86 figures magiques que tous les diaboliques-alpha possèdent. Le voici :

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-Dürer \quad S=34$$

Le carré d'Albert Dürer possède quatre cerfs-volants verticaux et quatre fusées verticales mais il possède aussi deux escaliers (JFCD et HMQP). Cela nous a conduit à la construction des diaboliques qui suit. Cependant, l'Albert Dürer n'est pas un diabolique.

Terminons avec les caractéristiques du sous-espace des A-Dürer :

1. À la structure générale (2.1) des Dürer, nous avons imposé $A+T=B+R=\frac{S}{2}$ et ainsi nous avons obtenu la structure générale (2.8) des A-Dürer.
2. Le sous-espace des A-Dürer est représenté par la structure générale (2.8).
3. Le sous-espace des A-Dürer est normal d'ordre 384; celui d'Albert Dürer en fait partie.
4. La fréquence du sous-espace des A-Dürer est la fréquence de la structure générale (2.8) soit $f(S)=52$.
5. Les 52 figures magiques qui caractérisent tous les A-Dürer sont données plus haut.
6. Pour savoir si un carré magique est un A-Dürer, il suffit de s'assurer que $A+B+E+F=S$ et que $A+T=B+R=\frac{S}{2}$.
7. C'est un sous-espace de dimension 5.

5.10 Le sous-espace des diaboliques

Un carré magique d'ordre 4 est un **diabolique** si et seulement si c'est un A-Dürer qui possède le cerf-volant vertical haut gauche EBGQ, le cerf-volant horizontal gauche bas JFNQ et l'escalier JFCD.

Nous verrons que tous les diaboliques possèdent huit cerfs-volants, huit fusées, deux escaliers et deux flèches d'où 72 figures magiques; mais il y en a quatorze autres pour un total de 86. Nous montrerons que tout diabolique non trivial possède exactement 86 figures magiques. Trouvons d'abord la structure générale des diaboliques. Pour cela, allons dans la structure générale (2.8) des A-Dürer et observons qu'un A-Dürer sera diabolique si et seulement si :

$$a-b+2c=\frac{S}{2}\ ;\ -2b+c+3f=\frac{S}{2}\ ;\ 2a+3b-c-2f=\frac{S}{2}$$

si et seulement si :

$$b=\frac{-26a+11S}{18}\ ;\ c=\frac{-11a+5S}{9}\ ;\ f=\frac{-10a+7S}{18}$$

En plaçant ces valeurs dans la structure générale (2.8) des A-Dürer, nous obtenons la structure générale (2.9) des diaboliques :

$$
(2.9) \qquad \begin{pmatrix} a & \frac{11S-26a}{18} & \frac{5S-11a}{9} & \frac{10a-S}{6} \\ \frac{14a+S}{18} & \frac{S-a}{3} & \frac{7S-10a}{18} & \frac{a+2S}{9} \\ \frac{5S-2a}{18} & \frac{5a+S}{9} & \frac{2a+S}{6} & \frac{4S-7a}{9} \\ \frac{2S-5a}{3} & \frac{22a-S}{18} & \frac{13a-S}{9} & \frac{S-2a}{2} \end{pmatrix}
$$

Structure générale des diaboliques

Parmi les 7040 carrés magiques formés des entiers consécutifs de 1 à 16, seulement deux sont diaboliques. Pour montrer ce résultat, il suffit de poser $S = 34$ et de donner à a, les valeurs de 1 à 16. Nous trouvons les deux diaboliques suivants :

$$
\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 1 & 14 & 15 & 4 \end{pmatrix}
$$

Cependant, l'un est obtenu de l'autre par une rotation de 180°. Il y a donc un seul diabolique primitif!!! De plus, puisqu'il est normal, le théorème 5.3 nous permet d'écrire $f(S) = 86$.

Théorème 5.18:

Parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4, seulement deux sont diaboliques.

Théorème 5.19 :

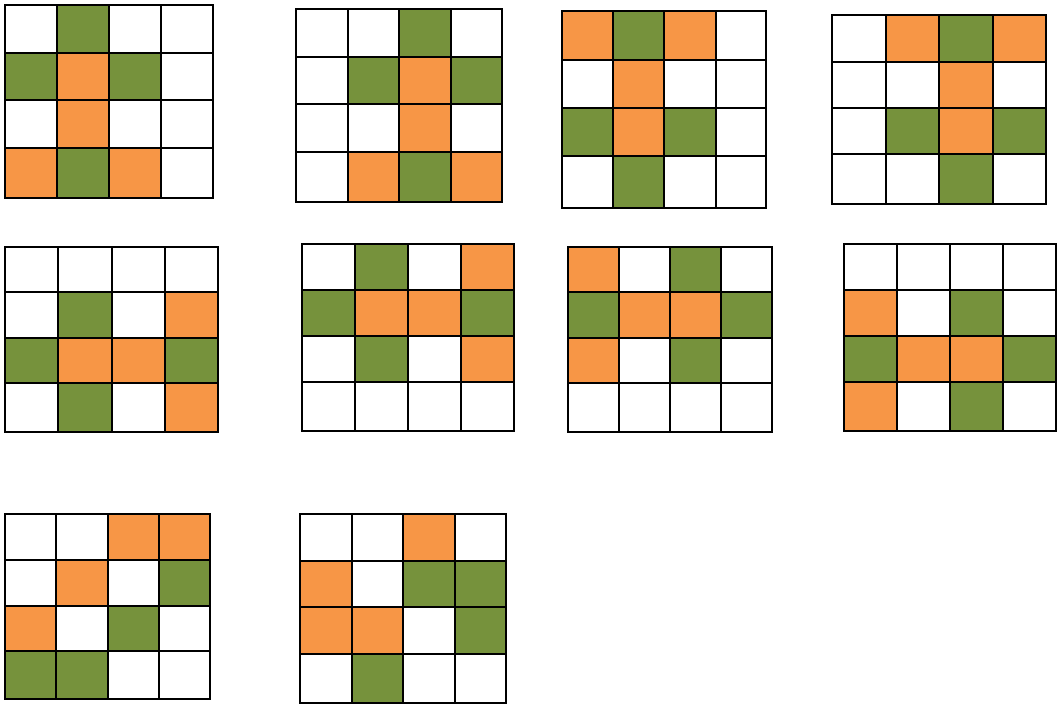
Tous les diaboliques non triviaux ont en commun les mêmes 86 figures magiques.

Preuve :

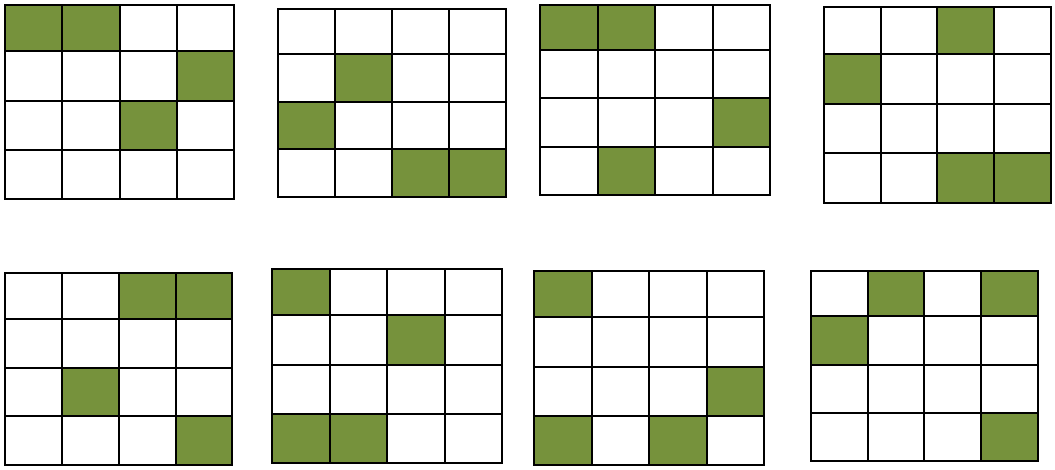
La fréquence de la structure générale (2.9) est $f(S) = 86$ et de plus, nous connaissons un diabolique qui possède exactement 86 figures magiques (voir le diabolique ci haut).

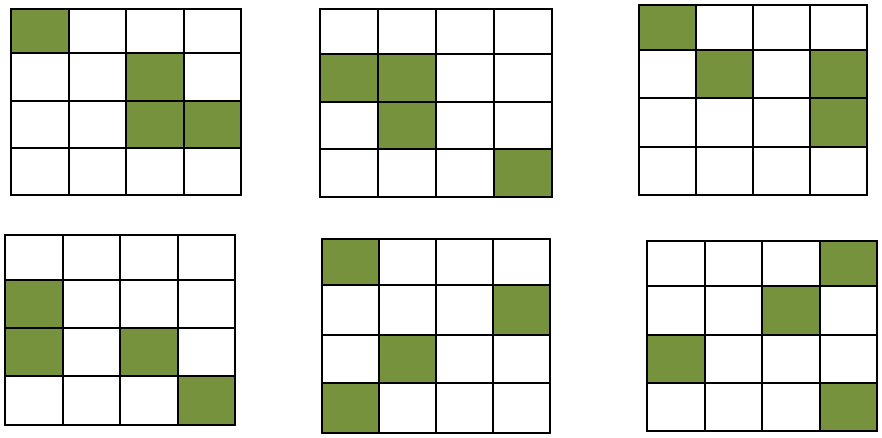
Voici maintenant les 86 figures magiques que tous les diaboliques ont en commun. Elles ont été trouvées à partir du diabolique ci haut. Il est clair que ces 86 figures magiques sont celles de (2.9). Nous pouvons également nous assurer en vérifiant, à partir de (2.9), que ces figures sont bien magiques, donc de sommes S.

Puisqu'un diabolique est un A-Dürer, alors nous connaissons déjà les 52 figures magiques que possèdent tous les A-Dürer. Nous allons illustrer ici les autres figures magiques :



Nous venons d'illustrer les huit cerfs-volants, les huit fusées, les deux escaliers et les deux flèches. Voici les quatorze dernières figures :





Si nous numérotons les quatorze dernières figures de 1 à 14, de gauche à droite et de haut en bas, alors nous constatons que les figures 2, 4, 6, 8, 10, 12 et 14 sont respectivement les rotations de 180° des figures 1, 3, 5, 7, 9, 11 et 13. Nous avons donc sept couples et dans chacun, l'une est la rotation de 180° de l'autre. Trouvez d'autres couples comme ceux-là.

Nous pouvons vérifier que les 34 nouvelles figures sont magiques à partir de la structure générale (2.9) des diaboliques :

Par exemple, montrons que la dernière figure, en bas et à droite, est magique. Pour cela, allons dans (2.9) et additionnons les quatre termes de la figure ; nous trouvons :

$$\left(\frac{5S-2a}{18}\right)+\left(\frac{7S-10a}{18}\right)+\left(\frac{30a-3S}{18}\right)+\left(\frac{9S-18a}{18}\right) = \frac{18S}{18} = S$$

La figure est bien magique. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que toutes les figures illustrées sont magiques.

La structure générale des diaboliques possède donc 86 figures magiques ce qui implique que tous les diaboliques ont en commun ces 86 figures magiques. Extraordinaire!!! Quels beaux carrés magiques!!!

Un diabolique peut-il posséder plus que 86 figures magiques? Si c'est un trivial, alors il possède 1820 figures magiques mais cela ne présente aucun intérêt. Si le diabolique est non trivial, alors nous montrerons qu'il possède exactement 86 figures magiques (celles illustrées ci-haut).

Ces diaboliques n'ont pas fini de nous surprendre et voyez la surprise qui suit :

Théorème 5.20 :

Dans tous les diaboliques, les seize nombres forment une suite arithmétique.

Preuve :

Partons de (2.9), la structure générale des diaboliques et posons $u = \dfrac{30a - 3S}{18}$, le terme situé dans la première rangée, quatrième colonne. Ensuite, posons $r = \dfrac{S - 4a}{18}$. La structure générale des diaboliques devient alors :

$$\begin{pmatrix} u+3r & u+14r & u+13r & u \\ u+4r & u+9r & u+10r & u+7r \\ u+8r & u+5r & u+6r & u+11r \\ u+15r & u+2r & u+r & u+12r \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

et nous voyons que les seize nombres de tout diabolique forment une suite arithmétique de raison r et de premier terme u.

Si dans (2.9), nous posons $a = u + 3r \ et \ S = 4u + 30r$, alors nous obtenons (2.10). Quelle que soit la valeur de u et celle de r, nous obtenons donc un diabolique. Puisque $u + 3r \ et \ 4u + 30r$ peuvent prendre toutes les valeurs réelles de façon indépendante, alors (2.10) nous donne tous les diaboliques. En effet, si nous posons :

$$\begin{aligned} u + 3r &= a \\ 4u + 30r &= S \end{aligned}$$

nous pouvons constater que ce système possède une solution unique en $u \ et \ r$ (aussi voir problème 63 de 5.18). Nous voyons également que si D est un diabolique, alors en posant :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ et \ Y = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 13 & 0 \\ 4 & 9 & 10 & 7 \\ 8 & 5 & 6 & 11 \\ 15 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

nous trouvons : $$D = uX + rY$$

où $X \ et \ Y$ sont des diaboliques linéairement indépendants qui forment donc une base du sous-espace de dimension 2 des diaboliques. Les coordonnées de D par rapport à cette base sont donc $(u \ ; \ r)$ et nous pouvons écrire :

$$D = (u \ ; \ r)$$

Puisque Y possède exactement 86 figures magiques, il s'ensuit que D possède exactement 86 figures magiques si $r \neq 0$ et ce sont les 86 de Y. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 5.21 :

Tout diabolique non trivial possède exactement 86 figures magiques.

Tous les diaboliques non triviaux possèdent donc exactement 86 figures magiques et ce sont les mêmes pour tous les diaboliques non triviaux.

Pour construire un diabolique, voici les trois étapes à suivre :

(4)			(1)
	(3)	(2)	

(5)			(8)
	(6)	(7)	

	(10)	(11)	
(9)			(12)

	(15)	(14)	
(16)			(13)

1. Choisissez une suite arithmétique de seize nombres : a ; a + r ; a + 2r ; …
2. Numérotez-les de (1) à (16) de gauche vers la droite : (1) = a ; (2) = a + r ; …
3. Vous les disposez dans le carré tel qu'indiqué ci-haut.

Le résultat est un diabolique!!!

Par exemple, choisissons la suite arithmétique : 3 ; 7 ; 11 ; 15 ; … ; 59 ; 63. Le diabolique est :

$$\begin{pmatrix} 15 & 59 & 55 & 3 \\ 19 & 39 & 43 & 31 \\ 35 & 23 & 27 & 47 \\ 63 & 11 & 7 & 51 \end{pmatrix}$$

Il est de somme 132. Nous pouvons construire un deuxième diabolique avec 63 ; 59 ; … ; 7 ; 3.

$$\begin{pmatrix} 51 & 7 & 11 & 63 \\ 47 & 27 & 23 & 35 \\ 31 & 43 & 39 & 19 \\ 3 & 55 & 59 & 15 \end{pmatrix}$$

Notez que le deuxième diabolique est obtenu du premier par une rotation de 180°.

Il est remarquable de pouvoir construire un tel carré, avec 86 figures magiques, de façon aussi simple!!!

Théorème 5.22 :

5.22.1	Un diabolique est trivial si et seulement si $r = 0$ c'est-à-dire $S = 4a$.
5.22.2	Dans un diabolique non trivial, les seize nombres forment une suite arithmétique strictement croissante $(r > 0)$ ou strictement décroissante $(r < 0)$.
5.22.3	Il existe seulement deux diaboliques qui renferment les mêmes seize nombres différents.

Pour démontrer 5.22.3, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.23 :

Il n'existe que deux suites arithmétiques de raisons non nulles formées des mêmes k nombres.

Pour la démonstration de ce lemme, voir le problème 20 de 5.18.

Preuve de 5.22.3 :

Soit A, un diabolique non trivial. Il suffit de connaître la structure générale (2.10) pour voir la suite arithmétique qui compose A. Il est clair que si A et B sont deux diaboliques non triviaux différents, alors, nous verrons deux suites arithmétiques différentes.

Maintenant, si A, B et C sont trois diaboliques non triviaux différents deux à deux, alors ils ne peuvent pas être formés des mêmes seize nombres. En effet, nous aurions trois suites arithmétiques différentes formées des mêmes nombres, ce qui contredirait le lemme ci-haut.

Donc, nous n'avons que deux diaboliques non triviaux formés des mêmes seize nombres, soit celui formé de la suite arithmétique a ; $a+r$; ... ; $a+15r$, soit celui formé de la suite arithmétique $a+15r$; $a+14r$; ... ; $a+r$; a

Les diaboliques se présentent donc tous par paires et dans chaque paire, l'un est obtenu de l'autre par une rotation de 180°. Dans chaque paire, les deux diaboliques renferment les mêmes nombres. Si A et B sont deux diaboliques qui ne sont pas dans une même paire, alors A et B ne renferment pas les mêmes nombres.

Autre preuve du théorème 5.21 :

Partons de la structure générale (2.10) des diaboliques et trouvons la fréquence de chaque somme. La somme de chaque figure aura la forme :

$$4u+k\,r \;\; avec \;\; 6 \le k \le 54 \;\; et \;\; r \ne 0$$

Les fréquences sont :

$$\{1,1,2,3,5,6,9,11,15,18,23,27,34,38,45,50,57,61,68,71,77,79,83,83,$$

$$\mathbf{86},83,83,79,77,71,68,61,57,50,45,38,34,27,23,18,15,11,9,6,5,3,2,1,1\}$$

Notons ici que le total des fréquences est bien 1820, soit le nombre de figures dans un carré d'ordre 4. Donc, la fréquence de chaque somme ne peut pas varier!!! Ainsi, dans un diabolique non trivial, le nombre de figures magiques ne peut pas être ni inférieur, ni supérieur à 86.

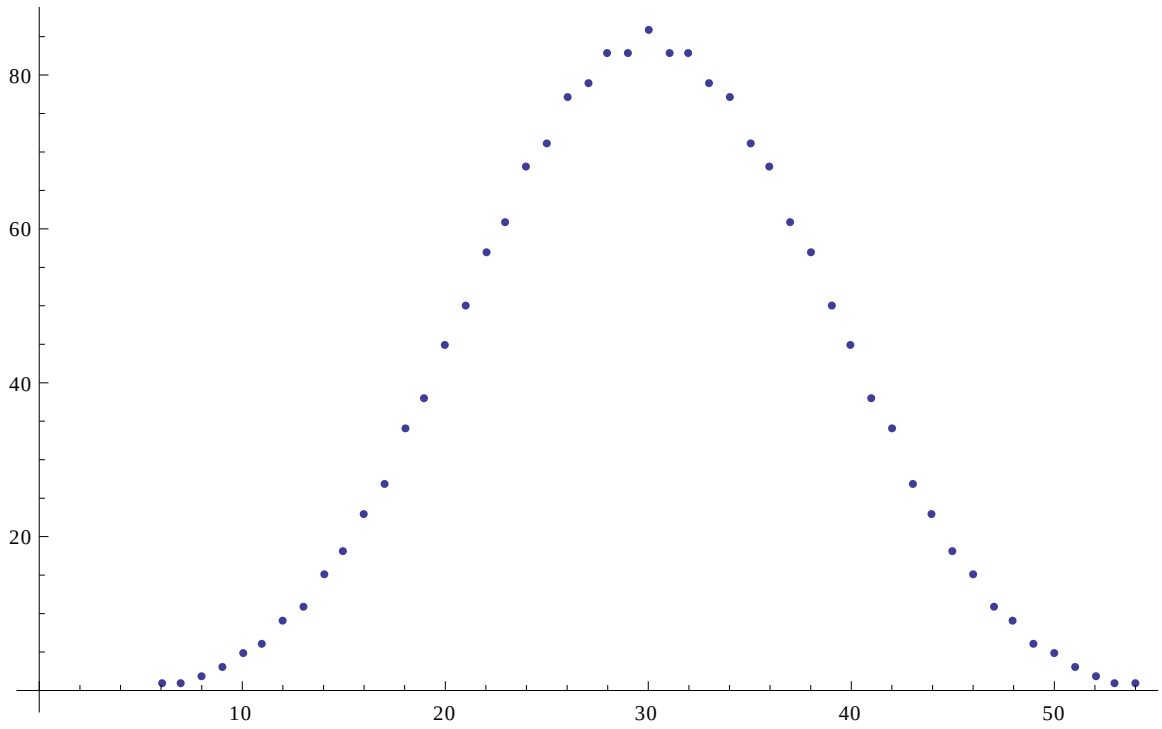
Par exemple :

$$f(4u+6r)=1\,;\;\; f(4u+16r)=23\,;\;\; f(4u+30r)=86\,;\;\; f(4u+33r)=79$$

La fréquence de $4u+30r$, la somme magique, est 86; cela montre que tous les diaboliques non triviaux possèdent exactement 86 figures magiques. De plus, 86 est la fréquence la plus élevée.

Enfin, aucun diabolique non trivial ne peut posséder plus que 86 figures magiques. Puisqu'aucune des fréquences ci-haut mentionnées n'est nulle, cela signifie que dans tout diabolique non trivial, nous avons 49 sommes différentes.

Voici le tableau des fréquences des sommes dans tout diabolique non trivial :



$$\{1,1,2,3,5,6,9,11,15,18,23,27,34,38,45,50,57,61,68,71,77,79,83,83,$$

$$86,83,83,79,77,71,68,61,57,50,45,38,34,27,23,18,15,11,9,6,5,3,2,1,1\}$$

Notez que la courbe est parfaitement symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par le point $(30;0)$. Cela signifie que :

$$f(4u+(30+x)r) = f(4u+(30-x)r) \text{ pour tout entier } x \text{ tel que } 0 \le x \le 24.$$

Dans la liste des fréquences, nous dirons que le premier 1 occupe le rang 6, que le deuxième 1 occupe le rang 7, que le premier 2 occupe le rang 8, …, que 86 occupe le rang 30 et ainsi de suite. La liste des fréquences commence donc au rang 6.

Par exemple, le premier 38 occupe le rang 19, ce qui signifie que $f(4u+19r)=38$. Le deuxième 38 occupe le rang 41, ce qui signifie que $f(4u+41r)=38$. Le seul 86 occupe le rang 30 d'où $f(4u+30r)=86$.

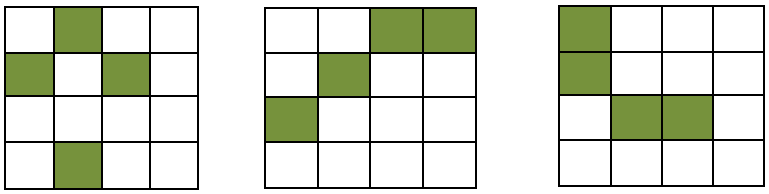
Terminons avec les caractéristiques du sous-espace des diaboliques :

1. Les figures magiques imposées à la structure générale (2.8) des A- Dürer pour obtenir la structure générale (2.9) des diaboliques sont : le cerf-volant EBGQ, le cerf-volant JFNQ et l'escalier JFCD.

2. Le sous-espace des diaboliques est représenté par les structures générales (2.9) et (2.10).
3. Le sous-espace des diaboliques est normal d'ordre 2.
4. La fréquence du sous-espace des diaboliques est la fréquence de la structure générale (2.9) soit $f(S)=86$.
5. Les 86 figures magiques qui caractérisent tous les diaboliques sont illustrées plus haut.
6. Pour savoir si un carré magique est un diabolique, il suffit de s'assurer que c'est d'abord un A-Dürer puis que les figures EBGQ, JFNQ et JFCD sont magiques.
7. Dans un diabolique non trivial, les seize nombres forment une suite arithmétique.
8. Dans un diabolique non trivial, les seize nombres sont tous différents deux à deux.
9. Seulement deux diaboliques peuvent être formés des mêmes seize nombres différents.
10. Tous les diaboliques non triviaux renferment exactement 86 figures magiques, les mêmes pour tous.
11. Le sous-espace des diaboliques est de dimension 2.

5.11 Le sous-espace des diaboliques-alpha

Un carré magique d'ordre 4 est un **diabolique-alpha** si et seulement si c'est un A-Dürer qui possède le cerf-volant vertical haut gauche EBGQ, l'escalier JFCD et la figure magique AEKM.



À partir de la structure générale (2.8) des A-Dürer, nous observons qu'un A-Dürer sera un diabolique-alpha si et seulement si :

$$a-b+2c=\frac{S}{2}\ ;\ 2a+3b-c-2f=\frac{S}{2}\ ;\ -b+2c+3f=S$$

Donc si et seulement si :

$$b=\frac{-22a+13S}{30}\ ;\ c=\frac{-13a+7S}{15}\ ;\ f=\frac{2a+S}{6}$$

En plaçant ces valeurs dans la structure générale (2.8) des A-Dürer, nous obtenons la structure générale (2.11) des diaboliques-alpha que voici :

$$
(2.11) \qquad \begin{pmatrix} a & \frac{13S-22a}{30} & \frac{7S-13a}{15} & \frac{S+6a}{10} \\ \frac{11S-14a}{30} & \frac{S+a}{5} & \frac{S+2a}{6} & \frac{4S-a}{15} \\ \frac{7S+2a}{30} & \frac{S-a}{3} & \frac{3S-2a}{10} & \frac{2S+7a}{15} \\ \frac{2S-3a}{5} & \frac{S+26a}{30} & \frac{S+11a}{15} & \frac{S-2a}{2} \end{pmatrix}
$$

Structure générale des diaboliques – alpha

Parmi les 7040 carrés magiques normaux, seulement deux sont des diaboliques-alpha. Pour montrer ce résultat, il suffit de poser $S = 34$ et de donner à a, les valeurs entières de 1 à 16. Nous trouvons les deux diaboliques-alpha suivants :

$$
\begin{pmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}
$$

Le carré de droite est l'Albert Dürer alors que celui de gauche est obtenu de l'Albert Dürer par une rotation de 180°. Il n'y a donc qu'un seul primitif diabolique-alpha normal. Nous choisissons celui d'Albert Dürer comme diabolique-alpha normal primitif car c'est le plus connu!!!

Théorème 5.24 :

Parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4, seulement deux sont des diaboliques-alpha.

Théorème 5.25 :

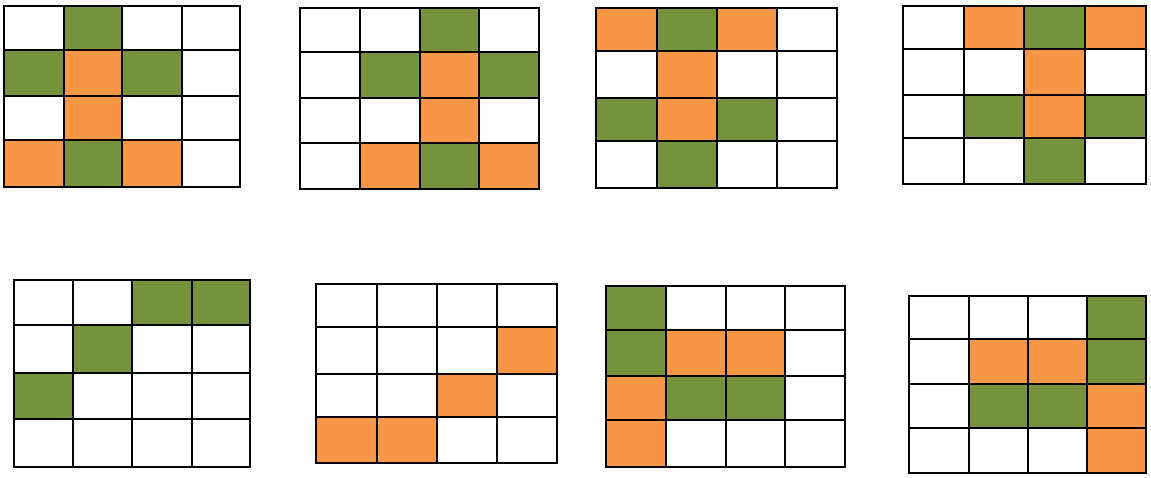
Tous les diaboliques-alpha non triviaux ont en commun les mêmes 86 figures magiques.

Preuve :

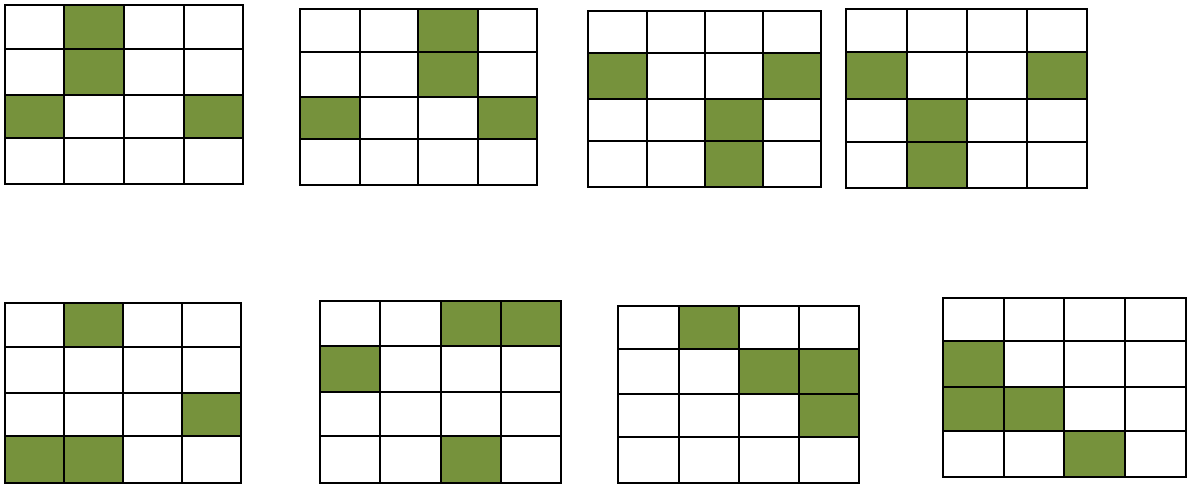
La fréquence de la structure générale (2.11) est $f(S) = 86$ et de plus, nous connaissons un diabolique-alpha qui possède exactement 86 figures magiques (voir le diabolique-alpha ci haut).

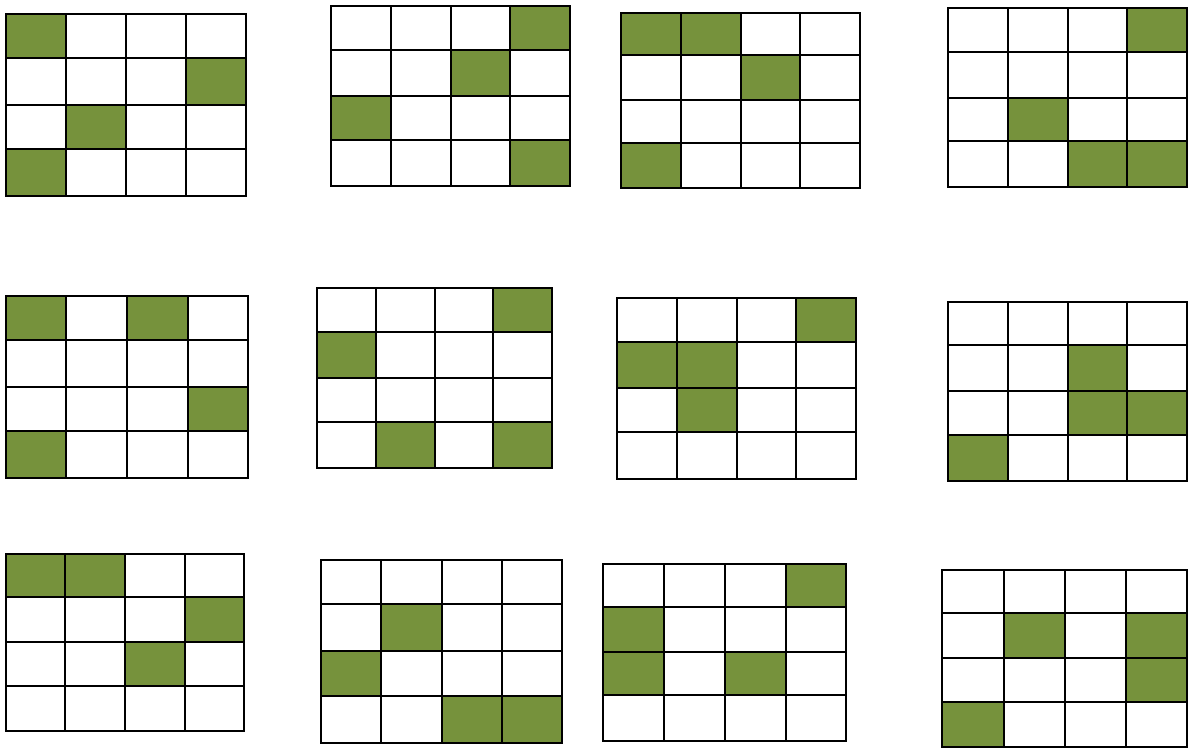
Voici maintenant les 86 figures magiques que tous les diaboliques-alpha ont en commun. Elles ont été trouvées à partir du diabolique-alpha ci haut. Il est clair que ces 86 figures magiques sont celles de (2.11). Nous pouvons également nous assurer en vérifiant, à partir de (2.11), que ces figures sont bien magiques, donc de somme S.

Puisqu'un diabolique-alpha est un A-Dürer, alors nous connaissons déjà les 52 figures magiques que possède tout A-Dürer. Nous allons illustrer ici les autres figures magiques :



Nous venons d'illustrer les quatre cerfs-volants verticaux, les quatre fusées, les deux escaliers ainsi que quatre autres figures dont l'une a participé à la définition des diaboliques-alpha. Voici les vingt dernières figures :





Toutes ces figures sont magiques et sont communes à tous les diaboliques-alpha. Montrons, par exemple, que la dernière figure, à droite, est magique. Pour cela, allons dans la structure (2.11) des diaboliques-alpha et additionnons les quatre termes de la figure; nous trouvons :

$$\left(\frac{6S-9a}{15}\right)+\left(\frac{3S+3a}{15}\right)+\left(\frac{4S-a}{15}\right)+\left(\frac{2S+7a}{15}\right)=\frac{15S}{15}=S$$

La figure est bien magique. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que toutes les figures qui caractérisent les diaboliques-alpha sont magiques.

La structure générale des diaboliques-alpha possède donc 86 figures magiques ce qui implique que tous les diaboliques-alpha ont en commun ces 86 figures magiques. Extraordinaire!!! Quels beaux carrés magiques!!!

Un diabolique-alpha peut-il posséder plus que 86 figures magiques? Si c'est un trivial, alors il possède 1820 figures magiques mais cela ne présente aucun intérêt. Si le diabolique-alpha est non trivial, alors nous montrerons qu'il possède exactement 86 figures magiques (celles illustrées ci-haut).

Ces diaboliques-alpha n'ont pas fini de nous surprendre eux aussi et voyez l'autre surprise qui suit :

Théorème 5.26 :

Dans tous les diaboliques-alpha, les seize nombres forment une suite arithmétique.

Preuve :

Partons de (2.11), la structure générale des diaboliques-alpha et posons $r = \frac{S-4a}{30}$. Nous pouvons vérifier que les 16 nombres de tout diabolique-alpha forment une suite arithmétique dont a est le premier terme et $r = \frac{S-4a}{30}$, la raison. La nouvelle structure générale devient :

$$\begin{pmatrix} a & a+13r & a+14r & a+3r \\ a+11r & a+6r & a+5r & a+8r \\ a+7r & a+10r & a+9r & a+4r \\ a+12r & a+r & a+2r & a+15r \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$Seconde\ structure\ des\ diaboliques-alpha$$

Si, dans (2.11), nous posons $S = 4a + 30r$, alors nous obtenons (2.12). Quelle que soit la valeur de a et celle de r, nous obtenons un diabolique-alpha. Puisque a et $4a + 30r$ peuvent prendre toutes les valeurs réelles de façon indépendante, alors (2.12) nous donne tous les diaboliques-alpha. Nous voyons également que si D est un diabolique-alpha, alors en posant :

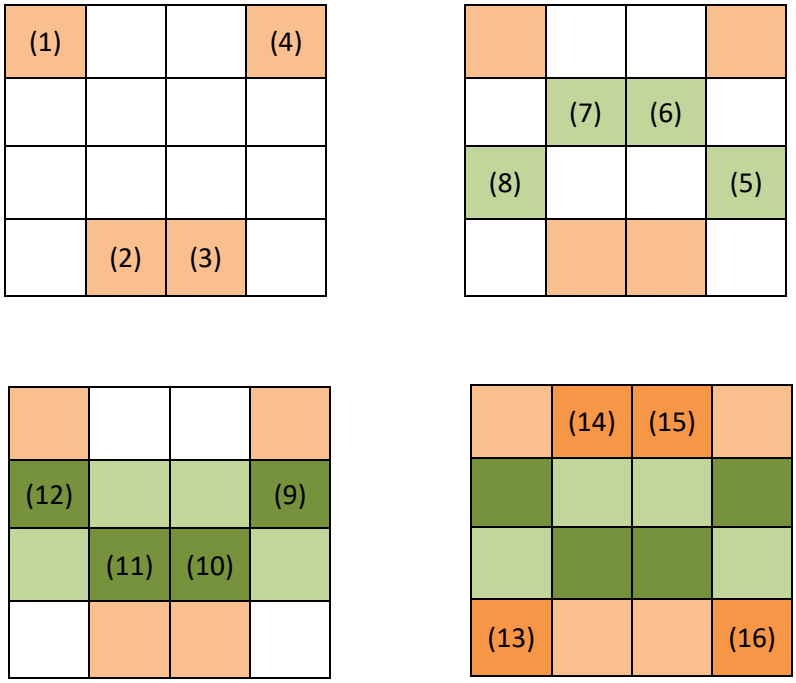
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ et\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 13 & 14 & 3 \\ 11 & 6 & 5 & 8 \\ 7 & 10 & 9 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$

nous trouvons : $$D = aX + rY$$

où $X\ et\ Y$ sont des diaboliques-alpha qui forment une base ordonnée pour les diaboliques-alpha. Les coordonnées de D par rapport à cette base sont donc $(a\ ;\ r)$ et nous pouvons écrire :

$$D = (a\ ;\ r)$$

Pour construire un diabolique-alpha, voici les trois étapes à suivre :



1) Choisissez une suite arithmétique de 16 nombres : a ; a + r ; a + 2r ; …
2) Numérotez-les de (1) à (16) de gauche vers la droite : (1) = a ; (2) = a + r ; …
3) Vous les disposez dans le carré tel qu'indiqué ci-haut.

Le résultat est un diabolique-alpha!!!

Par exemple, choisissons la suite arithmétique : 3 ; 7 ; 11 ; 15 ; … ; 59 ; 63. Le diabolique-alpha est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 55 & 59 & 15 \\ 47 & 27 & 23 & 35 \\ 31 & 43 & 39 & 19 \\ 51 & 7 & 11 & 63 \end{pmatrix}$$

Il est de somme 132. Nous pouvons construire un deuxième diabolique-alpha avec 63 ; 59 ; … ; 7 ; 3.

$$\begin{pmatrix} 63 & 11 & 7 & 51 \\ 19 & 39 & 43 & 31 \\ 35 & 23 & 27 & 47 \\ 15 & 59 & 55 & 3 \end{pmatrix}$$

Notez que le deuxième diabolique-alpha est obtenu du premier par une rotation de 180°.

Il est remarquable de pouvoir construire un tel carré, avec 86 figures magiques, de façon aussi simple!!!

Théorème 5.27 :

5.27.1	Un diabolique-alpha est trivial si et seulement si $r = 0$ c'est-à-dire $S = 4a$.
5.27.2	Dans un diabolique-alpha non trivial, les seize nombres forment une suite arithmétique strictement croissante (r > 0) ou strictement décroissante (r < 0).
5.27.3	Il existe seulement deux diaboliques-alpha qui renferment les mêmes seize nombres différents.

La preuve de 5.27.3 est identique à celle de 5.22.3.

Théorème 5.28 :

Tout diabolique-alpha non trivial possède exactement 86 figures magiques.

Preuve :

Il suffit de constater que dans la base $\{X \ ; Y\}$ des diaboliques-alpha, Y possède exactement 86 figures magiques d'où $a\,X + r\,Y$ possède exactement 86 figures magiques si $r \neq 0$ et ce sont les 86 de Y .

Autre preuve :

Partons de la structure générale (2.12) des diaboliques-alpha et trouvons la fréquence de chaque somme. La somme de chaque figure aura la forme :

$$4a + k\,r \ \ avec \ 6 \leq k \leq 54 \ et \ r \neq 0$$

Les fréquences sont :

$$\{1,1,2,3,5,6,9,11,15,18,23,27,34,38,45,50,57,61,68,71,77,79,83,83,$$

$$86,83,83,79,77,71,68,61,57,50,45,38,34,27,23,18,15,11,9,6,5,3,2,1,1\}$$

Notons ici que le total des fréquences est bien 1820 soit le nombre de figures dans un carré d'ordre 4.

Par exemple :

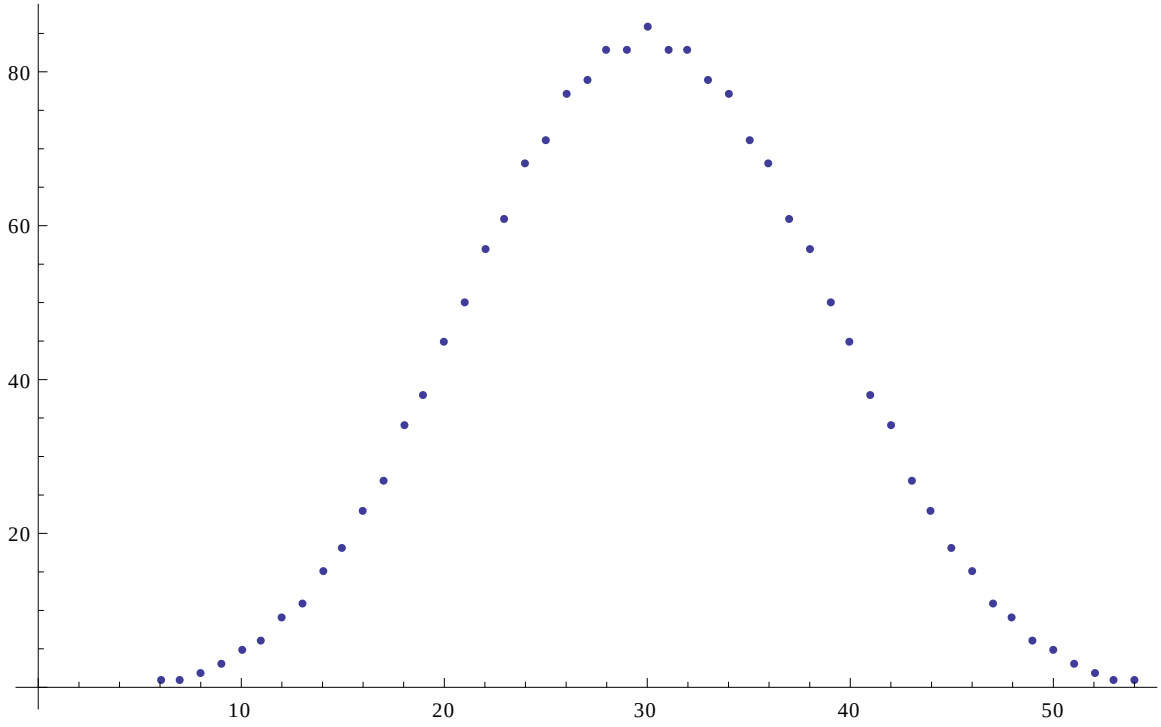
$$f(4a+6r)=1\,;\ f(4a+16r)=23\,;\ f(4a+30r)=86\,;\ f(4a+33r)=79$$

La fréquence de $4a+30r$, la somme magique, est 86; cela montre qu'un diabolique-alpha non trivial possède exactement 86 figures magiques. De plus, 86 est la fréquence la plus élevée.

Enfin, aucun diabolique-alpha non trivial ne peut posséder plus que 86 figures magiques.

Puisqu'aucune des fréquences ci-haut mentionnées n'est nulle, cela signifie que dans tout diabolique-alpha non trivial, nous avons 49 sommes différentes.

Voici le tableau des fréquences des sommes dans tout diabolique-alpha non trivial :



$$\{1,1,2,3,5,6,9,11,15,18,23,27,34,38,45,50,57,61,68,71,77,79,83,83,$$

$$86,83,83,79,77,71,68,61,57,50,45,38,34,27,23,18,15,11,9,6,5,3,2,1,1\}$$

Notez que la courbe est parfaitement symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par le point $(30;0)$. Cela signifie que :

$$f(4a+(30+x)r) = f(4a+(30-x)r) \text{ pour tout entier } x \text{ tel que } 0 \le x \le 24.$$

Dans la liste des fréquences, nous dirons que le premier 1 occupe le rang 6, que le deuxième 1 occupe le rang 7, que le premier 2 occupe le rang 8, …, que 86 occupe le rang 30 et ainsi de suite. La liste des fréquences commence donc au rang 6.

Par exemple, le premier 38 occupe le rang 19, ce qui signifie que $f(4a+19r)=38$. Le deuxième 38 occupe le rang 41, ce qui signifie que $f(4a+41r)=38$. Le seul 86 occupe le rang 30 d'où $f(4a+30r)=86$.

Terminons avec les caractéristiques du sous-espace des diaboliques-alpha :

1. Les figures magiques imposées à la structure générale (2.8) des A-Dürer pour obtenir la structure générale (2.11) des diaboliques-alpha sont : le cerf-volant EBGQ, l'escalier JFCD et la figure AEKM.
2. Le sous-espace des diaboliques-alpha est représenté par les structures générales (2.11) et (2.12).
3. Le sous-espace des diaboliques-alpha est normal d'ordre 2.
4. La fréquence du sous-espace des diaboliques-alpha est la fréquence de la structure générale (2.11) soit $f(S)=86$.
5. Les 86 figures magiques qui caractérisent tous les diaboliques-alpha sont illustrées plus haut.
6. Pour savoir si un carré magique est un diabolique-alpha, il suffit de s'assurer que c'est d'abord un A-Dürer puis que les figures EBGQ, JFCD et AEKM sont magiques.
7. Dans un diabolique-alpha non trivial, les 16 nombres forment une suite arithmétique.
8. Dans un diabolique-alpha non trivial, les 16 nombres sont tous différents deux à deux.
9. Seulement 2 diaboliques-alpha peuvent être formés des mêmes 16 nombres différents.
10. Tous les diaboliques-alpha non triviaux renferment exactement 86 figures magiques, les mêmes pour tous.
11. Le sous-espace des diaboliques-alpha est de dimension 2.

5.12 Relation entre les diaboliques et les diaboliques-alpha

Nous venons de voir deux très beaux sous-espaces de carrés magiques : **les diaboliques** et les **diaboliques-alpha.** Quoique différents, ceux-ci sont étroitement reliés.

Par exemple, observons les deux diaboliques et les deux diaboliques-alpha obtenus à partir de la suite arithmétique : 3 ; 7 ; 11; 15 ; … ; 59 ; 63.

$$\begin{pmatrix} 15 & 59 & 55 & 3 \\ 19 & 39 & 43 & 31 \\ 35 & 23 & 27 & 47 \\ 63 & 11 & 7 & 51 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 51 & 7 & 11 & 63 \\ 47 & 27 & 23 & 35 \\ 31 & 43 & 39 & 19 \\ 3 & 55 & 59 & 15 \end{pmatrix}$$

Les deux diaboliques

$$\begin{pmatrix} 63 & 11 & 7 & 51 \\ 19 & 39 & 43 & 31 \\ 35 & 23 & 27 & 47 \\ 15 & 59 & 55 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 55 & 59 & 15 \\ 47 & 27 & 23 & 35 \\ 31 & 43 & 39 & 19 \\ 51 & 7 & 11 & 63 \end{pmatrix}$$

Les deux diaboliques-alpha

Si, dans le premier diabolique, à gauche, nous permutons la première rangée avec la quatrième rangée, alors nous obtenons le premier diabolique-alpha, à gauche.

Si, dans le deuxième diabolique, à droite, nous permutons la première rangée avec la quatrième rangée, alors nous obtenons le deuxième diabolique-alpha, à droite.

Rappelons qu'avec ces seize nombres, il existe seulement ces deux diaboliques et ces deux diaboliques-alpha.

Théorème 5.29 :

Considérons les deux diaboliques et les deux diaboliques-alpha construits à partir de la même suite arithmétique. Si nous permutons la première rangée avec la quatrième rangée dans les deux diaboliques, alors nous obtenons les deux diaboliques-alpha. Si nous permutons la première rangée avec la quatrième rangée dans les deux diaboliques-alpha, alors nous obtenons les deux diaboliques.

Preuve :

Voici les deux diaboliques :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a+3r & a+14r & a+13r & a \\ a+4r & a+9r & a+10r & a+7r \\ a+8r & a+5r & a+6r & a+11r \\ a+15r & a+2r & a+r & a+12r \end{pmatrix}} \qquad \underset{B}{\begin{pmatrix} a+12r & a+r & a+2r & a+15r \\ a+11r & a+6r & a+5r & a+8r \\ a+7r & a+10r & a+9r & a+4r \\ a & a+13r & a+14r & a+3r \end{pmatrix}}$$

et les deux diaboliques-alpha :

$$\begin{pmatrix} a+15r & a+2r & a+r & a+12r \\ a+4r & a+9r & a+10r & a+7r \\ a+8r & a+5r & a+6r & a+11r \\ a+3r & a+14r & a+13r & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & a+13r & a+14r & a+3r \\ a+11r & a+6r & a+5r & a+8r \\ a+7r & a+10r & a+9r & a+4r \\ a+12r & a+r & a+2r & a+15r \end{pmatrix}$$

$$D \qquad\qquad\qquad\qquad C$$

Il est facile de constater qu'en permutant la première rangée avec la quatrième rangée dans les deux diaboliques, nous obtenons les deux diaboliques-alpha et réciproquement.

De plus, nous voyons que le deuxième diabolique est obtenu du premier diabolique par une rotation de 180° et que le deuxième diabolique-alpha est aussi obtenu du premier diabolique-alpha par une rotation de 180°. D'où le :

Théorème 5.30 :

Il n'y a que deux diaboliques non triviaux qui renferment les mêmes seize nombres et l'un est obtenu de l'autre par une rotation de 180°. Il n'y a que deux diaboliques-alpha non triviaux qui renferment les mêmes seize nombres et l'un est obtenu de l'autre par une rotation de 180°.

Considérons maintenant une suite arithmétique formée de seize nombres différents $(r \neq 0)$. Nous savons qu'avec ces seize nombres, nous pouvons construire seulement deux diaboliques et seulement deux diaboliques-alpha. Voici comment :

Appelons A et B les deux diaboliques, C et D, les deux diaboliques-alpha. À partir de la suite arithmétique donnée :

1. Construisons A à partir de (2.10).
2. Nous obtenons B à l'aide d'une rotation de 180°de A.
3. Nous obtenons C en permutant la première rangée de B avec sa quatrième rangée.
4. Nous obtenons D à l'aide d'une rotation de 180° de C.
5. Nous retrouvons A en permutant la première rangée de D avec sa quatrième rangée.

Voilà qu'à partir d'une toute petite suite arithmétique, nous pouvons construire très simplement quatre carrés magiques extraordinaires!!!

Soit R, la rotation de 180° et P, la permutation de la première rangée avec la quatrième rangée. Nous avons alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{R} & B \\ & & \\ \uparrow & & \downarrow \\ P & & P \\ & & \\ D & \xleftarrow{R} & C \end{array}$$

5.13 Une observation importante

Nous avons construit plusieurs sous-espaces de carrés magiques d'ordre 4 et nous avons trouvé, pour chacun, la structure générale qui permet de trouver tous les carrés magiques de ce sous-espace.

Par exemple, pour les super-Dürer, la structure générale (2.2) permet de construire que des super-Dürer et de les construire tous.

Dans la structure (2.2), nous observons qu'il y a cinq variables; ce sont les lettres a, b, c, d et S et les seize expressions du carré sont formées à l'aide de ces cinq lettres. Nous les appelons **variables indépendantes (ou variables libres)** car nous pouvons leur attribuer la valeur que nous voulons et ce, de façon indépendante. C'est précisément de cette façon que nous construisons tous les carrés magiques d'un sous-espace donné. Avec la structure (2.2) des super-Dürer, nous construisons un super- Dürer justement en donnant une valeur à chaque variable. Ainsi, avec

$$a = 21 \text{ ; } b = 18 \text{ ; } c = 22 \text{ ; } d = 27 \text{ ; } S = 120$$

nous obtenons le super-Dürer : $\begin{pmatrix} 21 & 18 & 22 & 59 \\ 27 & 54 & 26 & 13 \\ 38 & 1 & 39 & 42 \\ 34 & 47 & 33 & 6 \end{pmatrix}$

Carrés magiques d'ordre 4 (2) :	8 variables
Dürer (2.1) :	7 variables
Super-Dürer (2.2) :	5 variables
Super- Dürer-alpha (2.3) (2.4) :	3 variables

Super-Dürer-bêta (2.6) (2.7) : 2 variables

A-Dürer (2.8) : 5 variables

Diaboliques (2.9) (2.10) : 2 variables

Diaboliques-alpha (2.11) (2.12) : 2 variables

Plus nous imposons de nouvelles figures magiques, plus le nombre de variables diminue. Par exemple, prenons la structure (2.2) des super-Dürer. Elle possède cinq variables libres. Nous aimerions que nos super-Dürer, qui possèdent déjà 52 figures magiques, en possèdent une nouvelle soit le cerf-volant vertical haut gauche EBGQ. Nous voulons donc que

$$d+b+(a-c+d)+\left(\frac{S}{2}-b-c+d\right)=S$$

c'est-à-dire que $$a-2c+3d=\frac{S}{2}$$

et enfin que $$d=\frac{S-2a+4c}{6} \quad (*)$$

Nous allons remplacer, dans tous les termes de (2.2), d par $\frac{S-2a+4c}{6}$. La variable d ne sera donc plus dans le carré et ainsi, nous passerons de cinq variables à quatre variables. Si nous voulions encore une nouvelle figure magique, nous aurions une autre égalité semblable à (*), par exemple $c=$ expression en a, b et S. En remplaçant c par son expression en a, b et S, nous verrions disparaitre la variable c du carré. Nous passerions ainsi de quatre variables à trois.

Le **nombre minimum de variables libres** dans chaque structure générale est tout simplement la **dimension** du sous-espace correspondant.

5.14 Répartition des entiers dans un carré magique normal d'ordre 4, nouvelle classification des 7040 normaux

Nous pouvons remarquer que dans un carré magique normal d'ordre 4, toutes les rangées ainsi que toutes les colonnes renferment exactement deux entiers pairs et deux entiers impairs. De plus, si une diagonale renferme deux pairs et deux impairs, alors il en est de même de l'autre diagonale. Par contre, si une diagonale renferme quatre entiers pairs alors l'autre diagonale renferme quatre entiers impairs et réciproquement.

Nous montrerons également que tout carré magique normal d'ordre 4 appartient à un des vingt quatre groupes que nous allons d'écrire ici.

Nous savons qu'un carré magique d'ordre 4 est parfaitement défini dès que l'on connait ses huit coordonnées (les valeurs des huit variables libres dans (2)). Si notre carré est normal, donc S = 34, alors il restera à donner aux variables libres a, b, c, d, e, f et g des valeurs entières allant de 1 à 16.

a	b	c	
d	e	f	
	g		

En tenant compte seulement de la parité des entiers, nous avons $2^7 = 128$ façons d'occuper les sept cases vertes. Par exemple, voici une de ces 128 façons :

$$\begin{pmatrix} i & i & p & ? \\ p & p & i & ? \\ ? & i & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

et avec MATHEMATICA, nous pouvons trouver les 128 :

$$\{i,i,i,i,i,i,i\};\{i,i,i,i,i,i,p\};\{i,i,i,i,i,p,i\};\ldots;\{p,p,p,p,p,p,p\}$$

dont $\{i,i,p,p,p,i,i\}$ qui est dans le carré illustré ci-haut. Puis nous devons compléter le carré en tenant compte de ce qui suit :

1. Les carrés magiques normaux d'ordre 4 que nous voulons construire sont de somme magique 34.
2. Avec les entiers consécutifs de 1 à 16, la somme des huit impairs est 64 tandis que la somme des huit pairs est 72.
3. Toute figure magique ne peut pas contenir 1 impair et 3 pairs ou 1 pair et 3 impairs car dans les deux cas, la somme serait impair ce qui n'est pas possible puisque celle-ci vaut 34.

Voyons maintenant pourquoi le carré défini par $\{i,i,i,i,i,i,i\}$ ne peut pas être magique normal. Les trois premiers entiers de la première rangée étant des impairs, le quatrième doit être impair. Il en est de même pour la deuxième rangée, elle contient 4 impairs. Si le carré est magique normal, la somme de chaque rangée est 34. Donc la somme des deux premières rangées est 68

et celles-ci renferment les huit impairs de somme 64. Contradiction! Autre contradiction : si nous complétons le carré en tenant compte de 3., celui-ci contiendra 16 impairs et nous aurons la configuration suivante :

$$\begin{pmatrix} i & i & i & I \\ i & i & i & I \\ I & i & I & I \\ I & I & I & I \end{pmatrix}$$

laquelle ne peut conduire à un carré magique normal.

Voyons un autre cas : le carré défini par $\{i, p, i, p, p, i, p\}$. Si ce carré est magique normal, alors, toujours selon 3., il doit avoir la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} i & p & i & P_1 \\ p_2 & p & i & I_1 \\ P_3 & p & I & I_2 \\ I & P & I & P_4 \end{pmatrix}$$

Les lettres majuscules avec indice ou non, représentent les entiers pairs et impairs qui complètent le carré. Les lettres minuscules avec indice ou non, représentent les entiers pairs et impairs qui définissent ce carré. Dans celui-ci, chaque rangée renferme deux pairs et deux impairs et c'est aussi le cas pour la première colonne et pour la quatrième colonne; cependant, ce n'est pas le cas pour les deux colonnes centrales. Il n'y a pas de contradiction apparente; en effet, la somme de chacune des quatorze figures magiques que possède tout carré magique d'ordre 4 est paire. Voyons cela de plus près : puisque le carré est magique normal, la somme de la deuxième colonne vaut 34 donc la somme des quatre autres pairs vaut 38 :

$$P_1 + p_2 + P_3 + P_4 = 38$$

De plus, nous avons :

$$P_1 + P_4 + I_1 + I_2 = 34$$
$$p_2 + P_3 + I_1 + I_2 = 34$$

d'où : $$P_1 + P_4 = p_2 + P_3$$

ce qui implique la contradiction : $$P_1 + P_4 = 19$$

et le carré ne peut pas être magique normal.

Enfin, voyons un dernier cas : le carré défini par $\{i, i, p, i, i, p, p\}$. Pour que ce carré soit magique normal, il doit avoir la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} i & i & p & P \\ i & i & p & P \\ P & p & I & I \\ P & P & I & I \end{pmatrix}$$

Ici, toutes les rangées et toutes les colonnes renferment deux entiers pairs et deux entiers impairs. Une diagonale contient quatre impairs, l'autre quatre pairs. Cette configuration est donc susceptible de fournir des carrés magiques normaux. L'exemple qui suit confirme :

$$\begin{pmatrix} 13 & 15 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 16 & 14 \\ 12 & 8 & 9 & 5 \\ 6 & 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

À partir de chacune des 128 façons, nous allons compléter le carré afin qu'il soit magique normal. Nous allons ainsi obtenir 128 configurations. Nous venons de voir que deux configurations ne peuvent conduire à un carré magique normal puisqu'il y a contradiction, tandis que la troisième nous conduit à un carré magique normal. Nous pouvons montrer que parmi les 128 configurations, 104 ne peuvent pas fournir de carrés magiques normaux et que chacune des 24 autres fournit au moins un carré magique normal. Tous les carrés magiques normaux qui proviennent d'une même configuration forment le groupe associé à cette configuration. Nous avons donc 24 groupes non vides qui contiennent les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Puisque les 24 configurations renferment deux pairs et deux impairs dans chaque rangée, dans chaque colonne, dans les quatre cases centrales et dans les quatre cases en coin, alors nous pouvons énoncer le théorème suivant qui sera complété par les problèmes 22 et 23 de 5.18.

Théorème 5.31 :

Dans tout carré magique normal d'ordre 4, chaque rangée et chaque colonne renferme deux entiers impairs et deux entiers pairs; il en est de même pour les quatre cases centrales et pour les quatre cases en coin.

Parmi les 24 groupes, huit groupes renferment que des carrés magiques qui contiennent quatre impairs sur une diagonale et quatre pairs sur l'autre.

Les seize autres groupes renferment que des carrés magiques qui contiennent sur chaque diagonale, deux impairs et deux pairs.

Voilà donc une classification des carrés magiques normaux d'ordre 4 relativement à la disposition des entiers pairs et impairs sur les diagonales.

Voici les 24 groupes :

$$\begin{pmatrix} i & i & p & p \\ i & i & p & p \\ p & p & i & i \\ p & p & i & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & i & p & p \\ p & i & p & i \\ i & p & i & p \\ p & p & i & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & p & i & p \\ i & i & p & p \\ p & p & i & i \\ p & i & p & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & p & i & p \\ p & i & p & i \\ i & p & i & p \\ p & i & p & i \end{pmatrix}$$

1 2 3 4

Les quatre premiers groupes forment la catégorie $(i\,p)$: la diagonale principale renferme quatre impairs et l'autre diagonale renferme quatre pairs.

$$\begin{pmatrix} p & i & p & i \\ i & p & i & p \\ p & i & p & i \\ i & p & i & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & i & p & i \\ p & p & i & i \\ i & i & p & p \\ i & p & i & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & p & i & i \\ i & p & i & p \\ p & i & p & i \\ i & i & p & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & p & i & i \\ p & p & i & i \\ i & i & p & p \\ i & i & p & p \end{pmatrix}$$

5 6 7 8

Ces quatre groupes forment la catégorie $(p\,i)$: la diagonale principale renferme quatre pairs et l'autre diagonale renferme quatre impairs.

La troisième catégorie $(i\,i\,p\,p)$ est formée des seize autres groupes qui contiennent que des carrés magiques ayant deux impairs et deux pairs sur chaque grande diagonale. Les voici :

$$\begin{pmatrix} i & i & p & p \\ i & p & i & p \\ p & i & p & i \\ p & p & i & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & i & p & p \\ p & p & i & i \\ i & i & p & p \\ p & p & i & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & i & p & p \\ p & p & i & i \\ p & p & i & i \\ i & i & p & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & p & i & p \\ i & p & i & p \\ p & i & p & i \\ p & i & p & i \end{pmatrix}$$

9 10 11 12

$$\begin{pmatrix} i & p & i & p \\ p & i & p & i \\ p & i & p & i \\ i & p & i & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & p & i & p \\ p & p & i & i \\ i & i & p & p \\ p & i & p & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & p & p & i \\ i & p & p & i \\ p & i & i & p \\ p & i & i & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & p & p & i \\ p & i & i & p \\ i & p & p & i \\ p & i & i & p \end{pmatrix}$$

13 14 15 16

$$\begin{pmatrix} p & i & i & p \\ i & p & p & i \\ p & i & i & p \\ i & p & p & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & i & i & p \\ p & i & i & p \\ i & p & p & i \\ i & p & p & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & i & p & i \\ i & i & p & p \\ p & p & i & i \\ i & p & i & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & i & p & i \\ i & p & i & p \\ i & p & i & p \\ p & i & p & i \end{pmatrix}$$

17 18 19 20

$$\begin{pmatrix} p & i & p & i \\ p & i & p & i \\ i & p & i & p \\ i & p & i & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & p & i & i \\ i & i & p & p \\ i & i & p & p \\ p & p & i & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & p & i & i \\ i & i & p & p \\ p & p & i & i \\ i & i & p & p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} p & p & i & i \\ p & i & p & i \\ i & p & i & p \\ i & i & p & p \end{pmatrix}$$

$$21 \qquad 22 \qquad 23 \qquad 24$$

Avec ces 24 configurations que nous venons d'illustrer, nous pouvons générer tous les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4 et chaque configuration en génère au moins un. À chacune de ces configurations correspond le groupe de carrés magiques normaux générés par elle. Ces 24 groupes sont non vides, disjoints deux à deux et ne renferment pas tous le même nombre de carrés puisque 7040 ne se divise pas par 24.

Nous invitons le lecteur à trouver, à l'aide de MATHEMATICA ou tout autre logiciel, les 128 façons puis à trouver les 104 configurations qui génèrent aucun carré magique normal et donc de trouver les 24 configurations (illustrées ci-haut) qui génèrent les 7040 carrés magiques normaux. Nous avons validé les 24 groupes en trouvant au moins un carré normal dans chacun. Nous avons trouvé les 24 carrés normaux (1 par groupe) parmi les 880 primitifs que vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 01. Voici le nombre de carrés magiques normaux dans chacun des 24 groupes :

$1-176$	$2-160$	$3-160$	$4-176$	$(i\,p)$
$5-176$	$6-160$	$7-160$	$8-176$	$(p\,i)$
$9-192$	$10-384$	$11-424$	$12-384$	$(i\,i\,p\,p)$
$13-424$	$14-192$	$15-424$	$16-424$	$(i\,i\,p\,p)$
$17-424$	$18-424$	$19-192$	$20-424$	$(i\,i\,p\,p)$
$21-384$	$22-424$	$23-384$	$24-192$	$(i\,i\,p\,p)$

Pour chacun des 24 groupes, nous trouvons dans le tableau ci-dessus, son numéro suivi du nombre de carrés magiques normaux qu'il contient. Ainsi, le groupe 15 renferme 424 carrés magiques normaux tandis que le groupe 21 en contient 384.

Dans ce tableau, la première rangée se termine par $(i\,p)$ pour nous rappeler que ces quatre groupes sont dans la catégorie $(i\,p)$.

Si nous additionnons tous les nombres du tableau, nous trouvons 7040. Enfin, sur les 7040 carrés magiques normaux, 5696 renferment deux impairs et deux pairs sur chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale; 672 renferment deux impairs et deux pairs sur chaque rangée et chaque colonne ainsi que quatre impairs sur la diagonale principale et quatre pairs sur la diagonale secondaire; 672 renferment deux impairs et deux pairs sur chaque rangée et chaque colonne ainsi que quatre pairs sur la diagonale principale et quatre impairs sur la diagonale secondaire. En pourcentage, nous avons :

$$\begin{array}{ccc} 80{,}909\% & 9{,}545\% & 9{,}545\% \\ i\,i\,p\,p & i\,p & p\,i \end{array}$$

En terminant, nous pouvons regrouper les 24 groupes ci-haut en douze paires comme suit :

$$(2;7)\ (3;6)\ (1;8)\ (4;5)\ (9;24)\ (14;19)\ (12;21)\ (10;23)\ (13;20)\ (16;17)\ (11;22)\ (15;18)$$

Il existe une bijection entre les deux groupes de chaque paire et c'est pourquoi les deux groupes d'une même paire contiennent le même nombre de carrés magiques. Cette bijection est due aux observations suivantes :

$$7 = R_*(2)\ ;\ 6 = R_*(3)\ ;\ 8 = R_*(1)\ ;\ 5 = R_*(4)\ ;\ 24 = R_*(9)\ ;\ 19 = R_*(14)$$
$$21 = R_*(12)\ ;\ 23 = R_*(10)\ ;\ 20 = R_*(13)\ ;\ 17 = R^2(16)\ ;\ 22 = R_*(11)\ ;\ 18 = R^2(15)$$

Par exemple, considérons $7 = R_*(2)$. Soit M un carré magique du groupe 2; alors $R_*(M)$ est dans le groupe 7. De même, si N est un carré magique du groupe 7, alors $R_*(N)$ est dans le groupe 2. Également, si $M\ et\ P$ sont deux carrés magiques différents dans 2, alors $R_*(M)\ et\ R_*(P)$ sont différents dans 7 puis si $N\ et\ Q$ sont différents dans 7, alors $R_*(N)\ et\ R_*(Q)$ sont différents dans 2. Ces deux injections montrent la bijection entre le groupe 2 et le groupe 7. Ces deux groupes renferment forcément le même nombre de carrés magiques. Il en est de même avec les groupes 16 et 17 et les groupes 15 et 18 même si nous avons R^2 au lieu de R_*.

Nous avons maintenant une meilleure compréhension des 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Pour augmenter celle-ci, terminons avec ce résultat :

Théorème 5.32 :

Dans tout carré magique d'ordre 4, nous avons :
A + D = Q + R P + T = B + C A + P = H + N D + T = E + J
E + H = K + M J + N = F + G B + Q = G + M C + R = F + K

(**)

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	M	N
P	Q	R	T

Preuve :

Puisque A + B + C + D = S et B + C + Q + R = S, nous déduisons **A + D = Q + R**.

Puisque E + F + G + H = S et F + G + K + M = S, nous déduisons **E + H = K + M**.

Nous laissons le soin au lecteur de démontrer les autres égalités.

5.15 Carrés magiques spéciaux d'ordre 4

Nous allons présenter ici un certain nombre de carrés magiques spéciaux.

1. Le carré magique suivant a ses deux colonnes centrales identiques et celles-ci sont formées de quatre entiers consécutifs. Si nous enlevons une des deux colonnes centrales, il restera 12 nombres différents. La somme magique est 54 et $f(54)=86$.

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 12 & 21 \\ 17 & 13 & 13 & 11 \\ 22 & 14 & 14 & 4 \\ 6 & 15 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

2. Le carré magique suivant renferme seize nombres qui forment une suite arithmétique. C'est un diabolique de somme nulle. Si $a \neq 0$, alors $f(0)=86$.

$$\begin{pmatrix} 9a & -13a & -11a & 15a \\ 7a & -3a & -5a & a \\ -a & 5a & 3a & -7a \\ -15a & 11a & 13a & -9a \end{pmatrix}$$

3. Nous avons construit des programmes dans MAPLE qui permettent de fabriquer des carrés magiques formés de nombres premiers différents. Vous trouverez ces programmes dans la Partie 3, annexe 23. En voici un de somme $S = 336$ avec $f(336) = 25$.

$$\begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix}$$

4. Voici un carré magique et son permuté :

$$\begin{pmatrix} 12 & 34 & 65 & 87 \\ 67 & 85 & 14 & 32 \\ 84 & 62 & 37 & 15 \\ 35 & 17 & 82 & 64 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 21 & 43 & 56 & 78 \\ 76 & 58 & 41 & 23 \\ 48 & 26 & 73 & 51 \\ 53 & 71 & 28 & 46 \end{pmatrix}$$

Dürer *Son permuté*

Le premier à gauche est un Dürer de somme $S = 198$. Le second, à droite, est son permuté. Cela signifie que si nous permutons les deux chiffres de tous les entiers du carré de gauche, alors les entiers ainsi obtenus se trouvent dans le carré de droite, aux positions correspondantes et ce carré est encore magique!!! Ce qui n'est pas toujours le cas!

Ce qui est extraordinaire, en plus, est que la somme magique du permuté est encore 198 !!!Et c'est encore un Dürer!!!

De plus, toutes les rangées, toutes les colonnes et toutes les diagonales des deux carrés renferment exactement les huit chiffres de 1 à 8, sans répétition!!! Les deux carrés sont formés de seize entiers différents.

Pour le Dürer, $f(198) = 52$ tandis que pour son permuté, $f(198) = 56$. Voyons comment construire un tel carré magique avec son permuté. Nous allons partir de la structure suivante :

$$\begin{pmatrix} ab & cd & ef & gh \\ eh & gf & ad & cb \\ gd & eb & ch & af \\ cf & ah & gb & ed \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ e & g & a & c \\ g & e & c & a \\ c & a & g & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & d & f & h \\ h & f & d & b \\ d & b & h & f \\ f & h & b & d \end{pmatrix}$$

qui est bien un carré magique; en effet, dans chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale, la somme est toujours $10(a+c+e+g) + (b+d+f+h)$. De plus, il est facile de voir que c'est un Dürer.

Quant au permuté, il est magique de somme $10(b+d+f+h)+(a+c+e+g)$ et c'est toujours un Dürer.

En général, les deux sommes sont différentes sauf si $a+c+e+g=b+d+f+h$.

5. Le nombre e dans un A-Dürer

$$\begin{pmatrix} 271 & 828 & 182 & 845 \\ 973 & 54 & 700 & 399 \\ 664 & 363 & 1009 & 90 \\ 218 & 881 & 235 & 792 \end{pmatrix}$$

La première rangée de ce A-Dürer est formée des douze premiers chiffres du nombre e. Ici $S=2126$ et $f(2126)=52$.

6. Le nombre π dans un A-Dürer

$$\begin{pmatrix} 314 & 159 & 265 & 358 \\ 317 & 306 & 200 & 273 \\ 275 & 348 & 242 & 231 \\ 190 & 283 & 389 & 234 \end{pmatrix}$$

La première rangée de ce A-Dürer est formée des douze premiers chiffres du nombre π. Ici, $S=1096$ et $f(1096)=52$.

7. Deux A-Dürer de somme nulle

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 8 & -7 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ 7 & -8 & -5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 & -8 \\ 8 & -7 & -6 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Chacun renferme tous les entiers de -8 à 8 sauf 0.

8. Un carré magique personnalisé

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 19 & 50 \\ 59 & 10 & 11 & 3 \\ 13 & 16 & 46 & 8 \\ 6 & 48 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

Ce Dürer de somme 83 renferme, sur sa première rangée, la date de naissance d'une amie; elle est née le 5 septembre 1950. Ce carré a été construit le 8 juin 2010 et à cette date, notre amie avait 59 ans, voir le premier nombre de la deuxième rangée. Ici, $f(83) = 36$. Pour le fabriquer, nous avons posé dans (2.1) : $a = 5, b = 9, c = 19, S = 83, d = 59$. Enfin, nous avons complété en posant $f = 11$ *et* $g = 16$, choix un peu arbitraire qui a permis d'obtenir seize entiers positifs différents.

9. Un A-Dürer et son permuté

L'idée ici est de construire deux A-Dürer de somme S qui seront formés que de chiffres positifs. Soient A *et* B, ces deux A-Dürer. Alors $10A + B$ *et* $10B + A$ sont deux A-Dürer de somme 11 S et l'un est le permuté de l'autre. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 6 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 9 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

sont les deux A-Dürer de somme S = 24.

$$\begin{pmatrix} 74 & 68 & 86 & 36 \\ 35 & 87 & 69 & 73 \\ 59 & 63 & 45 & 97 \\ 96 & 46 & 64 & 58 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 47 & 86 & 68 & 63 \\ 53 & 78 & 96 & 37 \\ 95 & 36 & 54 & 79 \\ 69 & 64 & 46 & 85 \end{pmatrix}$$

$$10A + B \qquad\qquad 10B + A$$

Puis, les deux A-Dürer ci-haut dont l'un est le permuté de l'autre; ils sont de somme $11S = 11 \times 24 = 264$. De plus, ils sont formés de seize entiers différents.

10. Un super-Dürer et son permuté

Nous allons trouver deux super- Dürer de même somme S formés que de chiffres positifs. Soient A *et* B ces deux super-Dürer. Alors $10A+B$ *et* $10B+A$ sont des super-Dürer de somme 11 S et l'un est le permuté de l'autre. Par exemple :

$$A=\begin{pmatrix}5&2&3&6\\2&7&4&3\\5&2&3&6\\4&5&6&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}6&3&5&2\\4&3&5&4\\3&6&2&5\\3&4&4&5\end{pmatrix}$$

sont deux super-Dürer de somme S = 16.

$$\underset{10A+B}{\begin{pmatrix}56&23&35&62\\24&73&45&34\\53&26&32&65\\43&54&64&15\end{pmatrix}}\qquad \underset{10B+A}{\begin{pmatrix}65&32&53&26\\42&37&54&43\\35&62&23&56\\34&45&46&51\end{pmatrix}}$$

Ce sont deux super-Dürer dont l'un est le permuté de l'autre; ils sont de somme $11S=176$. De plus, ils sont formés de seize entiers différents et possèdent 56 figures magiques.

11. Un super-Dürer très spécial

Ce super-Dürer est formé de seize entiers de quatre chiffres. Il est de somme 17776. Si nous appliquons la même permutation de quatre chiffres à chacun des seize entiers, nous obtenons un nouveau super-Dürer de même somme!! Pour le construire, nous trouverons d'abord quatre super-Dürer de somme S = 16, chacun étant formé que de chiffres positifs; les voici :

$$A=\begin{pmatrix}5&2&3&6\\2&7&4&3\\5&2&3&6\\4&5&6&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}6&3&5&2\\4&3&5&4\\3&6&2&5\\3&4&4&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}4&2&5&5\\3&7&2&4\\3&3&4&6\\6&4&5&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&5&3&7\\7&3&5&1\\5&1&7&3\\3&7&1&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5641 & 2325 & 3553 & 6257 \\ 2437 & 7373 & 4525 & 3441 \\ 5335 & 2631 & 3247 & 6563 \\ 4363 & 5447 & 6451 & 1515 \end{pmatrix}$$
$$1000A+100B+10C+D$$

Ce carré est un super-Dürer de somme 1111 S = 17776. Maintenant, si nous appliquons la même permutation de quatre chiffres à chacun des entiers de ce carré, nous obtenons toujours un carré magique super-Dürer de somme 17776. Par exemple, appliquons la permutation :

$$abcd \rightarrow bdac$$

Nous trouvons alors :

$$\begin{pmatrix} 6154 & 3522 & 5335 & 2765 \\ 4723 & 3377 & 5542 & 4134 \\ 3553 & 6123 & 2734 & 5366 \\ 3346 & 4754 & 4165 & 5511 \end{pmatrix}$$

lequel est toujours un carré magique super-Dürer de somme 17776; il est formé de seize entiers différents.

À partir du carré $1000A+100B+10C+D$, nous pouvons, grâce aux 24 permutations de quatre objets distincts, former 24 carrés magiques super-Dürer de somme 17776, tous renfermant seize entiers différents.

Remarquez que pour obtenir ce dernier carré, il n'est pas nécessaire d'appliquer la permutation seize fois. Pour y arriver, il suffit de construire le carré $1000B+100D+10A+C$.

Nous pourrions aussi construire un super-Dürer de somme 1776 formé de seize entiers de trois chiffres. Il suffit de faire, par exemple, $100A+10B+C.$ Pour toute permutation de A, B et C, nous obtenons toujours un super-Dürer de somme 1776. Ainsi, $100C+10A+B$ est un super-Dürer de somme 1776. Ces deux derniers carrés sont des super-Dürer de même somme formés de seize entiers différents. Enfin, nous pourrions choisir tout autre sous-espace que celui des super- Dürer.

12. Un super Dürer-bêta

Ce carré magique de somme S = 10 est formé des entiers de 1 à 4, chacun apparaissant quatre fois. Ici, $f(10)=360.$ Donc 360 figures magiques dans ce carré!!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. FIBONACCI dans un carré magique

$$\begin{pmatrix} 13 & 21 & 34 & 55 \\ 89 & 16 & 17 & 1 \\ 2 & 32 & 58 & 31 \\ 19 & 54 & 14 & 36 \end{pmatrix}$$

Ce carré magique est de somme S = 123. Les 5 premiers entiers du carré font partie de la suite de FIBONACCI : 0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , **13 , 21 , 34 , 55 , 89** , … . $f(123) = 26$.

14. Trois diaboliques pythagoriciens

Considérons le diabolique normal M suivant :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

ainsi que les entiers positifs $a, b \, et \, c$ qui vérifient $a^2 + b^2 = c^2$. Soient maintenant les carrés $A = aM$; $B = bM$; $C = cM$; ils sont diaboliques et vérifient la relation de Pythagore de la façon suivante : si $m, n \, et \, p$ sont des entiers qui occupent la même position respectivement dans $A, B \, et \, C$ alors nous aurons $m^2 + n^2 = p^2$. En effet, si u est l'entier qui occupe la même position dans M, alors $m = au$; $n = bu$; $p = cu$ et $m^2 + n^2 = (a^2 + b^2)u^2 = c^2 u^2 = p^2$.

Par exemple, avec $a = 3, b = 4 \; et \; c = 5$, nous trouvons :

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 45 & 42 & 3 \\ 15 & 30 & 33 & 24 \\ 27 & 18 & 21 & 36 \\ 48 & 9 & 6 & 39 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 16 & 60 & 56 & 4 \\ 20 & 40 & 44 & 32 \\ 36 & 24 & 28 & 48 \\ 64 & 12 & 8 & 52 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 20 & 75 & 70 & 5 \\ 25 & 50 & 55 & 40 \\ 45 & 30 & 35 & 60 \\ 80 & 15 & 10 & 65 \end{pmatrix}$$

et nous pouvons vérifier, comme exemples, que :

$$45^2 + 60^2 = 75^2$$
$$33^2 + 44^2 = 55^2$$
$$39^2 + 52^2 = 65^2$$
$$48^2 + 64^2 = 80^2$$

Les carrés magiques $A, B\, et\, C$ sont des diaboliques respectivement de sommes $3S, 4S\, et\, 5S$ où S est la somme magique de M, ici 34. Cela nous permet de montrer que si nous prenons la même figure magique dans $A, B\, et\, C$ alors, le carré de la somme des quatre entiers de la figure magique dans A plus le carré de la somme des quatre entiers de la figure magique dans B égale le carré de la somme des quatre entiers de la figure magique dans C. En effet, nous avons :

$$(3S)^2 + (4S)^2 = (5S)^2$$

Voici quelques propriétés supplémentaires que possèdent ces trois diaboliques pythagoriciens :

1. Prenons deux nombres dans A, deux nombres dans B qui occupent les mêmes positions et deux nombres dans C qui occupent aussi les mêmes positions; soit maintenant u et v, les deux nombres dans M qui occupent les mêmes positions. Les deux nombres de A sont a u et a v, ceux de B sont b u et b v et ceux de C, c u et c v. Nous avons :

$$(a\,u + a\,v)^2 + (b\,u + b\,v)^2 = a^2(u+v)^2 + b^2(u+v)^2 =$$
$$= (a^2 + b^2)(u+v)^2 = c^2(u+v)^2 = (c\,u + c\,v)^2$$

Par exemple, $$(12+33)^2 + (16+44)^2 = (20+55)^2$$

2. Prenons une figure magique dans A, la même figure magique dans B et la même figure magique dans C. Puis la même figure magique dans M qui renferme les nombres m, n, s et t. Les quatre nombres de la figure dans A sont a m, a n, a s et a t; les quatre nombres de la figure dans B sont b m, b n, b s et b t puis les quatre nombres de la figure dans C sont c m, c n, c s et c t.

   Nous avons :

$$(am)^2 + (an)^2 + (as)^2 + (at)^2 + (bm)^2 + (bn)^2 + (bs)^2 + (bt)^2 =$$
$$= a^2(m^2 + n^2 + s^2 + t^2) + b^2(m^2 + n^2 + s^2 + t^2) = (a^2 + b^2)(m^2 + n^2 + s^2 + t^2) =$$
$$= c^2(m^2 + n^2 + s^2 + t^2) = (cm)^2 + (cn)^2 + (cs)^2 + (ct)^2$$

Par exemple, avec le cerf-volant vertical haut-gauche, nous avons :

$$(15^2 + 45^2 + 33^2 + 9^2) + (20^2 + 60^2 + 44^2 + 12^2) = 25^2 + 75^2 + 55^2 + 15^2$$

Cette dernière égalité nous fournit une somme de sept carrés qui égale une somme de trois carrés :

$$9^2 + 12^2 + 20^2 + 33^2 + 44^2 + 45^2 + 60^2 = 25^2 + 55^2 + 75^2$$

3. Le carré de la somme des seize nombres de A plus le carré de la somme des seize nombres de B égale le carré de la somme des seize nombres de C. Cela est évident si nous remarquons que les trois sommes sont $4\times 3S, 4\times 4S \ et \ 4\times 5S$ et que
$$(12S)^2 + (16S)^2 = (20S)^2$$

4. La somme des carrés des seize nombres de A plus la somme des carrés des seize nombres de B égale la somme des carrés des seize nombres de C. La preuve se fait de la même façon qu'en 2. , pour la figure magique.
Voilà pourquoi nous pourrions écrire, étant données ces propriétés :

$$[A]^2 + [B]^2 = [C]^2$$

en précisant que $[A]^2$ ne signifie pas $A^2 = AA$ où la multiplication est matricielle. Cette égalité est tout simplement là pour nous rappeler celle de Pythagore qui est intervenue plusieurs fois dans les trois carrés.

Il est important de dire que M peut être autre chose qu'un diabolique; nous avons choisi ici un diabolique car ceux-ci possèdent exactement 86 figures magiques, les mêmes pour tous.

De plus, toutes les propriétés que nous avons vues sont valables quel que soit l'ordre des carrés.

5.16 Un problème

Dans le quatrième exemple de 5.15, nous avons un Dürer et son permuté, tous les deux de somme 198. Pour le Dürer, $f(198) = 52$ tandis que pour son permuté, $f(198) = 56$. Pouvons-nous expliquer ce qui se passe? Les deux fréquences ne doivent-elles pas être égales? Voyons cela de plus près ; nous savons que

$$\underset{10A+B}{\begin{pmatrix} ab & cd & ef & gh \\ eh & gf & ad & cb \\ gd & eb & ch & af \\ cf & ah & gb & ed \end{pmatrix}} = 10\underset{A}{\begin{pmatrix} a & c & e & g \\ e & g & a & c \\ g & e & c & a \\ c & a & g & e \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} b & d & f & h \\ h & f & d & b \\ d & b & h & f \\ f & h & b & d \end{pmatrix}}$$

où A *et* B sont des carrés magiques. Dans le cas qui nous intéresse, nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{10A+B}{\begin{pmatrix} 12 & 34 & 65 & 87 \\ 67 & 85 & 14 & 32 \\ 84 & 62 & 37 & 15 \\ 35 & 17 & 82 & 64 \end{pmatrix}} \quad \underset{10B+A}{\begin{pmatrix} 21 & 43 & 56 & 78 \\ 76 & 58 & 41 & 23 \\ 48 & 26 & 73 & 51 \\ 53 & 71 & 28 & 46 \end{pmatrix}}$$

Nous voyons que A *et* B sont des carrés magiques Dürer de somme 18. Nous savons que $10B+A$ est le permuté de $10A+B$ et réciproquement. De plus, si $10A+B$ est de somme S *et* $10B+A$ est de somme T, alors ici, $S=T=198$. Enfin, nous avons $f(S)=52$ et $f(T)=56$. Les fréquences de A *et* B sont les mêmes soit 328.

Nous avons observé qu'à chacune des 52 figures magiques de $10A+B$, correspond la même figure magique dans A et aussi, la même figure magique dans B. Donc, il y a au moins 52 figures magiques communes à A *et* B. Nous pouvons même ajouter qu'il y a exactement 52 figures magiques communes à A *et* B car s'il y en avait une cinquante troisième, alors $10A+B$ aurait aussi une cinquante troisième figure magique, ce qui n'est pas le cas.

Nous pouvons alors conclure que $10B+A$ possède les 52 figures magiques de $10A+B$. Comment expliquer les quatre autres? Pour cela, il suffit d'observer qu'une figure non magique dans B donc dans $10B$ plus la même figure non magique dans A peut donner une figure magique dans $10B+A$. Ces quatre figures magiques sont :

$$21, 51, 53, 73$$
$$26, 46, 48, 78$$
$$28, 46, 48, 76$$
$$23, 51, 53, 71$$

Prenons la première figure magique. Elle provient de la figure 2, 5, 5, 7 de B laquelle n'est pas magique et de la figure 1, 1, 3, 3 de A laquelle n'est pas magique; en effet, la somme magique de A est 18 ainsi que celle de B or ici, nous avons les sommes 8 et 19.

On voit bien que 19x10 + 8 = 198, la somme magique de 10B + A. Dans le permuté, nous avons 8x10 + 19 = 99 qui n'est pas la somme magique de 10A + B.

Il en est de même des trois autres figures magiques.

5.17 Résumé

Nous venons de voir que les carrés magiques d'ordre 4 sont très riches en figures magiques; 86 figures magiques pour les diaboliques!!! Tout simplement extraordinaire!!! Mais nous n'avons pas tout vu. Sachant qu'il existe 1820 figures dans tout carré d'ordre 4, cela nous fournit la possibilité de construire des centaines de sous-espaces de carrés magiques. Ce que nous ne ferons pas ici mais vous, vous pourriez en construire à votre guise. Vous pouvez partir de la structure générale (2) des carrés magiques d'ordre 4 et imposer la figure magique ou les figures magiques que vous voulez. Ainsi, vous pourriez construire de nouveaux sous-espaces de carrés magiques d'ordre 4 avec leurs figures magiques caractéristiques. Regardez le problème 14.

5.18 Problèmes

1) Montrez que dans un A-Dürer, la figure symétrique par rapport au centre du carré d'une figure magique est aussi magique.
2) Montrez que le nombre de figures dans un carré d'ordre $n \geq 2$, est toujours pair.
3) Les trois plus petits nombres d'un carré magique d'ordre 4 sont 1, 2 et 5. Peut-il être un diabolique? Un diabolique-alpha?
4) Un carré magique d'ordre 4 renferme deux fois le nombre 5. Peut-il être diabolique? Si en plus, il renferme le nombre 3, alors peut-il être diabolique?
5) Une suite arithmétique de seize nombres a pour raison $r = 5$ et pour premier terme $a = 2$. Construisez les deux diaboliques et les deux diaboliques-alpha qui renferment ces seize nombres.
6) Si un A-Dürer possède un cerf-volant vertical, alors il possède quatre cerfs-volants verticaux. De même s'il possède un cerf-volant horizontal. Montrez-le.

7) Montrez que dans un Dürer, à tout cerf-volant correspond une fusée.

8) Est-il possible qu'un carré magique d'ordre 4 renferme tous les entiers de 1 à 16 avec la disposition suivante ($i = impair \ et \ p = pair$)?

$$\begin{pmatrix} i & i & i & ? \\ i & p & p & ? \\ ? & i & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

9) Construisez un carré magique d'ordre 4 qui contient :
a. Que des entiers positifs impairs.
b. Que des entiers positifs pairs.
c. Autant d'entiers positifs pairs que d'entiers positifs impairs.
d. Que des multiples entiers positifs de 3.
e. Seize entiers qui forment une suite arithmétique avec somme magique S = 0.

10) Construisez un carré magique Dürer et son permuté avec :
   a. les entiers de 1 à 8.
   b. les entiers de 2 à 9.

11) Construisez un A-Dürer et son permuté :
   a. Qui ont la même somme.
   b. Qui ont des sommes différentes.

12) Montrez que dans un carré magique non trivial d'ordre $n \geq 3$ et de somme S, nous avons la relation :

$$a < S < b$$

où a est la somme de la figure qui a la plus petite somme et b, la somme de la figure qui a la plus grande somme.

13) Construisez trois super- Dürer pythagoriciens.

14) Construisez un sous-espace de carrés magiques d'ordre 4 caractérisé par les figures magiques EBCH et BEJQ. Trouvez la fréquence de ce sous-espace et ses figures magiques caractéristiques. Il reste à donner un nom aux carrés magiques de ce sous-espace. Celui-ci est normal d'ordre 384.

15) Complétez le carré magique d'ordre 4 suivant :

$$\begin{pmatrix} 5 & b & 4 & ? \\ a & 8 & 7 & ? \\ 3 & 16 & 9 & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

a. Montrez que la façon de compléter ce carré magique n'est pas unique.
b. Trouvez-en trois dans lesquels les seize nombres sont entiers.
c. Si les seize nombres sont des entiers, alors montrez que dans ce carré, il y a au moins un entier négatif et au plus trois entiers négatifs. Donc ce carré ne sera jamais presque normal.
d. Pour quelles valeurs entières de a a-t-on un seul entier négatif, seulement deux entiers négatifs, les trois entiers négatifs? Pouvons-nous avoir un zéro? Plus qu'un zéro?
e. Montrez que ce carré ne peut pas être un Dürer. Peut-il être un super-Dürer-alpha

16) Montrez que si un diabolique possède une quatre-vingt-septième figure magique, alors ce diabolique est trivial.

17) Montrez que si un carré magique est d'ordre $n \geq 3$ et renferme que des nombres premiers différents, alors ce carré ne peut renfermer le nombre premier 2.

18) Montrez que si un carré magique est d'ordre pair et renferme que des nombres premiers différents, alors la somme magique ne peut pas être un nombre premier.

19) Soit M, un carré magique d'ordre 4 qui renferme seize entiers. Montrez que si M est un A-Dürer, alors sa somme magique est un entier pair.

20) Montrez qu'il n'existe que deux suites arithmétiques de raisons non nulles, formées des mêmes k nombres.

21) Soit donné un diabolique. Possède-t-il une super-figure?

22) Dans un carré magique normal d'ordre 4, montrez que dans douze figures magiques parmi les quatorze qui caractérisent les carrés magiques d'ordre 4, nous retrouvons toujours deux entiers pairs et deux entiers impairs. Quelles sont-elles?

23) Parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4, combien possèdent deux entiers pairs et deux entiers impairs dans les quatorze figures magiques qui caractérisent les carrés magiques d'ordre 4?

24) Soit donné un carré magique d'ordre $n \geq 2$. Montrez qu'il est possible que ce carré ne renferme que des entiers pairs et qu'il est possible qu'il ne renferme que des entiers impairs.

25) Existe-t-il des carrés magiques qui renferment autant d'entiers pairs que d'entiers impairs?

26) Soit un carré magique presque normal d'ordre n . Alors sa somme magique T vérifie :

$$T \geq \frac{n(n^2+1)}{2}$$

27) Montrez que la somme magique d'un carré magique normal d'ordre $n \geq 3$ est un entier pair si et seulement si n est un multiple de 4.

28) Avons-nous le résultat du problème 22) ci-haut si notre carré magique d'ordre 4 est presque normal?

29) Complétez la démonstration du théorème 5.31.

30) Soit T, un carré magique trivial d'ordre n et soit A, un carré magique non trivial d'ordre n. Si M = a T + b A et N = c T + d A où a, b, c et d sont des nombres réels avec b et d non nuls, alors f(M) = f(N) = f(A).

31) Pouvons-nous conclure que tous les diaboliques non triviaux ont la même fréquence? Même question pour les diaboliques-alpha. Même question pour les super-Dürer-Bêta.

32) Soient A et B, deux carrés magiques d'ordre n qui renferment les mêmes nombres. Alors pouvons-nous affirmer que f(A) = f(B)?

33) Soit A, un carré magique normal d'ordre n. Soit B, un carré magique d'ordre n tel que tous ses nombres forment une suite arithmétique de raison non nulle. Avons-nous f(A) = f(B)?

34) A et B sont deux super-Dürer-bêta respectivement de sommes 60 et 80. Trouvez AB.

35) A est un carré semi-magique d'ordre n et de somme T et B est un trivial d'ordre n de somme k n. Trouvez AB.

36) A est un super-Dürer-bêta de somme S. Trouvez A^{2018} .

37) Construisez un super-Dürer-alpha formé de seize entiers positifs multiples de 7 dont huit sont pairs et huit sont impairs.

38) Construisez un Dürer formé de seize nombres complexes dont la somme magique est le nombre complexe $38+50i$.

39) Le carré suivant est formé de seize entiers modulo7. Montrez que c'est un Dürer et que ce n'est pas un super-Dürer. Quelle est sa somme magique?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

40) Montrez que la somme d'un carré magique normal d'ordre 10^k où $k \geq 1$ est un entier, est le nombre suivant :

$$50000...00500...0$$

dans lequel il y a $(2k-1)$ zéros entre les deux 5 et $(k-1)$ zéros à la droite du second 5.

41) Montrez qu'un carré magique associatif d'ordre 4 est un Dürer.

42) Montrez qu'un carré magique M d'ordre 4 est un A-Dürer si et seulement si M est associatif.

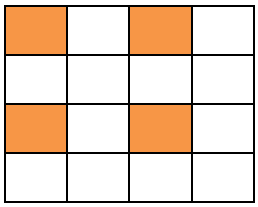
43) Nous avons un carré magique pandiagonal d'ordre 4. Sans vous servir d'une structure générale, montrez que dans tout sous-carré d'ordre 3, la somme de 2 sommets opposés est toujours S/2.

44) En vous servant du carré (*) de 5.1, montrez que dans un Dürer,

$$B+E+N+R = C+H+J+Q = S$$

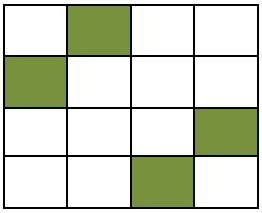
où S est la somme magique. Nous demandons de ne pas utiliser la structure générale des Dürer.

45) Soit donné un carré magique d'ordre 4 qui possède la figure magique suivante :



Démontrez, sans utiliser la structure générale des carrés magiques d'ordre 4, que ce carré est un Dürer.

46) Soit donné un carré magique d'ordre 4 qui possède la figure magique suivante :



Démontrez, sans utiliser la structure générale des carrés magiques d'ordre 4, que ce carré est un Dürer.

47) Trouvez un algorithme qui permettra de construire un Dürer M presque normal dans lequel il y aura huit entiers impairs sur les deux premières rangées et huit entiers pairs sur les deux dernières rangées. Qu'allons-nous obtenir si nous construisons M + k où k est un entier plus grand ou égal à 1 ?

48) Trouvez un Dürer normal à partir duquel vous pourrez construire une infinité de Dürer presque normaux dont les sommes magiques sont consécutives à partir de S = 34. Indice : vous pouvez trouver le carré cherché dans la liste des 880 carrés magiques normaux primitifs (Voir la Partie 3, annexe 23, programme 01).

49) Soit A, un carré magique d'ordre 4. Si nous permutons les colonnes 1 et 4 de A, alors nous obtenons un nouveau carré B. Si maintenant nous permutons les rangées 1 et 4 de B, alors nous obtenons un nouveau carré C. Montrez que C est un carré magique et que si A est presque normal, alors A et C sont primitifs.

50) Le carré magique de Dürer est un diabolique-alpha normal; c'est donc un A-Dürer (Dürer associatif). Sur la dernière rangée, dans les deux cases centrales, nous trouvons 15 14, l'année de sa construction.

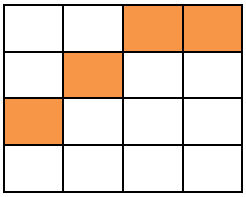
    a) Trouvez tous les A-Dürer normaux qui possèdent sur la dernière rangée, 15 14 dans les deux cases centrales.
    b) À part le carré de Dürer, les autres sont-ils des diaboliques-alpha?
    c) Trouvez un carré magique Dürer normal, non associatif avec 15 14 dans les deux cases centrales de la dernière rangée.
    d) Trouvez un carré magique normal d'ordre 4 qui n'est pas un Dürer, qui est non associatif avec 15 14 dans les deux cases centrales de la dernière rangée.
    e) Montrez qu'il n'existe pas de super-Dürer normal qui renferme 15 et 14 dans les cases centrales de la dernière rangée.

51) Je possède seize lingots d'or dont les poids en grammes sont tous différents et ont la forme 100k avec k, un entier qui varie de 1 à 16. Le plus petit pèse donc 100 grammes et le plus gros, 1600 grammes. Je désire les offrir à mes quatre enfants de façon que ceux-ci reçoivent la même quantité d'or avec 4 lingots chacun.

    a) Comment puis-je procéder?
    b) La façon de faire est-elle unique?
    c) Quelle quantité d'or chacun recevra-t-il?

52) Montrez qu'un carré magique presque normal d'ordre 4 ne peut pas être un ultra-magique. Rappelons que ultra-magique = pandiagonal + associatif.

53) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 4 qui aura la figure magique suivante :



54) De très belles propriétés des diaboliques-alpha sont présentées ici. Nous allons vous aider à les découvrir. D'abord, prenez la structure générale 2.12 des diaboliques-alpha. Puis mettez au carré chaque expression de chaque case. Ensuite, additionnez les cases de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale. Vous obtiendrez, pour les rangées de haut en bas, les colonnes de gauche à droite et les grandes diagonales principale et secondaire :

$$R1 = 4a^2 + 60ar + 374r^2$$
$$R2 = 4a^2 + 60ar + 246r^2$$
$$R3 = 4a^2 + 60ar + 246r^2$$
$$R4 = 4a^2 + 60ar + 374r^2$$
$$C1 = 4a^2 + 60ar + 314r^2$$
$$C2 = 4a^2 + 60ar + 306r^2$$
$$C3 = 4a^2 + 60ar + 306r^2$$
$$C4 = 4a^2 + 60ar + 314r^2$$
$$D1 = 4a^2 + 60ar + 342r^2$$
$$D2 = 4a^2 + 60ar + 278r^2$$

Ainsi, *R1* est la somme des carrés de la première rangée et ainsi de suite.
Vous pouvez maintenant démontrer les résultats suivants :

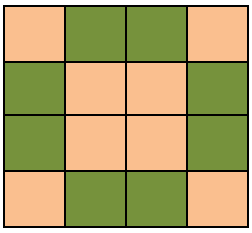
a) $R1 + R2 = R1 + R3 = R2 + R4 = R3 + R4 = \lambda$
b) $C1 + C2 = C1 + C3 = C2 + C4 = C3 + C4 = \lambda$
c) $D1 + D2 = \lambda$

d) La somme des huit cases qui ne sont pas sur les grandes diagonales est λ.
e) La somme des seize cases du diabolique-alpha est 2λ.
f) $R1 = R4$; $R2 = R3$; $C1 = C4$; $C2 = C3$
g) Vous pourriez trouver d'autres égalités. Allez-y.

Revenez à la structure 2.12 et mettez au cube chaque expression de chaque case. Vous trouverez alors le résultat suivant :

h) La somme des huit cases des deux grandes diagonales est égale à la somme des huit autres cases!!!

Tous les diaboliques-alpha possèdent ces propriétés et puisque le carré d'Albert Dürer est un diabolique-alpha, voilà pourquoi il possède ces propriétés. Celles-ci ne sont donc pas propres seulement au carré de Dürer mais à tous les diaboliques-alpha.



Diabolique-alpha

Dans tout diabolique-alpha :
La somme des carrés des cases vertes est égale à la somme des carrés des autres cases.
La somme des cubes des cases vertes est égale à la somme des cubes des autres cases.

55) Reprenez le problème 54) ci-haut mais avec les diaboliques.
56) Reprenez le problème 54) ci-haut mais avec les super-Dürer-alpha.
57) La structure générale 2.4 des super-Dürer-alpha nous donne, avec $a = 4, r = -1, t = 4$, le super-Dürer-alpha normal suivant :

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Appelons V, la somme des carrés des cases vertes, $D1$, la somme des carrés des cases de la grande diagonale principale et $D2$, la somme des carrés des cases de la grande diagonale secondaire.

a) Montrez que dans tout super-Dürer-alpha, nous avons toujours

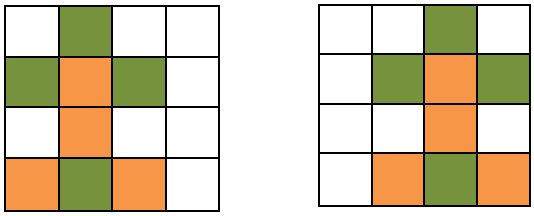
$$V = D1 + D2 + 32\,r\,t$$

b) Montrez que dans tout super-Dürer-alpha, nous avons toujours

$$D2 = D1 + 4rt \ et \ V = 2D1 + 36rt$$

c) Vérifiez ces résultats avec le carré ci-haut.

58) Les deux carrés magiques suivants sont des super-Dürer-alpha identiques :



a) Montrez que dans ces deux carrés, le cerf-volant vertical haut-gauche (carré à gauche), qui est une figure magique, implique que les trois autres figures sont aussi magiques. Ne pas se servir de la structure générale des Dürer ni des super-Dürer-alpha.
b) En déduire que ce résultat est vrai pour tous les Dürer.

59) Démontrez qu'un carré d'ordre $n \geq 4$ possède toujours une figure complète.
60) Si A et B sont deux carrés magiques presque normaux du même ordre, alors pouvons-nous affirmer que A + B est presque normal? Que k A est presque normal avec k, un nombre réel?
61) Montrez que les structures générales (2.3) et (2.4), section 5.6, sont équivalentes en ce sens qu'elles génèrent les mêmes super-Dürer-alpha.
62) Montrez que les structures générales (2.6) et (2.7), section 5.7, sont équivalentes en ce sens qu'elles génèrent les mêmes super-Dürer-bêta.

63) Montrez que les structures générales (2.9) et (2.10), section 5.10, sont équivalentes en ce sens qu'elles génèrent les mêmes diaboliques.

64) Soit M, un carré magique d'ordre 4 formé de seize nombres qui forment une suite arithmétique de raison non nulle. Combien M possède-t-il de figures magiques?

65) Même question avec les ordres 5, 6 et 7.

66) Les super-Dürer-alpha sont-ils pandiagonaux? Les super-Dürer-bêta le sont-ils?
67) On vous donne M, un carré magique d'ordre 4. Il existe trois critères qui permettent de dire si M est un Dürer. Lesquels?
68) Considérons le carré magique normal suivant :

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

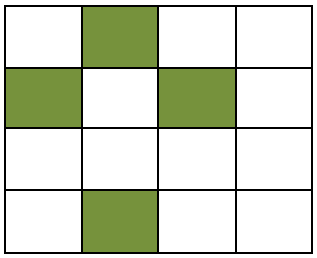
Pouvez-vous transformer ce carré de façon à obtenir un nouveau carré magique formé des entiers de 1 à 8, chacun apparaissant deux fois.

69) Même question avec ce carré magique :

5	1	12	16
10	14	3	7
8	4	13	9
11	15	6	2

70) Nous avons construit un programme dans MAPLE qui donne les 8 carrés magiques normaux d'ordre 4 qui possèdent huit cerfs-volants. Sans utiliser ce programme, pouvez-vous les trouver? Le carré suivant illustre un cerf-volant.

Indice : voir le premier carré diabolique de 5.10.



71) Dans un A-Dürer, si nous permutons les deux rangées centrales, alors le carré reste un A-Dürer. (Indice : voir les figures magiques des A-Dürer dans 5.9).

72) Pouvez-vous compléter le carré suivant afin qu'il devienne magique de somme S?

12	13	?	A
?	?	8	1
5	3	?	?
S-A-11	?	?	7

6. Les carrés magiques d'ordre 5

6.1 Introduction

Nous allons faire une petite excursion dans l'espace vectoriel E_5 des carrés magiques d'ordre 5. Cet espace vectoriel est de dimension $n(n-2)=15$. En construisant la structure générale de E_5, nous trouverons donc un carré magique général dans lequel il y aura quinze variables libres. Nous allons trouver trois sous-espaces qui contiendront des carrés magiques remarquables. Par exemple, les **Ariane**, qui possèdent onze fusées, forment un sous-espace de dimension 4. Puis, les **ultra-magiques** qui sont **pandiagonaux et associatifs**, forment un sous-espace de dimension 5. Enfin, le sous-espace des **ultra-magiques-alpha, de dimension 3.** Nous verrons ces trois sous-espaces un peu plus loin.

Précisons qu'un carré magique d'ordre n et de somme S est **associatif** si chaque fois que nous prenons deux nombres situés dans deux cases en positions symétriques par rapport au centre du carré, la somme de ceux-ci est toujours $\frac{2S}{n}$.

Les A-Dürer, que nous avons vus au chapitre précédent, sont tous associatifs; en fait, ce sont des Dürer associatifs.

Les carrés magiques normaux d'ordre 5 sont de somme magique S = 65 et f(65) = 1394. Nous retrouvons donc 1394 figures magiques dans tous les carrés magiques normaux d'ordre 5. De plus, le nombre de **carrés magiques normaux primitifs** d'ordre 5 est très grand soit:

275 305 224

Pour les 4x4, nous n'en avions que 880 et pour les 3x3, 1 seul!!!

Nous savons qu'un carré magique d'ordre 3 et de somme S a obligatoirement comme centre le nombre $\frac{S}{3}$. S'il est normal, son centre est 5. Pour les carrés magiques d'ordre 5, le centre est-il toujours $\frac{S}{5}$? Le centre est-il toujours 13 si le carré est normal? La réponse est non et pour illustrer cela, voici vingt-cinq carrés magiques pandiagonaux normaux d'ordre 5. Ils renferment respectivement comme centre les entiers de 1 à 25. Ils sont donc tous primitifs. Ils ont été construits en appliquant une petite règle sur un premier carré normal pandiagonal et celui-ci seul nous a permis de trouver les vingt-quatre autres. Voici cette règle appelée 1-3-5-2-4 :

1) Choisissons A, un carré magique pandiagonal.
2) Ses rangées, de haut en bas, sont notées 1, 2, 3, 4 et 5.
3) Construisons le carré B en plaçant de haut en bas, les rangées 1, 3, 5, 2 et 4 de A.
4) Les colonnes de B, de gauche à droite, sont notées 1, 2, 3, 4 et 5.

5) Construisons le carré C en plaçant de gauche à droite, les colonnes 1, 3, 5, 2 et 4 de B.
6) Le carré C ainsi obtenu est magique et pandiagonal. L'élément de A qui occupe la position (5 ; 5) est maintenant l'élément central de C.
7) Si en plus, A est normal, alors, évidemment, C le sera aussi.

De la même façon, nous avons la règle 1-3-5-7-2-4-6 pour les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 7. Le résultat est encore un carré magique pandiagonal et l'élément en position (7 ; 7) dans A devient le centre de C. Suivent les vingt-cinq pandiagonaux normaux 5x5 de centres de 1 à 25; le nombre en-dessous de chaque carré de centre k indique le nombre de carrés magiques normaux parmi les 275 305 224 qui ont le nombre k comme centre; **ceci en fait une très belle classification** :

$$\begin{pmatrix} 25 & 6 & 19 & 3 & 12 \\ 4 & 13 & 22 & 10 & 16 \\ 7 & 20 & 1 & 14 & 23 \\ 11 & 24 & 8 & 17 & 5 \\ 18 & 2 & 15 & 21 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 19 & 12 & 6 & 3 & 25 \\ 1 & 23 & 20 & 14 & 7 \\ 15 & 9 & 2 & 21 & 18 \\ 22 & 16 & 13 & 10 & 4 \\ 8 & 5 & 24 & 17 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 22 & 8 & 19 & 1 & 15 \\ 4 & 11 & 25 & 7 & 18 \\ 10 & 17 & 3 & 14 & 21 \\ 13 & 24 & 6 & 20 & 2 \\ 16 & 5 & 12 & 23 & 9 \end{pmatrix}$$

4 365 792 5 464 716 7 659 936

$$\begin{pmatrix} 23 & 1 & 7 & 14 & 20 \\ 9 & 15 & 18 & 21 & 2 \\ 16 & 22 & 4 & 10 & 13 \\ 5 & 8 & 11 & 17 & 24 \\ 12 & 19 & 25 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 25 & 12 & 3 & 19 \\ 2 & 18 & 9 & 21 & 15 \\ 24 & 11 & 5 & 17 & 8 \\ 20 & 7 & 23 & 14 & 1 \\ 13 & 4 & 16 & 10 & 22 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 23 & 7 & 20 & 1 & 14 \\ 16 & 4 & 13 & 22 & 10 \\ 12 & 25 & 6 & 19 & 3 \\ 9 & 18 & 2 & 15 & 21 \\ 5 & 11 & 24 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

7 835 348 9 727 224 10 403 516

$$\begin{pmatrix} 16 & 9 & 23 & 12 & 5 \\ 22 & 15 & 1 & 19 & 8 \\ 4 & 18 & 7 & 25 & 11 \\ 10 & 21 & 14 & 3 & 17 \\ 13 & 2 & 20 & 6 & 24 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 13 & 22 & 10 & 16 \\ 7 & 20 & 1 & 14 & 23 \\ 11 & 24 & 8 & 17 & 5 \\ 18 & 2 & 15 & 21 & 9 \\ 25 & 6 & 19 & 3 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 19 & 22 \\ 14 & 17 & 21 & 3 & 10 \\ 23 & 5 & 9 & 12 & 16 \\ 7 & 11 & 18 & 25 & 4 \\ 20 & 24 & 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

12 067 524 12 448 644 13 890 160

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 16 & 9 & 23 \\ 6 & 24 & 13 & 2 & 20 \\ 3 & 17 & 10 & 21 & 14 \\ 25 & 11 & 4 & 18 & 7 \\ 19 & 8 & 22 & 15 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 19 & 6 & 25 & 12 & 3 \\ 15 & 2 & 18 & 9 & 21 \\ 8 & 24 & 11 & 5 & 17 \\ 1 & 20 & 7 & 23 & 14 \\ 22 & 13 & 4 & 16 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 7 & 25 & 11 & 4 \\ 15 & 1 & 19 & 8 & 22 \\ 9 & 23 & 12 & 5 & 16 \\ 2 & 20 & 6 & 24 & 13 \\ 21 & 14 & 3 & 17 & 10 \end{pmatrix}$$

13 376 136 15 735 272 15 138 472

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 & 8 & 19 \\ 23 & 9 & 16 & 5 & 12 \\ 20 & 2 & 13 & 24 & 6 \\ 14 & 21 & 10 & 17 & 3 \\ 7 & 18 & 4 & 11 & 25 \end{pmatrix}$$

19 079 744

$$\begin{pmatrix} 6 & 19 & 3 & 12 & 25 \\ 13 & 22 & 10 & 16 & 4 \\ 20 & 1 & 14 & 23 & 7 \\ 24 & 8 & 17 & 5 & 11 \\ 2 & 15 & 21 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

15 138 472

$$\begin{pmatrix} 23 & 14 & 1 & 20 & 7 \\ 5 & 17 & 8 & 24 & 11 \\ 9 & 21 & 15 & 2 & 18 \\ 12 & 3 & 19 & 6 & 25 \\ 16 & 10 & 22 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

15 735 272

$$\begin{pmatrix} 15 & 21 & 9 & 18 & 2 \\ 19 & 3 & 12 & 25 & 6 \\ 22 & 10 & 16 & 4 & 13 \\ 1 & 14 & 23 & 7 & 20 \\ 8 & 17 & 5 & 11 & 24 \end{pmatrix}$$

13 376 136

$$\begin{pmatrix} 1 & 19 & 8 & 22 & 15 \\ 7 & 25 & 11 & 4 & 18 \\ 14 & 3 & 17 & 10 & 21 \\ 20 & 6 & 24 & 13 & 2 \\ 23 & 12 & 5 & 16 & 9 \end{pmatrix}$$

13 890 160

$$\begin{pmatrix} 12 & 23 & 9 & 16 & 5 \\ 19 & 1 & 15 & 22 & 8 \\ 25 & 7 & 18 & 4 & 11 \\ 3 & 14 & 21 & 10 & 17 \\ 6 & 20 & 2 & 13 & 24 \end{pmatrix}$$

12 448 644

$$\begin{pmatrix} 23 & 14 & 1 & 20 & 7 \\ 16 & 10 & 22 & 13 & 4 \\ 12 & 3 & 19 & 6 & 25 \\ 9 & 21 & 15 & 2 & 18 \\ 5 & 17 & 8 & 24 & 11 \end{pmatrix}$$

12 067 524

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 13 & 16 & 22 \\ 18 & 21 & 2 & 9 & 15 \\ 7 & 14 & 20 & 23 & 1 \\ 25 & 3 & 6 & 12 & 19 \\ 11 & 17 & 24 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

10 403 516

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 10 & 22 & 13 \\ 25 & 12 & 3 & 19 & 6 \\ 18 & 9 & 21 & 15 & 2 \\ 11 & 5 & 17 & 8 & 24 \\ 7 & 23 & 14 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

9 727 224

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 19 & 25 & 3 \\ 24 & 5 & 8 & 11 & 17 \\ 13 & 16 & 22 & 4 & 10 \\ 2 & 9 & 15 & 18 & 21 \\ 20 & 23 & 1 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

7 835 348

$$\begin{pmatrix} 19 & 3 & 12 & 25 & 6 \\ 22 & 10 & 16 & 4 & 13 \\ 1 & 14 & 23 & 7 & 20 \\ 8 & 17 & 5 & 11 & 24 \\ 15 & 21 & 9 & 18 & 2 \end{pmatrix}$$

7 659 936

$$\begin{pmatrix} 12 & 9 & 5 & 23 & 16 \\ 25 & 18 & 11 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 24 & 20 & 13 \\ 19 & 15 & 8 & 1 & 22 \\ 3 & 21 & 17 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

5 464 716

$$\begin{pmatrix} 1 & 22 & 19 & 15 & 8 \\ 20 & 13 & 6 & 2 & 24 \\ 7 & 4 & 25 & 18 & 11 \\ 23 & 16 & 12 & 9 & 5 \\ 14 & 10 & 3 & 21 & 17 \end{pmatrix}$$

4 365 792

Donc, le centre d'un carré magique d'ordre 5 n'est pas obligatoirement le nombre $\frac{S}{5}$.

6.2 Les Ariane

Le sous-espace des Ariane est formé des carrés magiques d'ordre 5 qui possèdent tous les onze fusées suivantes dont six sont verticales vers le haut et cinq, horizontales vers la gauche :

A	B	C	D	E
F	G	H	J	K
L	M	N	O	P
Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z

				E
	G	H	J	
			O	P
Q	R	S		
			Y	

Nous avons illustré quatre fusées, voici les sept autres :

CHNRT DJOSU GMRVX HNSWY FGHDO LMNJT MNOKU

Le carré suivant est un Ariane presque normal de somme S = 137 avec f(137) = 672.

21	63	10	19	24
8	37	41	20	31
60	1	29	32	15
14	30	22	27	44
34	6	35	39	23

Ariane de somme S = 137

Voyons maintenant comment trouver la structure générale des Ariane.

1) En se référant au chapitre 3 de la partie 2, vous construisez la structure générale des carrés magiques d'ordre 5 laquelle renferme quinze variables libres.
2) Pour obtenir la première fusée, vous additionnez les expressions qui se trouvent dans les cinq cases qui définissent cette fusée puis vous posez cette somme égale à S.
3) À partir de cette équation, vous isolez une variable, laquelle disparaîtra du carré après substitution.

4) Puis à partir de cette nouvelle structure, vous recommencez avec la deuxième fusée et ainsi de suite jusqu'à la onzième.
5) Vous obtiendrez ainsi une structure générale des Ariane.

Celle que nous avons trouvée est peut-être différente de la vôtre mais sûrement équivalente en ce sens que les deux structures vont générer les mêmes carrés magiques, ici, les mêmes Ariane. La différence possible entre nos deux structures est due à notre choix des deux variables que nous ferons disparaître lors de la construction de la structure générale des carrés magiques d'ordre 5, ainsi que du choix de la variable que nous ferons disparaître relativement à chaque fusée. **N'oubliez pas le coefficient 1/2 devant le carré ci-dessous!!!**

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 2b & -57a+54h+S & 84a-2b-80h & -29a+26h+S \\ -110a+2b+110h & S-3a & 42a-40h & 2h & 71a-2b-72h+S \\ 43a-46h+S & 40h-38a & 18a-16h & -13a+10h+S & 12h-10a \\ 74a-2b-70h & 20a-18h & -33a+30h+S & -23a+20h+S & -38a+2b+38h \\ -9a+6h+S & 21a-2b-22h+S & 30a-28h & -48a+2b+48h & 6a-4h \end{pmatrix}$$

Structure générale des Ariane

Puisque nous avons quatre variables libres, le sous-espace des Ariane est donc de dimension 4. La fréquence de la structure générale est f(S) = 109 ce qui signifie que tous les Ariane ont en commun 109 figures magiques que vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 28. Puisque nous connaissons un Ariane qui possède exactement 109 figures magiques (voir plus bas), alors ces 109 figures magiques caractérisent le sous-espace des Ariane.

Nous savons qu'il n'existe **aucun Ariane normal** puisqu'il n'existe aucun Ariane de somme 65, (voir plus bas). L'espace des Ariane est cependant **presque normal** puisqu'il renferme au moins un Ariane presque normal.

Voici un Ariane presque normal qui possède exactement 109 figures magiques. Ce sont les 109 figures magiques de la structure générale des Ariane. Pour trouver un carré magique avec f(S) = 109, il est préférable, intuitivement, de donner aux variables libres de très grandes valeurs.

$$\begin{pmatrix} 25243 & 25165 & 42429 & 1 & 33567 \\ 59980 & 25338 & 12583 & 25876 & 2628 \\ 10779 & 37903 & 20179 & 28503 & 29041 \\ 3166 & 19546 & 34833 & 31668 & 37192 \\ 27237 & 18453 & 16381 & 40357 & 23977 \end{pmatrix}$$

$$S = 126\,405 \quad f(S) = 109$$

Remarque : afin de signaler qu'un carré magique est un Ariane, nous illustrerons toujours la fusée centrale comme dans les carrés ci-haut.

Voici deux autres Ariane presque normaux :

23	1	54	5	40
56	27	3	24	13
4	43	15	32	29
10	14	42	37	20
30	38	9	25	21

S = 123 f(123) = 665

23	1	58	5	44
56	31	3	24	17
8	43	15	36	29
10	14	46	41	20
34	42	9	25	21

S = 131 f(131) = 625

Celui de gauche possède 665 figures magiques et sa somme, 123, est la plus petite possible pour un Ariane presque normal. De plus, il existe un seul Ariane presque normal de somme 123. Il est évident qu'un carré magique presque normal d'ordre 5 a une somme magique ≥ 65. Dans MAPLE, vous trouverez le fichier « Ariane 2 » qui montre qu'il n'existe pas d'Ariane presque normal de somme 65 donc aucun Ariane normal. Le fichier montre aussi qu'il existe un seul Ariane presque normal de somme 123, la plus petite possible. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 6.1 :

Si A est un Ariane presque normal de somme S, alors $S \geq 123$. De plus, il existe un seul Ariane presque normal de somme $S = 123$.

Jusqu'à maintenant, il nous est arrivé plusieurs fois d'avoir à trouver un carré magique issu d'une structure générale de fréquence f(S) = k, dont la fréquence est aussi k. Dans l'exemple précédent, la fréquence de la structure générale des Ariane est f(S) = 109. Nous cherchions un Ariane particulier dont la fréquence est 109 et nous avons trouvé le carré ci-haut de somme 126 405 avec f (126 405) = 109.

Avions-nous la certitude de pouvoir trouver cet Ariane? Intuitivement oui, mais sans certitude absolue!! Heureusement, jusqu'à maintenant, nous avons toujours trouvé le carré magique cherché mais en sera-t-il toujours ainsi? La réponse est oui, grâce au résultat suivant :

Théorème 6.2 :

Une structure générale dont la fréquence est $f(S) = k$ génère au moins un carré magique de fréquence k.

La démonstration de ce théorème se trouve au chapitre 14 (section 14.8). Th.6.2 = Th.14.11

6.3 Les ultra-magiques d'ordre 5

Un carré magique **pandiagonal** et **associatif** est appelé carré **ultra-magique.** Ces carrés possèdent de très belles propriétés. Les ultra-magiques d'ordre 5 forment un sous-espace de dimension 5.

Il existe seulement seize ultra-magiques normaux primitifs d'ordre 5 sur les 275 305 224 carrés magiques normaux d'ordre 5. Cela en fait des carrés d'une **grande rareté.** Vous les trouverez un peu plus loin.

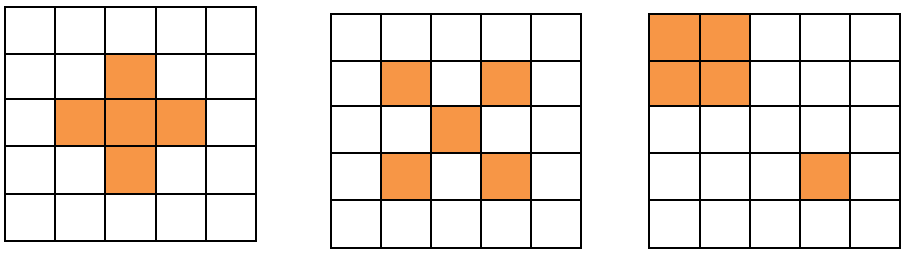
Les ultra-magiques normaux d'ordre 5 sont au nombre de 128 soit 16 x 8. Le sous-espace des ultra-magiques est donc normal d'ordre 128. Voici une structure générale des ultra-magiques d'ordre 5 :

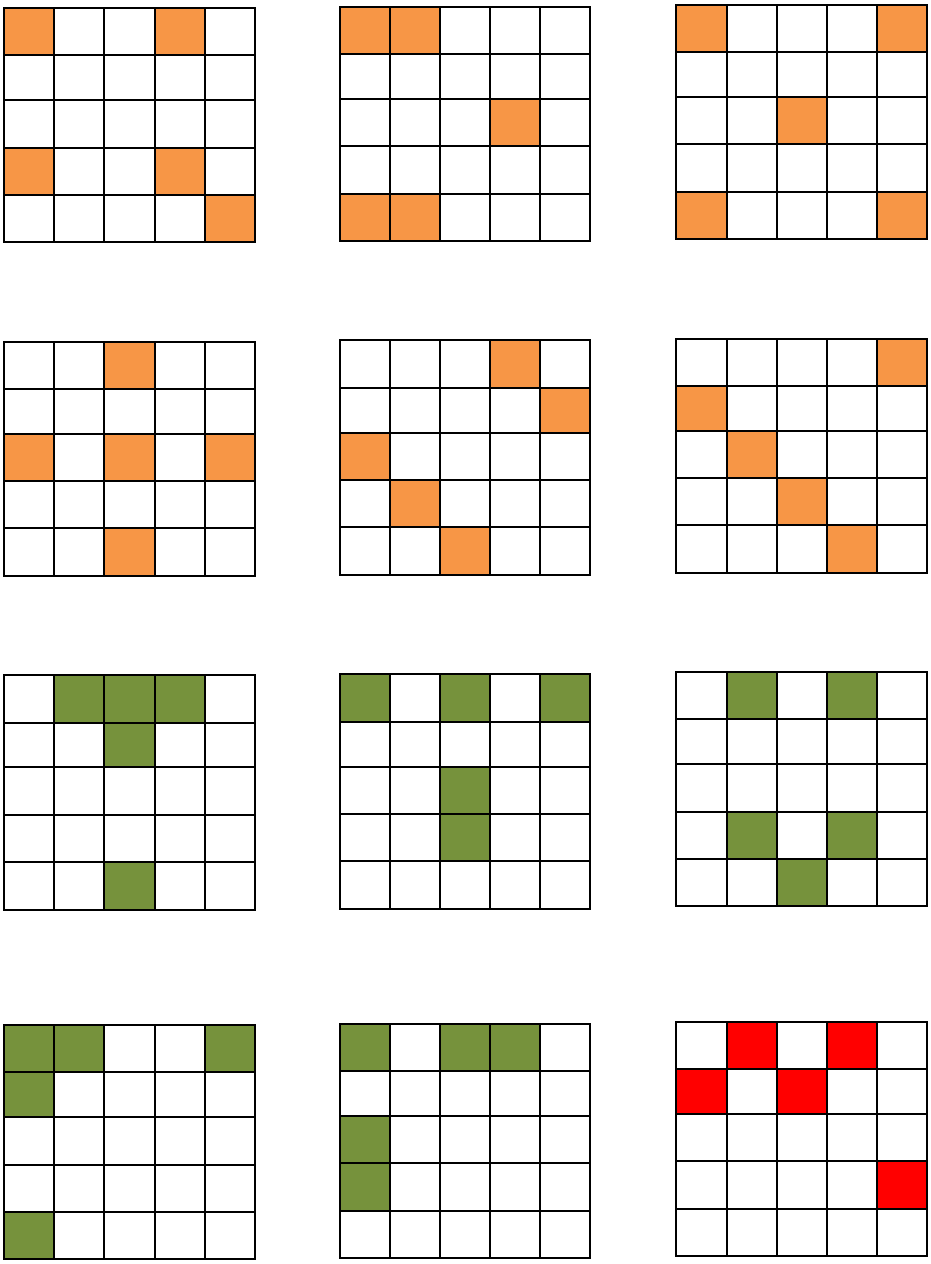
$$\begin{array}{ccccc}
a & b & c & a+b+c+f-3k & -2a-2b-2c-f+8k \\
-a-b+3k & f & -a-2b-c-f+6k & a+2b-2k & a+b+c-2k \\
-a-c-f+4k & 2a+2b+c-4k & k & -2a-2b-c+6k & a+c+f-2k \\
-a-b-c+4k & -a-2b+4k & a+2b+c+f-4k & -f+2k & a+b-k \\
2a+2b+2c+f-6k & -a-b-c-f+5k & -c+2k & -b+2k & -a+2k
\end{array}$$

$$Structure\ générale\ des\ ultra-magiques\ d'ordre\ 5$$

La fréquence de cette structure générale de somme $5k$ est $f(5k)=362.$ Donc, tous les ultra-magiques ont en commun les 362 figures magiques de cette structure générale. Vous les trouverez dans la Partie 3.

Ce qui est extraordinaire avec les ultra-magiques, c'est qu'ils possèdent de nombreuses super-figures. En voici quelques-unes qui sont des super-figures de la structure générale donc toutes ces figures sont des super-figures pour tous les ultra-magiques d'ordre 5.





La dernière figure en rouge est une simple figure magique de la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5. Les quatorze autres sont des super-figures. Cela signifie que si nous déposons une de ces quatorze figures sur un ultra-magique quelconque d'ordre 5, peu importe où et comment, en autant que la figure couvre parfaitement cinq cases, alors cette figure couvrira une figure magique. Ces quatorze super-figures génèrent 108 des 362 figures magiques que possède la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5.

Le carré magique suivant est un ultra-magique normal d'ordre 5. Sa somme magique est S = 65 avec f(65) = 1394.

1	15	22	8	19
23	9	16	5	12
20	2	13	24	6
14	21	10	17	3
7	18	4	11	25

Carré UM

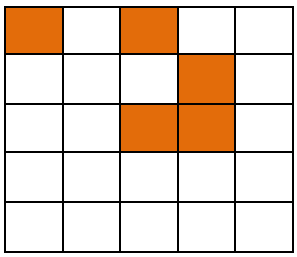
Pour l'obtenir, nous avons posé : $a = 1$; $b = 15$; $c = 22$; $f = 9$; $k = 13$. Ces cinq nombres, dans cet ordre, sont les coordonnées de l'ultra-magique. Celui-ci peut être représenté par :

$$(1\,;15\,;22\,;9\,;13)$$

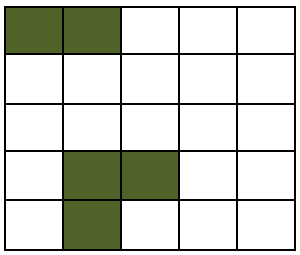
et ce, de façon unique (relativement à une base ordonnée).

Nous vous proposons de vérifier que les quatorze super-figures ci-haut le sont pour le carré UM. De plus, en observant les 362 figures magiques qui caractérisent les ultra-magiques (voir la Partie 3, annexe 23, programme 08), essayez de trouver d'autres super-figures.

Voyons maintenant deux nouvelles figures que nous appellerons **ultra-figures.**

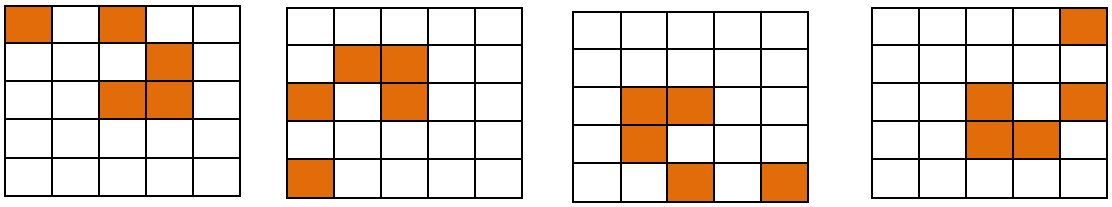


F1

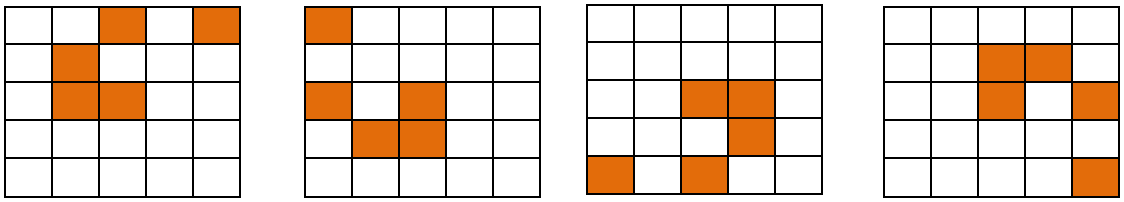


F2

À partir de la figure F1, nous pouvons en construire sept autres en la tournant de 90°, 180° et 270°, puis en la regardant par derrière, nous en aurons une autre que nous allons aussi tourner de 90°, 180° et 270°. Ces huit figures sont appelées les **figures équivalentes** de la figure F1. Les voici :



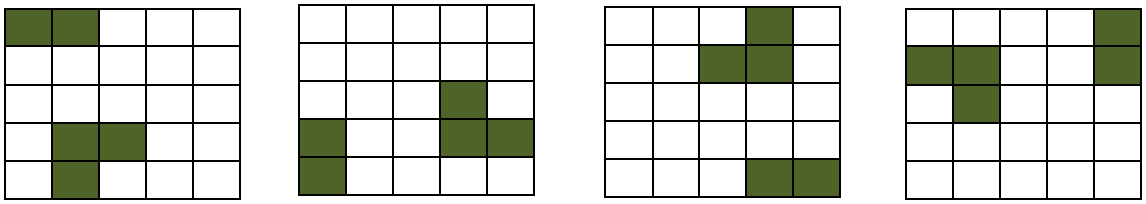
F1

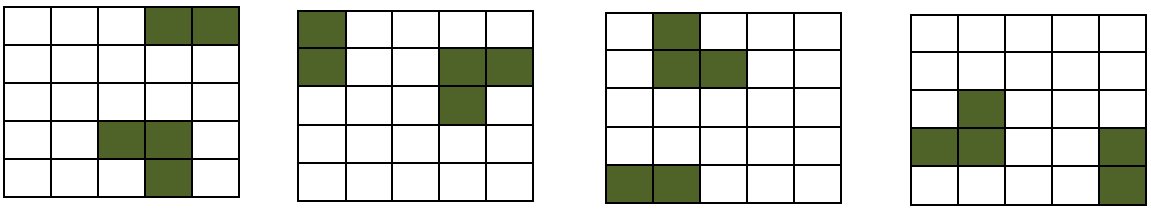


Si les huit figures équivalentes sont des figures magiques dans un carré magique M, alors nous dirons que cette figure est une **ultra-figure** pour M.

Il est remarquable ici de constater que les huit figures équivalentes de F1 sont des figures magiques de la structure générale des ultra-magiques. F1 est donc une ultra-figure pour tous les carrés ultra-magiques d'ordre 5. Ces figures doivent occuper, dans tous les ultra-magiques, les positions indiquées dans les huit carrés ci-haut.

De même à partir de F2 :





F2 est aussi une ultra-figure pour tous les carrés ultra-magiques d'ordre 5. Ces figures doivent occuper, dans tous les ultra-magiques, les positions indiquées dans les huit derniers carrés ci-haut.

Notez qu'une super-figure est une ultra-figure; la réciproque n'est pas vraie. Terminons avec les **16 ultra-magiques normaux primitifs d'ordre 5** :

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

UM 1

2	14	25	18	6
23	16	7	4	15
9	5	13	21	17
11	22	19	10	3
20	8	1	12	24

UM 2

2	23	9	15	16
14	20	1	22	8
21	7	13	19	5
18	4	25	6	12
10	11	17	3	24

UM 3

5	11	22	8	19
23	9	20	1	12
16	2	13	24	10
14	25	6	17	3
7	18	4	15	21

UM 4

5	23	6	14	17
11	19	2	25	8
22	10	13	16	4
18	1	24	7	15
9	12	20	3	21

UM 5

6	18	5	14	22
15	24	7	16	3
17	1	13	25	9
23	10	19	2	11
4	12	21	8	20

UM 6

17	8	24	15	1
14	5	16	7	23
6	22	13	4	20
3	19	10	21	12
25	11	2	18	9

UM 7

17	14	10	3	21
8	1	22	19	15
24	20	13	6	2
11	7	4	25	18
5	23	16	12	9

UM 8

19	8	22	15	1
12	5	16	9	23
6	24	13	2	20
3	17	10	21	14
25	11	4	18	7

UM 9

19	12	6	23	5
8	25	4	17	11
2	16	13	10	24
15	9	22	1	18
21	3	20	14	7

UM 10

20	11	7	23	4
8	24	5	16	12
1	17	13	9	25
14	10	21	2	18
22	3	19	15	6

UM 11

22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4

UM 12

22	14	5	8	16
3	6	17	24	15
19	25	13	1	7
11	2	9	20	23
10	18	21	12	4

UM 13

24	3	7	11	20
12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14
6	15	19	23	2

UM 14

24	3	7	15	16
12	20	21	4	8
1	9	13	17	25
18	22	5	6	14
10	11	19	23	2

UM 15

25	11	2	8	19
3	9	20	21	12
16	22	13	4	10
14	5	6	17	23
7	18	24	15	1

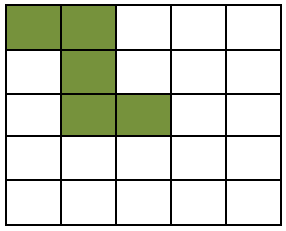
UM 16

Les 128 ultra-magiques normaux d'ordre 5 sont obtenus des seize primitifs précédents : il suffit de remplacer chacun par ses huit équivalents.

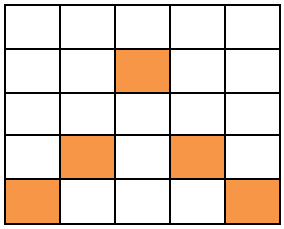
Par exemple, le carré UM ci-haut est un équivalent du carré UM 9.

6.4 Les ultra-magiques-alpha

Ce sont des **ultra-magiques d'ordre 5** qui possèdent les deux figures magiques suivantes :



F3



F4

Ils forment un sous-espace de dimension 3. Celui-ci est normal d'ordre 8. Il existe seulement deux ultra-magiques-alpha normaux primitifs d'ordre 5 sur les 275 305 224 carrés magiques normaux d'ordre 5. Cela en fait des carrés d'une **très grande rareté.** Vous les trouverez un peu plus loin.

Voici une structure générale des ultra-magiques-alpha :

$$\begin{pmatrix} a & b & \frac{-2a-b+5k}{2} & -2a-2b+5k & \frac{4a+3b-5k}{2} \\ -a-b+3k & \frac{-4a-5b+11k}{2} & 2a+b-2k & a+2b-2k & \frac{b+k}{2} \\ 2a+3b-4k & \frac{2a+3b-3k}{2} & k & \frac{-2a-3b+7k}{2} & -2a-3b+6k \\ \frac{-b+3k}{2} & -a-2b+4k & -2a-b+4k & \frac{4a+5b-7k}{2} & a+b-k \\ \frac{-4a-3b+9k}{2} & 2a+2b-3k & \frac{2a+b-k}{2} & -b+2k & -a+2k \end{pmatrix}$$

Structure générale des ultra – magiques – alpha

Pour l'obtenir, nous avons remplacé dans la structure générale des ultra-magiques ci-haut, c par l'expression $a+2b+f-3k$ obtenue de la figure F4. Dans la nouvelle structure générale, nous avons remplacé f par l'expression $\frac{-4a-5b+11k}{2}$ obtenue de la figure F3. D'où la structure générale des ultra-magiques-alpha de somme $5k$. La fréquence de cette structure générale est

$f(5k) = 934.$ Donc, tous les ultra-magiques-alpha ont en commun les 934 figures magiques de la structure générale. Voici les huit ultra-magiques-alpha normaux :

4	23	17	11	10
12	6	5	24	18
25	19	13	7	1
8	2	21	20	14
16	15	9	3	22

2	23	19	15	6
14	10	1	22	18
21	17	13	9	5
8	4	25	16	12
20	11	7	3	24

22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4

24	3	7	11	20
12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14
6	15	19	23	2

10	11	17	23	4
18	24	5	6	12
1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16

6	15	19	23	2
18	22	1	10	14
5	9	13	17	21
12	16	25	4	8
24	3	7	11	20

16	15	9	3	22
8	2	21	20	14
25	19	13	7	1
12	6	5	24	18
4	23	17	11	10

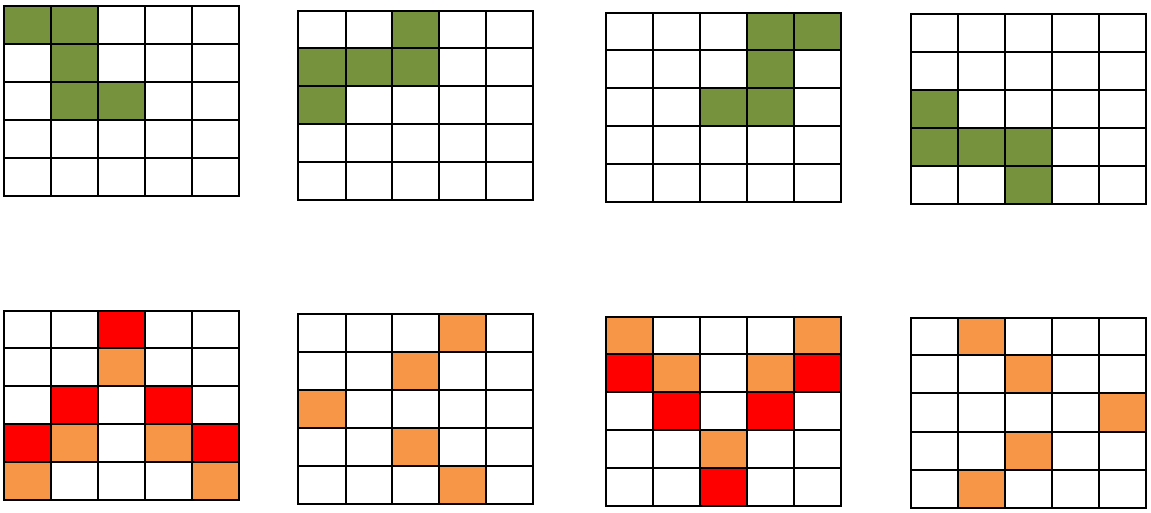
20	11	7	3	24
8	4	25	16	12
21	17	13	9	5
14	10	1	22	18
2	23	19	15	6

Dans la colonne de gauche, les quatre ultra-magiques-alpha sont de haut en bas, les carrés A ; $R^2(A)$; $R_*(A)$; $R_*^2(A)$.

Dans la colonne de droite, les quatre ultra-magiques-alpha sont de haut en bas, les carrés B ; $R^2(B)$; $R_*(B)$; $R_*^2(B)$.

Les carrés A *et* B sont deux primitifs et chacun est accompagné de trois équivalents.

Enfin, que pouvons-nous dire des figures F3 et F4? **Ce sont 2 ultra-figures**.



Sur les huit figures équivalentes de F3, nous retrouvons quatre fois deux figures identiques. Nous avons donc quatre figures différentes qui sont magiques dans la structure générale des ultra-magiques-alpha, dans la position indiquée ci-haut, laquelle n'est pas forcément unique.

Il en est de même pour la figure F4. Nous avons illustré les six positions possibles de F4 dans la structure générale.

Terminons en disant qu'il est possible, à partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 5, de construire de nouveaux sous-espaces qui renfermeront des carrés magiques caractérisés par de nouvelles figures magiques.

6.5 Problèmes

1) Un pavé de carrés magiques pandiagonaux.

M

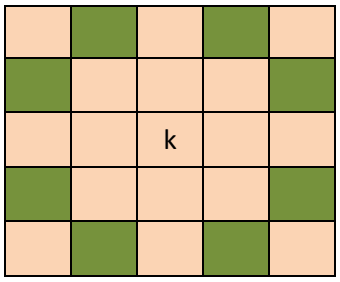
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q
R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V
W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q
R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V
W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q
R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V
W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L

Le carré M d'ordre 5 en haut à gauche est magique et pandiagonal. Il se retrouve avec onze copies pour former le tableau rectangulaire ci-haut. Nous aurions pu former un tableau dans lequel nous aurions m n fois le carré M. Ici, nous avons m = 3 et n = 4 d'où m n = 12 fois le carré M. Montrez que le carré bleu d'ordre 5 est magique et pandiagonal, quelle que soit sa position dans le tableau ci-haut. Qu'en est-il de sa somme?

2) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 4.
3) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 6.
4) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 7.
5) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre n où n est un entier ≥ 4.
6) Pouvons-nous prendre n = 3?
7) Soient deux carrés magiques d'ordre n, un entier impair > 2. Si les nombres situés dans les cases centrales sont différents, alors les deux carrés sont primitifs. Pourquoi?
8) Dans 6.1, nous avons présenté une classification des carrés magiques normaux primitifs d'ordre 5 selon le centre du carré. Il était nécessaire de trouver le nombre de carrés de

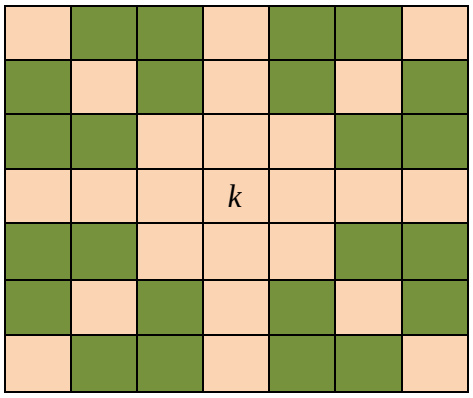
centre 1, de centre 2, …, de centre 12 et de centre 13. Le nombre de carrés de centre 14 est le même que le nombre de carrés de centre 12; le nombre de carrés de centre 15 est le même que le nombre de carrés de centre 11, et ainsi de suite. En fait, il y a autant de carrés de centre k, $avec\ 1 \leq k \leq 12$, qu'il y a de carrés de centre $26-k$. Démontrez ce résultat.

9) Montrez que le centre d'un ultra-magique d'ordre 5 et de somme S est toujours S/5.
10) Soit M, un carré ultra-magique d'ordre 5 tel que les extrémités d'une de ses grandes diagonales soient 10 et 26.
    a) Quel est la somme magique de M?
    b) Quel nombre se trouve dans la case centrale de M?
    c) Soient deux cases symétriques par rapport au centre de M. Si l'une renferme 12, alors que renferme l'autre?
    d) Si M est presque normal, alors quel est le plus grand entier possible de M?
11) Démontrez que l'application du procédé 1-3-5-2-4, présenté dans 6.1, sur un carré magique pandiagonal A d'ordre 5, nous donne un nouveau carré magique pandiagonal B d'ordre 5. Quel est le centre de B?
12) Trouvez un carré magique normal d'ordre 5 à partir duquel vous pourrez construire une infinité de carrés magiques presque normaux dont les sommes magiques sont consécutives à partir de S = 65. Indice : vous pouvez trouver le carré cherché parmi les ultra-magiques normaux de 6.3.
13) Pouvez-vous trouver un Ariane presque normal de somme magique S = 120?
14) Je possède 25 lingots de platine dont les poids en grammes sont tous différents et ont la forme 100k avec k un entier qui varie de 1 à 25. Le plus petit pèse donc 100 grammes et le plus gros, 2500 grammes. Je désire les offrir à mes cinq enfants de façon que ceux-ci reçoivent la même quantité de platine avec la même quantité de lingots.
    a) Comment puis-je procéder?
    b) La façon de faire est-elle unique?
    c) Quelle quantité de platine chacun recevra-t-il?
15) Si dans la structure générale des Ariane, les variables libres ne prennent que des valeurs entières, alors trouvez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un Ariane renferme que des entiers.
16) Voici un carré magique d'ordre 5, de somme S et de centre k.



Montrez que la somme des nombres situés dans les cases vertes est S + 3k.

17) Voici un carré magique d'ordre 7 de somme S et de centre k.



Trouvez la somme des nombres situés dans les cases vertes.

18) Reprenez le problème 11 avec le procédé 1-3-5-7-2-4-6 pour l'ordre 7.
19) Reprenez le problème 11 avec le procédé 1-3-5-7-9-2-4-6-8 pour l'ordre 9.
20) Soit A, un Ariane. Ses sept autres équivalents sont-ils des Ariane?

7. Carrés ultra-magiques et hyper-magiques

7.1 Introduction

Nous allons définir ici des carrés magiques exceptionnels qui montreront un grand nombre de figures magiques ainsi que des propriétés remarquables.

D'abord, ces carrés magiques seront tous pandiagonaux. Nous savons que si un carré magique normal d'ordre pair est pandiagonal alors l'ordre du carré est divisible par 4 ([3], page 7). Ainsi, les carrés magiques normaux d'ordres 6, 10, 14, …, 4k + 2, … ne peuvent pas être pandiagonaux.

Par exemple, un carré magique normal d'ordre 6 ne peut pas être pandiagonal. Est-ce aussi le cas pour un carré magique quelconque d'ordre 6? Pourrions-nous trouver un carré magique presque normal d'ordre 6 qui serait pandiagonal?

La réponse est oui. Dans la section 7.2, nous allons construire des carrés magiques presque normaux pandiagonaux d'ordre 6. Plus précisément, nous allons construire des **hyper-magiques**.

Rappelons qu'un carré magique de somme S est un **ultra-magique** si et seulement si :

a) Le carré magique est **pandiagonal**.
b) Quelle que soit la paire de cases symétriques par rapport au centre du carré, la somme des nombres qui s'y trouvent est toujours égale à $\frac{2S}{n}$; autrement dit, le carré est **associatif**.

Donc, si n est impair, le centre d'un carré magique associatif est toujours $\frac{S}{n}$. Il est facile de trouver des figures magiques dans un ultra-magique. Par exemple, dans un ultra-magique d'ordre 7, si vous prenez 3 paires de cases symétriques par rapport au centre plus le centre, vous obtenez une figure magique puisque la somme sera $3\times\frac{2S}{7}+\frac{S}{7}=S$.

Avec un ultra-magique d'ordre 10, si vous prenez 5 paires de cases symétriques, alors vous obtenez une figure magique puisque la somme sera $5\times\frac{2S}{10}=S$.

Il sera aussi facile de trouver des figures magiques dans un hyper-magique. Rappelons d'abord ce qu'est un tel carré magique (voir carré 28 de la partie 1 et le texte qui suit) :

Un carré magique est un **hyper-magique** si et seulement si :

a) Le carré est d'ordre pair.

b) Chaque fois que nous prenons sous-carré d'ordre 2 dans le carré, la somme de ses quatre cases est toujours $\frac{4S}{n}$.

c) Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées de $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

Nous voyons que l'ordre d'un hyper-magique ne peut pas être impair puisque $\frac{n-2}{2}$ doit être un entier. Les hyper-magiques ont des propriétés extraordinaires! Les théorèmes suivants en témoignent :

Théorème 7.1 :

Soit donné M, un carré magique d'ordre n = 2 k qui vérifie la propriété suivante : chaque fois que nous prenons un carré d'ordre 2 dans M, il y en a (2 k-1) (2 k-1), la somme de ses quatre cases est toujours $\frac{4S}{n}$. Alors dans M, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordres pairs 2, 4, 6, 8,…, 2k est toujours égale à $\frac{4S}{n}$.

Théorème 7.2

Soit donné M, un carré magique d'ordre n = 2 k qui vérifie la propriété suivante : sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées par $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

1) Alors dans M, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre k + 1 est égale à $\frac{4S}{n}$.

2) De plus, M est pandiagonal.

Donc tous les hyper-magiques sont pandiagonaux.

Par exemple, prenons un carré hyper-magique d'ordre 8. Alors la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 2 (il y en a 49), de tous les carrés d'ordre 4 (il y en a 25), de tous les carrés d'ordre 6 (il y en a 9) et du carré d'ordre 8 est égale à $\frac{4S}{8} = \frac{S}{2}$.

De plus, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 4 + 1 = 5 est égale à $\frac{S}{2}$.

Le théorème 7.2 n'apporte rien de plus si k est impair; il devrait donc s'appliquer seulement lorsque k est pair c'est-à-dire lorsque l'ordre est pair multiple de 4. Par exemple, avec n = 8, nous aurons la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 5 égale à $\frac{S}{2}$. Avec n = 10, le théorème 7.2 nous apprend que la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 6 donne $\frac{2S}{5}$, ce que nous savions déjà par le théorème 7.1.

Démontrons ces deux derniers théorèmes. Pour le **théorème 7.1,** utilisons le carré suivant :

A									C
B									D
E									F
R									T
G									H

Ce carré est d'ordre n = $2k$. Puisque chaque carré d'ordre 2 a pour somme $\frac{2S}{k}$, alors il est facile de montrer que A + B + C + D = $\frac{2S}{k}$. En effet, A + B + C + D = $k\,\frac{2S}{k}-(k-1)\frac{2S}{k}=\frac{2S}{k}$.

De la même façon, nous montrons que B + E + D + F = $\frac{2S}{k}$, et ainsi de suite jusqu'à R + G + T + H = $\frac{2S}{k}$. Maintenant, en nous servant des première et dernière colonnes, nous trouvons : A + C + G + H = $k\frac{2S}{k}-(k-1)\frac{2S}{k}=\frac{2S}{k}$. La somme des quatre coins du carré d'ordre 2k est donc $\frac{2S}{k}=\frac{4S}{n}$. Nous pouvons alors déduire que dans ce carré, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordres pairs (2, 4, 6,…, 2k) est égale à $\frac{4S}{n}$. (Voir problème 15 de 7.4)

Passons maintenant au **théorème 7.2** :

Un carré d'ordre k+1 est tel que les deux extrémités de chaque grande diagonale sont séparées par $\frac{n-2}{2}=\frac{2k-2}{2}=k-1$ cases et la somme de ces deux extrémités est $\frac{2S}{n}$ puisque chaque diagonale du carré d'ordre k+1 est située sur une grande diagonale ou sur une diagonale brisée du carré d'ordre 2k. La somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre k+1 est donc $\frac{2S}{n}+\frac{2S}{n}=\frac{4S}{n}$. La preuve du théorème 7.2, M est pandiagonal, est laissée en exercice (problème 1) dans 7.4.

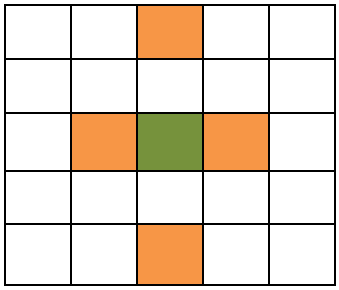
Les ultra-magiques constituent une très belle source d'ultra-figures. De même, les hyper-magiques constituent une très belle source de super-figures. Nous connaissons des ultra-magiques qui possèdent aussi des super-figures (voir chapitre 6); quant aux hyper-magiques, leurs super-figures sont toutes des ultra-figures.

Théorème 7.3 :

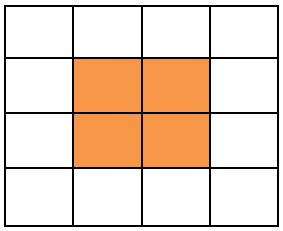
Tous les ultra-magiques d'ordres $n \geq 4$ renferment au moins une ultra-figure et tous les hyper-magiques d'ordres pairs $n \geq 4$ renferment au moins une super-figure.

Preuve :

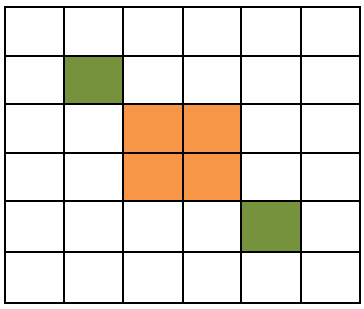
Les diagonales (grandes ou brisées) d'un ultra-magique sont des ultra-figures. Il en est de même de toute figure symétrique par rapport au centre du carré d'un ultra-magique.



Pour les hyper-magiques, n = 2k, nous allons trouver une super-figure quel que soit l'ordre du carré. Voici comment :

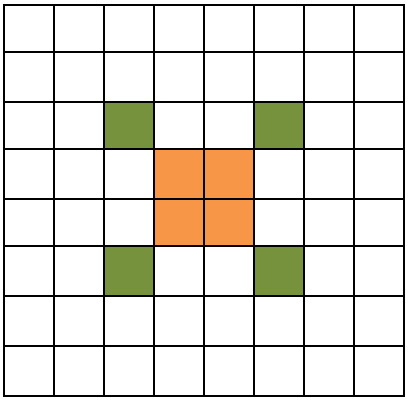


Hy-1

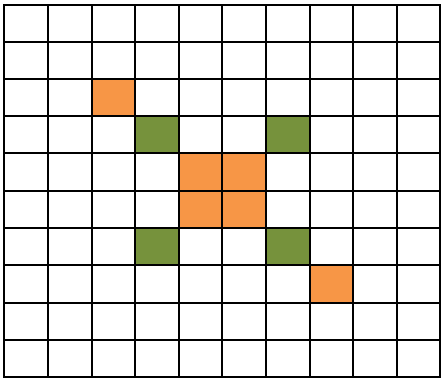


Hy-2

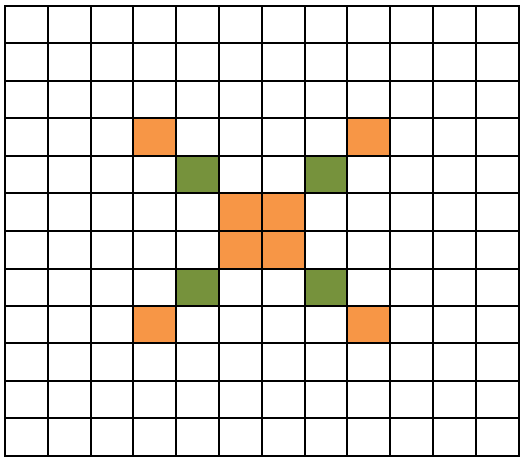
Hy-3 =



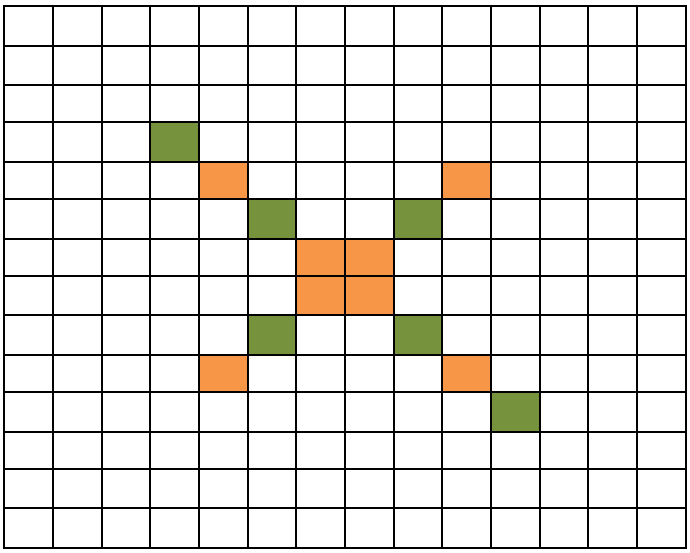
Hy-4 =



Hy-5 =



Hy-6 =



Ces figures dans les carrés d'ordres 4, 6, 8, 10, 12 et 14 que nous venons d'illustrer vont nous aider dans la démonstration qui suit :

Premier cas : **le carré est d'ordre pair multiple de 4** : posons $n = 4m$, m entier ≥ 1. Nous avons alors m groupes de quatre cases (voir Hy-1, Hy-3, Hy-5) et la somme des quatre cases de chaque groupe vaut $\frac{4S}{n} = \frac{S}{m}$ en vertu du théorème 7.1. Les m groupes totalisent $m\,\frac{S}{m} = S$ d'où les m groupes forment une figure magique. Cette figure que nous construisons est symétrique par rapport au centre du carré et c'est une super-figure.

Dans Hy-1, elle est formée des quatre cases d'un carré d'ordre 2. Dans Hy-3, nous y ajoutons les quatre cases qui sont les quatre coins d'un carré d'ordre 4. Dans Hy-5, nous y ajoutons les quatre cases qui sont les quatre coins d'un carré d'ordre 6 et ainsi de suite. Ces cases qui s'ajoutent se trouvent toujours sur les deux grandes diagonales. Le groupe m donne lieu à un carré d'ordre $2m$ centré au centre du carré d'ordre $4m$; de plus, ce carré d'ordre $2m$ renferme $2m$ cases sur ses diagonales.

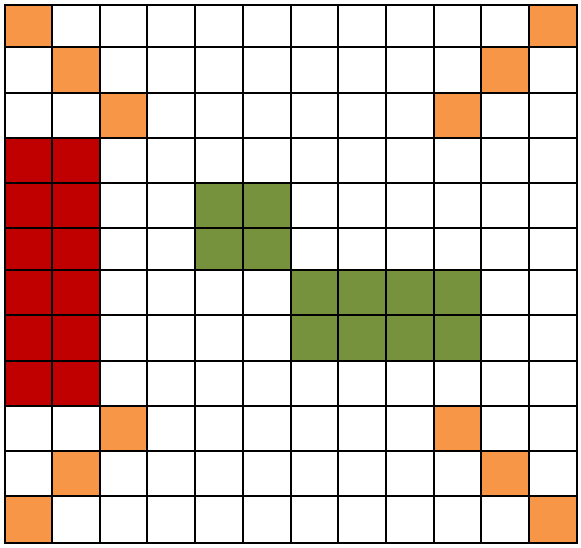
Deuxième cas : le carré est d'ordre pair non multiple de 4 : posons $n = 4m + 2$, m entier ≥ 1.

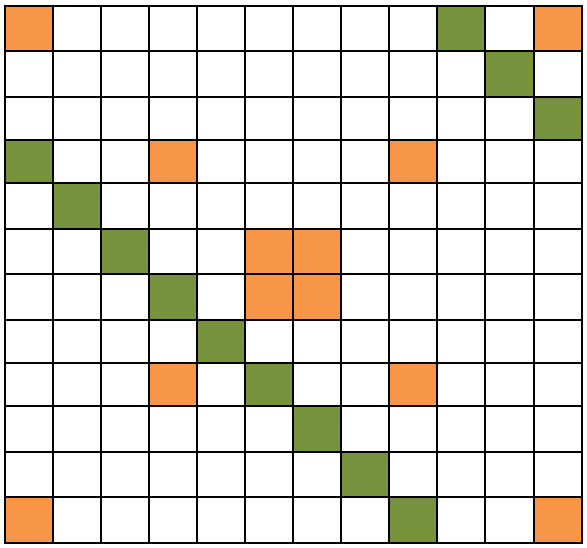
Nous pouvons associer les carrés d'ordres $4m\ et\ 4m+2$ lorsque m prend la même valeur dans les deux cas; par exemple les carrés d'ordres 12 = 4x**3** et 14 = 4x**3** + 2.

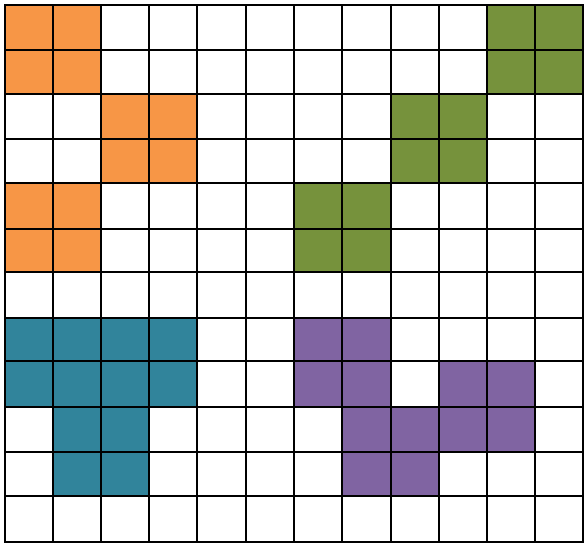
Pour construire notre super-figure, nous allons reproduire la figure du carré précédent. Nous allons retrouver les mêmes m groupes de quatre cases et nous ajouterons deux cases sur la diagonale principale (voir Hy-5 et Hy-6). Les deux cases que nous venons d'ajouter sont bien séparées par $\frac{n-2}{2} = \frac{4m+2-2}{2} = 2m$ cases lesquelles sont situées sur une diagonale du carré hyper-magique. La somme des deux cases que nous venons d'ajouter est donc $\frac{2S}{4m+2}$. Notre figure est alors magique puisque la somme des $4m+2$ cases de la figure est :

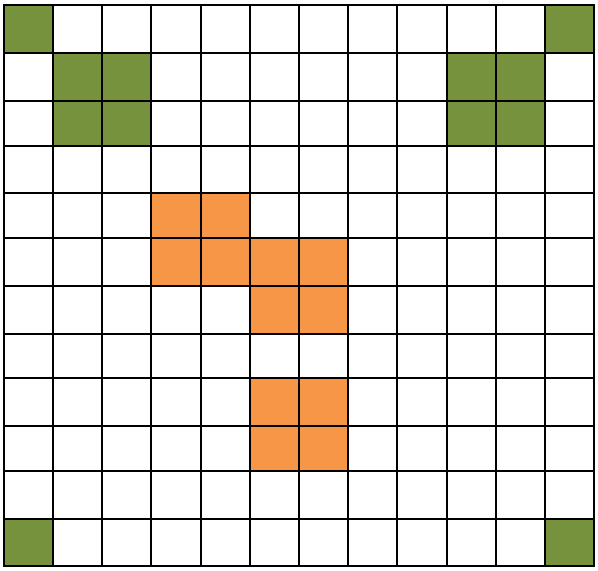
$$m\,\frac{4S}{4m+2} + \frac{2S}{4m+2} = \frac{S(4m+2)}{4m+2} = S$$

Il est clair que ces figures magiques sont des super-figures!!! En terminant, voyons onze autres super-figures dans la structure générale des hyper-magiques d'ordre 12 :









Évidemment, cette liste de super-figures n’est pas exhaustive!!!

7.2 Carrés hyper-magiques d'ordre 6

Il est bien connu que nous ne trouverons pas ici d'hyper-magique normal d'ordre 6 (voir 7.3). Cependant, nous avons trouvé un hyper-magique presque normal d'ordre 6; il est de somme S = 150 (voir plus bas). Nous allons trouver celui qui a la plus petite somme et nous verrons s'il est unique. En imposant à la structure générale des carrés magiques d'ordre 6, les conditions pour que cette structure devienne un hyper-magique, nous trouvons la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 que voici :

$$\begin{array}{ccc}
a & \frac{1}{2}(-a-2b-c+S) & b \\
d & \frac{1}{6}(-3a+6b+3c-6d+S) & a-b+d \\
\frac{1}{6}(-3a+3c-6d+2S) & a-b-c+d+\frac{S}{6} & \frac{1}{6}(-9a+6b+3c-6d+2S) \\
\frac{1}{3}(-3c+S) & \frac{1}{6}(-3a+6b+9c-S) & a-b-c+\frac{S}{3} \\
a+c+d-\frac{S}{3} & \frac{1}{6}(-3a-6b-9c-6d+5S) & b+c+d-\frac{S}{3} \\
\frac{1}{6}(-9a-3c-6d+4S) & a+b+c+d-\frac{S}{2} & \frac{1}{6}(-3a-6b-3c-6d+4S) \\
(1) & (2) & (3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
c & \frac{1}{2}(a-2b-3c+S) & -a+b+c \\
-a-c-d+\frac{2S}{3} & \frac{1}{2}(a+2b+3c+2d-S) & -b-c-d+\frac{2S}{3} \\
\frac{1}{6}(9a+3c+6d-2S) & \frac{1}{6}(-6a-6b-6c-6d+5S) & \frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}+d-\frac{S}{3} \\
\frac{1}{3}(-3a+S) & \frac{1}{6}(3a+6b+3c-S) & \frac{1}{3}(-3b+S) \\
\frac{1}{3}(-3d+S) & \frac{1}{6}(3a-6b-3c+6d+S) & -a+b-d+\frac{S}{3} \\
\frac{1}{2}(a-c+2d) & -a+b+c-d+\frac{S}{6} & \frac{3a}{2}-b-\frac{c}{2}+d \\
(4) & (5) & (6)
\end{array}$$

Les carrés hyper-magiques d'ordre 6 forment un sous-espace vectoriel de dimension 5.

Nous voyons, ci-haut, les 6 colonnes, de gauche à droite, de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6. En utilisant le fichier «Le compte» de MATHEMATICA, nous avons trouvé :

f(S) = 5052

Cela signifie que tous les hyper-magiques d'ordre 6 ont en commun les mêmes 5052 figures magiques!!! Voyons maintenant l'hyper-magique presque normal suivant :

1	47	6	43	5	48
35	17	30	21	31	16
36	12	41	8	40	13
7	45	2	49	3	44
29	19	34	15	33	20
42	10	37	14	38	9

Carré hyper-magique Hy-150

Il est de somme S = 150 et f(150) = 22 154. Qui oserait penser que ce carré hyper-magique renferme 22 154 figures magiques!!!

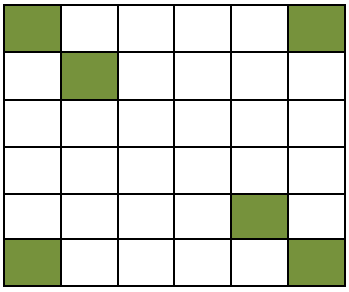
Il est évident que nous n'allons pas illustrer ici les 22 154 figures magiques du carré précédent, ni même les 5052 figures magiques de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6. Nous allons tout de même en présenter quelques-unes :

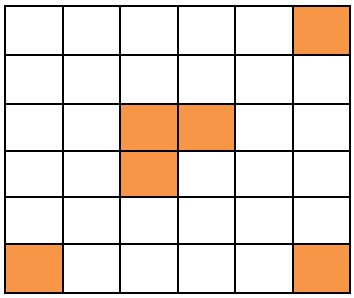
A	B				
C	D				
				E	F
				G	H

Hy-2 (voir 7.1) et ces deux figures sont des super-figures. Montrons d'abord que A B C F G H est une figure magique. Puisque nous sommes dans un hyper-magique, nous savons que :

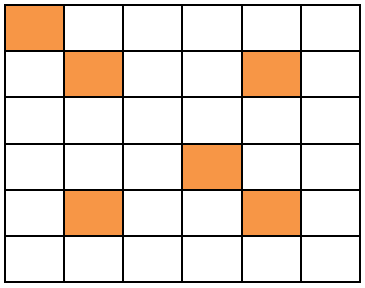
$$A+B+C+F+G+H=(A+B+C+D)+(E+F+G+H)-(D+E)=\frac{2S}{3}+\frac{2S}{3}-\frac{S}{3}=S.$$

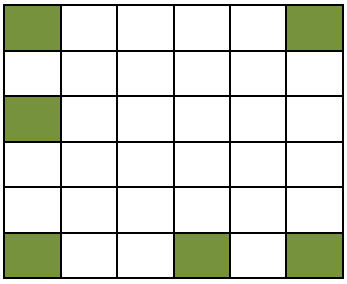
Que ces figures soient des super-figures est tout à fait évident!!!





Voici, ci-haut, deux autres super-figures. Assurez-vous qu'elles sont d'abord magiques.





Et deux autres super-figures.

Le corollaire 7.5 de 7.3 nous apprend que :

Si un carré magique d'ordre pair est normal et pandiagonal, alors l'ordre de ce carré est de la forme n = 4 k où k est un entier > 0.

Donc si l'ordre pair du carré n'est pas un multiple de 4 et si celui-ci est pandiagonal, alors il ne peut pas être normal.

Puisqu'un hyper-magique est toujours pandiagonal, alors il ne peut pas être normal s'il est d'ordre pair non multiple de 4.

Nous entendons souvent dire qu'il n'existe pas de carré magique pandiagonal d'ordre pair non multiple de 4. Ce qui est vrai s'il s'agit d'un carré normal. Nous savons donc qu'il n'existe pas d'hyper-magique normal d'ordre 6 et nous venons de voir qu'il existe au moins deux hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 (celui ci-haut de somme S = 150 et celui présenté dans la galerie de la Partie 1 de cet ouvrage, le carré 22 de somme S = 252).

La somme d'un carré magique normal d'ordre 6 est S = 111. Nous allons trouver un hyper-magique presque normal dont la somme S_* sera la plus petite. Nous aurons alors :

$$111 < S_* \leq 150$$

Dans la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6, nous voyons que S doit être un multiple de 6 si nous voulons un hyper-magique formé d'entiers. Or 111 n'est pas divisible par 6 donc un hyper-magique d'ordre 6 ne peut pas être normal, ce que nous savions déjà. Les seuls presque normaux possibles doivent être de sommes 114, 120, 126, 132, … . Notre programme dans MAPLE nous montre qu'aucun carré hyper-magique presque normal n'existe si $S < 150$. Par contre, il nous donne 288 hyper-magiques presque normaux dont la somme est 150, lesquels se répartissent en trente six groupes de huit équivalents. Vous trouverez ces trente-six hyper-magiques presque normaux primitifs dans la Partie 3, annexe 23, programme 09. Nous vous en présentons quatre sur les trente-six; ce sont donc quatre primitifs :

1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14
5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9

5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9
1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14

17	12	45	19	10	47
35	36	7	29	42	1
16	13	44	20	9	48
31	40	3	33	38	5
21	8	49	15	14	43
30	41	2	34	37	6

49	8	21	43	14	15
2	41	30	6	37	34
45	12	17	47	10	19
7	36	35	1	42	29
44	13	16	48	9	20
3	40	31	5	38	33

Voici le nombre **d'hyper-magiques presque normaux primitifs** d'ordre 6 dont les sommes sont :

S = 150 36 = 36 x 1

S = 156 72 = 36 x 2

S = 162 180 = 36 x 5

S = 168 288 = 36 x 8

S = 174 396 = 36 x 11

S = 180 612 = 36 x 17

S = 186 1116 = 36 x 31

S = 192 1728 = 36 x 48

S = 198 2340 = 36 x 65

S = 204 3348 = 36 x 93

S = 210 4680 = 36 x 130

S = 216 6156 = 36 x 171

L'existence d'un hyper-magique presque normal d'ordre 6 **semble** donc assuré pour toutes les sommes multiples de 6 soit S = 150 + 6k où k est un entier ≥ 0.

Les carrés hyper-magiques constituent une bonne source de super-figures. Voici seize super-figures de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6. Cela signifie que tout hyper-magique issu de cette structure générale possède ces super-figures. Cette liste, bien entendu, n'est pas exhaustive.

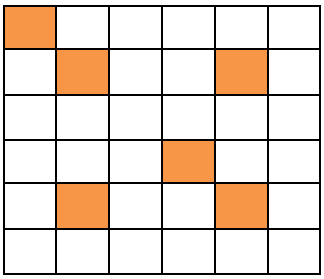


Figure 1

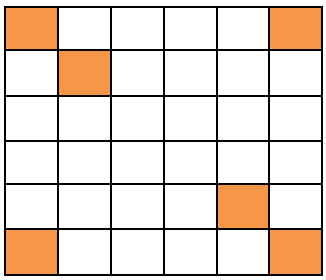


figure 2

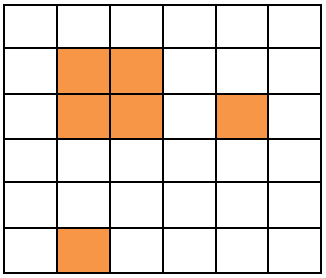


Figure 3

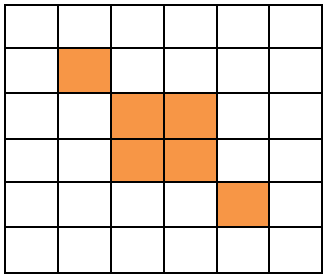


Figure 4

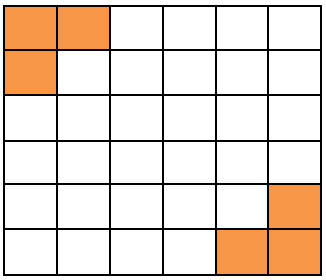


Figure 5

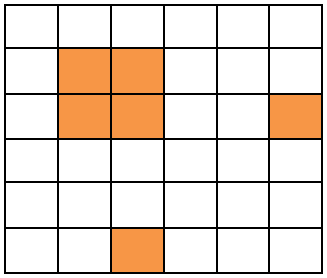


Figure 6

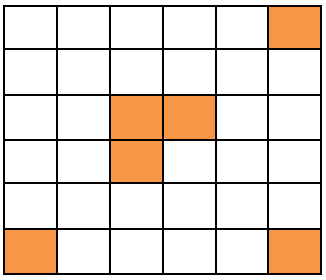


Figure 7

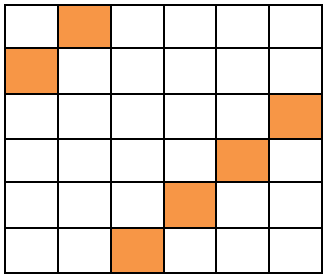


Figure 8

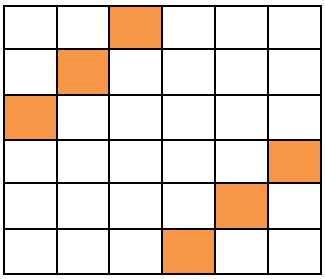


Figure 9

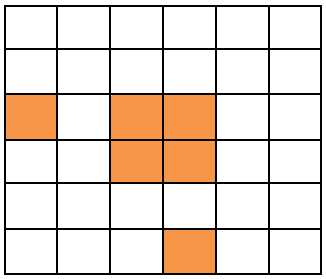


Figure 10

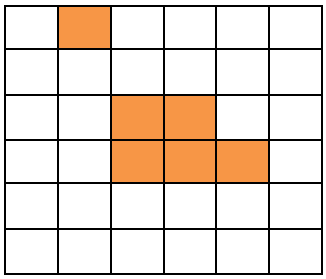


Figure 11

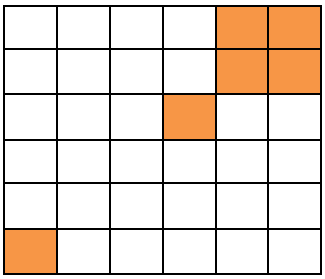


Figure 12

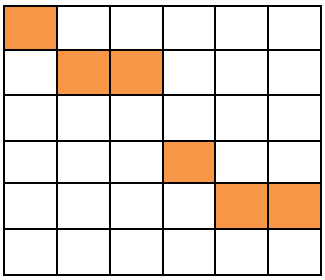


Figure 13

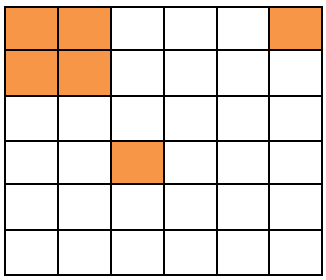


Figure 14

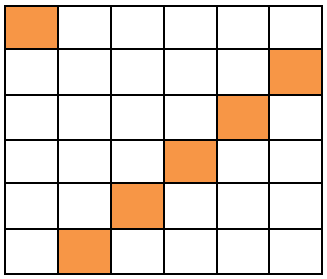


Figure 15

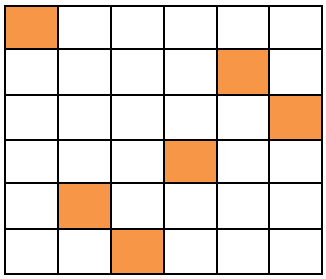
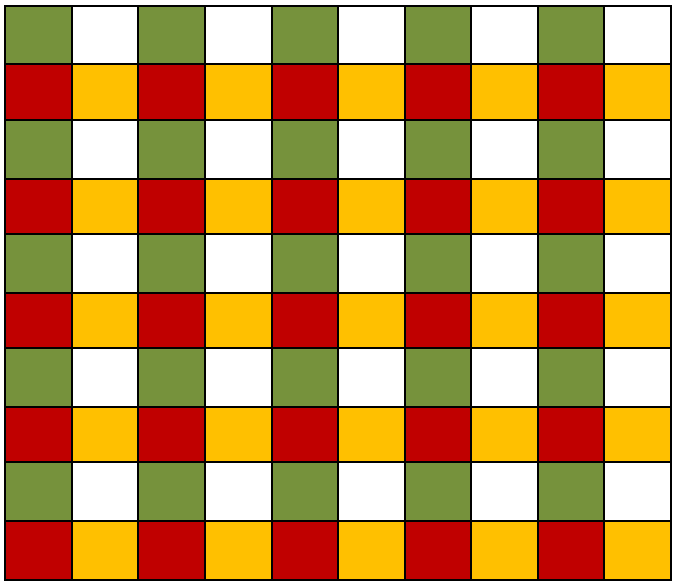


Figure 16

7.3 Condition nécessaire pour avoir un pandiagonal d'ordre pair

Nous allons trouver une condition **nécessaire** pour qu'un carré magique d'ordre pair, **formé d'entiers**, soit pandiagonal.

Considérons M , un carré magique d'ordre $n = 2k$ formé seulement d'entiers. Sa somme magique est S .



Appelons A , la somme des entiers situés dans les cases vertes, B, la somme des entiers situés dans les cases blanches et C , la somme des entiers situés dans les cases rouges. Nous allons numéroter $1, 2, 3, \ldots, 2k$, les rangées de haut en bas et les colonnes de droite à gauche.

La somme des entiers situés dans les cases des rangées impaires, lesquelles contiennent toutes les cases vertes et toutes les cases blanches est $A + B = k\,S$.

La somme des entiers situés dans les cases des colonnes paires, lesquelles contiennent toutes les cases vertes et toutes les cases rouges est $A + C = k\,S$.

Si M est pandiagonal, alors la somme des entiers situés dans les cases des branches des diagonales secondaires qui renferment une case rouge, lesquelles renferment toutes les cases rouges et toutes les cases blanches, est $B + C = k\,S$. En effet, nous avons bien k diagonales secondaires soient la grande et $(k-1)$ brisées.

Donc, si M est pandiagonal, alors nous avons :

$$A+B=A+C=B+C=kS$$

ce qui implique que $A=B=C=\frac{kS}{2}$. Puisque A,B,C sont des entiers, il est clair que kS **doit être pair**; **c'est une condition nécessaire** pour que M formé d'entiers, soit pandiagonal.

Si k est pair, donc n est multiple de 4, alors la condition nécessaire est respectée.

Si k est impair, donc n n'est pas un multiple de 4, alors S doit être pair si nous voulons que la condition nécessaire soit respectée.

Si k *et* S sont impairs, alors la condition nécessaire ne sera pas respectée et M ne pourra pas être pandiagonal.

Considérons k impair. Si M renferme n^2 entiers qui forment la suite arithmétique suivante :

$$a, a+r, a+2r, \ldots, a+(n^2-1)r \text{ où } a \text{ et } r \text{ sont des entiers,}$$

alors nous aurons : $S=[2a+(4k^2-1)r]k.$

Si r est impair, alors S est impair et la condition nécessaire n'est pas respectée donc M ne peut pas être pandiagonal. Il s'ensuit que si les entiers sont consécutifs $(r=1)$, alors M ne sera jamais pandiagonal. Donc si M est normal, il ne pourra pas être pandiagonal.

Si r est pair, alors S est pair et la condition nécessaire est respectée.

Théorème 7.4 :

Soit M, un carré magique de somme S et d'ordre pair $n=2k$, formé de nombres entiers seulement. Alors, une condition nécessaire pour que M soit pandiagonal est que kS soit pair.

Cette condition est nécessaire mais non suffisante. En effet, nous connaissons un carré magique d'ordre 4, de somme 34, formé d'entiers avec kS pair et pourtant, il n'est pas pandiagonal. Pour ce carré, il suffit de prendre un carré magique normal d'ordre 4 parmi les 880 normaux primitifs (voir la Partie 3, annexe 23, programme 01); seulement 48 sont pandiagonaux, donc 832 ne le sont pas. Nous avons vu, au chapitre 5, section 5.5, que l'espace des super-Dürer était le même que l'espace des pandiagonaux lequel est normal d'ordre 384 et en divisant par 8, nous trouvons les 48 primitifs. Voyons maintenant les principales conséquences du théorème 7.4 :

Corollaire 7.5 :

Soit M , un carré magique de somme S et d'ordre pair $n = 2k$, formé de nombres entiers seulement.

1) Si k est pair, alors la condition nécessaire est respectée (n est alors pair multiple de 4). Le carré magique M est un bon candidat pour être pandiagonal.
2) Si k est impair et S est pair, alors la condition nécessaire est respectée (n est pair non multiple de 4). Le carré magique M est alors un bon candidat pour être pandiagonal.
3) Si k *et* S sont impairs, alors $k\,S$ est impair et M ne peut pas être pandiagonal.
4) Si k est impair et M est normal, alors S sera impair donc M ne pourra pas être pandiagonal.
5) Si k est impair et M est pandiagonal, alors M ne peut pas être normal.
6) Si k est impair et M est pandiagonal, alors S est pair.
7) Si k est impair et M renferme n^2 entiers qui forment une suite arithmétique de raison impaire, alors S sera impair donc M ne pourra pas être pandiagonal.
8) Si k est impair et M renferme n^2 entiers consécutifs $(r = 1)$, alors M ne pourra pas être pandiagonal.
9) Si M est un carré magique, normal, pandiagonal et d'ordre pair $n = 2k$, alors k est pair d'où n est pair multiple de 4.

1) Pour k pair, nous connaissons des carrés magiques pandiagonaux d'ordres 4, 8, 12, …, formés d'entiers. [3]
2) Nous connaissons un carré magique pandiagonal d'ordre 6 (k = 3), de somme 150 (voir plus haut). Il est presque normal.
3) Nous connaissons un carré magique d'ordre 6 (k = 3), de somme magique 111. Il n'est pas pandiagonal. Il est normal. Voir « Ordre 6 » dans la Partie 3.
4) Voir le carré magique en 3).
5) Voir le carré magique en 2).
6) Voir le carré magique en 2).
7) Voir le carré magique en 3).
8) Voir le carré magique en 3).
9) Voir le carré 28 dans la partie 1 ou encore un super-Dürer, section 5.5 du chapitre 5 de la partie 2.

Revenons au carré illustré plus haut. Chaque case rouge de la colonne de gauche correspond à une branche d'une diagonale brisée ou grande que nous allons appeler branche paire (puisqu'il y a un nombre pair de cases dans chacune). Ainsi, nous aurons les branches $2, 4, 6, \ldots, 2k$ de haut en bas. Chaque case rouge de la dernière rangée correspond à une branche paire d'une diagonale brisée ou grande. Ainsi, de droite à gauche, nous aurons les branches $2, 4, 6, \ldots, 2k$.

Maintenant, nous voyons bien que la branche notée 2, relative à la colonne de gauche, s'associe à la branche notée $2k-2$, relative à la dernière rangée, afin de donner une diagonale brisée complète. De même pour les autres branches. D'où les k diagonales et M pandiagonal implique $B+C=kS$.

Corollaire 7.6:

Soit M , un carré magique pandiagonal de somme S et d'ordre pair $n=2k$. Alors les $4k^2$ nombres dans M peuvent se regrouper en quatre classes de k^2 nombres tel que la somme des k^2 nombres de chaque classe soit $\frac{kS}{2}$. En référence avec le carré illustré plus haut, les quatre classes sont les nombres situés dans les cases vertes, dans les cases blanches, dans les cases rouges et dans les cases jaunes.

Si les quatre classes ont la même somme, alors il se peut que le carré magique ne soit pas pandiagonal.

Ce dernier corollaire est une caractéristique des carrés magiques pandiagonaux d'ordres pairs. Voyons un exemple. Le carré magique pandiagonal Hy-150 présenté plus haut, donne les quatre groupes suivants :

1	6	5	47	43	48	35	30	31	17	21	16
36	41	40	12	8	13	7	2	3	45	49	44
29	34	33	19	15	20	42	37	38	10	14	9

Ces quatre groupes sont de somme 225.

Puis notons que les résultats obtenus ici sont basés sur une démonstration de C. Planck (1919) reprise par Kathleen Ollerenshaw et David Brée, section 1.3.3 de [3] et par nous.

Terminons avec cette question : **pourquoi n'avons-nous pas de carré hyper-magique d'ordre impair?**

Par exemple, un carré magique d'ordre 5 pourrait-il être hyper-magique?

				a
				b
				c

1) D'abord, selon la définition d'un hyper-magique, il faut que $\frac{n-2}{2}$ soit un entier qui est le nombre de cases qui en séparent deux autres. Il est donc évident que n doit être un entier pair.
2) Pour les sous-carrés d'ordre 2, quelle en serait la somme? Si c'est $\frac{4S}{n} = \frac{4S}{5}$, alors il faudra que la somme des deux cases qui contiennent a et b, soit $\frac{2S}{5}$.
3) Nous aurions alors : a + b = 2S/5 et b + c = 2S/5 d'où a = c donc une répétition, ce que nous ne voulons pas. N'oublions pas notre objectif qui est de construire des carrés magiques normaux ou presque normaux.
4) Si nous exigions que dans une même colonne, deux cases consécutives totalisent toujours $\frac{2S}{5}$, alors de la même façon, nous aurions des répétitions.
5) Voilà pourquoi nous ne prendrons jamais un carré d'ordre impair pour en faire un hyper-magique.

7.4 Problèmes

1) Démontrez le théorème 7.2, 2) M est pandiagonal.

2) En regardant la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6, montrez qu'une condition nécessaire pour que le carré renferme 36 entiers est que S soit un multiple de 6. Cette condition est-elle suffisante?

3) Montrez qu'un hyper-magique d'ordre 6, presque normal, a une somme magique $S \geq 111$.

4) Généralisez le résultat précédent pour tous les hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 m + 2.

5) Ici, les conditions du théorème 7.1 sont respectées. Les nombres de la première rangée sont notés, de gauche à droite par a_i, où l'entier i vérifie $1 \leq i \leq n$. Les nombres de la dernière rangée sont notés, de gauche à droite par b_i, où l'entier i vérifie $1 \leq i \leq n$. Montrez que la somme des nombres $a_i + a_{i+1} + b_i + b_{i+1} = \frac{4S}{n}$ avec $1 \leq i \leq n-1$. Montrez que nous avons le même résultat avec la première et la dernière colonne.

6) Vous affirmez être en possession d'un hyper-magique d'ordre 6 et de somme $S = 123$, lequel renferme 36 nombres entiers. Je vous dis que cela est impossible. Cependant, je constate que votre carré est d'ordre 6, qu'il renferme bien 36 entiers, qu'il est bien magique et que sa somme est bien $S = 123$. Que dois-je conclure?

7) En référence avec le septième résultat du corollaire 7.5, si k est impair et M renferme n^2 entiers qui forment une suite arithmétique de raison paire, alors que pouvons-nous dire sur la pandiagonalité de M ?

8) Démontrez qu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial.

9) Démontrez que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont associatifs.

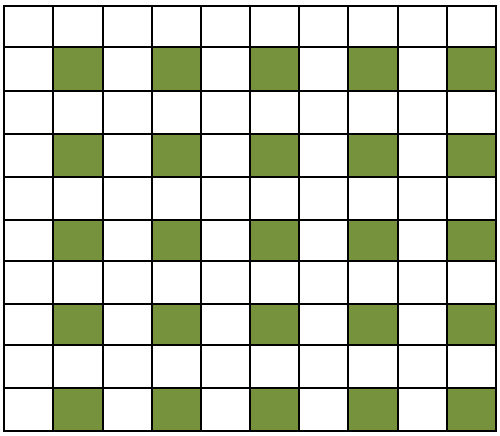
10) Démontrez que dans un carré magique associatif d'ordre impair, la case centrale renferme toujours le nombre $\frac{S}{n}$.

11) Voici un carré hyper-magique d'ordre 20. Les nombres dans les cases servent à les numéroter. Montrez que les deux figures suivantes sont des super-figures:

1																			
		2	3									4	5						
		6					7												
												8							
									9	10									
		11					12		13	14									
										15									
		16	17									18	19						
		20																	

12) Trouvez soixante-quatre entiers > 0, tous différents, qui forment un carré magique. De plus, ces soixante-quatre entiers peuvent être regroupés en quatre classes de seize entiers telles que la somme des entiers de chaque classe soit la même.

13) Le carré suivant est un carré magique pandiagonal d'ordre 10 dont la somme magique est S = 960. Trouvez la somme des nombres situés dans les cases vertes.



14) Soit M, un carré magique d'ordre 18 formé de 324 entiers et dont la somme magique est $S = 935$. Montrez que ce carré ne peut pas être hyper-magique.

15) Complétez la démonstration du théorème 7.1 : nous pouvons alors déduire que dans ce carré, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordres pairs (2, 4, 6, …, 2k) est égale à $\frac{4S}{n}$.

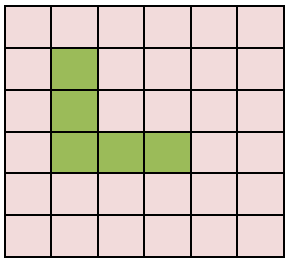
16) À partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 6 (voir Partie 3, annexe 22, programme 8)), trouvez :

   a) Une structure générale des hyper-magiques et assurez-vous qu'elle soit bien équivalente à celle de 7.2.
   b) Une structure générale des carrés magiques pandiagonaux et la dimension du sous-espace de ceux-ci?
   c) À partir de la structure générale des carrés magiques pandiagonaux trouvée en b), la structure générale des hyper-magiques et montrez qu'elle est équivalente à celle trouvée en a).
   d) En déduire que tous les hyper-magiques d'ordre 6 sont pandiagonaux.
   e) En déduire que l'espace des hyper-magiques d'ordre 6 est un sous-espace de l'espace des pandiagonaux d'ordre 6.

17) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 peut-il contenir trente-six entiers consécutifs?

18) Pourquoi un carré magique normal d'ordre 4m + 2 ne peut jamais être pandiagonal?

19) Soit A, un carré magique d'ordre $n \geq 3$, non trivial et associatif. Montrez que le plus petit nombre du carré et le plus grand, se trouvent dans des cases symétriques par rapport au centre du carré.
20) Soit M, un carré hyper-magique d'ordre 6. Montrez que la somme des neuf nombres situés dans tout sous-carré d'ordre 3 est toujours la même soit $\frac{3S}{2}$.
21) Montrez qu'un hyper-magique presque normal d'ordre 6 ne peut pas être associatif.
22) Montrez que :
    a) Tous les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6 formés de 36 entiers impairs ont une somme magique de la forme $6m$ où m est un entier impair.
    b) Tous les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6 formés de 36 entiers pairs ont une somme magique de la forme $6m$ où m est un entier pair.
    c) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé de 36 entiers et de somme S = 156 doit contenir des entiers pairs.
    d) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé de 36 entiers et de somme S = 150 doit contenir des entiers impairs.
    e) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé d'entiers avec au moins un pair et au moins un impair a une somme de la forme $6m$ où m est un entier pair ou impair. Indice : Voir dans la Partie 3, annexe 22, programme 11).
23) Dans un carré hyper-magique d'ordre 6, considérons l'équerre suivante :



    a) Montrez que quelle que soit la position de celle-ci, la somme des cinq nombres qu'elle contient est toujours $\frac{5S}{6}$.
    b) Dans 7.2, vérifiez avec le carré Hy-150, que la somme de toute équerre est bien $\frac{5S}{6} = 125$.

24)

1	47	6	43	5	48
35	17	30	21	31	16
36	12	41	8	40	13
7	45	2	49	3	44
29	19	34	15	33	20
42	10	37	14	38	9

Ce carré renferme trente-six nombres tous différents. Pour chacun de ces nombres, je décide de placer dans une enveloppe une somme d'argent égale à ce nombre fois 10. Ainsi, l'enveloppe qui correspond au nombre 1 renferme $10, celle qui correspond au nombre 47 renferme $470 et ainsi de suite. La somme totale de toutes ces enveloppes est de $ 9000 soit la somme que je veux payer à quatre ouvriers qui ont fait un travail pour moi qui a duré trois semaines.

Les quatre ouvriers demandaient $2000 chacun mais j'ai décidé de donner $250 de plus à chacun pour travail extrêmement bien fait tout en leur proposant l'énigme des enveloppes.

Je leur ai dit ceci : voici trente-six enveloppes qui renferment un montant d'argent clairement indiqué sur chacune. Vous devez faire quatre groupes de neuf enveloppes et il doit y avoir $2250 dans chaque groupe, soit le montant que vous recevrez. Comment allez-vous procéder?

Tous les ouvriers ont accepté le jeu. J'ai même montré le carré ci-haut en expliquant comment j'ai placé l'argent dans les enveloppes. Mais après plus d'une heure, les quatre groupes de neuf enveloppes n'étaient toujours pas formés!!!

J'ai donc proposé de construire les quatre groupes qui ont été faits en moins de 90 secondes. Comment ai-je fait?

J'ai oublié de vous dire qu'un des ouvriers m'a demandé : votre carré ne serait-il pas un carré magique? J'ai répondu oui et il est même pandiagonal !!!

25) Soit donné un hyper-magique de somme S d'ordre $n = 2k$ et tous ses sous-carrés d'ordre k. Nous pensons que la somme des nombres de chaque sous-carré d'ordre k est $k\,\frac{S}{2}$ (**conjecture**).Voici quelques résultats :

Ordre 2 = 2x1 : nous trouvons $\frac{S}{2}$.

Ordre 4 = 2x2 : nous trouvons $2\,\frac{S}{2}$.

Ordre 6 = 2x3 : nous trouvons $\frac{3S}{2}$. Voir problème 20) ci-haut.

Ordre 8 = 2x4 : nous trouvons $4\,\frac{S}{2}$.

Ordre 10 = 2x5 : nous trouvons $\frac{5S}{2}$.

Ordre 12 = 2x6 : nous avons $6\,\frac{S}{2}$.

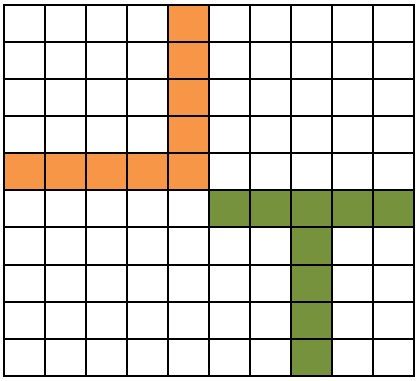
Ordre 14 = 2x7 : avons-nous $\frac{7S}{2}$?

Ordre $4m$ = 2x2m : nous avons $2m\,\frac{S}{2}$.

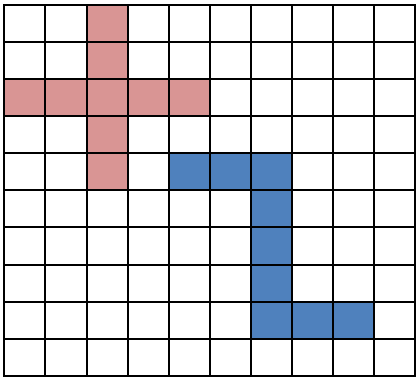
Ordre $4m+2$: avons-nous $(2m+1)\,\frac{S}{2}$? Voilà ce qu'il faut prouver!!!

Nous avons construit une structure générale des carrés hyper-magiques d'ordre 10 et nous avons constaté que la somme des vingt-cinq nombres de chaque sous-carré d'ordre 5 est bien $\frac{5S}{2}$. Vous la trouverez dans l'annexe 16. Nous aimerions construire une structure générale des hyper-magiques d'ordre 14 et voir si $\frac{7S}{2}$ sera notre résultat (projet à venir)!!! Mais ça ne sera qu'un renforcement de la conjecture. La preuve restera à faire pour l'entier impair $k \geq 7$!!!

26) Soit donné un hyper-magique d'ordre 10 et de somme S. Montrez que la somme des cases de l'équerre est toujours $\frac{9S}{10}$ et qu'il en est de même pour la somme des cases de la croix, du T et du Z, peu importe la position de chacun. (Voir le problème 25) ci-haut).



L'équerre et le T



La croix et le Z

Notez que l'équerre, le T, la croix et le Z sont formés de neuf cases.

Ce sont quatre nouvelles propriétés des hyper-magiques d'ordre 10. Pouvez-vous en trouver d'autres?

27) Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un hyper-magique d'ordre 6 soit formé de 36 entiers.

Remarque :

Le dernier corollaire n'exige pas que le carré magique soit formé seulement d'entiers. En fait, M pandiagonal implique que les quatre classes sont de même somme c'est-à-dire la classe formée des cases vertes, celle formée des cases blanches, celle formée des cases rouges et celle formée des cases jaunes. **C'est la première condition nécessaire pour avoir la pandiagonalité.**

Si les nombres du carré magique sont tous entiers, alors nous avons une autre condition nécessaire pour que M soit pandiagonal à savoir que $k\,S$ soit pair.

Par exemple, si M est un carré magique d'ordre pair et si la somme des nombres situés dans toutes les cases d'une même couleur est différente de la somme des nombres situés dans toutes les cases d'une même autre couleur, alors le carré ne pourra pas être pandiagonal.

8. Des carrés magiques spectaculaires

8.1 Introduction

Nous venons de définir, au chapitre précédent, les carrés ultra-magiques et hyper-magiques sans pour autant montrer comment les construire.

Un carré ultra-magique non trivial d'ordre 3 n'existe pas. En effet, celui-ci est associatif (problème 9 de 7.4) mais n'est pas pandiagonal (problème 8 de 7.4).

Les ultra-magiques d'ordre 4 non triviaux existent mais aucun n'est normal et même, aucun n'est presque normal. Pour montrer cela, nous partons de la structure générale des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4 qui est exactement la même que celle des super-Dürer d'ordre 4, (voir section 5.5) lesquels sont des Dürer. Si nous rendons associative cette structure, nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} a & \frac{S}{2}-a & c & \frac{S}{2}-c \\ \frac{S}{2}-a & a & \frac{S}{2}-c & c \\ \frac{S}{2}-c & c & \frac{S}{2}-a & a \\ c & \frac{S}{2}-c & a & \frac{S}{2}-a \end{pmatrix}$$

La section 5.9 nous montre comment rendre associatif un Dürer. C'est ce que nous avons fait pour avoir la structure ci-haut.

Un ultra-magique d'ordre 4 a obligatoirement cette forme. Il est clair que ce carré magique n'est ni normal, ni presque normal. Nous avons au mieux quatre nombres différents, chacun apparaissant quatre fois.

Pour les ultra-magiques d'ordre 5, la section 6.3 nous présente une structure générale laquelle permet de trouver les 128 ultra-magiques normaux d'ordre 5 qui existent. Tous les ultra-magiques d'ordre 5 ont en commun 362 figures magiques.

Pour les ultra-magiques d'ordres supérieurs à 5, le travail sera plus ardu. Il faudra partir de la structure générale et imposer sur celle-ci les conditions nécessaires pour avoir la structure des carrés magiques à la fois associatifs et pandiagonaux. Cette structure renfermera un nombre de

variables qui augmentera avec l'ordre du carré. De là la grande difficulté lorsque nous partons de la structure générale. Comment trouver la structure des ultra-magiques d'ordre 2500? Pouvons-nous y arriver par d'autres moyens?

Quant aux hyper-magiques, la difficulté est la même lorsque nous voulons les construire et en particulier, lorsque l'ordre du carré est très grand.

Nous allons construire dans les deux sections suivantes, deux carrés magiques d'ordre 8 dont l'un sera un hyper-magique. Pour ce faire, nous partirons de la structure générale des carrés magiques d'ordre 8, laquelle renferme 48 variables.

Les cases du premier carré d'ordre 8 que nous allons construire ici sont numérotées de gauche à droite et de haut en bas avec les entiers de 1 à 64 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \\ 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 \end{pmatrix}$$

Nous définissons un petit carré d'ordre 2 contenu dans le grand carré à l'aide des numéros qui identifient les quatre cases du petit carré. Par exemples : nous pouvons parler du carré (1 ; 2 ; 9 ; 10), (2 ; 3 ; 10 ; 11), (10 ; 11 ; 18 ; 19), (37 ; 38 ; 45 ; 46), … Il y en a en tout 49.

Nous voulons que la somme des quatre cases de chaque carré d'ordre 2 soit égale à 4S/n. Pour ce faire, nous allons additionner les expressions situées dans chaque carré d'ordre 2. Nous commencerons avec le carré (1 ; 2 ; 9 ; 10) et nous poserons la somme des expressions des quatre cases égale à 4S/n = S/2. De cette équation, nous allons isoler une variable et la remplacer dans la structure générale G des carrés magiques d'ordre 8, par son expression.

Nous obtiendrons alors une nouvelle structure générale G_1 qui renfermera 47 variables. Cette nouvelle structure générale donnera tous les carrés magiques d'ordre 8 avec la somme des cases du carré (1 ; 2 ; 9 ; 10) égale à S/2. Nous allons continuer jusqu'à ce que les 49 carrés d'ordre 2 aient pour somme S/2. Le nombre de variables aura considérablement diminué lorsque nous atteindrons notre dernière nouvelle structure générale.

8.2 Des carrés magiques d'ordre 8 très spéciaux : les Gauss

Le carré magique que nous allons construire ici est le carré 23 de la partie 1. Ses 49 petits carrés d'ordre 2 ont tous pour somme 4S/n = S/2. Le théorème 7.1 nous apprend que :

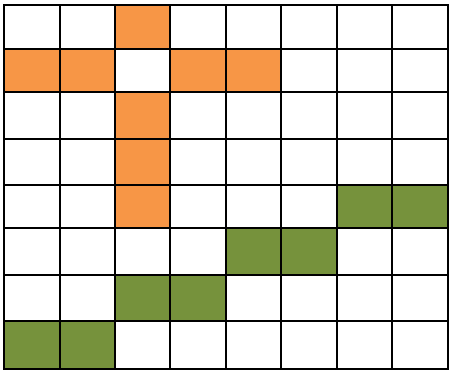
a) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 4 situés dans le grand carré est S/2.
b) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 6 situés dans le grand carré est S/2.
c) La somme des 4 coins du carré d'ordre 8 est S/2.

Le chapitre 3 de la partie 2 nous montre comment construire la structure générale des carrés magiques d'ordre 8 dont la dimension est 48. Nous partirons de cette structure générale pour construire le carré 23. Quand tous les petits carrés d'ordre 2 seront de somme S/2, nous exigerons la pandiagonalité. Nous ferons alors la somme des expressions dans chaque diagonale brisée, il y en a 14, et nous poserons cette somme égale à S. Nous isolerons une variable et nous lui substituerons son expression partout où cette variable se trouve dans la structure générale. Ainsi nous aurons une nouvelle structure générale avec une variable en moins. C'est ce que nous avons fait pour que les 49 petits carrés d'ordre 2 aient pour somme S/2 et de 48 variables, nous sommes passés à 13 variables.

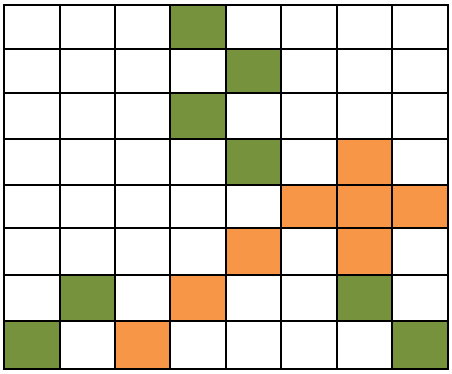
Le sous-espace V des carrés magiques d'ordre 8 tel que leurs 49 petits carrés d'ordre 2 ont pour somme S/2, est donc de dimension 13.

En voulant obtenir la pandiagonalité, nous avons eu la surprise suivante : tous les carrés magiques de V sont déjà pandiagonaux!!! La somme des expressions de chaque diagonale brisée était égale à S!!! Pourquoi? (Voir problème 24 de 8.6).

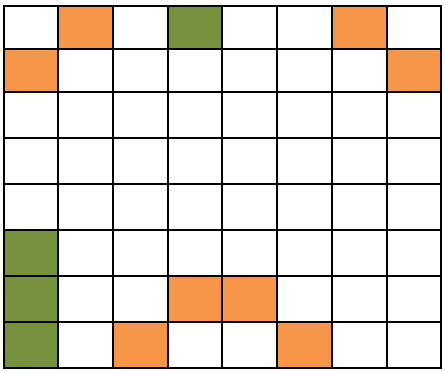
Cependant, nous avons obtenu un **sous-espace de dimension 3** (**celui des Gauss**) de V en exigeant d'avoir les cinq figures magiques suivantes dans la structure générale de V :

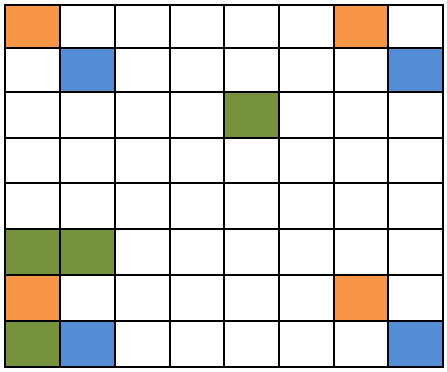


Avion (orangé) et escalier (vert)



Cerf-volant (orangé) et lampe (vert)





plus les cinq demi-figures de sommes S/2 dont deux sont en vert et dans le dernier carré à droite, nous avons les quatre sommets de trois carrés d'ordre 7 (nous en avons illustré deux, l'un en orangé, l'autre en bleu).

Quant au quatrième carré d'ordre 7, la somme de ses quatre coins était déjà S/2. Ainsi, nous avons pu éliminer dix variables dans la structure générale de V et obtenir la structure générale à trois variables que voici :

$\mathrm{a1}$	$-2\mathrm{a1}-5\mathrm{a3}+S$	$\mathrm{a3}$	$-\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S$
$-2\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$3\mathrm{a1}-\frac{S}{4}$	$-\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$2\mathrm{a1}+\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$
$-4\mathrm{a1}-11\mathrm{a3}+2S$	$3\mathrm{a1}+6\mathrm{a3}-S$	$-5\mathrm{a1}+2(-5\mathrm{a3}+S)$	$4\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-S$
$-\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$2\mathrm{a1}+13\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$	$-9\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$\mathrm{a1}+14\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$
$5\mathrm{a1}+8\mathrm{a3}-\frac{3S}{2}$	$-6\mathrm{a1}-13\mathrm{a3}+\frac{5S}{2}$	$4\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}-\frac{3S}{2}$	$-5\mathrm{a1}-14\mathrm{a3}+\frac{5S}{2}$
$11\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$	$\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$	$\mathrm{a1}+10\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$	$-5\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$
$-2\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$	$-3\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$2\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$
$3\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\frac{3S}{4}$	$-2\mathrm{a1}+\mathrm{a3}+\frac{S}{4}$	$4\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}-\frac{3S}{4}$	$-3\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+\frac{S}{4}$

Ce sont les quatre premières colonnes de gauche à droite.

$\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$3\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$2\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$	$-\mathrm{a1}-4\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$
$-2\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}$	$\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+S$	$-3\mathrm{a1}-4\mathrm{a3}+S$	$2\mathrm{a1}-\mathrm{a3}$
$-4\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+\frac{7S}{4}$	$5\mathrm{a1}+14\mathrm{a3}-\frac{9S}{4}$	$-3\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$	$4\mathrm{a1}+7\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$
$-\mathrm{a1}-10\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$5\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$	$-2\mathrm{a1}-17\mathrm{a3}+\frac{5S}{2}$	$\mathrm{a1}+12\mathrm{a3}-\frac{3S}{2}$
$5\mathrm{a1}+10\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$	$-4\mathrm{a1}-5\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$6\mathrm{a1}+17\mathrm{a3}-\frac{11S}{4}$	$-5\mathrm{a1}-12\mathrm{a3}+\frac{9S}{4}$
$9\mathrm{a3}-S$	$-\mathrm{a1}+2(-7\mathrm{a3}+S)$	$-\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}$	$-7\mathrm{a3}+S$
$-2\mathrm{a1}-7\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$3\mathrm{a1}+12\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$	$\frac{1}{4}(-4\mathrm{a1}+S)$	$2\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-\frac{3S}{4}$
$3\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$	$-4\mathrm{a1}-7\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$2\mathrm{a1}-5\mathrm{a3}+\frac{S}{2}$	$\frac{1}{2}(-6\mathrm{a1}+S)$

Ce sont les quatre suivantes de gauche à droite.

Tous les carrés magiques issus de cette structure générale sont appelés des Gauss.

Un **Gauss** est donc un carré magique **d'ordre 8** qui possède les caractéristiques suivantes :

1) Ses 49 petits carrés d'ordre 2 ont tous pour somme S/2.
2) Il possède les cinq figures magiques illustrées ci-haut.
3) Il possède les cinq demi-figures illustrées ci-haut, de sommes S/2.

Tous les Gauss proviennent de la structure générale ci-haut.

De plus, ils possèdent tous les propriétés suivantes :

1) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 2 contenus dans le grand carré est S/2.
2) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 4 contenus dans le grand carré est S/2.
3) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 6 contenus dans le grand carré est S/2.
4) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 7 contenus dans le grand carré est S/2.
5) La somme des 4 coins du carré d'ordre 8 est S/2.
6) Ils sont tous pandiagonaux.

Un Gauss peut-il être normal. La réponse est non. En effet, un normal d'ordre 8 a pour somme 260. Donc nous avons posé dans la structure générale des Gauss, S = 260 puis nous avons donné aux variables a1 et a3, les valeurs entières de 1 à 64. Des 64x64 carrés obtenus, aucun n'était normal.

Cependant, nous avons trouvé des Gauss presque normaux. La structure générale nous montre que si S est un multiple de 4 et que a1 et a3 prennent des valeurs entières, alors les 64 nombres du Gauss seront tous des entiers.

Voici maintenant trois Gauss presque normaux dont la somme est S = 556. Nous savons qu'un Gauss presque normal aura une somme S > 260. En fait, les sommes possibles pour un Gauss presque normal sont :

264 ; 268 ; 272 ; 276 ; … ; 556 ; …

Nous allons tenter de trouver le Gauss presque normal dont la somme est la plus petite. De plus, de trouver le nombre de Gauss presque normaux qui ont cette somme. Allons-y pour nos trois premiers Gauss presque normaux :

57	67	75	49	68	86	94	60
122	32	104	50	111	13	85	39
59	65	77	47	70	84	96	58
38	116	20	134	27	97	1	123
51	73	69	55	62	92	88	66
130	24	112	42	119	5	93	31
45	79	63	61	56	98	82	72
54	100	36	118	43	81	17	107

Ce Gauss est déterminé par a1 = 57, a3 = 75 et S = 556. C'est le carré 23 de la partie 1. Nous avons illustré ici deux figures magiques et une demi-figure qui caractérisent les Gauss : l'avion en orangé, l'escalier en vert et les quatre coins d'un carré d'ordre 7 en bleu.

49	88	74	63	58	83	69	72
133	8	108	33	124	13	113	24
102	35	127	10	111	30	122	19
54	87	29	112	45	92	34	103
3	134	28	109	12	129	23	118
119	22	94	47	110	27	99	38
70	67	95	42	79	62	90	51
26	115	1	140	17	120	6	131

Ce Gauss est déterminé par a1 = 49, a3 = 74 et S = 556. Nous avons illustré deux figures magiques qui caractérisent les Gauss : le cerf-volant en orangé et la lampe en vert.

49	83	75	57	60	86	78	68
138	8	112	34	127	5	109	23
91	41	117	15	102	44	120	26
46	100	20	126	35	97	17	115
11	121	37	95	22	124	40	106
130	16	104	42	119	13	101	31
61	71	87	45	72	74	90	56
30	116	4	142	19	113	1	131

Ce Gauss est déterminé par a1 = 49, a3 = 75 et S = 556. Nous avons illustré une figure magique en orangé et une demi-figure en vert qui caractérisent les Gauss; de plus, une diagonale brisée en bleu.

Nous avons construit un programme dans MAPLE intitulé « Les meilleurs Gauss » lequel nous permet de trouver tous les Gauss presque normaux de somme donnée (voir dans la Partie 3, annexe 23, programme 34). Pour S qui varie de 260 à 384 , nous n'avons trouvé aucun Gauss presque normal . Cela montre d'une autre façon qu'un Gauss normal n'existe pas.

Pour S = 556, nous avons trouvé 44 Gauss presque normaux dont les trois ci-haut. Maintenant, qu'arrive-t-il avec S = 388? Nous trouvons seulement deux Gauss de cette somme et ce sont les deux meilleurs Gauss presque normaux car de plus petite somme. Nous allons les illustrer un peu plus loin. Mais d'abord, voyons ce tableau qui indique le nombre de Gauss presque normaux pour une somme donnée : colonne de gauche, la somme et colonne de droite, le nombre de Gauss presque normaux ayant cette somme :

388	2	448	3
392	0	452	11
396	3	456	4
400	0	460	12
404	3	556	44
408	1	700	163
412	5	800	126
416	1	900	357
420	6	1000	267
424	1	1100	605
428	7	1200	488
432	2	2000	1989
436	8	3000	5259
440	2	4000	10088
444	8	10000	71675

Tableau G1

Les deux carrés magiques suivants sont les deux meilleurs Gauss presque normaux. Ils ont la plus petite somme S = 388 et sont primitifs. Tous les autres Gauss presque normaux ont une somme S > 388.

34	60	52	42	41	59	51	49
95	5	77	23	88	6	78	16
68	26	86	8	75	25	85	15
35	65	17	83	28	66	18	76
4	90	22	72	11	89	21	79
87	13	69	31	80	14	70	24
46	48	64	30	53	47	63	37
19	81	1	99	12	82	2	92

a1 = 34 a3 = 52 S = 388

35	63	51	47	40	56	44	52
88	8	72	24	83	15	79	19
75	23	91	7	80	16	84	12
42	54	26	70	37	61	33	65
1	97	17	81	6	90	10	86
76	20	60	36	71	27	67	31
53	45	69	29	58	38	62	34
18	78	2	94	13	85	9	89

a1 = 35 a3 = 51 S = 388

Tous les Gauss possèdent également la propriété suivante : dans chaque rangée, de gauche à droite, additionnons les nombres des cases 1 et 2, puis 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8. Nous aurons alors le tableau suivant :

X	X	Y	Y
Y	Y	X	X
X	X	Y	Y
Y	Y	X	X
X	X	Y	Y
Y	Y	X	X
X	X	Y	Y
Y	Y	X	X

Tableau G2

où X égale la somme des cases 1 et 2 et Y égale la somme des cases 5 et 6. Pour démontrer ce résultat, nous irons dans la structure générale des Gauss et trouverons la somme des cases 1 et 2, puis 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8 et ce, dans les deux premières rangées. Cela nous donne :

$-a1-5a3+S$	$-a1-5a3+S$	$a1+5a3-S/2$	$a1+5a3-S/2$
$a1+5a3-S/2$	$a1+5a3-S/2$	$-a1-5a3+S$	$-a1-5a3+S$

En posant $X=-a1-5a3+S$ et $Y=a1+5a3-S/2$ et sachant que la somme des quatre cases de tous les carrés d'ordre 2 donne S/2, nous déduisons le tableau ci-haut.

Poursuivons en disant que le tableau G1 **laisse croire** qu'il existe seulement trois sommes (408, 416 et 424) qui correspondent à un seul Gauss presque normal.

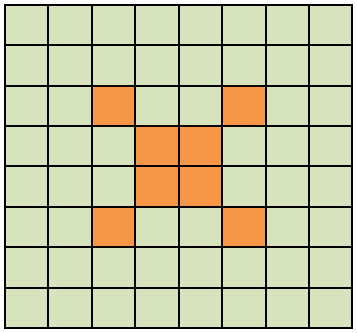
Le tableau montre également qu'il n'existe aucun Gauss presque normal ni de somme 392, ni de somme 400. Il laisse croire que pour les sommes plus grandes que 400, il existe au moins un Gauss presque normal.

Théorème 8.1 :

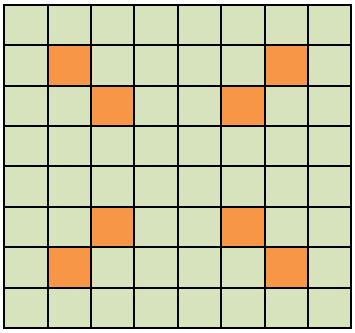
1) Il n'existe aucun Gauss normal.
2) Si G est un Gauss presque normal de somme S , alors $S \geq 388$.
3) Il n'existe que deux Gauss presque normaux de somme $S=388$.

Ce sont les deux meilleurs Gauss presque normaux!!! Ils sont primitifs.

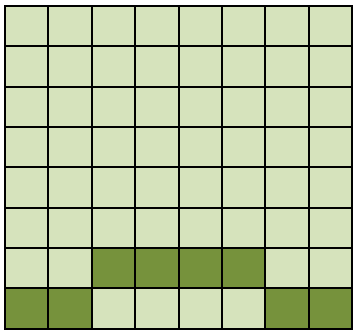
La structure générale des Gauss possède de très belles figures dont certaines sont des super-figures. En voici quelques-unes :



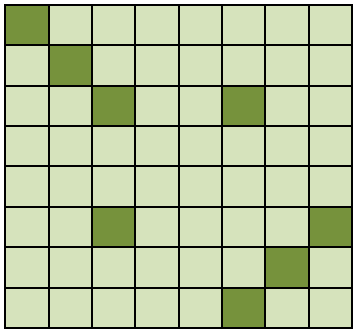
G-1



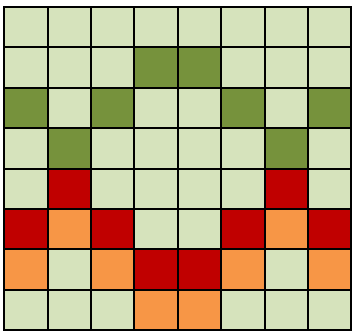
G-2



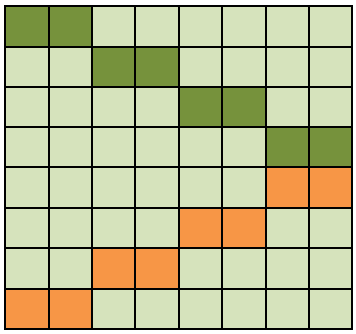
G-3



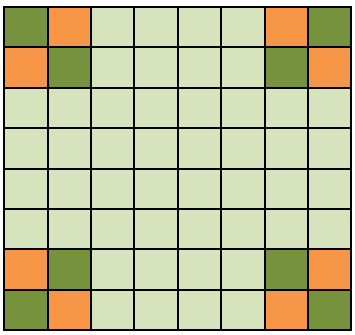
G-4



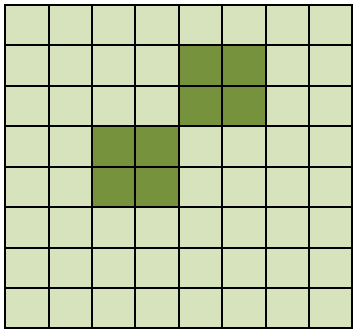
G-5



G-6



G-7



G-8

Les propriétés des Gauss nous permettent de voir que G-1, G-2, G-8 ainsi que la figure verte de G-7 sont des super-figures de la structure générale des Gauss.

Dans G-7, la figure en orangé est aussi une super-figure des Gauss (problème 10 de 8.6).

Il est remarquable que G-3 et G-4 soient des super-figures de la structure générale des Gauss!!!

Les trois figures de G-5 sont des figures magiques mais ne sont pas des super-figures. La figure verte est la rotation de 180°de la figure en orangé (ou de la figure rouge). Si nous déplaçons la figure en orangé, parallèlement à elle-même (nous pourrions avoir, par exemple, la figure rouge), alors la nouvelle figure (la figure rouge, par exemple), est toujours une figure magique. Il en est de même de la figure verte. Ce sont des figures magiques de la structure générale des Gauss.

Dans G-6, l'escalier en orangé est une figure magique de la structure générale, même si nous la déplaçons verticalement (problème 11 de 8.6). Le problème 12 de 8.6 montre que l'escalier en vert est aussi magique même si nous la déplaçons verticalement.

8.3 Les hyper-magiques-alpha

Rappelons d'abord ce qu'est un hyper-magique (chapitre 7) :

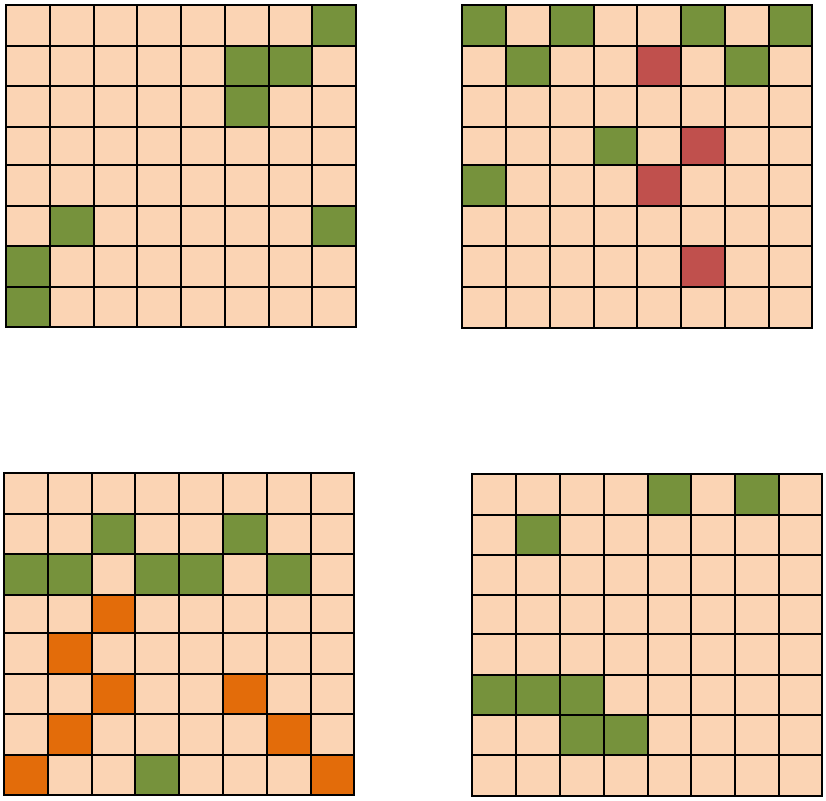
Un carré magique est un **hyper-magique** si et seulement si :

a) Le carré est d'ordre pair.

b) Chaque fois que nous prenons un petit carré d'ordre 2 dans le carré, la somme de ses quatre cases est toujours $\frac{4S}{n}$.

c) Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées de $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

Un **hyper-magique-alpha** est un hyper-magique **d'ordre 8** qui renferme les cinq figures magiques et la demi-figure magique suivantes (de somme S/2) :



Pour construire la structure générale des hyper-magiques-alpha, nous allons partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 8 avec les 49 petits carrés d'ordre 2 de somme S/2, laquelle représente le sous-espace V de la section 8.2 précédente. V étant de dimension 13.

Puis nous allons exiger que la condition c) soit respectée :

Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées de $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

Ainsi nous ferons disparaître quatre variables pour obtenir la structure générale des hyper-magiques d'ordre 8, de dimension 9.

En imposant les 5 figures et la demi-figure ci-haut, nous obtiendrons la structure générale des **hyper-magiques-alpha** laquelle représente un sous-espace de dimension 3. La voici :

$\mathrm{a1}$	$\frac{1}{4}(-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}+S)$	$\mathrm{a3}$	$\frac{1}{4}(2\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{20}(-12\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{10}(\mathrm{a1}-7\mathrm{a3}+2S)$	$\frac{1}{20}(8\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{10}(-9\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+2S)$
$\frac{1}{15}(13\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-22\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+11S)$	$\frac{1}{15}(-2\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(38\mathrm{a1}+11(-6\mathrm{a3}+S))$
$\frac{1}{60}(-44\mathrm{a1}+48\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{30}(7\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+4S)$	$\frac{1}{60}(16\mathrm{a1}-12\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{30}(-23\mathrm{a1}+21\mathrm{a3}+4S)$
$\frac{1}{60}(34\mathrm{a1}+13(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{30}(-2\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-26\mathrm{a1}-18\mathrm{a3}+13S)$	$\frac{1}{30}(28\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{30}(-29\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(28\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{30}(\mathrm{a1}-27\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(-32\mathrm{a1}+84\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{20}(14\mathrm{a1}+3(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{10}(-2\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(-6\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+3S)$	$\frac{1}{10}(8\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{6}(-5\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{12}(4\mathrm{a1}+S)$	$\frac{1}{6}(\mathrm{a1}-3\mathrm{a3}+S)$	$-\frac{2\mathrm{a1}}{3}+\mathrm{a3}+\frac{S}{12}$

Ce sont les quatre premières colonnes de gauche à droite.

$\frac{1}{30}(-17\mathrm{a1}+39\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(4\mathrm{a1}-48\mathrm{a3}+13S)$	$\frac{1}{30}(13\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-56\mathrm{a1}+12\mathrm{a3}+13S)$
$\frac{1}{60}(58\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{30}(-14\mathrm{a1}-12\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(-2\mathrm{a1}+54\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{30}(16\mathrm{a1}+7(-6\mathrm{a3}+S))$
$\frac{1}{10}(-7\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(4\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+3S)$	$\frac{1}{10}(3\mathrm{a1}-\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(-16\mathrm{a1}+3(4\mathrm{a3}+S))$
$\frac{1}{12}(10\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{6}(-2\mathrm{a1}+S)$	$\frac{1}{12}(-2\mathrm{a1}+6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{6}(4\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{4}(-4\mathrm{a1}+S)$	$\frac{\mathrm{a1}+\mathrm{a3}}{2}$	$\frac{1}{4}(-4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{2}(-\mathrm{a1}+3\mathrm{a3})$
$\frac{1}{5}(3\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(-2\mathrm{a1}+14\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{5}(-2\mathrm{a1}-\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(18\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{60}(-52\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+11S)$	$\frac{1}{30}(11\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+2S)$	$\frac{1}{60}(8\mathrm{a1}-36\mathrm{a3}+11S)$	$\frac{1}{30}(-19\mathrm{a1}+33\mathrm{a3}+2S)$
$\frac{1}{15}(11\mathrm{a1}+2(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{60}(-14\mathrm{a1}+18\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{15}(-4\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+2S)$	$\frac{1}{60}(46\mathrm{a1}+7(-6\mathrm{a3}+S))$

Ce sont les quatre suivantes de gauche à droite.

Tous les carrés issus de cette structure générale sont des hyper-magiques-alpha; de plus, tout hyper-magique-alpha provient de cette structure générale.

Les hyper-magiques-alpha possèdent les propriétés suivantes :

1) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 2 est S/2.
2) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 4 est S/2.
3) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 5 est S/2.
4) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 6 est S/2.
5) La somme des quatre coins du carré d'ordre 8 est S/2.
6) Ils sont tous pandiagonaux.

Il existe seulement huit hyper-magiques-alpha normaux, lesquels sont primitifs. Pour les trouver, nous avons, dans la structure générale ci-haut, posé S = 260 et nous avons fait varier les variables a1 et a3 de 1 à 64. De ces 64x64 = 4096 hyper-magiques-alpha, nous n'avons trouvé que huit normaux. Nous allons vous les présenter ici et dans chacun, nous allons illustrer quelques figures caractéristiques des hyper-magiques-alpha.

La structure générale des hyper-magiques-alpha nous conduit aussi au tableau G2 de 8.2.

1	63	3	61	12	54	10	56
16	50	14	52	5	59	7	57
17	47	19	45	28	38	26	40
32	34	30	36	21	43	23	41
53	11	55	9	64	2	62	4
60	6	58	8	49	15	51	13
37	27	39	25	48	18	46	20
44	22	42	24	33	31	35	29

Hyper-magique-alpha 1

1	48	33	16	51	30	19	62
52	29	20	61	2	47	34	15
5	44	37	12	55	26	23	58
56	25	24	57	6	43	38	11
14	35	46	3	64	17	32	49
63	18	31	50	13	36	45	4
10	39	42	7	60	21	28	53
59	22	27	54	9	40	41	8

Hyper-magique-alpha 2

4	62	2	64	9	55	11	53
13	51	15	49	8	58	6	60
20	46	18	48	25	39	27	37
29	35	31	33	24	42	22	44
56	10	54	12	61	3	63	1
57	7	59	5	52	14	50	16
40	26	38	28	45	19	47	17
41	23	43	21	36	30	34	32

Hyper-magique-alpha 3

16	33	48	1	62	19	30	51
61	20	29	52	15	34	47	2
12	37	44	5	58	23	26	55
57	24	25	56	11	38	43	6
3	46	35	14	49	32	17	64
50	31	18	63	4	45	36	13
7	42	39	10	53	28	21	60
54	27	22	59	8	41	40	9

Hyper-magique-alpha 4

(carré28)

49	32	17	64	3	46	35	14
4	45	36	13	50	31	18	63
53	28	21	60	7	42	39	10
8	41	40	9	54	27	22	59
62	19	30	51	16	33	48	1
15	34	47	2	61	20	29	52
58	23	26	55	12	37	44	5
11	38	43	6	57	24	25	56

Hyper-magique-alpha 5

61	3	63	1	56	10	54	12
52	14	50	16	57	7	59	5
45	19	47	17	40	26	38	28
36	30	34	32	41	23	43	21
9	55	11	53	4	62	2	64
8	58	6	60	13	51	15	49
25	39	27	37	20	46	18	48
24	42	22	44	29	35	31	33

Hyper-magique-alpha 6

64	17	32	49	14	35	46	3
13	36	45	4	63	18	31	50
60	21	28	53	10	39	42	7
9	40	41	8	59	22	27	54
51	30	19	62	1	48	33	16
2	47	34	15	52	29	20	61
55	26	23	58	5	44	37	12
6	43	38	11	56	25	24	57

Hyper-magique-alpha 7

64	2	62	4	53	11	55	9
49	15	51	13	60	6	58	8
48	18	46	20	37	27	39	25
33	31	35	29	44	22	42	24
12	54	10	56	1	63	3	61
5	59	7	57	16	50	14	52
28	38	26	40	17	47	19	45
21	43	23	41	32	34	30	36

Hyper-magique-alpha 8

Voilà les huit hyper-magiques-alpha normaux et il n'y en a pas d'autre. Ce sont des carrés magiques d'une très grande rareté!!! Ils sont tous primitifs.

Théorème 8.2 :

Il existe seulement huit hyper-magiques-alpha normaux. Dans un hyper-magique-alpha normal, nous trouvons toujours quatre pairs et quatre impairs dans chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale, grande ou brisée. De plus, les huit sont primitifs.

Hyper-magique-alpha 1 : nous avons illustré trois carrés d'ordre 2 (orangé) de somme 130, une figure magique caractéristique (vert) et la demi-figure caractéristique (rouge) de somme 130.

Hyper-magique-alpha 2 : nous avons illustré deux figures magiques caractéristiques (orangé et vert**).**

Hyper-magique-alpha 3 : nous avons illustré une diagonale brisée (orangé), une figure magique caractéristique (vert) et les quatre coins d'un 4x4 (bleu) de somme 130.

Hyper-magique-alpha 4 : nous avons illustré une figure magique caractéristique (vert) et les quatre coins d'un 5x5 (orangé) de somme 130.

Hyper-magique-alpha 5 : nous avons illustré les quatre coins de deux carrés d'ordre 6 (orangé et bleu).

Hyper-magique-alpha 6 : nous avons illustré une autre diagonale brisée (orangé) et deux cases (vert) séparées par trois cases**,** de somme S/4 = 65.

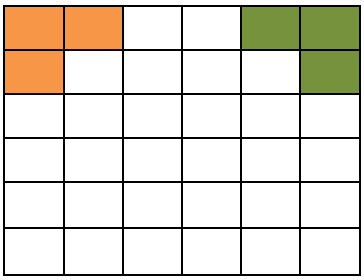
Hyper-magique-alpha 7 : nous avons illustré les quatre coins du 8x8 (orangé) de somme 130 et trois fois deux cases (vert, bleu, rouge), séparées par trois cases, de somme 65.

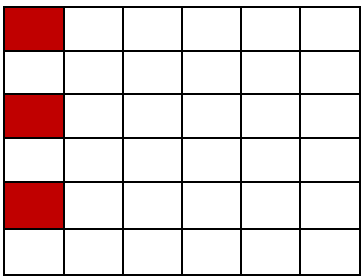
Hyper-magique-alpha 8 : nous avons illustré deux figures magiques (orangé et vert).

Nous avons observé dans les huit hyper-magiques-alpha normaux, que dans chaque colonne, chaque rangée et chaque diagonale (grande ou brisée), nous avons toujours quatre pairs et quatre impairs.

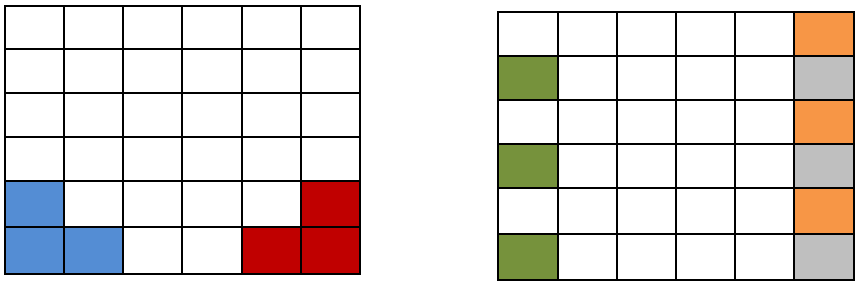
8.4 Les ultra-magiques-bêta

Rappelons qu'un ultra-magique est un carré magique à la fois pandiagonal et associatif. Nous avons construit la structure générale des carrés magiques associatifs d'ordre 6 (dimension 13) à partir de celle des carrés magiques d'ordre 6. Puis nous avons trouvé la structure générale des ultra-magiques d'ordre 6 (dimension 9). Nous avons ensuite imposé les trois demi-figures suivantes de somme S/2 pour obtenir la structure générale des **ultra-magiques-bêta** (dimension 6). **Les ultra-magiques-bêta sont des carrés magiques d'ordre 6.**





En conséquence, nous avons obtenu les demi-figures suivantes de somme S/2.



Voici une structure générale des ultra-magiques-bêta :

$\mathrm{a1}$	$\frac{1}{2}(-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a7}+S)$	$\mathrm{a3}$
$\mathrm{a7}$	$\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{3}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}+S)$
$-\mathrm{a1}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}-6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+5S)$	$\mathrm{a15}$
$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-\mathrm{a4}+\frac{S}{3}$	$\frac{1}{12}(6\mathrm{a15}+12\mathrm{a3}-6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}-S)$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+S)$
$-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{3}$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+2\mathrm{a4}-\frac{S}{6}$	$\frac{1}{4}(2\mathrm{a15}-4\mathrm{a3}-6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}+S)$
$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}+\mathrm{a3}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a4}+S)$

$\mathrm{a4}$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}-\mathrm{a3}+\frac{S}{3}$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$
$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}+12\mathrm{a3}+18\mathrm{a4}-18\mathrm{a7}+S)$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}+\frac{S}{2}$	$\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}$
$\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}+2\mathrm{a7}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}-12\mathrm{a3}+6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+5S)$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+\mathrm{a4}$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+S)$	$\frac{1}{12}(6\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}-S)$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$
$\frac{1}{4}(2\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a7}+S)$	$-\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a7}+S)$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a3}+S)$	$\mathrm{a1}+\mathrm{a7}-\frac{S}{6}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a1}+S)$

Nous avons les trois premières colonnes en haut de gauche à droite et les trois dernières colonnes en bas, de gauche à droite.

Ils forment un sous-espace de dimension 6. Si nous voulons un ultra-magique-bêta formé exclusivement d'entiers, alors il est nécessaire que les variables libres prennent des valeurs entières et selon la structure générale ci-haut, que S soit un entier divisible par 6.

Avant d'arriver à la structure générale ci-haut, nous avons d'abord trouvé celle des carrés magiques associatifs d'ordre 6 (Partie 3, annexe 22, fichier 8)). Là aussi, si nous voulons un carré magique associatif formé seulement d'entiers, alors il est nécessaire que les variables libres prennent des valeurs entières et que S soit un entier divisible par 6. Si S n'est pas divisible par 6, alors le carré nepeut pas contenir seulement des entiers et donc ne peut pas être presque normal ou normal.

Puis après, nous avons trouvé la structure générale des ultra-magiques d'ordre 6 à partir de la précédente (Partie 3, annexe 22, fichier 8)). Dans celle-ci, nous avons une expression qui montre que S doit être divisible par 3 si nous voulons avoir que des entiers dans notre carré. Une autre expression montre que S doit être un entier pair. En précisant que les variables sont notées a1 , a3, a4, a7, a8, a11, a14, a15 et S, voici ces deux expressions situées dans la première colonne:

$$-a1+a15-a4+S/3 \; et \; (-2a1-4a14-2a15-4a7-2a8+3S)/4$$

Si nous voulons n'avoir que des entiers dans notre ultra-magique, alors il sera nécessaire que les variables libres prennent des valeurs entières et que S soit divisible par 6.

Cette preuve est basée sur la structure générale des ultra-magiques; elle est donc particulière à l'ordre 6. Nous pouvons même affirmer que si S ne se divise pas par 6, alors l'ultra-magique ne pourra pas renfermer seulement des entiers. Il ne sera donc pas presque normal.

Le carré magique normal d'ordre 6 ne peut pas être associatif car 111 est impair. (Voir 8.5 plus bas). Nous devons conclure qu'**un ultra-magique normal d'ordre 6 n'existe pas.**

Si S est divisible par 6, alors pouvons-nous avoir un ultra-magique-bêta presque normal? La réponse est oui puisque nous avons les deux suivants, de sommes divisibles par 6.

32	57	34	31	52	82
55	84	46	1	92	10
26	56	42	90	53	21
75	43	6	54	40	70
86	4	95	50	12	41
14	44	65	62	39	64

S = 288 f(288) = 13136

39	62	26	13	81	31
25	83	32	21	77	14
17	78	16	40	65	36
48	19	44	68	6	67
70	7	63	52	1	59
53	3	71	58	22	45

S = 252 f(252) = 13736

Nous venons de voir qu'un carré magique d'ordre 6 peut être associatif et si en plus, il est formé d'entiers, alors il peut être presque normal mais ne peut pas être normal. Un carré magique

associatif existe-t-il pour tous les ordres $n \geq 3$? Le problème 7 de 8.6 permet de donner une réponse partielle à cette question.

Terminons en donnant la fréquence de quatre structures générales d'ordre 6 :

1) f(S) = 14 pour la structure générale des carrés magiques d'ordre 6.
2) f(S) = 828 pour la structure générale des carrés magiques associatifs d'ordre 6.
3) f(S) = 996 pour la structure générale des ultra-magiques d'ordre 6.
4) f(S) = 2096 pour la structure générale des ultra-magiques-bêta.

8.5 Carrés magiques associatifs d'ordres pairs

Nous allons nous demander quand un carré magique d'ordre pair peut-il être associatif.

Soit donné M, un carré magique d'ordre $n = 2k$ avec k, un entier ≥ 2.

Dans M, traçons une horizontale et une verticale qui passent par le centre du carré. Celles-ci séparent le carré en quatre sous-carrés d'ordre k. Appelons A, B, C et D la somme des nombres de chaque sous-carré :

A	B
C	D

Carré M

$A+B$ est la somme des k premières rangées, $A+C$ est la somme des k premières colonnes et $B+C$ est la somme des nombres situés dans toutes les paires de cases symétriques par rapport au centre du carré lesquelles se trouvent dans les deux sous-carrés de sommes B et C.

Si M est associatif, alors la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\frac{2S}{n}$. Nous avons donc :

$$A+B = kS$$
$$A+C = kS$$
$$B+C = k^2 \frac{2S}{2k} = kS$$

Il est facile de montrer que $A = B = C = \frac{k\,S}{2}$. Si M est formé seulement d'entiers, alors $\frac{k\,S}{2}$ doit être un entier d'où $k\,S$ doit être pair. Nous venons de montrer que :

(*)	M associatif et M formé que d'entiers $\Rightarrow$ $k\,S$ pair

Maintenant, voyons les deux cas suivants :

Premier cas : k est pair.

Si M est formé d'entiers et k est pair, alors $k\,S$ est pair et M devient un bon candidat pour être associatif.

Deuxième cas : k est impair.

Si M est formé d'entiers et k est impair, alors $k\,S$ est pair si et seulement si S est pair. Cela signifie que si S est pair alors M est un bon candidat pour être associatif.

Si S est impair, alors $k\,S$ est impair et M, formé d'entiers, ne peut pas être associatif selon (*). De même, si M est associatif, alors M ne sera pas formé seulement d'entiers.

Il est facile de démontrer qu'un carré magique normal d'ordre $n = 2k, k$ impair, a toujours pour somme magique un entier impair. En effet, nous avons :

$$S = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{2k(4k^2+1)}{2} = k(4k^2+1) = impair$$

De même, Il est évident qu'un carré magique normal d'ordre $n = 2k, k$ pair, a toujours pour somme magique un entier pair.

D'où le théorème suivant :

Théorème 8.3:

Si M est un carré magique d'ordre $n = 2k$ avec $k \geq 3$, un entier impair, et si M est normal, alors M ne peut pas être associatif. De plus, si M est associatif, alors M ne peut pas être normal.

Preuve :

Supposons que M soit associatif et normal, alors M est formé d'entiers et puisque k est impair, S est impair d'où $k\,S$ est impair. Nous avons là une contradiction avec (*). M ne peut donc pas être associatif s'il est normal et ne peut pas être normal s'il est associatif.

Nous remarquons facilement que si M est normal d'ordre n = 4 k, alors S est pair et il n'y a pas de contradiction avec (*). M est alors un bon candidat pour être associatif.

Ce que nous venons de montrer est que tous les carrés magiques normaux d'ordres pairs non multiples de 4, ne sont pas associatifs. Il en est donc de même pour tous les ultra-magiques, les ultra-magiques-alpha et les ultra-magiques-bêta, normaux d'ordres pairs non multiples de 4.

Nous venons également de montrer que tout carré magique associatif d'ordre pair non multiple de 4 ne peut pas être normal.

Nous connaissons des carrés magiques normaux d'ordre 4 qui sont associatifs (voir 5.9, les A-Dürer) et nous connaissons aussi des carrés magiques normaux d'ordre 5 qui sont associatifs (voir 6.3, les ultra-magiques d'ordre 5).

Que savons-nous, en général, des carrés magiques d'ordres pairs multiples de 4 et des carrés magiques d'ordres impairs? Pouvons-nous trouver des associatifs pour tous ces ordres? Pouvons-nous trouver des associatifs normaux pour tous ces ordres? **La réponse est oui!!!**

Existe-t-il un carré magique associatif d'ordre 5555? D'ordre 4444? Peuvent-ils être normaux? La réponse est oui à ces 3 questions!!! (Voir le problème 7 de 8.6).

La solution du problème 7 de 8.6 nous montrera :

1) Que pour tous les ordres impairs $n \geq 1$, il existe au moins un carré magique associatif normal et une infinité de carrés magiques associatifs presque normaux.
2) Que pour tous les ordres pairs $n = 4m$, où m est un entier ≥ 1, il existe au moins un carré magique associatif normal et une infinité de carrés magiques associatifs presque normaux.
3) Tous les carrés magiques d'ordre 1, 2 et 3 sont associatifs.

Qu'arrive-t-il si l'ordre pair est $n = 4m + 2$ avec m, un entier ≥ 1?

Nous savons que :

4) Si l'ordre est pair non multiple de 4, alors un carré magique ne peut pas être à la fois associatif et normal. En effet, $n = 4m + 2 = 2k$ où k est impair et si S est impair, alors $k\,S$ est impair. Cela contredit (*).
5) Un carré magique d'ordre 6 peut être associatif et presque normal. Si c'est le cas, alors S est pair. (Voir les deux derniers carrés de 8.4).
6) Aucun carré magique normal d'ordre $n = 4m + 2$ où m est un entier ≥ 1, ne peut être associatif.
7) **La grande question** : pour tous les ordres pairs $n = 4m + 2$ où m est un entier ≥ 2, existe-t-il un carré magique associatif presque normal?

Nous allons également nous poser les quatre questions suivantes :

8) Pour tous les ordres pairs $n = 2m$ où m est un entier ≥ 2, existe-t-il un carré magique pandiagonal presque normal? Normal?
9) Pour tous les ordres impairs $n \geq 7$, existe-t-il un carré magique pandiagonal presque normal? Normal?
10) Pour tous les ordres pairs $n = 2m$ où m est un entier ≥ 2, existe-t-il un hyper-magique presque normal? Normal?
11) Pour tous les ordres $n \geq 7$, existe-t-il un ultra-magique presque normal? Normal?

Nous pouvons considérer ces cinq questions comme étant des propositions de recherche!!!

Puisqu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial (problème 8 de 7.4), alors un ultra-magique normal ou presque normal d'ordre 3 n'existe pas.

La structure générale des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4 n'est rien d'autre que celle des super-Dürer. Nous avons rendu celle-ci associative et avons alors observé que la structure générale des ultra-magiques d'ordre 4 est formée de quatre nombres, chacun apparaissant quatre fois. Un ultra-magique d'ordre 4 normal ou presque normal n'existe pas. D'où le résultat :

Il n'existe aucun ultra-magique d'ordre 3 qui soit normal ou presque normal. Il n'existe aucun ultra-magique d'ordre 4 qui soit normal ou presque normal.

Il existe un ultra-magique normal d'ordre 5 (Voir 6.1, le carré de centre 13). Il existe aussi un ultra-magique presque normal d'ordre 5 (Voir ci-dessous).

Il existe un ultra-magique presque normal d'ordre 6 (Voir les deux carrés de 8.4). Un ultra-magique normal d'ordre 6 n'existe pas.

Le carré suivant est un ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de somme 310 :

$$\begin{pmatrix} 48 & 54 & 57 & 28 & 123 \\ 84 & 55 & 104 & 32 & 35 \\ 88 & 13 & 62 & 111 & 36 \\ 89 & 92 & 20 & 69 & 40 \\ 1 & 96 & 67 & 70 & 76 \end{pmatrix}$$

$$S = 310 \quad f(310) = 432$$

8.6 Problèmes

1) Pouvez-vous trouver un Gauss presque normal de somme S = 400.
2) Dans l'hyper-magique-alpha normal suivant, nous avons, par erreur, effacé la grande diagonale secondaire et quelques cases. Retrouvez le carré initial?

16	33	48	1	62	19	30	
61	20		52	15	34		2
12	37	44	5	58		26	55
57	24	25	56		38	43	6
3					32	17	64
50	31		63	4	45	36	
7		39	10	53	28	21	
	27	22	59		41	40	9

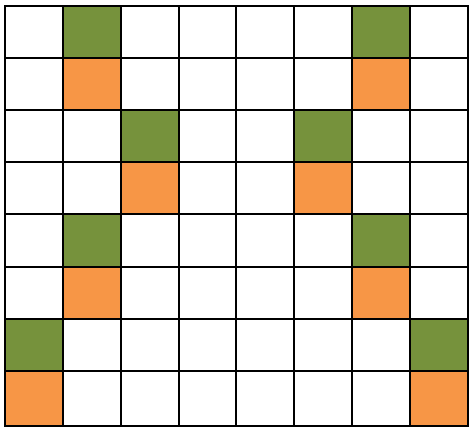
3) Voici quelques entiers dans le Gauss ci-dessous de somme S = 556.

		75					
	8		34	127			23
		117				120	
		20					
		37					
			42			101	
							131

Complétez le carré. Est-il presque normal?

4) Montrez qu'une condition nécessaire pour qu'un hyper-magique-alpha soit formé de 64 entiers est que S soit un multiple de 4 et que a1 et a3 soient des entiers de même parité.
5) Montrez qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un Gauss renferme 64 entiers est que a1 et a3 soient entiers et que S soit un multiple de 4.
6) Soit M un carré magique d'ordre 10 qui renferme seulement des entiers. Sa somme magique est S = 245. M peut-il être associatif?
7) Existe-t-il un carré magique associatif :
   a) Pour tous les ordres impairs $n \geq 1$?
   b) Pour tous les ordres pairs $n = 4m$ où m est un entier ≥ 1?
   c) Dans ces deux cas, le carré magique associatif peut-il être normal? Presque normal?
8) Soit M un carré magique associatif d'ordre 6. Sa somme magique est S = 265. M peut-il être formé seulement d'entiers?
9) Montrez que les figures dans le carré hyper-magique-alpha 8 ne sont pas des super-figures.
10) Montrez que dans G-7, la figure en orangé est une super-figure (section 8.2).
11) Montrez que dans G-6, l'escalier en orangé est une figure magique de la structure générale des Gauss, même si nous la déplaçons parallèlement à elle-même. Montrez aussi que ce n'est pas une super-figure.
12) Montrez que dans G-6, l'escalier en vert est une figure magique, même si nous la déplaçons parallèlement à elle-même. Montrez aussi que ce n'est pas une super-figure.
13) Montrez que la structure générale des hyper-magiques-alpha (voir section 8.3) possède comme super-figure l'escalier dans le carré G6 de 8.2

14) Le carré suivant est la structure générale des hyper-magiques-alpha dans laquelle nous avons illustré deux figures :



a) Dans la figure de gauche, les quatre cases vertes totalisent S/2 et les quatre cases en orangé totalisent aussi S/2. Il en est de même pour la figure de droite. Retrouvez ces résultats en vous servant de la structure générale de 8.3.

b) Sans vous servir de la structure générale de 8.3, montrez que ces deux figures génèrent seize figures magiques dans la structure générale de 8.3. Donc, tous les hyper-magiques -alpha possèdent ces seize figures magiques.

15) Montrez que tous les carrés triviaux d'ordres $n \geq 1$ sont associatifs.

16) Un carré magique d'ordre 2 peut-il être associatif? Normal?

17) En vous servant de la structure générale des carrés magiques associatifs d'ordre 6 (voir la Partie 3, annexe 22, fichier 8)), trouvez un carré magique d'ordre 6 qui soit associatif et de somme impaire, tout en donnant aux variables libres, des valeurs entières positives. Observez alors que votre carré renferme des nombres qui ne sont pas des entiers.

18) Existe-t-il un ultra-magique d'ordre 3 qui soit presque normal? Normal? Qui renferme au moins deux nombres différents?

19) Existe-t-il un ultra-magique d'ordre 4 qui soit presque normal? Normal?

20) Un carré magique d'ordre pair $n \geq 4$, n'est pas pandiagonal; peut-il être hyper-magique?

21) Utilisez MAPLE ou MATHEMATICA pour retrouver les fréquences des deux ultra-magiques-bêta (S = 288 et S = 252) de 8.4 ainsi que la fréquence du dernier carré de 8.5.

22) Je vous dis qu'un carré magique M est formé d'entiers seulement et que sa somme magique se termine par le chiffre 5 (nous avons perdu les autres chiffres de la somme). Je vous demande si celui-ci est associatif et vous me répondez que vous n'en savez rien. Vous me demandez alors quel est l'ordre de M et je vous réponds 18. Vous affirmer aussitôt que M n'est pas associatif. Pourquoi?

23) Les propriétés des carrés magiques sont quelquefois reliées à la somme magique S. Soit M, un carré magique d'ordre 14 formé exclusivement d'entiers avec S = 1561.

a) Pourquoi M ne peut pas être ultra-magique?
b) Pourquoi M ne peut pas être hyper-magique?
c) En déduire une condition nécessaire pour qu'un carré magique d'ordre pair $n \geq 4$, soit un ultra-magique ou un hyper-magique.

24) Si un carré magique d'ordre pair est tel que la somme des nombres de tous ses sous-carrés 2x2 soit toujours égale à $\frac{4S}{n}$, **alors le carré est pandiagonal** (résultat trouvé sur Internet sans sa démonstration). Nous n'allons pas vous demander de démontrer ce résultat. Nous voulions seulement vous le présenter. Cependant, rien ne vous interdit de le démontrer ou de trouver sa démonstration déjà faite!!! Voir la première page de 8.2 et le carré 23 de la Partie 1 de cet ouvrage.

25) Soit donné un carré magique M presque normal d'ordre 6. Ce carré M est associatif et sa somme magique est S = 480. Je vous assure que M ne peut pas contenir l'entier 80. Pourquoi?

9. Produit matriciel de carrés magiques

9.1 Introduction

Nous avons vu comment additionner deux carrés magiques et nous savons que le résultat de cette addition est encore un carré magique. De même, un carré magique multiplié par un nombre k est toujours un carré magique. Mais qu'en est-il du produit, au sens matriciel, de deux carrés magiques?

Connaissant ce produit, il est surprenant de voir les résultats inattendus qui vont suivre. Nous connaissons beaucoup d'exemples où le produit de deux carrés magiques n'est pas un carré magique mais aussi, des exemples où le produit de deux carrés magiques est un carré magique. De même, qu'en est-il de la puissance entière positive d'un carré magique? Si, par exemple, A est un carré magique d'ordre 3, alors que pouvons-nous dire de A affecté de la puissance 323 456 549 877? Avons-nous toujours un carré magique? Nous verrons, un peu plus loin, que ce carré sera bien magique!

9.2 Produit matriciel de carrés magiques

Rappelons qu'un carré est semi-magique si la somme des nombres de chaque rangée et de chaque colonne est toujours égale à un même nombre S et que le produit de deux carrés d'ordre n est un carré d'ordre n. Voyons maintenant ce magnifique résultat :

Théorème 9.1 :

Soient A et B, deux carrés semi-magiques quelconques d'ordre n de sommes S et T, alors le produit AB est un carré semi-magique de somme ST.

Nous pouvons donc affirmer que si A et B sont des carrés magiques de sommes S et T, alors le produit AB est au moins un carré semi-magique de somme ST.

Puis, si A est un carré semi-magique de somme S, alors A^k est un carré semi-magique de somme S^k où k est un entier ≥ 1.

Preuve du théorème :

Les éléments de A sont a_{ij}, ses rangées sont A_i ; les éléments de B sont b_{ij}, ses colonnes sont B_j ; les éléments de $C = AB$ sont c_{ij}.

Trouvons la somme des éléments de la rangée i de AB :

$$c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in} = A_i \cdot B_1 + A_i \cdot B_2 + \ldots A_i \cdot B_n = A_i \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) =$$
$$= A_i \cdot (T, T, \ldots, T) = a_{i1}T + a_{i2}T + \ldots + a_{in}T = (a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in})T = ST$$

La somme des éléments de chaque rangée de AB est donc ST.

Trouvons maintenant la somme des éléments de la colonne j de AB :

$$c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{nj} = A_1 \cdot B_j + A_2 \cdot B_j + \ldots + A_n \cdot B_j = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \cdot B_j =$$
$$= (S, S, \ldots, S) \cdot B_j = S\,b_{1j} + S\,b_{2j} + \ldots + S\,b_{nj} = S\,(b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj}) = ST$$

La somme des éléments de chaque colonne de AB est donc ST. Ainsi, le produit AB est un carré semi-magique de somme ST.

Nous savons maintenant que le produit de deux carrés magiques d'ordre n de sommes S *et* T est au moins un carré semi-magique de somme ST. Mais quand le produit est-il magique?

Théorème 9.2 :

> Si A *et* B sont deux carrés magiques triviaux quelconques d'ordre n de sommes S *et* T, alors le produit AB est un carré magique trivial de somme ST. De plus, $AB = BA$.

Preuve :

Soit C, le carré magique trivial d'ordre n formé que du nombre 1. Nous pouvons donc écrire :

$A = \left(\frac{S}{n}\right) C$ *et* $B = \left(\frac{T}{n}\right) C$. Puis $AB = \left(\frac{ST}{n^2}\right) C^2 = \left(\frac{ST}{n^2}\right) nC = \left(\frac{ST}{n}\right) C$. Donc le produit AB est un carré magique trivial de somme ST car chaque nombre dans ce carré égale $\frac{ST}{n}$.

Nous avons $AB = BA$ (Voir le problème 5 de 9.6)

9.3 Le procédé AB^2 et les puissances impaires d'un carré magique

Soient A *et* B, deux carrés magiques de sommes S *et* T. En général, AB n'est pas magique mais il arrive souvent que AB^2 le soit.

Les carrés magiques étudiés jusqu'à maintenant appartiennent à des espaces vectoriels. Tous les carrés magiques d'un même espace vectoriel muni d'une structure générale possèdent les mêmes figures magiques caractéristiques c'est-à-dire celles de la structure générale. Ainsi, nous pouvons parler de l'espace des carrés magiques d'ordre 3, l'espace des super-Dürer, celui des A-Dürer, celui des diaboliques, celui des diaboliques-alpha, etc. Dans le but de simplifier, nous dirons simplement «espace» au lieu d'espace vectoriel.

Si A *et* B sont dans un même espace, alors Il arrive souvent que AB^2 soit aussi dans cet espace. Cela va nous conduire à de magnifiques résultats.

Considérons l'espace F et sa structure générale de somme S. Puis prenons dans F deux carrés quelconques A *et* B où A est la structure générale elle-même et B, la structure générale dans laquelle nous avons changé le nom des variables. Par exemple, si les variables dans A sont a, b, c, S alors nous prendrons les variables r, s, t, T pour B où S *et* T sont les sommes. Voyons de près l'exemple qui suit.

Considérons l'espace F des diaboliques qui est de dimension 2. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{11S-26a}{18} & \frac{5S-11a}{9} & \frac{10a-S}{6} \\ \frac{14a+S}{18} & \frac{S-a}{3} & \frac{7S-10a}{18} & \frac{a+2S}{9} \\ \frac{5S-2a}{18} & \frac{5a+S}{9} & \frac{2a+S}{6} & \frac{4S-7a}{9} \\ \frac{2S-5a}{3} & \frac{22a-S}{18} & \frac{13a-S}{9} & \frac{S-2a}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & \frac{11T-26x}{18} & \frac{5T-11x}{9} & \frac{10x-T}{6} \\ \frac{14x+T}{18} & \frac{T-x}{3} & \frac{7T-10x}{18} & \frac{x+2T}{9} \\ \frac{5T-2x}{18} & \frac{5x+T}{9} & \frac{2x+T}{6} & \frac{4T-7x}{9} \\ \frac{2T-5x}{3} & \frac{22x-T}{18} & \frac{13x-T}{9} & \frac{T-2x}{2} \end{pmatrix}$$

avec A, la structure générale des diaboliques et B, la même structure générale dans laquelle nous avons remplacé a par x et S par T. Maintenant, nous allons effectuer, avec MATHEMATICA, le produit ABB. Selon le théorème 9.1, nous savons déjà que ABB est un carré semi-magique de somme ST^2. Nous allons nous assurer que les deux grandes diagonales sont de la même somme. Puis nous allons vérifier qu'il s'agit bien d'un diabolique.

Toujours avec MATHEMATICA, nous avons trouvé que la somme des deux grandes diagonales était ST^2. Puis nous avons vérifié que ABB est un A-Dürer et enfin que ABB est un diabolique en trouvant que les figures EBGQ, JFNQ et JFCD sont de somme ST^2 et ce, en référence avec (*) de 5.1.

Nous pouvons alors conclure que $ABB = AB^2$ est un diabolique quels que soient les diaboliques A *et* B. Donc, en remplaçant A par $B; B^3; B^5,$ …, nous trouvons que

$$B \quad B^3 \quad B^5 \quad B^7 \ldots$$

sont des diaboliques respectivement de sommes

$$T \quad T^3 \quad T^5 \quad T^7 \ldots$$

Tout simplement extraordinaire!!! Toutes les puissances impaires positives d'un diabolique sont des diaboliques. Non seulement ces puissances sont encore des carrés magiques mais celles-ci possèdent les 86 figures magiques qui caractérisent les diaboliques non triviaux.

Exemple : partons du diabolique normal suivant :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 233 & 297 & 321 & 305 \\ 297 & 265 & 273 & 321 \\ 321 & 273 & 265 & 297 \\ 305 & 321 & 297 & 233 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 10186 & 9306 & 9386 & 10426 \\ 10106 & 9706 & 9626 & 9866 \\ 9786 & 10026 & 9946 & 9546 \\ 9226 & 10266 & 10346 & 9466 \end{pmatrix}$$

$$D^5 = \begin{pmatrix} 11330056 & 11400456 & 11394056 & 11310856 \\ 11336456 & 11368456 & 11374856 & 11355656 \\ 11362056 & 11342856 & 11349256 & 11381256 \\ 11406856 & 11323656 & 11317256 & 11387656 \end{pmatrix}$$

Nous vous laissons le soin de vérifier que D, D^3 *et* D^5 sont bien des diaboliques et que D^2 est un carré semi-magique avec sa diagonale secondaire magique. Sa principale ne l'est pas. Donc D^2 n'est pas un diabolique. **Voici une observation intéressante** : à partir de $k \geq 3$, les seize entiers de D^k se terminent tous par 6 lorsque k est impair et se terminent tous par 4 lorsque k est pair. Nous avons vérifié ce résultat jusqu'à k = 24 puis pour k = 170 et k = 171. En est-il toujours ainsi? (voir problème 1 de 9.6)

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 9.3 :

Considérons A, la structure générale qui représente un espace F de carrés magiques et B, la même structure générale dans laquelle nous avons changé le nom de chaque variable afin qu'aucune variable de A ne se retrouve dans B. Si AB^2 est dans F, alors toutes les puissances entières positives impaires de B sont des carrés magiques dans F. Donc $B, B^3, B^5, \ldots, B^{2k-1}, \ldots$ sont des carrés magiques dans F respectivement de sommes $T, T^3, T^5, \ldots, T^{2k-1}, \ldots$ où k est entier ≥ 1.

Nous allons voir que cela se produit pour plusieurs espaces. Par exemple, si A est un super-Dürer de somme S, alors A^{2k-1} est un super-Dürer de somme S^{2k-1} où k est un entier ≥ 1.

C'est tout à fait remarquable de voir qu'un super-Dürer A de somme S, à la puissance 2019, est toujours un super-Dürer dont la somme est S^{2019} !!! Les carrés A *et* A^{2019} sont des carrés magiques qui ont en commun les 52 figures magiques caractéristiques des super-Dürer!!!

Considérons maintenant l'espace F des carrés magiques d'ordre 3 qui est de dimension 3. Nous allons prendre deux carrés magiques quelconques A *et* B :

$$A=\begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} x & y & T-x-y \\ \frac{4T}{3}-2x-y & \frac{T}{3} & 2x+y-\frac{2T}{3} \\ x+y-\frac{T}{3} & \frac{2T}{3}-y & \frac{2T}{3}-x \end{pmatrix}$$

Le produit AB^2, calculé avec MATHEMATICA, est bien un carré magique de somme ST^2, quels que soient les carrés magiques $A et B$. Nous pouvons donc conclure que B^{2k-1} est un carré magique de somme T^{2k-1} pour tout entier $k \geq 1$.

Pour répondre à la question de 9.1, si A est un carré magique de somme S, alors le carré $A^{323\,456\,549\,877}$ est bien un carré magique de somme $S^{323\,456\,549\,877}$.

Que dire du carré B^2 ? En général, c'est un carré semi-magique. Lorsque B est un carré magique d'ordre 3, nous trouvons que B^2 possède une structure très spéciale; en fait :

$$B^2=\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}$$

où $X\ et\ Y$ sont des fonctions de $x, y\ et\ T$. Nous voyons que B^2 est un carré semi-magique avec sa grande diagonale secondaire magique. Nous aurions la grande diagonale principale magique si et seulement si $X=Y$. Observons que : **(carré magique A) $\times$ (carré semi-magique B^2) = (carré magique AB^2).**

Nous allons maintenant trouver AB^2 où $A et B$ sont quelconques et appartiennent à un même espace E connu :

1) $E=$ l'espace des carrés magiques d'ordre 3 $\Rightarrow AB^2$ magique.
2) $E=$ l'espace des super-Dürer $\Rightarrow AB^2$ est un super-Dürer.
3) $E=$ l'espace des super-Dürer-alpha $\Rightarrow AB^2$ est un super-Dürer-alpha.
4) $E=$ l'espace des super-Dürer-bêta $\Rightarrow AB^2$ est un super-Dürer-bêta (trivial).
5) $E=$ l'espace des A-Dürer $\Rightarrow AB^2$ est un A-Dürer.
6) $E=$ l'espace des diaboliques $\Rightarrow AB^2$ est un diabolique.
7) $E=$ l'espace des diaboliques-alpha $\Rightarrow AB^2$ est un diabolique-alpha.
8) $E=$ l'espace des ultra-magiques d'ordre 5 $\Rightarrow AB^2$ est un ultra-magique

Théorème 9.4 :

Soit A un carré magique quelconque d'ordre n et de somme S, qui appartient à l'espace E. Pour les espaces E énumérés ci-dessous, A^{2k-1} est un carré magique de somme S^{2k-1} qui appartient à l'espace E, avec k, un entier ≥ 1 :

1) Les carrés magiques d'ordre 3
2) Les super-Dürer
3) Les super-Dürer-alpha
4) Les super-Dürer-bêta
5) Les A-Dürer
6) Les diaboliques
7) Les diaboliques-alpha
8) Les ultra-magiques d'ordre 5.

Notez que cette liste n'est pas exhaustive.

Par exemple, si A est un ultra-magique d'ordre 5 et de somme S, alors :

$$A\,,\ A^3\,,\ A^5\,,\ldots,A^{2k-1},\ \ldots$$

sont des ultra-magiques respectivement de sommes

$$S\ ,\ S^3\,,\ S^5,\ \ldots,S^{2k-1},\ldots$$

avec k, un entier ≥ 1. Tout à fait extraordinaire de voir ces puissances impaires de A qui sont toujours des carrés magiques et de plus, qui sont toujours des ultra-magiques avec les 362 figures magiques qui les caractérisent.

Si A *et* B sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors nous savons que AB^2 est un ultra-magique et que :

$$AB^2 = A(B^2) = (AB)B\,.$$

Mais B^2 et AB ne sont pas des ultra-magiques. Le problème 6 de 9.6 montre que AB et B^2 ne sont plus ni pandiagonaux ni associatifs, ils ne sont même plus magiques; de plus, ils ont perdu au moins une super-figure (la croix par exemple). Cependant, B^2 et AB sont semi-magiques selon le théorème 9.1. Pourtant $A(B^2)$ et $(AB)B$ sont des ultra-magiques!!!

Nous avons utilisé le procédé AB^2 qui nous a conduit aux puissances impaires de A et B. De plus, AB^2 est un nouveau carré magique dans E lorsque $A\ et\ B$ le sont et que E est dans la liste du théorème 9.4. Ce nouveau carré magique est du même ordre que celui de $A et\ B$.

Mais que dire du procédé A^2B?

Pour les ultra-magiques d'ordre 5, nous avons :

$$(*) \qquad AB^2 = B^2A$$

En effet, nous avons trouvé, avec MATHEMATICA, $AB^2\ et\ B^2A$ puis nous avons fait la différence $AB^2 - B^2A$ pour trouver le carré nul. Nous allons montrer que le procédé AB^2 est le même que le procédé A^2B pour les ultra-magiques d'ordre 5.

Avec AB^2 : prenons $A = M\ et\ B = N$, des ultra-magiques d'ordre 5. Nous obtenons $M\ N^2$, un ultra-magique.

Avec A^2B : prenons $A = N\ et\ B = M$, les mêmes ultra-magiques d'ordre 5. Nous obtenons N^2M. En vertu de (*), nous avons : $M\ N^2 = N^2M$.

Les deux procédés sont donc les mêmes pour les ultra-magiques d'ordre 5!!!

En est-il de même avec les super-Dürer? Pour ceux-ci, nous avons $AB^2 \neq B^2A$. Cependant, $AB^2\ et\ B^2A$ sont des super-Dürer. Dans ces deux cas, nous trouvons les puissances impaires d'un super-Dürer comme pour les ultra-magiques ci-haut. Par contre, si nous fabriquons un super-Dürer avec le procédé AB^2, pourrons-nous obtenir le même avec le procédé A^2B? Soient M et N, deux super-Dürer. Avec le procédé AB^2, nous trouvons $M\ N^2 et\ N\ M^2$ puis avec le procédé A^2B, nous trouvons $M^2N\ et\ N^2M$. Mais ces quatre carrés, tous super-Dürer, sont différents deux à deux!!! Les deux procédés ne sont donc pas les mêmes ici. Voir problème 16 de 9.6.

Dans tous les cas, les procédés $AB^2\ et\ A^2B$ nous permettent de construire les puissances impaires des super-Dürer. Chaque procédé nous assure la construction de super-Dürer dès que $A et\ B$ le sont.

Remarque : Le A dans AB^2 n'est pas forcément le même que dans A^2B ; de même pour le B. Ces deux procédés pourraient tout aussi bien se noter $AB^2\ et\ C^2D$.

Voici, en terminant, quelques nouveaux résultats :

1) $AB^2 = B^2A$ pour les carrés magiques d'ordre 3.
2) $AB^2 = B^2A$ pour les super-Dürer-alpha.
3) $AB^2 = B^2A$ pour les super-Dürer-bêta.
4) $AB^2 = B^2A$ pour les diaboliques.
5) $AB^2 = B^2A$ pour les diaboliques-alpha.
6) $AB^2 = B^2A$ pour les ultra-magiques d'ordre 5.
7) $AB^2 \neq B^2A$ pour les super-Dürer mais AB^2 *et* B^2A sont des super-Dürer.
8) $AB^2 \neq B^2A$ pour les A-Dürer mais AB^2 *et* B^2A sont des A-Dürer.

Dans ce tableau, les deux procédés sont identiques pour les six cas de la zone verte. Pour les deux autres cas, c'est l'incertitude.

Enfin, si A est un super-Dürer-Bêta de somme S, alors toutes les puissances entières positives de A sont des super-Dürer-bêta respectivement de somme $S, S^2, S^3, \ldots$

A^n est un super-Dürer-bêta de somme S^n où n est un entier ≥ 1,

et si $n \geq 2$, *alors* A^n est trivial.

9.4 Autres produits

Théorème 9.5 :

Soit A un carré semi-magique d'ordre n de somme S et B, un carré magique trivial d'ordre n et de somme T. Alors, le produit AB est un carré magique trivial d'ordre n et de somme ST. De plus, $AB = BA$.

Preuve :

L'élément c_{ij} de AB est $\frac{ST}{n}$ et ce, pour tout $1 \leq i, j \leq n$. De même pour l'élément c_{ij} de BA.
Donc, $AB = BA$ est un trivial de somme ST.

Théorème 9.6:

Soient A *et* B, deux super- Dürer-bêta de sommes S *et* T, alors le produit AB est un trivial de somme ST. De plus, $AB = BA$.

Preuve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \\ b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \end{pmatrix}}_{B} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\lambda = (2a+3r)(2b+3s)$. La somme magique de AB est $4\lambda = (4a+6r)(4b+6s) = ST$.

Nous trouvons également $BA = AB$.

Ce résultat est très intéressant car il montre que le produit de deux super-Dürer-bêta quelconques est toujours un trivial. Cela va nous conduire à de très beaux problèmes d'algèbre (Voir 14.15).

Théorème 9.7:

Si A est un super- Dürer-bêta de somme S alors A^k est un trivial de somme S^k et ce, quel que soit l'entier $k \geq 2$.

Preuve :

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 9.5 et 9.6.

9.5 L'inverse d'un carré magique

Si nous prenons, dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, la matrice identité standard I, alors pour qu'une matrice M soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit non nul.

Il est facile, avec MATHEMATICA ou MAPLE, de calculer le déterminant de la structure générale des super-Dürer. Nous trouvons zéro. Donc aucun super-Dürer n'est inversible. Il en est donc de même pour tous les super-Dürer-alpha et bêta; aucun n'est inversible puisque ce sont tous des super-Dürer.

Le déterminant des A-Dürer est également nul. Donc aucun A-Dürer, aucun diabolique et aucun diabolique-alpha n'est inversible.

Par contre, le déterminant de la structure générale (1) des carrés magiques d'ordre 3 (voir 4.3) est :

(*) $$S^3 - 4bS^2 - 2aS^2 + 3b^2S + 6abS = S\ (S-2a-b)\ (S-3b)$$

Ainsi, nous voyons qu'un carré magique M d'ordre 3 est inversible si et seulement si :

$$S \neq 0,\ S \neq 3b,\ S \neq 2a+b$$

Si ces trois conditions sont respectées simultanément, alors M est inversible. La grande question : l'inverse est-il un carré magique?

Nous avons trouvé, avec MATHEMATICA, l'inverse de la structure générale (1) des carrés magiques d'ordre 3. Nous voyons que les neuf membres de l'inverse sont des fractions qui ont toutes le même dénominateur à savoir le déterminant (*) de M. Lorsque nous faisons la somme dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, nous trouvons toujours le même numérateur soit :

$(S-2a-b)(S-3b)$. L'inverse de M est donc un carré magique de somme :

$$\frac{(S-2a-b)(S-3b)}{S\,(S-2a-b)(S-3b)} = \frac{1}{S}$$

Nous dirons qu'un carré magique M est inversible en tant que carré magique si et seulement si il existe un carré magique M' tel que $M\,M' = M'M = I$. Nous dirons qu'un carré semi-magique M est inversible en tant que carré semi-magique si et seulement si il existe un carré semi-magique M' tel que $M\,M' = M'M = I$.

Soit maintenant M, un carré semi-magique ou magique d'ordre n et de somme S dont le déterminant est non nul. C'est une condition nécessaire pour que M soit inversible. Si M est inversible en tant que carré semi-magique (magique), alors il existe un carré semi- magique (magique) M' d'ordre n et de somme T tel que $M\,M' = I$. Cela implique $S\,T = 1$ et $T = \frac{1}{S}$.

Une autre question se pose ici : M est-il inversible en tant que carré semi-magique ou en tant que carré magique? La réponse est apportée par le théorème suivant :

Théorème 9.8 :

Soit M , un carré semi-magique d'ordre $n \geq 3$ dont la somme est S. Si $Det(M) \neq 0$ alors il existe un carré M' d'ordre n tel que $M\,M' = M'M = I$. De plus, $S \neq 0$ et M' est semi-magique de somme $\frac{1}{S}$; avec $n = 3$, si M est magique alors M' est magique.

Preuve :

Soit M, un carré semi-magique d'ordre n et de somme S avec $Det(M) \neq 0$. Nous avons donc :

$$M\,M' = M'M = I$$

1) Avec l'égalité $M\,M' = I$, montrons que les colonnes de M' ont la même somme $\frac{1}{S}$.

   Appelons $R_1, R_2, \ldots, R_n$, les rangées de M et $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$, les éléments de la colonne C_j $de\, M'$. Nous avons alors, dans la colonne j de $M\,M'$, les éléments suivants :

   $$R_1 \cdot C_j \;;\; R_2 \cdot C_j \;;\; \ldots \;;\; R_n \cdot C_j \text{ dont la somme est :}$$

   $$\left(R_1 + R_2 + \ldots + R_n\right) \cdot C_j = \left(S;S;\ldots;S\right) \cdot \left(a_{1j};a_{2j};\ldots;a_{nj}\right) = S\,a_{1j} + S\,a_{2j} + \ldots + S\,a_{nj} =$$
   $$= S\,(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj}) = 1 \quad (**)$$

   Donc $Det(M) \neq 0$ implique l'égalité $(**)$. Ainsi, nous voyons que $S \neq 0$ et qu'il en est de même pour la parenthèse. La somme des nombres de chaque colonne de M' est $\frac{1}{S}$.

   Nous venons de voir : $Det(M) \neq 0 \;\Rightarrow\; S \neq 0 \;\; d'où \;\; S = 0 \;\Rightarrow\; Det(M) = 0.$

2) Avec l'égalité $M'M = I$, montrons que les rangées de M' ont la même somme $\frac{1}{S}$.

   Appelons R_i, la rangée i de M' dont les éléments sont $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ et $C_1, C_2, \ldots, C_n$, les colonnes de M. La rangée i de $M'M$ renferme les éléments suivants :

   $$R_i \cdot C_1 \;;\; R_i \cdot C_2 \;;\; \ldots \;;\; R_i \cdot C_n \text{ et leur somme est :}$$

   $$R_i \cdot \left(C_1 + C_2 + \ldots + C_n\right) = R_i \cdot \left(S, S, \ldots, S\right) = a_{i1}S + a_{i2}S + \ldots + a_{in}S =$$
   $$\left(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}\right)S = 1.$$

La somme des nombres de chaque rangée de M' est $\frac{1}{S}$. Le carré M' est alors un carré semi-magique de somme $\frac{1}{S}$.

En général, M magique n'implique pas que M' soit magique lorsque $n \geq 4$; par contre, M magique avec $Det(M) \neq 0$, est toujours inversible en tant que carré semi-magique. Nous avons vu plus haut que pour $n = 3$, si M est magique alors M' est magique.

Enfin, nous savons maintenant qu'un carré semi-magique (magique) de somme nulle n'est jamais inversible en tant que matrice carrée. Rappelons que M' se note généralement M^{-1}.

Nous vous laissons avec cette question : Quand l'inverse d'un carré magique d'ordre $n \geq 4$ est-il magique?

Poursuivons en disant que si M renferme seulement des entiers, alors S est un entier. Si $S \neq \pm 1$, alors $\frac{1}{S}$ ne sera pas un entier et M' contiendra des nombres non entiers.

Nous laisserons de côté le cas $S = \pm 1$. Disons seulement qu'avec un carré magique M d'ordre 3, $S = \pm 1$ implique que M a pour centre $\frac{\pm 1}{3}$, donc M ne renferme pas que des entiers. De plus, il se peut que M' ne renferme aucun entier.

En général, lorsque le carré magique renferme que des entiers, son inverse, s'il existe, n'est pas un beau carré.

Voici M, un carré magique d'ordre 4 formé seulement d'entiers avec $Det(M) = 1 \; et \; S = 1$. Nous pouvons affirmer que l'inverse M' renferme que des entiers. Mais M' est-il magique?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{M'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

M est donc inversible en tant que carré semi-magique mais ne l'est pas en tant que carré magique. En effet, nous voyons bien que M' est un carré semi-magique mais non magique.

L'inverse d'un carré magique d'ordre 3, lorsqu'il existe, est toujours un carré magique. L'exemple ci-dessus montre que ce n'est pas le cas pour l'ordre 4.

Nous allons poursuivre avec deux carrés magiques Dürer M qui sont inversibles en tant que carrés magiques et deux questions : comment avons-nous trouvé M et M^{-1} peut-il être un Dürer?

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 661 & 9 & -640 \\ 8 & -639 & 13 & 698 \\ -671 & 14 & 692 & 45 \\ 693 & 44 & -634 & -23 \end{pmatrix}} \qquad \underset{M^{-1}}{\frac{1}{711360}\begin{pmatrix} 8869643 & 8381483 & -8386397 & -8855837 \\ -9371357 & -8855837 & 8869643 & 9366443 \\ 9365923 & 8850403 & -8855317 & -9352117 \\ -8855317 & -8367157 & 8380963 & 8850403 \end{pmatrix}}$$

Ici M est un Dürer de somme 80; il est formé de seize entiers différents dont cinq sont négatifs. M^{-1} est magique de somme $\frac{1}{80}$.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 23 & 44 & 10 & 3 \\ 8 & 5 & 13 & 54 \\ -1 & 14 & 48 & 19 \\ 50 & 17 & 9 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \underset{M^{-1}}{\frac{1}{336960}\begin{pmatrix} -2807 & -127 & -887 & 8033 \\ 9793 & 233 & -1247 & -4567 \\ -3007 & -2807 & 8033 & 1993 \\ 233 & 6913 & -1687 & -1247 \end{pmatrix}}$$

M est encore un Dürer de somme 80; il est formé de seize entiers différents dont un seul est négatif. M^{-1} est magique de somme $\frac{1}{80}$. Comment avons-nous trouvé M ?

Avec MATHEMATICA, nous avons d'abord inversé la structure générale M des Dürer. Puis nous avons fait la somme des termes de chaque grande diagonale de l'inverse pour obtenir S_1 *et* S_2. Nous avons ensuite posé :

$$(\&) \qquad S_1 = \frac{1}{S} \ ; \ S_2 = \frac{1}{S}$$

Nous avons donné les valeurs suivantes aux variables suivantes :

$$c = 9 \ ; \ d = 8 \ ; \ f = 13 \ ; \ g = 14 \ ; \ S = 80$$

Nous avons ensuite isolé la variable a dans chacune des équations (&). Nous avons obtenu :

$$a = -8 + 2\sqrt{b+180} \ et \ a = 22 + \frac{2\sqrt{b-73}}{\sqrt{3}}$$

Et enfin, l'équation : $-8 + 2\sqrt{b+180} = 22 + \frac{2\sqrt{b-73}}{\sqrt{3}}$ donne $b = 76 \ ou \ b = 661.$

$b = 76$ donne $a = 24$ et $b = 661$ donne $a = 50$ (premier exemple ci-haut). Par contre, le deuxième exemple est obtenu avec :

$$c = 10 \ ; \ d = 8 \ ; \ f = 13 \ ; \ g = 14 \ ; \ S = 80$$

L'équation : $a = -5 + 2\sqrt{2}\sqrt{b+54} = \frac{67 + 2\sqrt{6b-263}}{3}$

donne : $b = 44 \ et \ a = 23 \ puis \ b = \frac{621}{2} \ et \ a = 49.$

Pour le deuxième exemple ci-haut, nous avons choisi $b = 44 et \, a = 23.$ Cela nous assure que M renferme seulement des entiers.

Avec les valeurs $c = 11,12,13,14,15,16$, nous trouvons b, un rationnel non entier. Donc M ne sera pas formé que d'entiers.

Plus l'ordre du carré est grand, plus il est difficile de rendre M inversible en tant que carré magique.

La dernière question : pouvons-nous trouver un Dürer M tel que M^{-1} soit aussi un Dürer? La réponse est oui!!!

En procédant de façon semblable, voici un Dürer M dont l'inverse M^{-1} est aussi un Dürer!!!

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 14 & 13 & 45 & 8 \\ 8 & 45 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 8 & 45 \\ 45 & 8 & 14 & 13 \end{pmatrix}} \qquad \underset{M^{-1}}{\frac{1}{711360}\begin{pmatrix} -4877 & -557 & -4357 & 18683 \\ -4357 & 18683 & -4877 & -557 \\ 18683 & -4357 & -557 & -4877 \\ -557 & -4877 & 18683 & -4357 \end{pmatrix}}$$

M est un Dürer de somme 80. C'est aussi un carré latin diagonal. Il renferme quatre entiers, chacun apparaissant quatre fois. M^{-1} est aussi un Dürer de somme $\frac{1}{80}$. C'est également un carré latin diagonal. Notez que M suggère le Dürer général P qui suit et qui est un carré latin diagonal :

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Ce carré latin diagonal P est un Dürer. Qu'en est-il de son inverse? Trouvons d'abord le déterminant de P.

$Det(P) = (A+B-C-D)(A-B+C-D)(A-B-C+D)(A+B+C+D)$. Si $Det(P) \neq 0$, alors nous pouvons trouver P^{-1}. Puisque P est un Dürer, alors nous savons que P^{-1} est déjà semi-magique. Il reste à faire la somme des cases des deux grandes diagonales et la somme des quatre cases du sous-carré 2 x 2 dans le coin haut gauche et de s'assurer que la somme est bien $\frac{1}{A+B+C+D}$. C'est exactement ce qui arrive et P^{-1} est un Dürer!!!

Notez que MATHEMATICA nous donne $Det(M)$ sous la forme d'un polynôme du quatrième degré en $A, B, C\ et\ D$. Pour arriver à la décomposition ci-haut, nous utilisons la commande FullSimplify de MATHEMATICA. Nous faisons de même lorsque, par exemple, nous additionnons les quatre cases de la grande diagonale principale. Le numérateur doit être décomposé en facteurs avec cette même commande.

Ainsi, pour la grande diagonale principale, nous avons obtenu :

$$\frac{(A+B-C-D)(A-B+C-D)(A-B-C+D)}{(A+B-C-D)(A-B+C-D)(A-B-C+D)\ (A+B+C+D)} = \frac{1}{A+B+C+D} = \frac{1}{S}.$$

Il en sera de même avec la grande diagonale secondaire et avec le sous-carré 2x2 dans le coin haut gauche.

Remarque : décomposer soi-même en facteurs le déterminant demande un bon tour de force technique!!! Si l'ordre du carré est 7200, par exemple, alors j'ose parler d'impossibilité de décomposer le déterminant en facteurs linéaires!!!

Terminons avec un dernier exemple avant de passer à un tout autre produit :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{M^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

où $M\ et\ M^{-1}$ sont des Dürer et $Det(M) = Det(M^{-1}) = S = S^{-1} = 1.$

Nous constatons bien que l'inverse d'un carré semi-magique ou magique n'est pas, en général, un beau carré. Ceux-ci renferment des nombres non entiers et même des nombres négatifs.

Nous avons utilisé jusqu'à maintenant le produit matriciel mais pourrions-nous prendre un autre produit? Par exemple, le produit terme à terme. Cela signifie que si A et B sont des carrés d'ordre n, alors l'élément $c_{i\,j}$ de AB, également d'ordre n, n'est rien d'autre que le produit $a_{i\,j}b_{i\,j}$ où $a_{i\,j}$ est dans A et $b_{i\,j}$ est dans B.

Mais si A et B sont magiques, qu'en est-il du produit A B ?

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A

5	10	3
4	6	8
9	2	7

B

20	90	6
12	30	56
72	2	42

A B

Ce n'est pas une surprise de constater que A B n'est pas un carré magique, ni même semi-magique.

Nous n'allons pas utiliser ce produit avec les carrés magiques mais nous allons nous en servir avec les carrés multiplicatifs. Voir le chapitre 15. Dans un carré multiplicatif, le produit des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est toujours le même soit P, appelé produit magique ou simplement produit.

16	512	4
8	32	128
256	2	64

C

32	1024	8
16	64	256
512	4	128

D

512	524 288	32
128	2048	32 768
131 072	8	8192

F

Vous pouvez vérifier que ces trois carrés sont bien multiplicatifs et que F = C D. De plus, le produit de C est 32 768, celui de D est 262 144 et celui de F, 8 589 934 592 et bien entendu,

nous trouvons : **(produit de C) x (produit de D) = produit de F.**

L'explication est toute simple car ces carrés peuvent se mettre sous la forme suivante :

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

C

2^5	2^{10}	2^3
2^4	2^6	2^8
2^9	2^2	2^7

D

2^9	2^{19}	2^5
2^7	2^{11}	2^{15}
2^{17}	2^3	2^{13}

F

Le produit de C est bien 32 768 = 2^{15}.

Le produit de D est bien 262 144 = 2^{18}.

Le produit de F est bien 8 589 934 592 = 2^{33}.

Une loi des exposants nous dit que $2^{15} \times 2^{18} = 2^{33}$.

Observez les exposants dans C et les entiers dans A. De même avec D et B.

Vous pouvez voir comment nous avons construit C et D à partir de A et B. Comment retrouver A et B à partir de C et D; à vous d'y répondre.

C'est ce nouveau produit qui nous permettra de montrer l'étroite relation qui existe entre les carrés magiques et les carrés multiplicatifs!!!

9.6 Problèmes

1) Revenez à l'observation faite dans 9.3, juste au-dessus du théorème 9.3, et démontrez que celle-ci est vraie pour tout entier $k \geq 3$.
2) Soit A, un diabolique de somme S. Que pouvons- nous dire de $A^{111222333444555}$? Est-il magique? Si oui, quelle est sa somme magique? Est-il un diabolique?
3) Que dire des puissances paires d'un diabolique?
4) Soient $A et\ B$, deux Dürer. Que pouvons-nous dire du produit AB^2 ?
5) Dans la preuve du théorème 9.2, montrez que $AB = BA$.
6) Avec la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5 (voir 6.3), construisez $A et\ B$ en posant : pour A : a = 1, b = 15, c = 22, f = 19, k = 13 et pour B : a = 2, b = 16, c = 23, f = 20, k = 14. Vérifiez que $AB^2\ et\ A^2B$ sont des ultra-magiques. Trouvez $AB et\ B^2$. Qu'observez-vous?
7) Montrez que si $A et\ B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors A^3B^8 et A^7B^{30} sont des ultra-magiques.

8) Un carré magique d'ordre 2 est-il inversible? Un carré semi-magique d'ordre 2 est-il inversible?
9) Un carré magique d'ordre 1 est-il inversible?
10) Soit donné M , un carré semi-magique de somme S et d'ordre $n \geq 3$, formé seulement d'entiers avec $Det(M) = \pm 1$. Montrez qu'alors $S = \pm 1$ et que l'inverse de M est un carré semi-magique formé seulement d'entiers dont la somme magique est aussi ± 1.
11) Soit M, un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers avec $Det(M) \neq 0$. Montrez que $Det(M) \neq \pm 1$.
12) Un A-Dürer M est de somme S = 64.
    a) Le carré M^{35} est-il un A-Dürer?
    b) Si oui, quelle est sa somme?
13) M est un A-Dürer de somme 64. Que pouvons-nous dire de M^{24} ? Quelle est sa somme s'il y a lieu?
14) $A et B$ sont des super-Dürer-bêta. Montrez que $AB^2 = B^2A$.
15) $A et B$ sont des ultra-magiques quelconques d'ordre 5. AB^2 possède-t-il les quatorze super-figures et les deux ultra-figures présentées dans la section 6.3?
16) Soient M et N , deux super-Dürer définis par a = 21, b = 18, c = 22, d = 27, S = 120 pour N et a = 20, b = 17, c = 21, d = 16, S = 102 pour M . Montrez que les procédés AB^2 et A^2B ne sont pas les mêmes. Trouvez ensuite M^5.

10. Carrés magiques premiers

10.1 Introduction

En général, les carrés magiques sont formés d'entiers positifs tous différents deux à deux; certains renferment tous les entiers consécutifs de 1 à n^2. Mais que dire d'un carré magique qui renferme que des nombres premiers tous différents et dont la somme magique est elle même un nombre premier?

Si un carré magique contient que des nombres premiers, alors nous dirons que ce carré magique est un **carré premier.** Si en plus, la somme d'un carré premier est un nombre premier, alors nous dirons que ce carré est **super-premier.** Notre premier objectif est de trouver des carrés premiers presque normaux. Les carrés magiques 3 et 10 de la partie 1 sont de tels carrés.

Nous allons tenter de construire trois types de carrés premiers d'ordre n :

1. Les **carrés premiers ordinaires** qui seront formés de n^2 nombres premiers quelconques.
2. Les **carrés premiers parfaits** qui seront formés de n^2 nombres premiers consécutifs.
3. Les **carrés hyper-premiers** qui seront formés de n^2 nombres premiers tels que ceux-ci forment une suite arithmétique non triviale (de raison non nulle).

Rappelons qu'un nombre premier est un entier ≥ 2 qui ne possède que deux diviseurs entiers distincts ≥ 1 donc qui n'est divisible que par 1 et lui-même. En conséquence, 1 n'est pas un nombre premier. Voici la liste des 17 premiers nombres premiers :

$$\{2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23\ ;\ 29\ ;\ 31\ ;\ 37\ ;\ 41\ ;\ 43\ ;\ 47\ ;\ 53\ ;\ 59...\}$$

Tous les nombres premiers, excepté 2, sont impairs. Le théorème fondamental de l'arithmétique, quant à lui, nous apprend que tout entier naturel ≥ 2 qui n'est pas un nombre premier, se décompose en un produit de nombres premiers et ce, de façon unique à l'ordre près des facteurs. Comme exemples :

$$4 = 2\times 2\ \ ;\ \ 30 = 2\times 3\times 5 = 3\times 5\times 2\ \ ;\ \ 5678 = 2\times 17\times 167$$

10.2 Carrés premiers ordinaires

Nous avons fabriqué un programme dans MAPLE qui nous permet de construire des carrés premiers ordinaires d'ordres 3, 4 et 5. Voici l'idée : à partir d'une liste de nombres premiers, nous construisons des carrés et retenons seulement ceux qui sont magiques et sans répétition. Vous le trouverez dans la Partie 3, annexe 23.

Voici trois exemples de carrés premiers presque normaux:

(1) $\begin{pmatrix} 43 & 67 & 109 \\ 139 & 73 & 7 \\ 37 & 79 & 103 \end{pmatrix}$

$S = 219$

(2) $\begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix}$

$S = 336$

(3) $\begin{pmatrix} 17 & 73 & 59 & 13 & 151 \\ 79 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 83 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 7 \\ 23 & 11 & 89 & 149 & 41 \end{pmatrix}$

$S = 313$

Le premier (1), d'ordre 3, a pour somme 219, un nombre non premier.

Le deuxième (2), d'ordre 4, a pour somme 336, un nombre non premier.

Le troisième (3), d'ordre 5, a pour somme 313, un **nombre premier**.

Il est déjà très impressionnant d'avoir un carré magique formé de nombres premiers tous différents mais lorsque la somme magique est encore un nombre premier, cela est presque du domaine de la magie!!!

Quand pouvons-nous obtenir une somme magique qui est un nombre premier?

Comme nous avons vu au chapitre 4, les carrés magiques d'ordre 1 ne nous intéressent pas vraiment. Ils se confondent avec les nombres réels et si un tel carré renferme un nombre premier p, alors il est clair que la somme sera le nombre premier p.

Les carrés magiques d'ordre 2 sont tous triviaux et si l'un d'eux renferme le nombre premier p, alors la somme magique sera 2 p qui n'est pas un nombre premier puisque $p \geq 2$. Donc aucun carré magique d'ordre 2 formé de nombres premiers ne peut avoir comme somme, un nombre premier.

Quant aux carrés magiques d'ordre 3, nous savons que le nombre central est toujours $\frac{S}{3}$. Si ce nombre est le nombre premier p, alors $S = 3p$ qui n'est jamais un nombre premier puisque $p \geq 2$. La somme d'un carré magique d'ordre 3 ne sera jamais un nombre premier si le nombre central est un nombre premier.

Théorème 10.1 :

La somme d'un carré magique d'ordres 2 ou 3, formé que de nombres premiers, n'est jamais un nombre premier.

Le deuxième objectif que nous poursuivons est la construction d'un carré super-premier presque normal d'ordre n. Nous aurons donc :

$$n \geq 4$$

Théorème 10.2 :

Soit un carré super-premier presque normal d'ordre $n \geq 4$. Alors n est un entier impair ≥ 5.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer que si n est un entier pair ≥ 4, alors la somme n'est jamais un nombre premier. En effet, chaque rangée ne peut pas contenir le nombre 2 et donc, est formée d'un nombre pair de nombres impairs. Ainsi, la somme magique est un entier pair, évidemment > 2, lequel n'est pas un nombre premier. Si nous voulons construire un carré magique formé que de nombres premiers différents dont la somme est un nombre premier, alors il faudra que l'ordre du carré soit un entier impair ≥ 5.

Maintenant, si n est un entier impair ≥ 5, sommes-nous assurés de pouvoir trouver un carré magique formé de nombres premiers différents dont la somme est un nombre premier? Nous n'avons pas la réponse à cette question mais cependant, nous savons que cela est possible pour $n = 5, 7\ et\ 11$. Pour cela, il suffit de regarder les trois premiers carrés premiers de 10.3. Voici deux autres carrés super-premiers presque normaux d'ordre 5:

$$\begin{pmatrix} 211 & 47 & 67 & 71 & 257 \\ 73 & 89 & 113 & 127 & 251 \\ 131 & 139 & 149 & 181 & 53 \\ 137 & 19 & 227 & 191 & 79 \\ 101 & 359 & 97 & 83 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 193 & 5 & 17 & 83 & 349 \\ 89 & 103 & 107 & 109 & 239 \\ 113 & 157 & 163 & 173 & 41 \\ 229 & 3 & 223 & 181 & 11 \\ 23 & 379 & 137 & 101 & 7 \end{pmatrix}$$

$$S = 653 \qquad\qquad S = 647$$

Les cinq carrés premiers que nous venons de voir sont ordinaires. Seulement les 3 derniers sont des super-premiers. Ils sont tous presque normaux.

10.3 Carrés premiers parfaits

Nous avons trouvé sur le site (*) suivant, que nous recommandons fortement :

(*) *http://digilander.libero.it/ice00/magic/prime/orderConstant.html*

le très beau carré magique d'ordre 5 formé de vingt-cinq nombres premiers consécutifs allant de 13 à 113; sa somme magique est le nombre premier 313. Puis un carré magique d'ordre 7

formé de quarante-neuf nombres premiers consécutifs allant de 7 à 239; sa somme est le nombre premier 797. Les voici :

$$\begin{pmatrix} 59 & 107 & 71 & 23 & 53 \\ 13 & 37 & 113 & 61 & 89 \\ 43 & 41 & 83 & 79 & 67 \\ 101 & 19 & 17 & 103 & 73 \\ 97 & 109 & 29 & 47 & 31 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 109 & 29 & 151 & 211 & 157 & 13 & 127 \\ 197 & 229 & 83 & 23 & 103 & 31 & 131 \\ 67 & 11 & 89 & 227 & 163 & 233 & 7 \\ 113 & 139 & 61 & 107 & 37 & 239 & 101 \\ 191 & 47 & 179 & 167 & 17 & 137 & 59 \\ 79 & 149 & 181 & 19 & 97 & 73 & 199 \\ 41 & 193 & 53 & 43 & 223 & 71 & 173 \end{pmatrix}$$

$S = 313$ $\qquad$ $S = 797$

Enfin, toujours sur le même site, voici un carré magique d'ordre 11 formé de 121 nombres premiers consécutifs allant de 67 à 797; sa somme est le nombre premier 4507.

449	521	373	271	263	727	71	547	619	97	569
661	593	337	239	269	163	151	677	367	463	587
601	109	137	607	307	577	397	691	409	421	251
457	233	769	479	659	223	487	67	101	541	491
167	509	139	653	701	181	257	227	571	599	503
73	439	733	431	797	523	191	761	229	89	241
641	197	179	317	149	617	443	199	643	773	349
131	467	743	563	283	79	709	379	433	331	389
757	419	557	173	293	683	401	157	107	499	461
359	739	193	127	113	631	613	719	277	383	353
211	281	347	647	673	103	787	83	751	311	313

$S = 4507$

Ces trois carrés magiques sont super-premiers parfaits. Ils sont évidemment presque normaux. Nous trouvons, sur ce site, des carrés premiers parfaits d'ordre 4 à 63. Extraordinaire!!!

Nous avons construit un programme dans MAPLE qui nous permet de trouver des carrés premiers parfaits d'ordre 4. Dans la liste des nombres premiers énumérés dans l'ordre, à partir du plus petit à gauche, choisissons une suite de16 nombres consécutifs. Si nous commençons par le premier, soit 2, ce sera la suite 1; si nous commençons par le deuxième, soit 3, ce sera la suite 2, etc.

Pour les suites de 1 à 10, il est impossible de construire un carré magique, ce qui est évident avec la suite 1. Pour les suites de 2 à 10, notre programme montre qu'il n'existe aucun carré magique. Nous devons donc passer à la suite 11 qui va de 31 à 101. Nous avons trouvé trente-deux carrés magiques soient quatre primitifs et leurs équivalents (4 x 8 = 32). Ce sont les seuls et Ils ont tous la même somme $S = 258$. Les voici :

37	53	89	79
83	61	67	47
97	71	59	31
41	73	43	101

S = 258

37	97	83	41
89	59	67	43
53	71	61	73
79	31	47	101

S = 258

59	31	97	71
43	101	41	73
89	79	37	53
67	47	83	61

S = 258

59	97	31	71
89	37	79	53
43	41	101	73
67	83	47	61

S = 258

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 10.3 :

Si un carré magique d'ordre 4 renferme **seize nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 258$. De plus, si $S = 258$, alors les seize nombres premiers du carré vont obligatoirement de 31 à 101.

Nous avons donc trouvé les quatre premiers carrés premiers parfaits primitifs d'ordre 4. Ils ont la plus petite somme possible!!! Si nous avons un autre carré premier parfait différent des 32 que nous avons trouvés, alors sa somme sera >258.

Nous avons ensuite pris la suite 12, laquelle commence par 37. Nous avons trouvé soixante-quatre carrés magiques soient huit primitifs et leurs équivalents (8 x 8 = 64). Ce sont les seuls et ils ont tous la même somme soit $S = 276$.

Puis, nous avons pris les suites 13 à 620 000, ce qui nous a permis de trouver 224 nouveaux carrés magiques soient 28 nouveaux primitifs (28 x 8 = 224).

Donc, avec les suites 1 à 620 000, nous avons montré qu'il n'existe que 40 carrés premiers parfaits primitifs.

Le tableau suivant est complété dans l'annexe 8 :

Suites		Nombre de premiers parfaits	Nombre de primitifs
1 à 10		0	0
11	(3)	32	**4**
12	(4)	64	**8**
13 à 200		0	0
201	(5)	96	**12**
202 à 657		0	0
658	(3)	32	**4**
659 à 1499		0	0
1500	(1)	32	4
1501 à 234 231		0	0
234 232	(2)	32	4
234 233 à 238 518		0	0
238 519	(1)	32	4
238 520 à 620 000		0	0

En rouge, nous avons indiqué le nombre de couples de nombres premiers jumeaux de la suite.

Nous voyons que parmi les 620 000 premières suites, seulement sept nous donnent au total 40 carrés premiers parfaits primitifs soient 320 carrés premiers parfaits (40 x 8 = 320). Les suites qui donnent des carrés premiers parfaits d'ordre 4 semblent être extrêmement rares!!!

0 11(4) 12(8) 201(12) 658(4) 1 500(4) 234232(4) 238519(4) 620 000

Le programme que nous avons construit dans MAPLE nous montre que parmi les suites de 1 à 620 000, seulement sept conduisent à des carrés premiers parfaits!!! Ce sont les suites 11, 12, 201, 658, 1500, 234 232 et 238 519. Au grand total, seulement quarante carrés premiers parfaits primitifs. Que se passe-t-il avec les suites 620 001 et plus? Nous avons arrêté nos recherches à la suite 620 000. Notre programme **« Premiers parfaits-4 »** dans la Partie 3, annexe 23, programme 07. À vous de continuer avec les suites 620 001 et plus. Allez-vous trouver d'autres carrés premiers parfaits? Nous n'en savons rien pour le moment. Si vous en trouvez, n'hésitez pas à nous les communiquer. Voici maintenant les huit carrés premiers parfaits primitifs de somme S = 276 :

43	83	89	61
59	79	97	41
103	47	53	73
71	67	37	101

S = 276

61	83	89	43
73	47	53	103
41	79	97	59
101	67	37	71

S = 276

61	103	71	41
53	47	79	97
89	83	67	37
73	43	59	101

S = 276

79	59	41	97
83	43	61	89
67	71	101	37
47	103	73	53

S = 276

79	97	53	47
71	41	61	103
59	101	73	43
67	37	89	83

S = 276

83	37	89	67
103	41	61	71
43	101	73	59
47	97	53	79

S = 276

97	59	41	79
37	71	101	67
89	43	61	83
53	103	73	47

S = 276

101	97	37	41
43	47	83	103
59	79	67	71
73	53	89	61

S = 276

Parmi toutes les suites, nous éliminons celles qui ont pour somme un entier non multiple de 8 (Voir problème 10 de 10.6). Ainsi, la suite 13 qui va de 41 à 107 a pour somme 1174 qui n'est pas divisible par 8. Cette suite ne peut donc pas conduire à un carré magique. Que la somme soit un multiple de 8 est une condition nécessaire mais non suffisante pour que la suite nous mène à un carré magique. **Nous vous suggérons fortement l'annexe 8 qui complète le tableau.**

Existe-t-il un carré premier parfait pour tous les ordres $n \geq 64$?

Voilà une grande question pour laquelle nous n'avons pas de réponse. Quant au carré premier parfait d'ordre 3, celui-ci a été trouvé en 1988 par Harry L. Nelson. Il est formé de neuf nombres premiers consécutifs dont le plus petit est 1 480 028 129. Les neuf nombres premiers sont tous de dix chiffres. Harry Nelson a ainsi reçu le prix de cent dollars offert par Martin Gardner à celui qui trouverait le premier carré premier parfait d'ordre 3. Vous trouverez ce carré sur le site «multimagie.com» de Christian Boyer; nous l'avons reproduit dans la section 10.5.

Si un carré premier est d'ordre pair ≥ 4, sa somme peut-elle être un nombre premier si nous acceptons que les nombres premiers qui composent ce carré ne soient pas tous différents? La réponse est OUI.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 & 19 \\ 17 & 13 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 17 & 11 \\ 11 & 19 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$S = 37$$

Ce carré magique d'ordre 4 est super-premier mais n'est pas presque normal. Nous avons : quatre 2, un 3 et un 7, deux 5, deux 11, deux 13, deux 17 et deux 19. Ce carré renferme les huit premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Nous venons de voir qu'un carré premier parfait d'ordre 4 a pour plus petite somme l'entier 258. Si les nombres premiers ne sont pas consécutifs, alors quelle serait la plus petite somme d'un carré premier presque normal d'ordre 4? La somme peut-elle être plus petite que 258? La réponse est oui. Nous avons trouvé le carré premier presque normal suivant, de somme 120. De plus, sa fréquence est $f(120) = 44$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 37 & 19 & 61 \\ 67 & 31 & 5 & 17 \\ 7 & 11 & 73 & 29 \\ 43 & 41 & 23 & 13 \end{pmatrix}$$
$$S = 120$$

Considérons la suite des vingt-cinq nombres premiers consécutifs allant de 3 à 101. Nous allons en choisir seize parmi les vingt-cinq. Nous obtenons ainsi $C_{16}^{25} = 2\ 042\ 975$ suites de seize nombres premiers différents et les deux conditions suivantes :

1) Dans chaque suite, la somme des seize nombres premiers doit être divisible par 8.
2) Dans chaque suite, la somme des seize nombres premiers doit être ≤ 480.

Nous voulons fabriquer un carré premier presque normal dont la somme sera la plus petite. L'addition de seize nombres premiers impairs doit être divisible par 4 car la somme magique est un entier. De plus, la somme magique est paire car elle est la somme de quatre impairs. Voilà pourquoi la somme des seize nombres premiers doit être divisible par 8.

En additionnant les seize premiers nombres premiers à partir de 3, il est facile de conclure que la somme magique est ≥ 110. Mais le carré ci-haut a pour somme magique 120. Ainsi, la plus petite somme cherchée S vérifie :

$$110 \leq S \leq 120$$

Et voilà pourquoi la somme des seize nombres premiers doit être $\leq 480 = 4 \times 120$.

Notre programme dans MAPLE nous donne trente-deux suites qui vérifient les deux conditions. Chaque suite est susceptible de nous conduire à un carré magique. Mais seulement deux suites vont nous donner des carrés magiques.

Nous avons :

Suite(s) de somme :	somme magique correspondante :	carrés magiques obtenus :
440 (1 seule suite)	110	0
448 (aucune)	112	0
456 (deux)	114	0
464 (six)	116	0
472 (sept)	118	0
480 (seize)	120	128

Les deux suites de somme 480 qui génèrent les 128 carrés premiers presque normaux sont :

$$Suite\ A: \quad \{3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;61;67;73\}$$
$$Suite\ B: \quad \{3;5;7;11;13;17;19;23;31;37;41;43;47;53;59;71\}$$

La suite A génère 96 carrés premiers presque normaux donc douze primitifs.

La suite B génère 32 carrés premiers presque normaux donc quatre primitifs.

En tout : cent vingt-huit carrés premiers presque normaux donc seize primitifs, générés par deux des trente deux suites de seize nombres premiers distincts, choisis parmi les vingt-cinq nombres premiers allant de 3 à 101.

Le tableau ci-haut montre que la plus petite somme magique est 120. De plus, il n'existe que 128 carrés premiers presque normaux de somme magique 120.

Terminons avec cette question : pourquoi avoir choisi les nombres premiers de 3 à 101? N'oublions pas que nous voulons trouver tous les carrés premiers presque normaux dont la somme est la plus petite, soit 120 selon le tableau. Il nous faut donc une suite de seize nombres premiers dont la somme est 480. Or il existe une suite particulière de somme 480 formée de seize nombres premiers parmi les nombres allant de 3 à 101 :

$$\{3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;47;53;101\}$$

Les nombres premiers en rouge sont les quinze premiers donc les quinze plus petits nombres premiers impairs (le nombre 2 est premier mais ne peut pas faire partie d'un carré premier presque normal d'ordre ≥ 3).

Si nous prenons une suite de seize nombres premiers distincts dont certains sont ≥ 103, alors la somme de la suite est >480 (voir le problème 6 de 10.6). La somme magique est donc >120. Voilà pourquoi pour construire un carré premier presque normal de somme 120, nous devons prendre nos nombres premiers ≤ 101. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 10.4 :

Si M est un carré premier presque normal d'ordre 4, alors $S \geq 120$. De plus, il existe seulement cent vingt-huit carrés premiers presque normaux d'ordre 4 de somme 120, soit seize primitifs.

Voici donc, à partir des 128 carrés premiers presque normaux d'ordre 4, les seize primitifs :

$$\begin{pmatrix} 11 & 7 & 29 & 73 \\ 17 & 67 & 13 & 23 \\ 61 & 3 & 37 & 19 \\ 31 & 43 & 41 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 37 & 19 & 61 \\ 67 & 31 & 5 & 17 \\ 7 & 11 & 73 & 29 \\ 43 & 41 & 23 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 7 & 29 & 73 \\ 41 & 43 & 13 & 23 \\ 37 & 3 & 61 & 19 \\ 31 & 67 & 17 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 29 & 7 & 73 \\ 37 & 61 & 3 & 19 \\ 41 & 13 & 43 & 23 \\ 31 & 17 & 67 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 29 & 7 & 73 \\ 61 & 37 & 3 & 19 \\ 17 & 13 & 67 & 23 \\ 31 & 41 & 43 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 17 & 23 & 67 \\ 41 & 31 & 5 & 43 \\ 29 & 11 & 73 & 7 \\ 37 & 61 & 19 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 17 & 29 & 61 \\ 41 & 31 & 11 & 37 \\ 23 & 5 & 73 & 19 \\ 43 & 67 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 23 & 17 & 67 \\ 29 & 73 & 11 & 7 \\ 41 & 5 & 31 & 43 \\ 37 & 19 & 61 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 41 & 29 & 37 \\ 31 & 17 & 61 & 11 \\ 73 & 19 & 23 & 5 \\ 3 & 43 & 7 & 67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 41 & 43 & 17 \\ 5 & 37 & 67 & 11 \\ 73 & 13 & 3 & 31 \\ 23 & 29 & 7 & 61 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 43 & 41 & 17 \\ 73 & 3 & 13 & 31 \\ 5 & 67 & 37 & 11 \\ 23 & 7 & 29 & 61 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 & 5 & 11 & 67 \\ 41 & 19 & 17 & 43 \\ 29 & 23 & 61 & 7 \\ 13 & 73 & 31 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 47 & 3 & 53 & 17 \\ 43 & 5 & 13 & 59 \\ 11 & 71 & 31 & 7 \\ 19 & 41 & 23 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 47 & 53 & 3 & 17 \\ 11 & 31 & 71 & 7 \\ 43 & 13 & 5 & 59 \\ 19 & 23 & 41 & 37 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 71 & 3 & 41 & 5 \\ 7 & 17 & 37 & 59 \\ 11 & 47 & 19 & 43 \\ 31 & 53 & 23 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 71 & 41 & 3 & 5 \\ 11 & 19 & 47 & 43 \\ 7 & 37 & 17 & 59 \\ 31 & 23 & 53 & 13 \end{pmatrix}$$

Les douze premiers carrés (en noir) sont obtenus à partir de la suite A tandis que les quatre derniers (en rouge) sont obtenus à partir de la suite B. Ils sont tous de somme magique 120.

Nous dirons que les quatre derniers sont **les «meilleurs» carrés premiers primitifs presque normaux d'ordre 4** car ils ont la plus petite somme 120 et ils ont tous 71 comme plus grand nombre alors que les douze premiers, également de somme 120, ont tous 73 comme plus grand nombre.

Nous pouvons aussi dire que les quatre derniers sont **les plus petits carrés premiers primitifs presque normaux d'ordre 4.**

Terminons avec les carrés premiers parfaits d'ordre 5. Les suites de nombres premiers consécutifs renfermeront 25 nombres. Comme pour l'ordre 4, la suite 1 commence par 2, la suite 2 commence par 3, la suite 3 commence par 5 et ainsi de suite. La suite 1 est à rejeter car elle renferme le seul nombre premier pair ce qui implique quatre rangées de sommes impaires et une rangée de somme paire; le carré ne peut donc pas être magique. Les suites 2 à 5 conduisent à des sommes magiques qui ne sont pas des entiers, ce qui est absurde. Mais la suite

6, qui commence par 13, nous donne 313 comme somme magique. De plus, nous avons fait un programme dans MAPLE qui nous donne des carrés premiers parfaits de somme 313.

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 10.5 :

Si un carré magique d'ordre 5 renferme **25 nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 313$. De plus, nous connaissons des carrés premiers parfaits de somme $S = 313$.

En voici quelques-uns :

$$\begin{pmatrix} 13 & 89 & 31 & 79 & 101 \\ 43 & 103 & 23 & 37 & 107 \\ 113 & 41 & 83 & 47 & 29 \\ 71 & 19 & 67 & 97 & 59 \\ 73 & 61 & 109 & 53 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 109 & 47 & 71 & 73 \\ 37 & 103 & 41 & 31 & 101 \\ 67 & 59 & 83 & 61 & 43 \\ 89 & 19 & 29 & 97 & 79 \\ 107 & 23 & 113 & 53 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 113 & 31 & 53 & 19 & 97 \\ 41 & 17 & 107 & 101 & 47 \\ 59 & 109 & 13 & 89 & 43 \\ 71 & 73 & 79 & 67 & 23 \\ 29 & 83 & 61 & 37 & 103 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 41 & 107 & 47 & 101 \\ 31 & 113 & 53 & 97 & 19 \\ 109 & 59 & 13 & 43 & 89 \\ 83 & 29 & 61 & 103 & 37 \\ 73 & 71 & 79 & 23 & 67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 59 & 101 & 47 & 89 \\ 103 & 61 & 37 & 71 & 41 \\ 97 & 107 & 13 & 53 & 43 \\ 23 & 67 & 79 & 113 & 31 \\ 73 & 19 & 83 & 29 & 109 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 41 & 107 & 47 & 101 \\ 83 & 113 & 67 & 31 & 19 \\ 79 & 29 & 13 & 103 & 89 \\ 37 & 71 & 53 & 109 & 43 \\ 97 & 59 & 73 & 23 & 61 \end{pmatrix}$$

Ces six carrés premiers parfaits renferment tous les nombres premiers consécutifs allant de 13 à 113 et ils ont tous la même somme magique 313. De plus, ils sont primitifs, deux ont 83 comme centre et quatre ont 13 pour centre. Ils sont des super-premiers puisque 313 est un nombre premier.

Le carré (3) de 10.2 est aussi un carré super-premier puisque sa somme est 313 mais il n'est pas parfait. C'est un super-premier presque normal.

Pour établir les sommes magiques en fonction du rang k de la suite formée de n^2 nombres premiers consécutifs, nous avons utilisé la commande suivante dans MATHEMATICA :

$$(**) \qquad Table[\sum_{i=k}^{k+n^2-1} \frac{\Pr ime[i]}{n}, \{k, 2, 30\}]$$

Ainsi, avec $n = 5$, nous trouvons :

$$Table[\sum_{i=k}^{k+24} \frac{\Pr ime[i]}{5}, \{k, 2, 30\}]$$

et les sommes suivantes :

$$\frac{1159}{5}, \frac{1259}{5}, \frac{1361}{5}, \frac{1463}{5}, 313, \frac{1679}{5}, \ldots$$

Nous voyons que 313 est obtenu à partir de la suite 6.

Nous dirons que les «meilleurs» carrés premiers parfaits d'ordre 5 sont ceux dont la somme est 313.

En procédant de façon semblable, nous trouvons le :

Théorème 10.6 :

La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 6 vérifie $S \geq 484$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 6 de somme $S = 484$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 7 vérifie $S \geq 797$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 7 de somme $S = 797$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 8 vérifie $S \geq 2016$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 8 de somme $S = 2016$.

Pour trouver un carré premier parfait d'ordre 6, 7 ou 8, il suffit de consulter le site (*) de 10.3. Celui-ci montre l'existence d'un carré premier parfait pour tous les ordres allant de 4 à 63 inclusivement!!!

Pour n = 100, nous utiliserons la commande (**) ci-haut en faisant varier k de 2 à 600, ce qui donne :

La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 100 vérifie $S \geq 5064634$. La suite 99, qui commence par 523, est la première suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 064 634. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

La suite 395, qui commence par 2711, est la deuxième suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 378 536. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

La suite 509, qui commence par 3637, est la troisième suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 500 324. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

La suite 589, qui commence par 4289, est la quatrième suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 586 086. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

C'est déjà extraordinaire d'avoir des carrés premiers parfaits pour tous les ordres n tel que :

$$3 \leq n \leq 63$$

Enfin, pouvons-nous trouver un carré premier presque normal d'ordre 5 qui a une somme inférieure à 313?

Nous savons qu'il existe un carré premier presque normal (non parfait) de somme 313. C'est le carré (3) de 10.2. Pouvons-nous trouver une somme strictement inférieure à 313?

Nous voulons construire un carré premier presque normal d'ordre 5 dont la somme est la plus petite. Or la plus petite somme de vingt-cinq nombres premiers distincts, en excluant 2, est 1159, qui n'est pas divisible par 5. Un carré premier presque normal ne peut pas avoir pour somme le nombre 1159/5 = 231,8. De plus, sa somme doit être un entier impair car elle provient de l'addition de cinq impairs. D'où le résultat suivant :

Théorème 10.7 :

La somme d'un carré premier presque normal d'ordre 5 vérifie $S \geq 233$.

Il existe une suite de 25 nombres premiers distincts qui a pour somme le nombre 5X233 = 1165. Celle-ci renferme les 24 nombres premiers consécutifs allant de 3 à 97 et le nombre 107. Vous pouvez en trouver une deuxième, laquelle? Il reste à vérifier si ces suites nous permettent deconstruire des carrés magiques. La réponse est oui avec la suite qui contient les nombres premiers de 3 à 97 et le nombre 107. Nous avons trouvé les deux suivants de somme 233 :

$$\begin{pmatrix} 89 & 7 & 59 & 41 & 37 \\ 17 & 29 & 67 & 97 & 23 \\ 61 & 43 & 3 & 79 & 47 \\ 53 & 83 & 73 & 5 & 19 \\ 13 & 71 & 31 & 11 & 107 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 29 & 23 & 67 & 17 & 97 \\ 71 & 107 & 31 & 13 & 11 \\ 43 & 47 & 3 & 61 & 79 \\ 7 & 37 & 59 & 89 & 41 \\ 83 & 19 & 73 & 53 & 5 \end{pmatrix}$$

La plus petite somme d'un carré premier presque normal d'ordre 5 est $S = 233$.

Les deux carrés ci-haut ont pour somme 233. Le plus petit nombre premier est 3 et le plus grand, 107.

Pouvons-nous trouver des carrés premiers presque normaux avec 3 pour plus petit et 103 pour plus grand nombre premier? La réponse est oui. La suite est formée des nombres premiers de 3 à 89, de 101 et 103.

$$\begin{pmatrix} 53 & 7 & 89 & 23 & 61 \\ 47 & 5 & 67 & 73 & 41 \\ 103 & 79 & 3 & 37 & 11 \\ 17 & 83 & 43 & 71 & 19 \\ 13 & 59 & 31 & 29 & 101 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 53 & 59 & 31 & 29 & 61 \\ 47 & 5 & 67 & 73 & 41 \\ 103 & 79 & 3 & 37 & 11 \\ 17 & 83 & 43 & 71 & 19 \\ 13 & 7 & 89 & 23 & 101 \end{pmatrix}$$

Ces deux derniers carrés font partie de l'ensemble **des plus petits carrés premiers presque normaux d'ordre 5**. En effet, ils ont la plus petite somme 233 et le plus petit nombre maximum 103. De plus, ces quatre derniers carrés premiers presque normaux sont des super-premiers.

10.4 Carrés hyper-premiers

Une question importante se pose ici : existe-t-il un carré premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$?

La réponse est oui pour $n = 3, n = 4$ *et* $n = 5$ puisque nous avons (1), (2) et (3) en 10.2. Le site (*) nous permet de trouver des carrés premiers parfaits d'ordre 4 à 63 (donc presque normaux). Mais pouvons-nous trouver un carré premier presque normal d'ordre 8743 ou d'ordre 23642?

La réponse est toujours **oui** selon le théorème de Green-Tao et son corollaire qui s'énoncent ainsi:

Théorème 10.8 : de Green-Tao :

La suite infinie des nombres premiers contient des suites arithmétiques non triviales aussi longues que l'on veut.

Corollaire 10.9 :

Il existe un carré premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$.

Précisons d'abord que toutes les suites arithmétiques non triviales (la raison est non nulle) de nombres premiers de longueurs ≥ 3 ne peuvent pas commencer par le nombre 2.

Maintenant, pouvons-nous construire un carré premier presque normal d'ordre $n \geq 3$? La réponse est oui. En effet, selon le théorème de Green-Tao, nous pouvons trouver une suite arithmétique non triviale de nombres premiers de longueur n^2 puis nous savons qu'à partir d'une telle suite, nous pouvons toujours construire un carré magique qui renfermera les n^2 nombres premiers de la suite.

Il est très intéressant de voir qu'avec cette façon de procéder, nous obtenons un carré premier presque normal tel que ses n^2 nombres premiers forment une suite arithmétique!!!

Cependant, cette façon de faire n'est pas idéale. Le problème est que le théorème de Green-Tao nous assure l'existence d'une suite arithmétique non triviale de nombres premiers de longueur k mais ne nous dit pas comment la trouver. La suite arithmétique de nombres premiers la plus longue connue au moment d'imprimer ces pages est de longueur 26, ce qui nous limite, avec cette approche, dans la construction de carrés premiers presque normaux. Cette suite de longueur 26 a été trouvée en avril 2010 par Benoît Perichon et PrimeGrid.

Il existe d'autres façons de trouver un carré premier presque normal. Par essais et erreurs avec une grande table de nombres premiers ou encore, en cherchant n suites arithmétiques de n nombres premiers, toutes de raison r, telles que les premiers nombres de ces n suites forment à leur tour une suite arithmétique de raison t. Nous construirons alors un carré arithmétique (voir chapitre 11) qui renfermera ces n^2 nombres premiers. Nous avons trouvé dans une table de nombres premiers les trois suites arithmétiques de raison 12 suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 5 & 17 & 29 \\ 47 & 59 & 71 \\ 89 & 101 & 113 \end{array}$$

Les trois suites horizontales sont de raison r = 12. Puis les trois premiers nombres 5 ; 47 ; 89 forment une suite arithmétique verticale de raison t = 42. Nous avons là un **tableau arithmétique** (voir le glossaire 1) d'où la construction d'un **carré arithmétique** d'ordre 3 avec a = 5, r = 12 et t = 42; le fichier « ordre 3 » dans MATHEMATICA ou EXCEL (voir Partie 3, annexes 21 et 22) nous permet de trouver le carré premier presque normal suivant de somme 177:

$$\begin{pmatrix} 71 & 89 & 17 \\ 5 & 59 & 113 \\ 101 & 29 & 47 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons toujours construire un carré magique d'ordre n avec les n^2 nombres d'une suite arithmétique de longueur n^2. En effet, si le premier terme est a et la raison r, alors nous construirons un carré arithmétique défini par $a, r \; et \; t = nr$ (voir le chapitre 11 sur les carrés arithmétiques).

Mais il y a aussi une façon fort simple de procéder; en effet, considérons cette suite arithmétique de longueur n^2 :

$$a \; ; \; a+r \; ; \; a+2r \; ; \ldots ; \; a+(n^2-1)r$$

puis $A \; et \; B$, deux carrés magiques tels que A soit un carré trivial formé de 1 et B, un carré qui renferme tous les entiers consécutifs de 0 à n^2-1. Pour ce dernier, nous prenons un carré magique normal d'ordre n et nous enlevons 1 à l'entier qui se trouve dans chaque case.

Le carré magique : $$M = aA + rB$$

est le carré cherché. Notez que B existe toujours et que nous pouvons le trouver facilement.

Par exemple, considérons la suite arithmétique suivante : 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; … ; 50 formée de 16 entiers dont le premier terme et la raison sont $a = 5 \; et \; r = 3$. Nous trouvons le carré M qui suit :

$$M = 5\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + 3\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 14 & 13 & 0 \\ 4 & 9 & 10 & 7 \\ 8 & 5 & 6 & 11 \\ 15 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 47 & 44 & 5 \\ 17 & 32 & 35 & 26 \\ 29 & 20 & 23 & 38 \\ 50 & 11 & 8 & 41 \end{pmatrix}}_{M}$$

Le carré M est magique et renferme les 16 nombres de la suite arithmétique ci-haut.

Voici maintenant une suite arithmétique remarquable; elle est formée de 26 nombres premiers. C'est la plus longue connue à ce jour et avec celle-ci, nous pourrons construire 18 carrés hyper-premiers presque normaux d'ordre 3, 11 carrés hyper-premiers presque normaux d'ordre 4 et 2 carrés hyper-premiers presque normaux d'ordre 5.

Cette suite arithmétique formée de 26 nombres premiers a été trouvée le 12 avril 2010 par Benoît Perichon et PrimeGrid. Voici le premier terme a et la raison r de cette suite :

$$a = 43\,142\,746\,595\,714\,191 \qquad\qquad r = 23\,681\,770\ P(23)$$

où $P(23) = 2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19\times23 = 223\,092\,870$ c'est-à-dire le produit des nombres premiers consécutifs de 2 à 23. Nous avons vérifié, avec MATHEMATICA, que les 26 nombres de cette suite arithmétique sont des nombres premiers. Ils se terminent tous par 1. Les voici :

(S-26)

43142746595714191
48425980631694091
53709214667673991
58992448703653891
64275682739633791
69558916775613691
74842150811593591
80125384847573491
85408618883553391
90691852919533291
95975086955513191
101258320991493091
106541555027472991
111824789063452891
117108023099432791
122391257135412691
127674491171392591
132957725207372491
138240959243352391
143524193279332291
148807427315312191
154090661351292091
159373895387271991
164657129423251891
169940363459231791
175223597495211691

Construisons M_1, un carré hyper-premier d'ordre 3. Nous prendrons, par exemple, les 9 premiers nombres premiers de la suite.

$$M_1 = 43142746595714191\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}_{A} + 23681770\times223092870\underbrace{\begin{pmatrix}3&8&1\\2&4&6\\7&0&5\end{pmatrix}}_{B}$$

$$M_1 = \begin{matrix} 58992448703653891 & 85408618883553391 & 48425980631694091 \\ 53709214667673991 & 64275682739633791 & 74842150811593591 \\ 80125384847573491 & 43142746595714191 & 69558916775613691 \end{matrix}$$

Construisons maintenant M_2, un carré hyper-premier d'ordre 4. Nous prendrons les 16 premiers nombres premiers de la suite.

$$M_2 = 43142746595714191 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + 23681770 \times 223092870 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 14 & 13 & 0 \\ 4 & 9 & 10 & 7 \\ 8 & 5 & 6 & 11 \\ 15 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{matrix} 58992448703653891 & 117108023099432791 & 111824789063452891 & 43142746595714191 \\ 64275682739633791 & 90691852919533291 & 95975086955513191 & 80125384847573491 \\ 85408618883553391 & 69558916775613691 & 74842150811593591 & 101258320991493091 \\ 122391257135412691 & 53709214667673991 & 48425980631694091 & 106541555027472991 \end{matrix}$$

M_2 est un diabolique puisque B est diabolique; M_2 possède donc exactement 86 figures magiques.

Comme dernier exemple, construisons M_3, un hyper-premier d'ordre 5. Nous prendrons les 25 derniers nombres premiers de la suite.

$$M_3 = 48425980631694091 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + 23681770 \times 223092870 \underbrace{\begin{pmatrix} 24 & 5 & 18 & 2 & 11 \\ 3 & 12 & 21 & 9 & 15 \\ 6 & 19 & 0 & 13 & 22 \\ 10 & 23 & 7 & 16 & 4 \\ 17 & 1 & 14 & 20 & 8 \end{pmatrix}}_{B}$$

À vous de trouver le résultat final!!!

Nous pouvons construire des carrés premiers quelconques mais de façon plus spectaculaire, des carrés premiers parfaits et des carrés hyper-premiers.

Dans tous les cas, l'ordinateur semble indispensable. Cependant, connaissant la liste des 26 nombres premiers cités plus haut, il est très facile de construire des carrés hyper-premiers d'ordres 3, 4 et 5.

Pour construire un carré hyper-premier d'ordre 6, il faudra attendre que l'on trouve une suite arithmétique de nombres premiers de longueur 36, ce qui ne semble pas être pour demain!!!

Nous pouvons construire un carré hyper-premier quel que soit l'ordre $n \geq 3$, mais pour le moment, nous ne savons pas encore comment si l'ordre est ≥ 6.

Terminons avec cette question :

Pouvons-nous affirmer qu'il existe un carré super-premier presque normal pour tous les ordres impairs $n > 4$ **?** Au moment de finaliser cet ouvrage , la réponse nous était toujours inconnue.

10.5 Carrés premiers d'ordre 3

Il a fallu attendre jusqu'en 1988 pour qu'Harry L. Nelson trouve le premier carré premier parfait d'ordre 3.

1480028201	1480028129	1480028183
1480028153	1480028171	1480028189
1480028159	1480028213	1480028141

Harry L. Nelson, 1988

Il est formé de neuf nombres premiers consécutifs de dix chiffres.

À partir de la suite (S-26) de 10.4, nous pouvons construire 18 carrés hyper-premiers d'ordre 3. Ceux-ci seront formés de neuf nombres premiers de 17 et/ou 18 chiffres!!!

Cependant , Dudeney a publié en 1917, le plus petit carré hyper-premier d'ordre 3 et de somme 3117. Le plus petit nombre est 199 et la raison 210. Remarquez que tous les nombres premiers de ce carré se terminent par 9.

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

Voyons maintenant les carrés premiers presque normaux d'ordre 3. Quelle est la plus petite somme? Regardons d'abord les deux suivants :

$$\begin{pmatrix} 43 & 67 & 109 \\ 139 & 73 & 7 \\ 37 & 79 & 103 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 71 & 89 & 17 \\ 5 & 59 & 113 \\ 101 & 29 & 47 \end{pmatrix}$$

$$S = 219 \qquad\qquad S = 177$$

La somme 177 semble être la plus petite. Voyons cela de plus près.

La somme des neuf plus petits nombres premiers impairs est 127. La somme magique correspondante, si le carré magique existe, serait 127/3 = 42,33…ce qui n'est pas possible. De plus, la somme du carré doit être impaire donc :

$$S = 43, 45, 47, 49, 51, 53, \ldots$$

Puisque le nombre central est $\frac{S}{3}$, la somme du carré doit être divisible par 3 donc nous conserverons :

$$S = 45, 51, 57, \ldots$$

Mais le centre doit être un nombre premier. Ici, $\frac{S}{3} = 15, 17, 19, \ldots$

Les sommes à conserver sont donc :

$$51, 57, 69, 87, 93, 111, 123, 129, 141, 159, 177.$$

Nous savons qu'il existe un carré premier presque normal d'ordre 3 et de somme 177. La plus petite somme est donc ≤ 177.

Nous avons construit un programme dans MAPLE qui cherche tous les carrés premiers presque normaux de sommes 51, 57, 69,…, 159. Par exemple, avec 159 comme somme, il est évident que nous chercherons à construire le carré premier presque normal en utilisant les nombres premiers de 3 à 151 soit 35 nombres premiers. Nous aurons 35 X 34 = 1190 cas à considérer :

n	m	
	53	

Nous avons obtenus aucun carré premier presque normal pour toutes les sommes 51, 57, 69, …, 159. De plus, pour la somme 177, nous avons trouvé un seul carré premier presque normal primitif avec ses 7 équivalents.

Théorème 10.10 :

La plus petite somme d'un carré premier presque normal d'ordre 3 est $S = 177$. De plus, il n'existe que huit carrés premiers presque normaux d'ordre 3 et de somme 177.

Donc, il n'existe qu'un seul carré premier presque normal **primitif** d'ordre 3 et de somme $S = 177$.

Nous pouvons choisir :

71	89	17
5	59	113
101	29	47

10.5.1 L'OCTUOR «12 P»

Nous avons construit un groupe magnifique de huit carrés magiques d'ordre 6. Ceux-ci renferment les mêmes douze nombres premiers consécutifs disposés de façons différentes dans les huit carrés!!! Nous appelons ce groupe, l'OCTUOR «12 P».

Voici cet **OCTUOR «12 P»**, un groupe de huit carrés magiques qui possèdent les caractéristiques suivantes :

1) Ils sont d'ordre 6, presque normaux et de somme S = 306.
2) Ils renferment tous les mêmes douze nombres premiers consécutifs de 29 à 73.
3) Chacun contient exactement douze nombres premiers.

Dans les carrés 1, 2, 3, 4, 8, tous les nombres premiers sont situés dans les cases vertes et dans les vingt-quatre autres cases, tous les nombres sont des entiers pairs. Dans les carrés 5, 6 et 7, tous les nombres premiers sont toujours situés dans les cases vertes. Cependant, les autres cases renferment des entiers pairs et impairs, tous non premiers.

86	96	54	24	26	20
34	22	4	82	66	98
29	31	41	61	71	73
37	43	47	53	59	67
58	50	60	46	74	18
62	64	100	40	10	30

Carré 1

62	58	37	29	34	86
64	50	43	31	22	96
100	60	47	41	4	54
40	46	53	61	82	24
10	74	59	71	66	26
30	18	67	73	98	20

Carré 2

29	128	36	22	24	67
122	31	10	58	59	26
72	68	41	53	56	16
28	30	47	61	62	78
18	43	54	74	71	46
37	6	118	38	34	73

Carré 3

29	148	22	26	28	53
32	31	72	36	59	76
70	37	38	48	61	52
44	41	56	64	67	34
84	43	50	40	71	18
47	6	68	92	20	73

Carré 4

74	29	31	37	41	94
48	43	47	53	59	56
28	61	67	71	73	6
46	63	26	72	57	42
88	34	27	35	32	90
22	76	108	38	44	18

Carré 5

86	29	31	37	41	82
66	44	45	85	46	20
30	43	47	53	59	74
70	34	36	38	24	104
26	61	67	71	73	8
28	95	80	22	63	18

Carré 6

29	102	37	62	43	33
22	31	88	41	77	47
76	18	45	30	38	99
48	68	60	57	63	10
53	28	61	49	71	44
78	59	15	67	14	73

Carré 7

29	31	40	44	46	116
37	41	154	32	20	22
120	34	43	47	38	24
56	64	53	59	70	4
48	54	10	66	61	67
16	82	6	58	71	73

Carré 8

Dans les carrés1, 2 et 3, les douze nombres premiers sont présentés dans le même ordre. Dans les autres, les douze nombres premiers apparaissent dans l'ordre croissant.

Voici maintenant la fréquence de chaque carré :

Carré 1 : 13630 Carré 2 : 13630 Carré 3 : 11254 Carré 4 : 13467 Carré 5 : 14376
Carré 6 : 13895 Carré 7 : 14407 Carré 8 : 10421

Nous sommes assurés que les carrés 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 ne renferment pas les mêmes trente-six entiers puisque les sept fréquences sont différentes deux à deux. En effet, si deux carrés magiques renferment les mêmes nombres, alors ils ont la même fréquence. Les carrés 1 et 2 renferment les mêmes trente-six nombres et nous voyons qu'ils ont la même fréquence. Cependant, deux carrés peuvent contenir des entiers différents et avoir la même fréquence.

Comment avons-nous construit cet OCTUOR ? Voici les grandes lignes de notre démarche :

1) Voyons d'abord comment nous avons construit le carré 1.
2) Nous avons utilisé la structure générale des carrés magiques d'ordre 6. Elle contient vingt-quatre variables libres.
3) Nous avons attribué aux dix variables des rangées 3 et 4, les nombres premiers consécutifs de 29 à 73 sauf 67 et 73. Nous avons alors trouvé un nouveau carré.
4) Nous avons ensuite utilisé les expressions dans les cases où nous voulions placer 67 et 73. L'une doit valoir 67 et l'autre 73.
5) À partir de, expression = 67, nous avons isolé une variable et nous avons ensuite placé sa valeur dans le carré. Puis la même chose avec, expression = 73.
6) En général, nous n'avons aucun problème à placer les douze nombres premiers là où nous les voulons.
7) Ensuite, nous avons attribué aux autres variables, des nombres non premiers tous pairs et nous avons obtenu vingt-quatre nombres pairs différents de 2.
8) Nous avons dû reprendre plusieurs fois l'attribution des valeurs aux dernières variables car nous avions souvent soit des entiers négatifs, soit des répétitions, soit des nouveaux nombres premiers (nous en voulons exactement douze dans notre carré). Nous exigeons ici que les carrés soient presque normaux. Nous avons obtenu ce que nous voulions avec un peu de patience!!!
9) Observons que les vingt-quatre entiers que nous obtenons peuvent être pairs ou impairs. Cela dépend de la position des nombres premiers et de la valeur que nous attribuons à certaines variables.
10) Nous avons procédé de façon semblable pour les autres carrés.

Nous avions d'abord trouvé les carrés 1, 2, 3, 4 qui formaient notre premier QUATUOR «12 P». Puis nous avons trouvé les quatre suivants pour former notre deuxième QUATUOR «12 P». Nous avons donc notre premier OCTUOR «12 P» !!! Dans ces huit carrés, les nombres premiers se retrouvent dans huit dispositions différentes.

Enfin, nous avons là $C_4^8 = 70$ QUATUORS «12 P» différents!!!

Avec ces huit carrés magiques, nous pouvons créer :

a) $C_2^8 = 28$ PAIRES «12 P»

b) $C_3^8 = 56$ TRIOS «12 P»

c) $C_4^8 = 70$ QUATUORS «12 P»

d) $C_5^8 = 56$ QUINTUORS «12 P»

e) $C_6^8 = 28$ SEXTUORS «12 P»

f) $C_7^8 = 8$ SEPTUORS «12 P»

g) $C_8^8 = 1$ OCTUOR «12 P».

Si vous voulez former un QUATUOR «12 P» en vous servant des carrés 4, 5, 6, 7 et 8, alors tous vos carrés contiendront les douze nombres premiers dans l'ordre croissant.

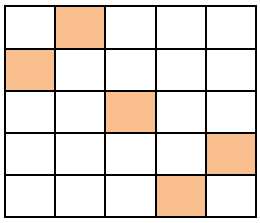
Pourquoi les carrés 1, 2 et 3 ne peuvent pas contenir les douze nombres premiers dans l'ordre croissant? (Voir problème 11 de 10.6)

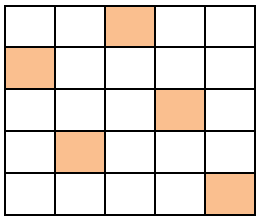
Regardez les deux figures vertes du carré 7, celles-ci ne sont pas magiques.

10.6 Problèmes:

1) Soit un carré magique d'ordre $n \geq 3$ qui renferme n^2 nombres premiers différents. Montrez que ce carré ne peut pas contenir le nombre premier 2.
2) Construisez un carré magique d'ordre 3 dont la somme est le nombre premier p.
3) En utilisant le site de 10.3, montrez qu'il existe au moins un carré super-premier presque normal pour les ordres 5, 7, 9, 11, 57, 59 et 63.
4) Un carré magique d'ordre pair $n \geq 4$ est premier presque normal. Montrez qu'il ne peut pas être super-premier.
5) Le site de 10.3 nous permet de trouver des carrés premiers pour tous les ordres de 4 à 63 et nous connaissons au moins un carré premier d'ordre 3. Donc pour les ordres 3 à 63, il existe au moins un carré premier presque normal. Ce résultat est-il conforme avec le corollaire 10.9 du théorème de Green-Tao (voir 10.4)?
6) Montrez que si nous prenons une suite de seize nombres premiers distincts ≥ 3, dont certains sont ≥ 103, alors la somme de la suite est > 480.

7) Considérez le carré premier (3) d'ordre 5 de la section 10.2 et utilisez les deux figures complètes suivantes :





   a) À partir de (3), combien pouvez-vous fabriquer de carrés magiques presque normaux de sommes $S < 313$, qui renferment exactement 20 nombres premiers?
   b) Donnez-les.
   c) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 5 qui renferme exactement 20 nombres premiers dont la somme magique est $S = 330$.
8) Soit M, un carré premier presque normal d'ordre $n \geq 4$. Montrez qu'avec M, il est possible de construire une infinité de carrés magiques presque normaux qui contiennent exactement $n^2 - n$ nombres premiers.
9) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 5 qui contient comme seul nombre premier le nombre 1129 lequel est situé dans la case :
   a) (3 ; 3) b) (4 ; 4) c) (2 ; 3) d) (2 ; 4) e) Nous pouvons montrer que 1129 peut se trouver dans la case de notre choix!!!
10) Considérez une suite de seize nombres premiers consécutifs à partir de laquelle nous voulons construire un carré premier. Montrez qu'une condition nécessaire est que la somme des seize nombres premiers de la suite soit divisible par 8.
11) Dans l'Octuor «12 P» que nous venons de voir dans la section 10.5.1, pourquoi les carrés 1, 2 et 3 ne peuvent pas contenir les douze nombres premiers dans l'ordre croissant?
12) Dans la section 10.3, montrez (sans utiliser le programme «Premiers parfaits-4», que pour les suites 1, 2, 4, 5, 6, 7 et 9, il est impossible de construire un carré premier parfait d'ordre 4. Pour les suites 3, 8 et 10, le programme «Premiers parfaits-4» montre que ces 3 suites ne nous donnent aucun carré premier parfait. On en déduira que la suite 11 nous donne les plus petits carrés premiers parfaits d'ordre 4.
13) À partir de la définition de colonne tordue à gauche (à droite), (voir 45 du glossaire 2), définissez une colonne tordue gauche-droite et une colonne tordue droite-gauche.
14) Pouvons-nous trouver une suite de 9 nombres premiers consécutifs et un entier positif tel que si nous additionnons cet entier à chacun des 9 nombres premiers, alors nous obtenons encore une suite de 9 nombres premiers consécutifs? Indice : voir les carrés (2) et (3) de l'annexe 18.

15) Soient p et q deux nombres premiers consécutifs et n, un entier positif. Si p + n et q + n sont premiers, alors sont-ils consécutifs?
16) Retrouvez les carrés (2) et (3) de l'annexe 18 et trouvez le carré (3) – (2). Qu'observez-vous? Quelle conclusion tirez-vous?
17) Voici M, un carré premier presque normal :

$$M = \begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix}$$

Nous voulons ajouter un entier positif 2m dans toutes les cases de M afin d'obtenir un nouveau carré premier. Pour ce faire, nous avons construit un programme dans MATHEMATICA qui regarde les seize nouveaux nombres et cherche à savoir s'ils sont tous premiers.
Nous avons fait varier m de 1 à 17 000 000 000 mais sans succès!!! Aucune nouvelle suite de seize nombres premiers.

Pouvez-vous poursuivre la recherche?

Si nous trouvons le carré cherché, M', alors nous dirons que M et M' sont des carrés premiers cousins. Nous savons qu'il en existe d'ordre 3. En existe-t-il d'ordre 4? D'ordre 5? (Voir annexe 18).

11. Les carrés arithmétiques

11.1 Introduction

Considérons l'espace vectoriel sur le corps des nombres réels, des carrés magiques d'ordre n. La structure générale qui représente cet espace renferme $n(n-2)$ variables libres et pour construire un tel carré magique, il nous faut attribuer une valeur réelle à chacune de ces variables. Pour $n=12$, par exemple, nous avons 120 variables libres (dont la somme S). Si nous voulons construire un carré magique formé de 144 entiers positifs différents, le travail ne sera pas simple. D'abord, il nous faut trouver 120 entiers positifs différents et les attribuer aux 120 variables. Les autres entiers seront déterminés par des expressions linéaires (à coefficients entiers) renfermant des variables parmi les 120. De plus, nous n'avons que très peu de contrôle sur ces nouveaux entiers. Certains peuvent être négatifs et il peut y avoir des répétitions. Il n'y a pas de problème à faire disparaitre les entiers négatifs mais pendant que nous faisons disparaitre une répétition, d'autres peuvent apparaitre ailleurs. Si nous désirons un carré magique normal d'ordre 12, le travail sera encore plus compliqué.

Bien entendu, nous pouvons utiliser des méthodes connues depuis longtemps et celles-ci nous permettront d'en obtenir un. Mais en trouver à partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 12 est un peu inquiétant!

Vous nous demandez de construire un carré magique normal d'ordre12 et 200 carrés magiques presque normaux (formés de 144 entiers positifs différents) d'ordre 12. Votre commande est énorme!!! Quelle méthode devrions-nous utiliser? Quelle qu'elle soit, la tâche sera considérable!!!

C'est ici que les **carrés arithmétiques** vont intervenir. Ceux-ci vont nous permettre de remplir la commande ci-haut d'une façon extrêmement simple!!! Vous les aurez vos 201 carrés magiques!!

11.2 Carrés arithmétiques d'ordre n

Considérons les n^2 expressions différentes suivantes :

$$
(*)\qquad
\begin{array}{ccccc}
a & a+r & a+2r & \dots & a+(n-1)r \\
a+t & a+t+r & a+t+2r & \dots & a+t+(n-1)r \\
a+2t & a+2t+r & a+2t+2r & \dots & a+2t+(n-1)r \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a+(n-1)t & a+(n-1)t+r & a+(n-1)t+2r & \dots & a+(n-1)t+(n-1)r
\end{array}
$$

Celles-ci forment n suites arithmétiques de raison r (ce sont les n suites arithmétiques horizontales) et n suites arithmétiques de raison t (ce sont les n suites arithmétiques verticales). Le tableau (*) est appelé **tableau arithmétique d'ordre** n.

Ces n^2 **expressions différentes** ont donc la forme :

$$a + k_1 r + k_2 t$$

où k_1 et k_2 doivent prendre toutes les valeurs entières allant de $0 \ à \ n-1$ inclusivement.

Définition :

> Un **carré arithmétique** est un carré magique tel que ses n^2 nombres peuvent être disposés sous la forme d'un tableau arithmétique.

Le carré magique M ci-dessous est un carré arithmétique de somme 297; à sa droite, un tableau arithmétique correspondant.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 66 & 49 & 65 & 33 & 82 \\ 94 & 21 & 62 & 37 & 69 & 14 \\ 91 & 27 & 40 & 56 & 75 & 8 \\ 88 & 72 & 43 & 59 & 24 & 11 \\ 5 & 30 & 53 & 46 & 78 & 85 \\ 17 & 81 & 50 & 34 & 18 & 97 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 18 & 21 & 24 & 27 & 30 & 33 \\ 34 & 37 & 40 & 43 & 46 & 49 \\ 50 & 53 & 56 & 59 & 62 & 65 \\ 66 & 69 & 72 & 75 & 78 & 81 \\ 82 & 85 & 88 & 91 & 94 & 97 \end{matrix}$$

$$carré \ arithmétique \qquad\qquad tableau \ arithmétique \ de \ M$$

Les trente-six nombres de M se retrouvent dans un tableau arithmétique; nous y voyons les six suites arithmétiques horizontales de raison 3 et les six suites arithmétiques verticales de raison 16. Par contre, le carré magique suivant, un Dürer de somme 79, n'est pas un carré arithmétique. Nous verrons, plus bas, que cela est dû au fait que sa somme est un entier impair :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 19 & 51 \\ 60 & 10 & 1 & 8 \\ 2 & 15 & 53 & 9 \\ 12 & 50 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Il est donc impossible de trouver un tableau arithmétique correspondant. Notons que le tableau arithmétique correspondant à un carré arithmétique n'est pas unique. Par exemple, le carré M que nous venons de voir plus haut admet plusieurs tableaux arithmétiques. D'abord, celui à sa droite puis les sept équivalents de ce dernier. Ainsi, une rotation de 90° du tableau arithmétique ci-haut donne un tableau défini par $a = 17; r = 16; t = -3$.

Si la structure générale d'un sous-espace de dimension 3 de carrés magiques est un carré arithmétique, alors tous les carrés magiques issus de cette structure générale seront des carrés arithmétiques.

Par contre, si la structure générale n'est pas un carré arithmétique, alors les carrés magiques issus de celle-ci pourront être aussi bien arithmétiques que non arithmétiques.

Nous allons construire des sous-espaces de dimension 3 dont les structures générales seront des carrés arithmétiques et ce, quel que soit l'espace vectoriel E_n des carrés magiques d'ordre $n \geq 3$. Ce sera l'objet du théorème fondamental des carrés magiques.

Quels sont les avantages d'avoir comme structure générale un carré arithmétique?

1) Lorsque $a, r \; et \; t$ sont des entiers positifs (> 0), cela nous assure que les n^2 nombres du carré sont tous des entiers positifs.
2) Lorsque $a = 1$; $r = 1$; $t = n \;\; ou \;\; a = 1$; $r = n$; $t = 1$, les n^2 entiers du carré sont consécutifs de 1 à n^2. Le carré magique est alors normal.
3) Lorsque $a, r \; et \; t$ sont des entiers positifs avec $t > (n-1)r$ ou $r > (n-1)t$, les n^2 entiers sont tous positifs et différents deux à deux. Le carré magique est alors presque normal.
4) Pour construire ces carrés magiques, trois variables suffisent $(a, r \; et \; t)$.
5) Si $t = nr$ alors les n^2 nombres du carré magique forment une suite arithmétique; il en est de même si $r = nt$.
6) Nous pourrons construire des carrés magiques exceptionnels!!!

Si nous n'avons pas $t > (n-1)r$ ou $r > (n-1)t$, alors il se peut que tous les nombres du carré soient différents mais cela n'est pas certain. Cependant, ces conditions sont suffisantes pour avoir que des nombres différents dans notre carré magique.

Considérons la structure générale des super Dürer-alpha :

$$\begin{pmatrix} a+3r & a+t & a+3r+3t & a+2t \\ a+2r+3t & a+r+2t & a+2r & a+r+t \\ a & a+3r+t & a+3t & a+3r+2t \\ a+r+3t & a+2r+2t & a+r & a+2r+t \end{pmatrix}$$

Cette structure générale est bien un carré arithmétique. Donc tous les super Dürer-alpha sont des carrés arithmétiques.

Avec $a=1, r=1, t=4$ puis $a=1, r=4, t=1$, nous obtenons les deux carrés normaux suivants :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$a=1; r=1; t=4 \qquad a=1; r=4; t=1$$

Ce sont des carrés magiques normaux primitifs.

Avec $a=2, r=5, t=16$, nous obtenons le carré magique presque normal suivant :

$$\begin{pmatrix} 17 & 18 & 65 & 34 \\ 60 & 39 & 12 & 23 \\ 2 & 33 & 50 & 49 \\ 55 & 44 & 7 & 28 \end{pmatrix}$$

$$a=2; r=5; t=16$$

Tous les entiers sont différents puisque la condition suffisante $t>(n-1)r$ est respectée : en effet, $16>3\times 5$.Voici un tableau arithmétique de ce carré :

2	7	12	17
18	23	28	33
34	39	44	49
50	55	60	65

Considérons maintenant la structure générale des Dürer. Ce n'est pas simple d'affirmer que celle-ci n'est pas un carré arithmétique. Nous allons le montrer de façon indirecte. Si elle est un carré arithmétique, sa somme magique est $S=4a+6r+6t$. De plus, si les seize nombres sont des entiers, alors $a, r \text{ et } t$ sont des entiers et la somme magique est un entier pair. Or, nous connaissons un Dürer formé de seize entiers dont la somme magique est un entier impair (voir le carré ci-dessous). On doit conclure que la structure générale des Dürer n'est pas un carré arithmétique.

Le carré suivant est un Dürer formé d'entiers dont la somme magique est $S=111$; il n'est donc pas arithmétique. On connait aussi 3456 Dürer normaux, qui sont tous des carrés arithmétiques.

Une structure générale qui n'est pas un carré arithmétique peut donc générer des carrés arithmétiques et des carrés qui ne le sont pas!! Voyons ce Dürer, de somme $S=111$:

$$\begin{pmatrix} 21 & 10 & 19 & 61 \\ 50 & 30 & 11 & 20 \\ 13 & 12 & 58 & 28 \\ 27 & 59 & 23 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin, nous pouvons affirmer :

1) Tous les carrés magiques d'ordre 3 sont arithmétiques.
2) Un carré magique d'ordre 4 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique est impaire.
3) Un carré magique d'ordre 5 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 5.
4) Un carré magique d'ordre 6 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 3.
5) Un carré magique d'ordre 7 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 7.
6) Un carré magique d'ordre 8 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 4.
7) Un carré magique d'ordre 9 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 9.
8) Et ainsi de suite…

En effet, si un carré magique d'ordre n est arithmétique, alors sa somme magique est :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n(n-1)}{2}t = na + \frac{n(n-1)(r+t)}{2}$$ d'où le :

Théorème 11.1 :

Si un carré magique d'ordre n formé de n^2 entiers est arithmétique, alors sa somme magique est un multiple de n si n est impair et un multiple de $\frac{n}{2}$ si n est pair.

Ce théorème nous permet, par exemple, d'affirmer qu'un carré magique d'ordre 5 formé d'entiers dont la somme magique est 74, n'est pas arithmétique. Si la somme est un multiple de 5, alors le théorème ne nous apprend rien. Il faut pousser l'étude plus loin.

Nous allons maintenant présenter le théorème fondamental des carrés magiques.

11.3 Théorème fondamental des carrés magiques; nouveau procédé de construction

Théorème 11.2 :

Soit E_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre $n \geq 3$, formés de n^2 nombres réels. Alors, il existe un **sous-espace** S_n **de dimension 3**, dont la structure générale est un carré arithmétique. Nous trouvons donc dans S_n que des carrés arithmétiques dont au moins un normal et une infinité de presque normaux. De plus, $S_3 = E_3$.

Pour démontrer ce théorème, il nous faut trouver une base du sous-espace S_n qui soit formée de trois carrés arithmétiques A, B, C, linéairement indépendants. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de A, B, C est un espace vectoriel de dimension 3.

Nous voulons maintenant que la structure générale de S_n soit un carré arithmétique. Pour y arriver, il ne suffit pas que A, B, C soient des carrés arithmétiques linéairement indépendants. Il faudra que ceux-ci soient convenablement choisis. Mais comment?

Nous verrons, dans la remarque 1, un exemple où A, B, C sont des carrés arithmétiques linéairement indépendants tel que la structure générale de S_n ne soit pas un carré arithmétique.

Pour que la structure générale de S_n soit un carré arithmétique, il est nécessaire, si nous superposons B sur A, que les cases qui se superposent forment des couples distincts de la forme $(u\ ;\ v)$ où u est dans A et v est dans B. Par exemple, les carrés suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \ et\ N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une fois superposés, donnent les neuf couples distincts :

$$(1\ ;\ a), (2\ ;\ b), (3\ ;\ c), (4\ ;\ d), \ldots, (8\ ;\ h), (9\ ;\ i)$$

Nous dirons que $M\ et\ N$ sont **orthogonaux.** Il est évident que $M\ et\ N$ sont orthogonaux si et seulement si $N\ et\ M$ le sont. Nous pouvons donc aussi mettre A sur B au lieu de B sur A.

Revenons à la base formée des carrés arithmétiques A, B, C. Le carré A contiendra dans chacune de ses rangées, les entiers $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, une et une seule fois. Le carré B sera obtenu du carré A par une rotation de ce dernier de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (rotation de -90°). Le carré C sera le carré trivial formé du nombre 1.

Le problème consiste à construire A de sorte que $A et\ B$ soient orthogonaux. Puisque A renferme seulement les entiers $0, 1, 2, ..., (n-1)$, chacun apparaissant n fois, alors il en sera de même de B. Par superposition, nous devrons obtenir n^2 couples distincts de la forme $(u\ ;\ v)$ où u prend toutes les valeurs de $0\ à\ (n-1)$ de même que v.

Il y aura alors une **bijection** entre ces n^2 couples et les n^2 expressions du tableau arithmétique.

Le tableau suivant devrait nous convaincre de cette bijection :

$(0\ ;0)$	$a+0r+0t$
$(0\ ;\ 1)$	$a+0r+1t$
$(0\ ;\ 2)$	$a+0r+2t$
...	
$(3\ ;\ 4)$	$a+3r+4t$
...	
$(4\ ;\ 3)$	$a+4r+3t$
...	
$(n-1\ ;\ n-1)$	$a+(n-1)r+(n-1)t$

La colonne de gauche renferme les n^2 couples distincts obtenus des carrés orthogonaux $A et\ B$. Dans la colonne de droite, nous retrouvons les n^2 expressions d'un tableau arithmétique.

Si nous pouvons construire $A et\ B$ orthogonaux avec A arithmétique, alors la structure générale de S_n sera un carré arithmétique et tous les carrés issus de cette structure générale seront des carrés arithmétiques.

Voyons maintenant comment trouver A qui sera arithmétique donc magique. L'algorithme pour construire A varie selon que l'ordre est impair (ALG-1), pair multiple de 4 (ALG-2) ou pair non multiple de 4 (ALG-3).

Premier cas : $n \geq 3$ **est impair (ALG-1)** (lire le chapitre 6 de la partie 1 avant de continuer)

(n-1)/2	n-1	…		2		1		0
0	(n-1)/2	n-1			2		1	
	0	…	n-1			2		1
1		0	(n-1)/2	n-1	…		2	
	1		0	(n-1)/2	n-1			2
2		1	…	0	(n-1)/2	n-1		
	2	…	1		0	…	n-1	
	…	2		1		0	(n-1)/2	n-1
n-1			2		1		0	(n-1)/2

Le carré A précédent est construit en remplissant d'abord la grande diagonale secondaire avec les entiers consécutifs de $0 \ à \ n-1$, dans cet ordre, comme dans le carré ci-haut. Puis, nous remplissons chaque diagonale principale, grande ou brisée, avec le même entier soit celui qui s'y trouve déjà. Donc, toutes les cases d'une diagonale principale contiennent le même entier et deux diagonales principales différentes contiennent deux entiers différents (Voir partie 1, chapitre 6).

Puisque chaque diagonale principale (grande ou brisée) rencontre chaque rangée en une seule case et chaque colonne en une seule case, alors le carré précédent sera arithmétique. En effet, nous aurons la même somme dans chaque rangée, chaque colonne et dans la grande diagonale secondaire (voir plus bas) soit :

$$0+1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

La grande diagonale principale a pour somme $n \times \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Le carré A est donc magique et il est aussi arithmétique avec $a=0$, $r=1$, $t=0$.

Il est évident que B est un carré arithmétique avec $a=0$, $r=1$, $t=0$ de même que C , avec $a=1$, $r=0$, $t=0$.

Il reste à montrer que $A et B$ sont orthogonaux. Les observations suivantes sont très importantes pour y arriver :

1) Le lemme sur les diagonales brisées (Partie 3, annexe 6) nous apprend que dans un carré d'ordre impair $n \geq 3$, chaque diagonale principale, grande ou brisée, rencontre chaque diagonale secondaire, grande ou brisée, en une seule case située à l'intérieur du carré.
2) Chaque diagonale principale renferme le même entier dans toutes ses cases.
3) Deux diagonales principales quelconques n'ont jamais de case en commun. Il en est de même pour deux diagonales secondaires quelconques.
4) Une conséquence du lemme des diagonales brisées est que chaque diagonale secondaire renferme tous les entiers consécutifs de $0 \ à \ n-1$.
5) Toute diagonale principale rencontre chaque rangée et chaque colonne en une seule case.

Cela nous permet de conclure :

a) Chaque rangée de A renferme tous les entiers de $0 \ à \ n-1$. Il en est de même pour chaque colonne. C'est une conséquence de 5).
b) Par construction, la grande diagonale secondaire de A renferme aussi tous les entiers de $0 \ à \ n-1$. La grande diagonale principale est aussi magique.
c) Le carré A est magique de somme $\frac{n(n-1)}{2}$ et il est arithmétique.
d) **Les carrés $A \ et \ B$ sont orthogonaux**. En effet, B est le résultat de la rotation de A de -90°. Les diagonales principales de A deviennent les diagonales secondaires de B et les diagonales secondaires de A deviennent les diagonales principales de B. Superposons $B \, sur \, A$ et considérons une diagonale principale de A, laquelle renferme l'entier u tel que $0 \leq u \leq n-1$. La diagonale principale de B qui se superposera sur la diagonale principale de A renferme tous les entiers de $0 \ à \ n-1$. Nous obtiendrons alors n couples différents de la forme $(u \ ; \ v)$ où u est l'entier de la diagonale principale de A et où v prend toutes les valeurs entières de $0 \ à \ n-1$. Il est clair que cette superposition donnera n^2 couples différents de la forme $(u \ ; \ v)$ où u et v prennent toutes les valeurs entières de $0 \ à \ n-1$.
e) La combinaison linéaire $t\,A + r\,B + a\,C$ est la structure générale du sous-espace S_n. Celle-ci est un carré arithmétique!!! Rappelons que C est le trivial formé du nombre 1.
f) $A, B \ et \ C$ sont linéairement indépendants. En effet, C n'est pas une combinaison linéaire de A et B et B n'est pas une combinaison linéaire de A donc A, B et C sont linéairement indépendants. Pour voir cela, il suffit de constater que dans A, sur la rangée centrale, immédiatement à gauche de la case centrale, nous trouvons le nombre 0 et de même dans B d'où 0 + 0 = 1 montre que C ne peut pas être une combinaison linéaire de A et B. Puis dans la colonne centrale de A, juste en-dessous de la case centrale, nous trouvons 0 alors que nous trouvons n – 1 dans B d'où 0 = n – 1 montre que B n'est pas une combinaison linéaire de A.
g) S_n est bien un sous-espace de dimension 3 représenté par une structure générale qui est un carré arithmétique.

Nous trouvons les propriétés suivantes pour les carrés arithmétiques construits avec notre nouveau procédé appelé ALG-1:

1) Tous les carrés magiques d'ordres impairs construits avec ALG-1 ont pour centre le nombre $\frac{S}{n}$. En effet, nous avons vu plus haut que la somme magique est donnée par $S = na + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n(n-1)}{2}t$. Il est facile d'observer, à partir de A et B, que le centre du carré arithmétique est $a + \frac{n-1}{2}r + \frac{n-1}{2}t$ soit $\frac{S}{n}$.
2) Les nombres de la grande diagonale principale forment, de bas en haut, une suite arithmétique de raison r. Voir le problème 37 de 11.4.
3) Les nombres de la grande diagonale secondaire forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison t. Voir le problème 37 de 11.4.
4) Dans la rangée centrale, A et B nous permettent de voir que dans la case juste à gauche de la case centrale, nous trouvons le plus petit nombre du carré, soit a, et dans la case juste à droite de la case centrale, nous trouvons le plus grand nombre du carré, soit $a+(n-1)r+(n-1)t$. Ceci est vrai dès que r et t sont positifs. Voir 37 de 11.4.
5) Voir le théorème suivant.

Théorème 11.3 :

Tous les carrés arithmétiques d'ordres impairs $n \geq 3$ qui proviennent de la structure générale de S_n (construite avec ALG-1), sont **associatifs**.

Preuve :

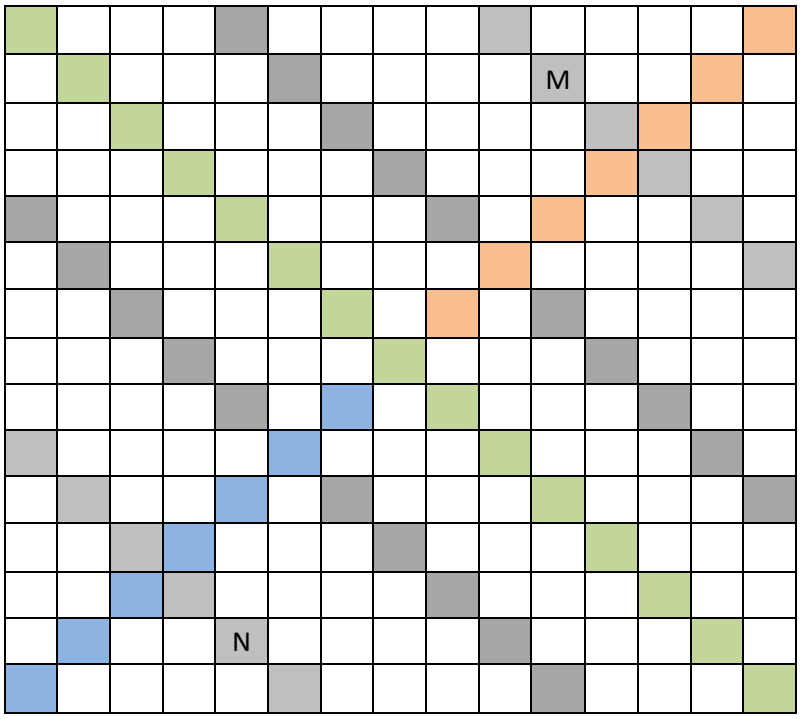
Pour démontrer ce théorème, il suffira de montrer que $A\ est\ associatif$. Nous devons aussi montrer qu'une combinaison linéaire de trois carrés associatifs est aussi un carré associatif (voir problème 35 de 11.4). Nous allons maintenant poser n = 2 k + 1 et passer au carré suivant.

k	2k	k-1	2k-1	…	…	…	…	…	…	2	k+2	1	k+1	0
0	k												1	
k+1												2		
1											…			
k+2										…				
2									k-2					
…						k		k-1						
…							k							
…						k+1		k						
…					k+2									
2k-2				…										
k-2			…											
2k-1		…												
k-1	2k-1													
2k														k

La grande diagonale principale est formée des cases vertes lesquelles renferment l’entier k.

La grande diagonale secondaire renferme, de haut en bas, les cases jaunes qui contiennent les entiers consécutifs de 0 à k - 1, la case centrale verte qui contient k et enfin les cases bleues qui contiennent les entiers consécutifs de k + 1 à 2k. Cela implique :

1) Que nous retrouvons sur la première rangée du haut, de droite à gauche, les cases jaunes qui renferment les entiers consécutifs de 0 à k – 1 et la case verte qui renferme k. Puis les cases bleues qui renferment les entiers consécutifs de k+1 à 2k.
2) Que nous retrouvons sur la première colonne à gauche, de haut en bas, les cases bleues qui contiennent les entiers consécutifs de k+1 à 2k, k dans la case verte puis les cases jaunes qui contiennent les entiers consécutifs de 0 à k-1.
3) Que deux cases situées sur une grande diagonale, principale ou secondaire, symétriques par rapport à la case centrale, ont pour somme 2k.
4) Que deux diagonales parallèles à la grande diagonale principale, situées, l'une en haut et l'autre en bas de celle-ci, renferment le même nombre de cases si ces deux diagonales sont symétriques par rapport à la grande diagonale principale.



Les diagonales grises sont symétriques par rapport à la grande diagonale principale et renferment le même nombre de cases.

5) Que toutes les cases d'une diagonale grise ont leurs cases symétriques par rapport à la case centrale, sur l'autre diagonale grise.
6) Que les deux diagonales grises rencontrent la grande diagonale secondaire en deux cases symétriques par rapport à la case centrale, ou ne la rencontrent pas.

7) Que si les deux diagonales grises rencontrent la grande diagonale secondaire en deux cases symétriques par rapport à la case centrale, alors la somme de ces deux cases est 2k.

Voici donc un premier résultat :

Si dans le carré A, deux cases quelconques M et N sont symétriques par rapport à la case centrale alors, elles sont situées sur deux diagonales parallèles et symétriques par rapport à la grande diagonale principale. De plus, si ces deux diagonales rencontrent la grande diagonale secondaire, alors la somme des cases M et N est 2k = n-1.

8) Que si les deux diagonales grises ne rencontrent pas la grande diagonale secondaire, alors la somme d'une case d'une diagonale grise avec une case de l'autre diagonale grise est de la forme :

$$(k + 1 + v) + (k - 1 - v)$$

où v est un entier qui varie de 0 à k-1.

Puis un second résultat :

Deux cases symétriques par rapport à la case centrale dans le carré A, ont toujours pour somme 2k = n-1. Le carré arithmétique A est donc associatif. Il s'ensuit que le carré arithmétique $t\,A + r\,B + a\,C$ est associatif.

En effet, la somme de deux cases symétriques par rapport à la case centrale est toujours égale à :

$$2a + (n-1)r + (n-1)t = \frac{2S}{n} = 2 \times centre$$

Ce nouveau procédé de construction de carrés magiques d'ordres impairs $n \geq 3$ nous permet de construire des carrés magiques extraordinaires. Ils sont tous arithmétiques, ils sont tous associatifs, ils ont tous pour centre le nombre $\frac{S}{n}$, … .

Revoyons l'exemple de la partie 1, un carré d'ordre 7 :

3	6	2	5	1	4	0
0	3	6	2	5	1	4
4	0	3	6	2	5	1
1	4	0	3	6	2	5
5	1	4	0	3	6	2
2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3

A

6	2	5	1	4	0	3
2	5	1	4	0	3	6
5	1	4	0	3	6	2
1	4	0	3	6	2	5
4	0	3	6	2	5	1
0	3	6	2	5	1	4
3	6	2	5	1	4	0

B

Le carré A est arithmétique. Il a été construit avec le procédé décrit plus haut. Nous appellerons ce procédé, **«procédé des diagonales brisées».** Vérifiez que le carré A est associatif.

Le carré B est obtenu par une rotation de -90° du carré A. Quant au carré C, c'est un trivial formé du nombre 1. Constatez que B et C sont aussi associatifs.

Par exemple, $a = 3, r = 2, t = 15$, donne un carré magique d'ordre 7 et de somme $S = 378$.

60	97	43	80	26	63	9
7	58	95	41	78	24	75
73	5	56	93	39	90	22
20	71	3	54	105	37	88
86	18	69	15	52	103	35
33	84	30	67	13	50	101
99	45	82	28	65	11	48

Carré magique qui renferme 536 000 figures magiques!!!

Ce carré est arithmétique et associatif. Son centre est le nombre $\frac{378}{7} = 54$. Le plus petit nombre 3, est situé juste à gauche du centre et le plus grand nombre 105, juste à droite du centre. Les nombres de la grande diagonale principale forment, de bas en haut, une suite arithmétique de raison r = 2 et les nombres de la grande diagonale secondaire forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison t = 15.

Puisque $t\,A + r\,B + a\,C$ est un carré arithmétique, alors il est clair que pour construire un carré presque normal, il suffit de prendre $t > (n-1)r \;\; ou \;\; r > (n-1)t$ avec a, r, t des entiers positifs. Le carré sera normal avec $a = 1, r = 1 \; et \; t = n \; ou \; a = 1, r = n \; et \; t = 1$. Pour démontrer ce

résultat, voir le tableau arithmétique de 11.2. Le carré ci-haut est donc presque normal puisque nous avons 15 > 6 x 2.

Deuxième cas : $n \geq 4$ **est pair multiple de 4 (ALG-2)** (lire le chapitre 6 de la partie 1 avant de continuer)

Ici, la construction du carré A est beaucoup plus simple. Nous allons le subdiviser comme suit :

Carré A

0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1
0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1
0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1
0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
4k-1	…	3k+1	3k	k	k+1	k+2	…	…	…	…	3k-1	k-1	…	1	0
0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1
0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1
0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1
0	1	…	k-1	3k-1	…	…	…	…	k+2	k+1	k	3k	3k+1	…	4k-1

Posons $n = 4k$ et avec les k rangées du haut, déterminons un carré $k \times k$ (en orangé), un

rectangle $k \times 2k$ (en bleu) et un autre carré $k \times k$ (en vert). Nous allons faire de même avec les k rangées du bas.

Avec les $2k$ rangées centrales, déterminons un rectangle $2k \times k$ (en blanc), un carré $2k \times 2k$ (en gris) et un autre rectangle $2k \times k$ (en blanc).

Dans chaque carré ou rectangle, toutes les rangées sont identiques. Les carrés et rectangles sont numérotés, de gauche à droite et de haut en bas par (1), (2), …, (8) et (9).

Dans les carrés (1) et (7), en orangé, les rangées sont formées des entiers consécutifs $0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Dans les carrés (3) et (9), en vert, les rangées sont formées des entiers consécutifs $3k, 3k+1, \ldots, 4k-1$.

Dans les carrés (2) et (8), en bleu, les rangées sont formées des entiers consécutifs $3k-1, 3k-2, \ldots, k+1, k$.

Dans le carré (5), le carré central en gris, les rangées sont formées des entiers consécutifs $k, k+1, \ldots, 3k-2, 3k-1$.

Dans le rectangle (4), en blanc, les rangées sont formées des entiers consécutifs $4k-1, 4k-2, \ldots, 3k+1, 3k$.

Dans le rectangle (6), en blanc, les rangées sont formées des entiers consécutifs $k-1, \ldots, 2, 1, 0$.

Le carré A est arithmétique. En effet, il est magique et renferme dans toutes ses rangées, les entiers consécutifs de $0 \ à \ n-1$.

Il est magique car la somme des cases de chaque rangée est $0+1+2+\ldots+4k-1 = 8k^2 - 2k$. De même pour les deux grandes diagonales. Quant aux colonnes, le carré ci-haut montre que la somme des cases de la première colonne à gauche est $2k(4k-1) = 8k^2 - 2k$, la somme des cases de la colonne (k+1) à partir de la gauche, est $2k \times k + 2k(3k-1) = 8k^2 - 2k$ et enfin, la somme des cases de la colonne (3k+1) à partir de la gauche est $2k(k-1) + 2k \times 3k = 8k^2 - 2k$. Il s'ensuit que toutes les colonnes ont pour somme le nombre $8k^2 - 2k$.

Montrons maintenant que $A \ et \ B$ sont orthogonaux. Pour y arriver, utilisons les carrés $A \ et \ B$ afin de retrouver tous les $n^2 = 16k^2$ couples distincts de la forme $(u \ ; \ v)$ où $u \ et \ v$ prennent toutes les valeurs de $0 \ à \ 4k-1$. Nous vous invitons à trouver ces n^2 couples différents à partir du carré A ci-haut et de sa rotation de -90° soit le carré B (voir problème 1 de 11.4).

La construction du carré A est d'une grande simplicité. Nous pouvons observer que celui-ci renferme, d'une certaine façon, qu'une seule et même rangée qui se répète $4k$ fois. Plus précisément, considérons la rangée :

$$0,1,2,\ldots,k-1 \qquad 3k-1,3k-2,\ldots,k+2,k+1,k \qquad 3k,3k+1,\ldots,4k-1$$

laquelle apparaît en trois parties. Les k premières rangées et les k dernières rangées sont la rangée ci-haut que nous lisons de gauche à droite. Quant aux $2k$ rangées centrales, elles sont la rangée ci-haut renversée, c'est-à-dire que nous lisons de droite à gauche (voir le carré A ci-haut et celui qui suit).

Par exemple :

0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7

Carré A

0	0	7	7	7	7	0	0
1	1	6	6	6	6	1	1
5	5	2	2	2	2	5	5
4	4	3	3	3	3	4	4
3	3	4	4	4	4	3	3
2	2	5	5	5	5	2	2
6	6	1	1	1	1	6	6
7	7	0	0	0	0	7	7

Carré B

Puisque A *et* B sont orthogonaux, le carré $tA + rB + aC$ est arithmétique. C'est la structure générale du sous-espace S_n.

Les carrés A, B *et* C sont linéairement indépendants (voir le problème 2 de 11.4). Nous pouvons résumer ainsi :

1) Le carré A est arithmétique.
2) Les carrés A *et* B sont orthogonaux.
3) Les carrés A, B *et* C sont linéairement indépendants.
4) S_n est bien un sous-espace de dimension 3 représenté par une structure générale qui est un carré arithmétique.

Nous trouvons les propriétés suivantes pour les carrés arithmétiques d'ordres pairs multiples de 4, construits avec notre nouveau procédé ALG-2:

En observant les carrés A *et* B, il est facile de constater: (voir le problème 38 de 11.4).

1) Que A soit associatif. La somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $4k-1 = n-1$. Tous les carrés magiques issus de la structure générale S_n sont donc associatifs.

2) Que les nombres situés sur la grande diagonale principale du carré $t\,A + r\,B + a\,C$, de haut en bas, forment une suite arithmétique de raison $r + t$.
3) Que les nombres situés sur la grande diagonale secondaire, de haut en bas, forment une suite arithmétique de raison $r - t$.
4) Dans chaque colonne, nous trouvons, de haut en bas, $\frac{n}{4}$ nombres qui forment une suite arithmétique de raison $\pm\, r$, $\frac{n}{2}$ nombres qui forment une autre suite arithmétique de raison $\mp\, r$, $\frac{n}{4}$ nombres qui forment une suite arithmétique de raison $\pm\, r$.
5) Sur les rangées, les trois suites arithmétiques sont de raison $\pm\, t$.
6) Si a, r et t sont positifs, le plus petit nombre et le plus grand nombre du carré sont situés aux extrémités de la grande diagonale principale, le plus petit étant en haut soit a.

Théorème 11.4 :

Tous les carrés arithmétiques d'ordres pairs multiples de 4, $n \geq 4$, qui proviennent de la structure générale de S_n, (construite avec ALG-2) sont associatifs.

Observons maintenant ces résultats à travers l'exemple qui suit :

3	18	92	77	62	47	93	108
5	20	90	75	60	45	95	110
118	103	37	52	67	82	28	13
116	101	39	54	69	84	26	11
114	99	41	56	71	86	24	9
112	97	43	58	73	88	22	7
15	30	80	65	50	35	105	120
17	32	78	63	48	33	107	122

a = 3 ; r = 2 ; t = 15

1. Le carré magique ci-haut est associatif puisque A est associatif. Ici, la somme de deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours égale à 125.

2. Les nombres situés sur la grande diagonale principale forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison r + t = 2 + 15 = 17.
3. Les nombres situés sur la grande diagonale secondaire forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison r - t = 2 - 15 = -13.
4. Nous pouvons lire, dans la première colonne de gauche, 3 suites arithmétiques de raison r = 2 soient : 3, 5 ; 118, 116, 114, 112 ; 15, 17. Sur la deuxième colonne de gauche, nous avons : 18, 20 ; 103, 101, 99, 97 ; 30, 32. De même pour toutes les autres colonnes. Toutes ces suites arithmétiques sont de même raison r = 2.
5. Sur les rangées, les suites arithmétiques sont de raison t = 15.
6. Ici, a, r et t sont positifs donc aux extrémités de la grande diagonale principale, nous retrouvons le plus petit nombre (3) et le plus grand (122).

Troisième cas : $n \geq 6$ **est pair non multiple de 4 (ALG-3)** (lire le chapitre 6 de la partie 1)

La construction du carré A s'avère un peu plus difficile. Si l'ordre du carré que nous voulons construire est $4k+2$, alors nous construirons d'abord un carré magique d'ordre $4k$.

Plus précisément, nous fabriquerons le carré A que nous trouvons dans le deuxième cas et ensuite, nous lui ajouterons le carré trivial C formé du nombre 1. Le carré qui en résulte se retrouve dans le premier carré ci bas, soit le carré d'ordre $4k$ qui renferme sur sa première rangée, les entiers de 1 à k , de 3k à k + 1 et de 3k + 1 à 4k.

Ensuite, nous ajouterons à ce carré, une bordure qui permettra de passer d'un carré d'ordre $4k$ à un carré d'ordre $4k+2$. La première rangée de ce dernier renfermera, de gauche à droite, tous les entiers consécutifs de $0 \ à \ 4k+1$. La dernière rangée renfermera, de droite à gauche, tous les entiers consécutifs de $1 \ à \ 4k+1$.

Enfin, il reste à compléter la colonne de gauche et celle de droite. À partir de la droite horizontale qui passe par le centre du carré, plaçons dans les cases de la colonne de gauche, les entiers $4k+1, 0, 4k+1, 0, \ldots$ de bas vers le haut puis les entiers $4k+1, 0, 4k+1, 0, \ldots$ du haut vers le bas.

Nous ferons de même dans la colonne de droite mais cette fois avec les entiers $0, 4k+1, 0, 4k+1, \ldots$

De cette façon, si une extrémité d'une rangée renferme 0, l'autre extrémité renferme $4k+1$ et inversement. Voici donc construit le premier carré (carré M) qui va nous conduire au carré magique A.

0	1	…	k	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	3k+1	…	4k	4k+1
0	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	4k+1
4k+1	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	0
0	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	4k+1
4k+1	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	0
0	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	4k+1
4k+1	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	0
4k+1	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	0
0	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	4k+1
4k+1	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	0
0	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	4k+1
4k+1	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	0
0	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	4k+1
4k+1	4k	…	3k+1	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	k	…	1	0

Carré M

La somme des rangées et des colonnes de M est toujours le nombre $(2k+1)\ (4k+1)$, ce qui n'est pas le cas des deux grandes diagonales. M est semi-magique d'où les modifications qui suivent :

1. Nous allons permuter les cases extrêmes des deuxième et dernière rangées. Ainsi, les deux grandes diagonales auront pour sommes le nombre $(2k+1)(4k+1)$. De plus, les colonnes extrêmes conserveront la même somme. M deviendra alors un nouveau carré M' qui est maintenant magique.

2. Si nous ne faisons pas d'autres permutations, alors en superposant la rotation de -90° de M' sur M', nous obtiendrons deux fois le couple $(4k;4k+1)$. C'est pourquoi nous allons effectuer les deux dernières permutations suivantes dans M' : nous allons permuter le 1 avec le $4k$ dans la première rangée et le 1 avec le $4k$ dans la rangée $\frac{n+6}{4}$. Rappelons de nouveau que les rangées sont numérotées, du haut vers le bas : 1, 2, 3, … , n-1, n.

   Voilà donc le carré A :

0	4k	…	k	k+1	k+2	…	…	…	3k	3k+1	…	1	4k+1
4k+1	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	0
4k+1	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	0
0	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	4k+1
4k+1	1	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	4k	0
0	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	4k+1
4k+1	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	0
4k+1	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	0
0	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	4k+1
4k+1	4k	…	3k+1	k+1	k+2	…	…	3k-1	3k	k	…	1	0
0	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	4k+1
4k+1	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	0
0	1	…	k	3k	3k-1	…	…	k+2	k+1	3k+1	…	4k	4k+1
0	4k	…	3k+1	3k	…	…	…	…	k+1	k	…	1	4k+1

Carré A

Le carré A est un carré magique de même que le carré B qui est la rotation de -90°de A. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $A\ et\ B$ sont orthogonaux donc de s'assurer qu'en superposant B sur A, nous obtiendrons tous les n^2 couples différents (u ; v) où u varie de 0 à n-1 et v varie de 0 à n-1. Ici, n-1 = 4k+1. De plus, le lecteur montrera que $A, B\, et\, C$ sont linéairement indépendants (voir les problèmes 3 et 4 de 11.4).

Donc $t\,A + r\,B + a\,C$ est un carré arithmétique, structure générale de S_n.

Avec $A\, et\, B$, nous pouvons déjà observer : (voir le problème 39 de 11.4).

1) Les grandes diagonales du carré A renferment, dans l'ordre, les entiers de 0 à n – 1, de haut en bas pour la diagonale principale, de bas en haut pour la diagonale secondaire.
2) Les deux grandes diagonales sont formées de n nombres qui forment une suite arithmétique de raison $(r+t)$ pour la grande diagonale principale et de raison $(r-t)$ pour la grande diagonale secondaire.
3) Si $a, r\, et\, t$ sont positifs, le plus petit nombre et le plus grand nombre du carré sont situés aux extrémités de la grande diagonale principale, le plus petit étant en haut soit a.
4) $a=1, r=1, t=n\ ou\ a=1, r=n, t=1$ donnent des **carrés magiques normaux primitifs**.

Voyons un exemple :

Nous allons construire un carré magique d'ordre 14. Voici d'abord le carré M :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Pour obtenir le carré magique A à partir du carré M précédent, il suffit d'effectuer dans M les quatre permutations suivantes (en rouge) :

0	12	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	12	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	13

Carré A

Voilà le carré A qui est arithmétique donc magique. Le carré B est la rotation de -90° du carré A. Le carré C est toujours le trivial formé de 1.

Nous allons construire deux carrés magiques normaux en posant $a=1; r=14; t=1$ puis $a=1, r=1, t=14$. **Ceux-ci seront primitifs**.

Il en sera toujours ainsi dès que $a=1, r=4k+2, t=1$ *ou* $a=1, r=1, t=4k+2$ (voir le problème 5 de 11.4).

1	13	185	4	187	6	189	190	9	192	11	194	184	14
182	16	17	18	178	177	176	175	174	19	25	26	27	169
168	30	31	32	164	163	162	161	160	159	39	40	41	29
141	44	45	46	150	149	148	147	146	145	53	54	55	56
140	128	138	137	61	62	63	64	65	66	130	129	139	57
113	125	124	123	75	76	77	78	79	80	116	115	114	84
112	111	110	109	89	90	91	92	93	94	102	101	100	85
98	97	96	95	103	104	105	106	107	108	88	87	86	99
71	83	82	81	117	118	119	120	121	122	74	73	72	126
70	69	68	67	131	132	133	134	135	136	60	59	58	127
43	142	143	144	52	51	50	49	48	47	151	152	153	154
42	156	157	158	38	37	36	35	34	33	165	166	167	155
15	170	171	172	24	23	22	21	20	173	179	180	181	28
183	195	12	193	10	191	8	7	188	5	186	3	2	196

$$A+14B+C$$

1	169	42	43	70	71	98	112	113	140	141	168	28	183
195	16	30	44	139	125	111	97	83	58	142	156	170	13
194	17	31	45	138	124	110	96	82	68	143	157	171	3
11	18	32	46	137	123	109	95	81	67	144	158	172	186
192	24	164	150	61	75	89	103	117	131	52	38	178	5
9	177	163	149	62	76	90	104	118	132	51	37	23	188
190	176	162	148	63	77	91	105	119	133	50	36	22	7
189	175	161	147	64	78	92	106	120	134	49	35	21	8
6	174	160	146	65	79	93	107	121	135	48	34	20	191
187	173	159	145	66	80	94	108	122	136	47	33	19	10
4	25	39	53	130	116	102	88	74	60	151	165	179	193
185	26	40	54	129	115	101	87	73	59	152	166	180	12
2	27	41	55	128	114	100	86	72	69	153	167	181	184
14	182	155	154	127	126	99	85	84	57	56	29	15	196

$$14A+B+C$$

Ces deux carrés magiques sont **arithmétiques, normaux et primitifs**. **Ils ne sont cependant pas associatifs**.

Nous avons maintenant un **nouveau procédé** pour construire des carrés magiques de tous les ordres $n \geq 3$. Vous voulez des carrés magiques presque normaux ou un carré normal, c'est devenu très simple!!! Les répétitions ne nous inquiètent plus!!!

Vous voulez construire deux cents carrés magiques d'ordre 16 presque normaux et un carré magique normal, il n'y a plus de problème.

Pour le normal, prenez : $a=1, r=16, t=1$.

Pour les deux cents presque normaux, prenez $a=3, r=2, t=31, 32, 33, \ldots$ par exemple.

Donc, vous pouvez maintenant construire un carré magique presque normal et même normal pour tous les ordres $n \geq 3$. En utilisant le nouveau procédé, vous pouvez construire votre carré magique à la main lorsque l'ordre de celui-ci n'est pas trop grand.

Construire un carré magique d'ordre 23 455, à la main, ne serait tout simplement pas raisonnable. Techniquement très difficile à faire mais réalisable avec beaucoup de temps!!!

Cependant, dans la Partie 3, annexe 22, nous vous proposons vingt deux fichiers dans **MATHEMATICA**, appelés « Ordre 3 » jusqu'à « Ordre 24 ». Par exemple, le fichier « Ordre 18 » vous permet, en utilisant seulement trois variables, de construire une infinité de carrés magiques d'ordre 18. Ceux-ci seront tous arithmétiques et vous pourrez construire une infinité de presque normaux et deux normaux primitifs.

Pour les ordres impairs et pairs multiples de 4, vous pourrez construire une infinité de presque normaux et un normal. Pour les ordres pairs non multiples de 4, vous pourrez construire une infinité de presque normaux et deux normaux primitifs. Tous ces carrés, peu importe l'ordre, sont arithmétiques (donc magiques) et sont associatifs pour les ordres impairs et pour les ordres pairs multiples de 4.

Toujours dans la Partie 3, annexe 21, vous trouverez, dans **EXCEL**, les mêmes fichiers « Ordre 3 » jusqu'à « Ordre 24 » mais en plus, les fichiers « Ordre 25 » jusqu'à « Ordre 32 ».

Enfin, dans la Partie 3, annexe 23, vous trouverez les programmes notés 11, 12 et 13, appelés CM-arith- 2k+1, CM-arith-4k et CM-arith-4k+2. Le premier permet de construire des carrés arithmétiques (donc magiques) d'ordres impairs jusqu'à l'ordre 31. Le deuxième permet de construire des carrés arithmétiques d'ordres pairs multiples de 4 jusqu'à l'ordre 28. Le troisième permet de construire des carrés arithmétiques d'ordres pairs non multiples de 4 jusqu'à l'ordre 30.

Avant de résumer ce chapitre, voyons **quatre remarques très importantes** :

Remarque 1:

Il est très important de mentionner que toutes les combinaisons linéaires de *A*, *B* et *C* sont des carrés magiques mais pas forcément des carrés arithmétiques, même si *A, B* et *C* sont arithmétiques. Il faut que *A* soit convenablement choisi!!! Ce qui a été fait plus haut!!!

Par exemple, les carrés suivants sont arithmétiques et linéairement indépendants mais ils ne conduisent pas à une structure générale qui soit arithmétique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La structure générale obtenue ici est : $t\,A+r\,B+a\,C$ et elle renferme deux expressions identiques soit deux fois $a+5t+2r$ puis deux autres soit deux fois $a+3r$. Cette structure générale n'est donc pas celle d'un carré arithmétique.

En fait, nous aurons un sous-espace de dimension 3 de carrés magiques et ceux-ci renfermeront tous au moins deux couples de nombres identiques.

Remarque 2 :

La construction du carré A n'est pas unique. Nous pouvons donc construire A d'une autre façon mais celle-ci ne sera qu'une **variante** de celle présentée dans ce chapitre.

Par exemple, dans le cas des pairs multiples de 4, la construction de A exige de connaitre qu'une seule rangée. Si n = 12, celle-ci sera :

(*) 0 1 2 8 7 6 5 4 3 9 10 11

laquelle apparaîtra dans les trois premières rangées et dans les trois dernières rangées. Dans les six rangées centrales, nous trouverons cette rangée mais renversée; en fait nous verrons dans ces six rangées :

11 10 9 3 4 5 6 7 8 2 1 0

Maintenant, nous pourrions prendre à la place de (*) :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

ce qui rend la construction de A encore plus facile!!! Le carré $t\,A+r\,B+a\,C$ est encore arithmétique et associatif.

Dans le cas des impairs, pour obtenir B, nous avons fait subir à A, une rotation de -90°. Une rotation de 90° est aussi un bon choix. Le carré $t\,A+r\,B+a\,C$ est encore arithmétique et associatif.

Dans chacun de ces deux cas (pairs multiples de 4 et impairs), nous aurons deux carrés différents et les propriétés citées plus haut seront légèrement modifiées pour les deux nouveaux carrés.

Remarque 3 :

Une structure générale de carrés arithmétiques ne génère pas tous les carrés arithmétiques. Par exemple, la structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 5 (voir fichier «Ordre 5») ne génère que des carrés arithmétiques associatifs. Or, il existe des carrés normaux d'ordre 5 dont les centres sont différents de 13 et ceux-ci sont arithmétiques mais ne sont pas associatifs donc ils ne peuvent pas être obtenus de la structure générale.

Remarque 4 :

Si deux carrés magiques A et B sont arithmétiques et ne proviennent pas d'une même structure générale arithmétique, alors il se peut que (A + B) ne soit pas arithmétique. C'est ce qui se passe avec les carrés $A et B$ ci-haut. Le problème 33 de 11.4 vous demande de montrer que $A+B$ n'est pas arithmétique. Vous aurez quelques indices!!!

Résumé :

Nous venons de voir un tout **nouveau procédé** pour construire des carrés magiques. Ceux-ci, en plus d'être magiques, sont tous arithmétiques et pour les ordres impairs et pairs multiples de 4, **ils sont tous associatifs**.

Que l'ordre du carré soit impair $(2k+1)$, pair multiple de 4 $(4k)$ ou pair non multiple de 4 $(4k+2)$, nous devons toujours trouver trois carrés arithmétiques linéairement indépendants A, B, C tels que $A et B$ soient orthogonaux. Il suffit de trouver convenablement A, ce que nous avons fait plus haut.

Le procédé pour trouver A varie selon que l'ordre est impair (méthode des diagonales brisées), pair multiple de 4 et pair non multiple de 4.

Le carré B est toujours obtenu par une rotation du carré A de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre, soit de -90°.

Le carré C est toujours le carré trivial formé de 1.

S_n, l'ensemble des combinaisons linéaires $t\,A+r\,B+a\,C$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. Tous les carrés ainsi obtenus sont arithmétiques.

$t\,A+r\,B+a\,C$ est aussi la structure générale de S_n.

Avec ce procédé, la construction d'un carré magique se fait toujours à l'aide de trois variables (t, r, a) et ce, quel que soit l'ordre du carré plus grand ou égal à 3.

À partir d'un tableau arithmétique d'ordre n, nous pouvons toujours construire un carré magique d'ordre n (évidemment arithmétique).

Les algorithmes que nous venons de présenter pour construire des carrés arithmétiques d'ordres impairs, pairs multiples de 4 et pairs non multiples de 4 sont appelés respectivement ALG-1, ALG-2 et ALG-3. Cependant, ces algorithmes ne permettent pas de construire tous les carrés arithmétiques d'un ordre donné $n \geq 4$.

Tous les carrés magiques construits avec ALG-1 et ALG-2 sont associatifs. Nous vous suggérons de lire la section 14.10 du chapitre 14 intitulé : «Varia».

Le problème 30 de 11.4 présente un corollaire du théorème 11.2.

11.4 Problèmes

1) Dans le cas $n = 4k$, vérifiez que $A et B$ sont orthogonaux.
2) Dans le cas $n = 4k$, montrez que $A, B et C$ sont linéairement indépendants.
3) Dans le cas $n = 4k + 2$, vérifiez que $A et B$ sont orthogonaux.
4) Dans le cas $n = 4k + 2$, montrez que $A, B et C$ sont linéairement indépendants.
5) Dans le cas $n = 4k + 2$, montrez que les carrés $A + n B + C et n A + B + C$ sont primitifs.
6) Soit la structure générale $t A + r B + a C$ qui renferme deux expressions identiques. Alors celle-ci n'est pas arithmétique. Pourquoi?
7) Vous venez de construire un carré magique M d'ordre 19 formé de 361 entiers. Vous me dites que sa somme magique est 3449 et que M est arithmétique. Je vérifie que M est bien magique, d'ordre 19 et qu'il contient que des entiers. Je vous confirme alors qu'une erreur il y a. Expliquez.
8) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 15 en utilisant ALG-1. Nous voulons que le plus petit entier du carré soit 4. Sur la grande diagonale principale, les 15 entiers forment, de bas en haut, une suite arithmétique de raison 3. Sur la grande diagonale secondaire, de haut en bas, les 15 entiers forment une suite arithmétique de raison 45. De plus, donnez le plus grand entier du carré ainsi que sa somme magique.
9) Sans l'aide de l'ordinateur, construisez, à la main, trois carrés magiques presque normaux respectivement d'ordres 9, 10 et 12 qui possèdent 5 comme plus petit entier.
10) Considérons un carré magique de somme S construit avec ALG-1 ou ALG-2. Quelle est la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré?
11) Un carré arithmétique d'ordre 7, construit avec ALG-1, a pour somme magique 385. Trouvez la somme des deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré.
12) Soit M, un carré magique d'ordre 12 et de somme 870. Les deux cases aux extrémités de la grande diagonale secondaire renferment respectivement les entiers 10 et 140. Pourquoi pouvons-nous dire que ce carré ne peut pas être associatif?
13) Construisez avec ALG-3, un carré magique presque normal d'ordre 6 formé :
    a) Que d'entiers impairs.
    b) Que d'entiers pairs.
    c) Que d'entiers multiples de 3.
    d) Que d'entiers qui ont la forme 3k+2.
    e) Avec autant de pairs divisibles par 3 que d'impairs divisibles par 3.
    f) Avec autant de pairs divisibles par 3 que d'impairs divisibles par 7.
14) Vous avez un tableau arithmétique formé de n^2 nombres, $n \geq 3$. Pouvez-vous construire un carré magique avec ces nombres?

15) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 5 à partir du tableau arithmétique suivant :

5	8	11	14	17
20	23	26	29	32
35	38	41	44	47
50	53	56	59	62
65	68	71	74	77

16) Voici une structure de carrés arithmétiques d'ordre 4 que nous retrouvons dans le fichier « Ordre 4 » soit dans EXCEL ou MATHEMATICA :

$$\begin{pmatrix} a & a+3r+2t & a+3r+t & a+3t \\ a+2r+3t & a+r+t & a+r+2t & a+2r \\ a+r+3t & a+2r+t & a+2r+2t & a+r \\ a+3r & a+2t & a+t & a+3r+3t \end{pmatrix}$$

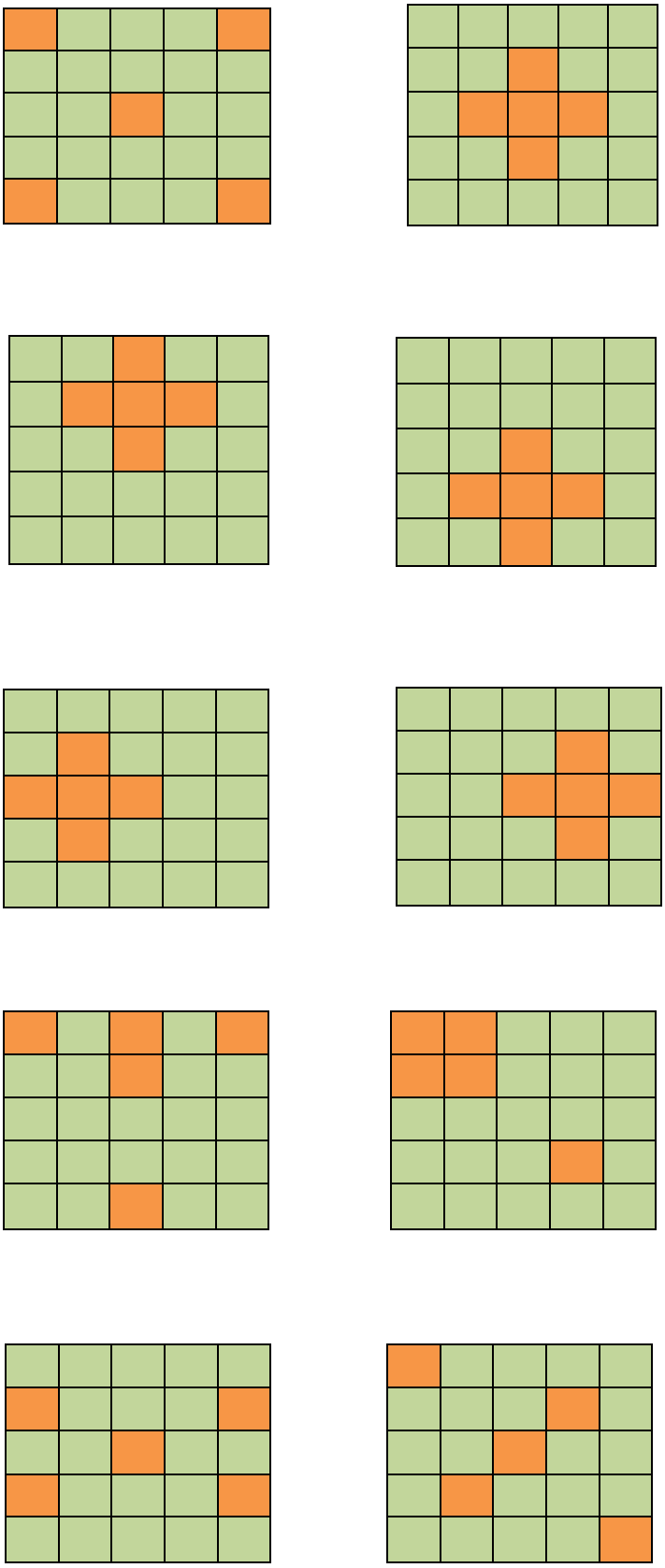
a) Montrez que tous les carrés issus de cette structure générale sont des A-Dürer.
b) Montrez qu'ils forment un sous-espace de dimension 3 de l'espace des A-Dürer.
c) Retrouvez f(S) = 68.

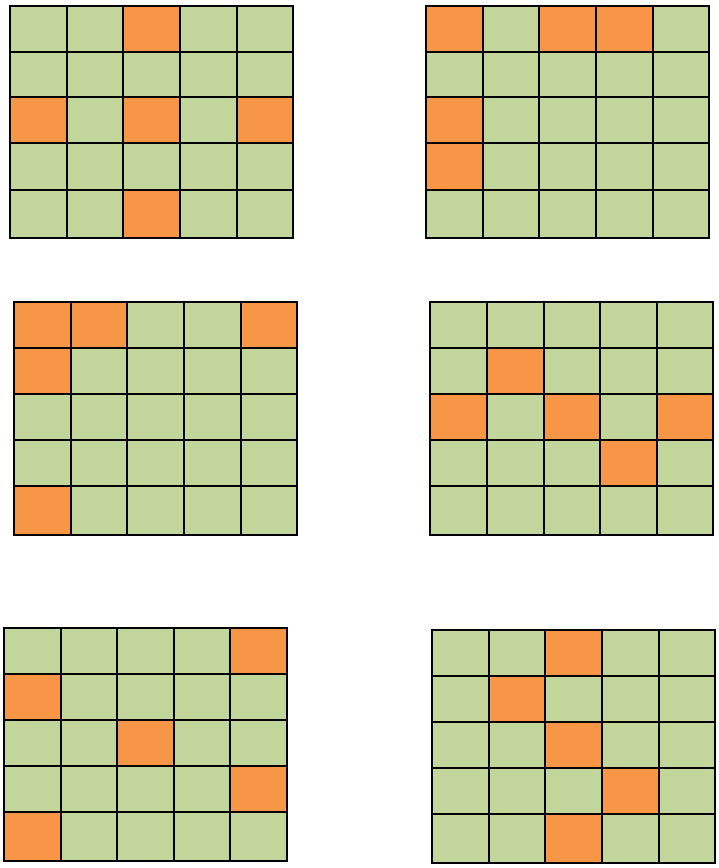
17) Soit donnée, une structure générale qui est un carré arithmétique. Montrez que deux carrés arithmétiques issus de cette structure générale ont pour somme un carré arithmétique issu de la même structure générale. De même, un carré issu de cette structure multiplié par un scalaire est aussi un carré arithmétique qui provient de la même structure.

18) Voici une structure de carrés arithmétiques d'ordre 5 que nous retrouvons dans le fichier « Ordre 5 » soit dans EXCEL ou MATHEMATICA :

$$\begin{pmatrix} a+4r+2t & a+r+4t & a+3r+t & a+3t & a+2r \\ a+r & a+3r+2t & a+4t & a+2r+t & a+4r+3t \\ a+3r+3t & a & a+2r+2t & a+4r+4t & a+r+t \\ a+t & a+2r+3t & a+4r & a+r+2t & a+3r+4t \\ a+2r+4t & a+4r+t & a+r+3t & a+3r & a+2t \end{pmatrix}$$

a) Montrez que les seize figures suivantes sont des figures magiques de cette structure :





b) Quelles sont les super-figures?

19) Montrez que le nombre de figures magiques dans la structure du problème précédent est 934. Les seize figures magiques du problème 18) font donc partie de ces 934 figures magiques. Pour résoudre ce problème, utilisez le fichier « Le compte » de MATHEMATICA ou le fichier « Illustration-figures » de MAPLE (voir la Partie 3).

20) Montrez qu'avec ALG-1, nous pouvons construire tous les carrés magiques d'ordre 3.

21) Montrez qu'avec ALG-1, ALG-2 et ALG-3, nous ne pouvons pas construire tous les carrés magiques d'ordres $n \geq 4$.

22) Soit M , un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ tel que $r = (n-1)t$. Montrez que M ne peut pas être presque normal. Et si $t = (n-1)r$?

23) Soit M , un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$, fabriqué avec ALG-1 ou ALG-2. Si M est tel que $t \leq (n-1)r \ ou \ r \leq (n-1)t$, alors en utilisant les fichiers d'EXCEL, des cases rouges apparaissent s'il y a des répétitions. Dans les cases blanches, nous trouvons donc des

nombres qui ne se répètent pas. Montrez que l'ensemble des cases blanches forme une figure symétrique par rapport au centre du carré et qu'il en est de même pour l'ensemble des cases rouges.

24) À partir de la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 6, construite avec ALG-3, trouvez quatre carrés arithmétiques normaux primitifs. Voici huit carrés normaux parmi lesquels vous pourrez trouver les quatre primitifs :

$$\begin{array}{lll} a=1 & r=1 & t=6 \\ a=6 & r=6 & t=-1 \\ a=36 & r=-1 & t=-6 \\ a=31 & r=-6 & t=1 \\ a=6 & r=-1 & t=6 \\ a=36 & r=-6 & t=-1 \\ a=31 & r=1 & t=-6 \\ a=1 & r=6 & t=1 \end{array}$$

Voir dans la Partie 3 le fichier « Ordre 6 » créé dans MATHEMATICA (annexe 22) ou EXCEL (annexe 21). Vous le trouverez aussi dans le programme 13 de l'annexe 23, Partie 3.

25) Soit M un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$. Donnez une condition nécessaire afin qu'il n'y ait aucune répétition.

26) Soit M, un carré magique d'ordre $n \geq 2$.

a) Si l'ordre d'un carré magique est $n = 2,\ 3\ ou\ 4,$ alors la somme des quatre coins du carré est toujours $\frac{4S}{n}$.

b) Si le carré magique est d'ordre $n \geq 2$ et s'il est associatif, alors la somme des quatre coins du carré est $\frac{4S}{n}$.

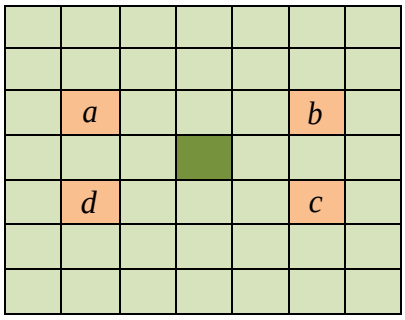
c) Pour les ordres $n \geq 5,$ si le carré magique est fabriqué avec ALG-1, ALG-2 ou ALG-3, alors la somme des quatre coins du carré est $\frac{4S}{n}$.

d) Donc pour chaque ordre $n \geq 2,$ il existe une infinité de carrés magiques qui ont pour somme des quatre coins, le nombre $\frac{4S}{n}$.

27) Soit M, un carré arithmétique d'ordre $n \geq 2$ et soient $k\ et\ m,$ deux nombres réels. Montrez que le carré $kM + m$ est arithmétique. Notons que l'addition d'un carré magique M avec un nombre m revient à additionner m avec chaque nombre de M. Cela est équivalent à l'addition M + m C où C est un carré magique trivial formé de l'entier 1.

28) Montrez que pour tous les ordres $n \geq 3,$ il existe une infinité de carrés magiques presque normaux qui renferment n^2 entiers se terminant tous par les mêmes k chiffres.

29) Considérons tous les carrés arithmétiques fabriqués avec ALG-1 et ALG-2. Montrez que la somme des quatre coins de tout rectangle dont le centre se situe au centre du carré et qui a ses côtés parallèles aux côtés du carré, donne toujours $\frac{4S}{n}$.



$$a+b+c+d=\frac{4S}{n}$$

30) Corollaire du théorème 11.2.

Soit S_n, le sous-espace de dimension 3 décrit dans l'énoncé du théorème 11.2. Ce sous-espace renferme que des carrés arithmétiques (mais pas tous en général).

a) Montrez qu'il existe un sous-espace W de S_n, de dimension 2, tel que tous les nombres d'un carré quelconque de W forment une suite arithmétique.
b) Illustrez avec n = 3 et n = 4.

31) Démontrez qu'un carré arithmétique d'ordre $n \geq 2$ est formé exclusivement d'entiers si et seulement si a, r, t sont des entiers.
32) Pouvons-nous affirmer qu'un carré arithmétique d'ordre $n \geq 2$ est formé exclusivement d'entiers > 0 si et seulement si a, r, t sont des entiers > 0?
33) Prenez les carrés arithmétiques $A et B$ de la remarque 1 à la fin de 11.3.
    a) Montrez qu'ils sont bien arithmétiques.
    b) Montrez que $A+B$ n'est pas arithmétique.

    Pour montrer que $A+B$ n'est pas arithmétique, nous vous suggérons de prendre le tableau arithmétique présenté au début de 11.2. Ensuite, identifiez les nombres qui sont dans $A+B$ ainsi que le nombre de fois que chacun apparaît.
    Regardez chacun des cas suivants : a = 0 jusqu'à a = 10 et pour chacun de ces cas, les valeurs possibles de r et ensuite, les valeurs possibles de t. Vous verrez alors que…

34) Si un carré magique M provient d'une structure générale, alors ses équivalents proviennent-ils de la même structure générale?
35) Montrez qu'une combinaison linéaire de trois carrés magiques associatifs est un carré magique associatif.

36) Un carré magique M d'ordre $n \geq 2$ renferme n^2 nombres qui forment une suite arithmétique $a; a+r; a+2r; \ldots$ avec $a > 0, r > 0.$ Si s_1 est la plus petite somme de n cases distinctes et s_2, la plus grande somme de n cases distinctes, alors montrez que la somme magique S de M est donnée par :

$$S = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

37) Démontrez les propriétés 2), 3) et 4) (ALG-1) au-dessus du théorème 11.3, page 10. (**)

38) Démontrez les six propriétés (ALG-2) au-dessus du théorème 11.4, pages 17 et 18. (**)

39) Démontrez les quatre propriétés (ALG-3) qui se trouvent après le carré A du troisième cas : $n \geq 6,$ page 22. (**)

(**) Nous vous suggérons de faire deux photocopies du carré A dont l'une sera le carré B après une rotation de -90° de celle-ci.

12. Les carrés magiques fonctionnels

12.1 Introduction

Nous avons jusqu'à maintenant toujours considéré les carrés magiques formés de nombres réels et plus particulièrement formés d'entiers. Cependant, un carré magique peut aussi être formé de nombres complexes, de nombres qui appartiennent à un corps (commutatif) quelconque, d'objets qui appartiennent à un anneau unitaire commutatif.

Ces objets pourraient être des polynômes ou en général, des fonctions. Nous parlerons alors de **carrés magiques fonctionnels** ou simplement de **carrés fonctionnels**.

12.2 Quelques exemples

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

A

23	1	54	5	40
56	27	3	24	13
4	43	15	32	29
10	14	42	37	20
30	38	9	25	21

B

Les carrés A et B sont magiques de sommes 65 et 123. Le carré A + Bi est formé de 25 nombres complexes; il est magique de somme 65 + 123 i.

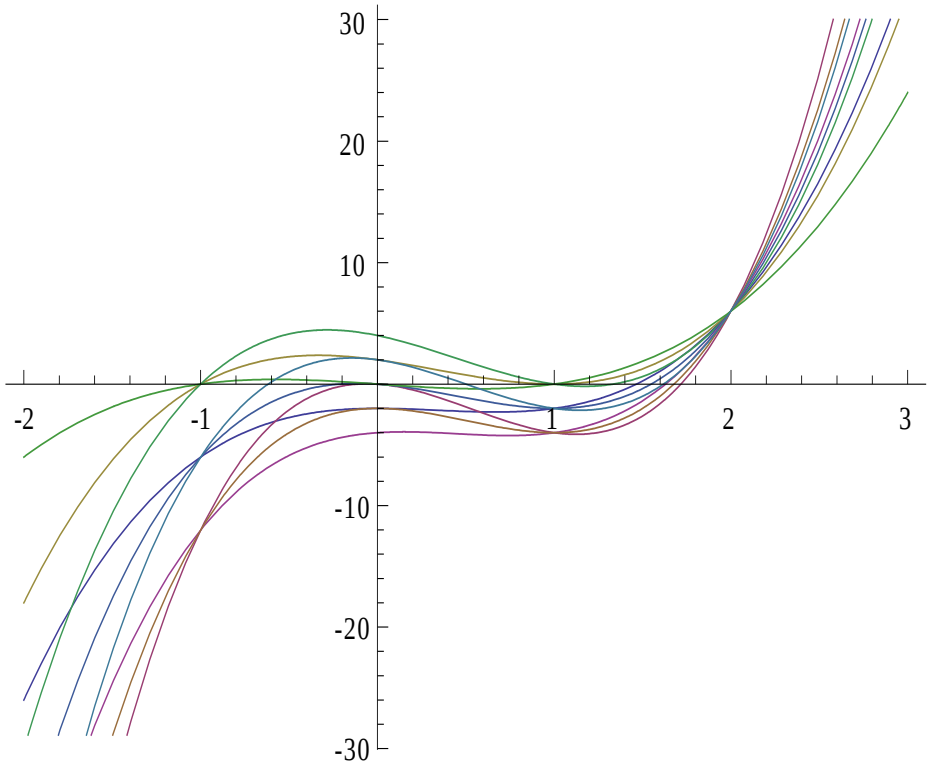
1+23i	15+i	22+54i	18+5i	9+40i
23+56i	19+27i	6+3i	5+24i	12+13i
10+4i	2+43i	13+15i	24+32i	16+29i
14+10i	21+14i	20+42i	7+37i	3+20i
17+30i	8+38i	4+9i	11+25i	25+21i

Carré magique A + Bi; S = 65 + 123i

Le carré suivant est un carré magique formé de neuf polynômes du troisième degré. Sa somme magique est le polynôme $9x^3 - 12x^2 - 3x$. C'est un carré fonctionnel.

$$(1) \qquad \begin{matrix} 2x^3 - 2x^2 - 2 & 5x^3 - 8x^2 - x & 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2 \\ 3x^3 - 4x^2 - 3x + 4 & 3x^3 - 4x^2 - x & 3x^3 - 4x^2 + x - 4 \\ 4x^3 - 6x^2 - 2 & x^3 - x & 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 \end{matrix}$$

Les neuf courbes représentatives sont illustrées ci-dessous :



Si dans le carré magique (1), nous donnons à x une valeur réelle, alors nous obtenons un carré magique formé de neuf nombres. Avec $x = 3$, nous trouvons le carré magique suivant de somme $9x^3 - 12x^2 - 3x$ évalué à $x = 3$ soit 126.

$$\begin{pmatrix} 34 & 60 & 32 \\ 40 & 42 & 44 \\ 52 & 24 & 50 \end{pmatrix}$$

Il est très intéressant de voir comment les courbes représentatives des neuf polynômes se rencontrent. D'abord, nous pouvons observer que les neuf courbes se rencontrent au point $(2;6)$. Nous appelons **nœud** un tel point. À $x = -1$ et à $x = 1$, les neuf courbes se rencontrent par groupes de trois. Nous pouvons créer de telles intersections à volonté!!! Nous verrons

comment un peu plus loin. En général, il est possible de trouver l'intervalle dans lequel auront lieu toutes les intersections et il est possible d'identifier à l'avance tous les types d'intersections possibles.

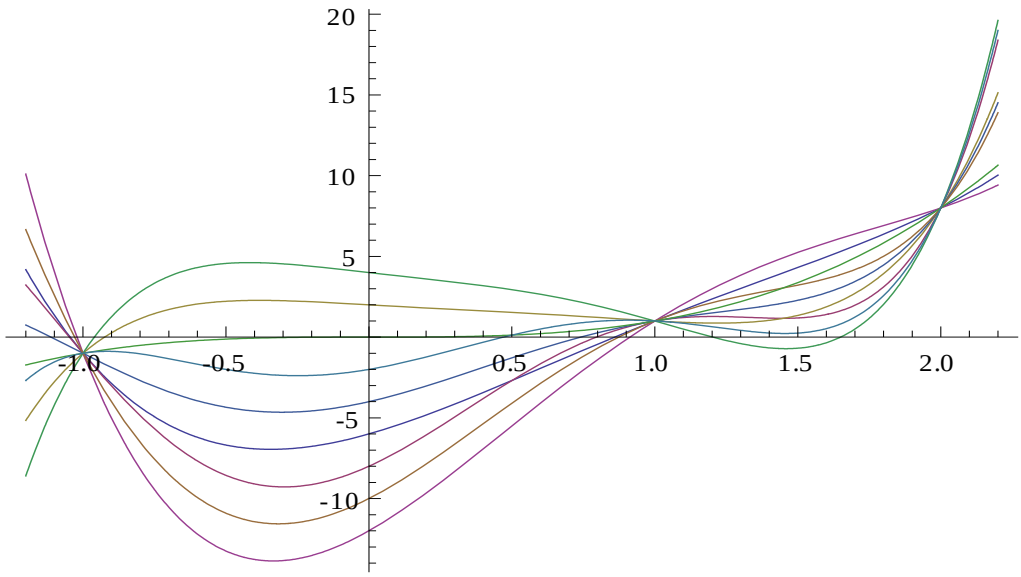
Les intersections nous renseignent sur le carré magique correspondant. Par exemple, le nœud $(2;6)$ nous indique qu'avec $x=2$, le carré magique est un trivial formé du nombre 6. Avec $x=1$, le carré magique renferme les nombres $-4,-2,0$, chacun apparaissant 3 fois dans le carré.

Nous allons utiliser souvent les espaces de carrés arithmétiques, donc de dimension 3. Les trois variables libres sont remplacées par les fonctions $a(x), r(x)\, et\, t(x)$. Il est clair que si $r(x_0)=0$ et $t(x_0)=0$, alors le carré d'ordre n est trivial et renferme n^2 fois le nombre $a(x_0)$. Le point $(x_0;a(x_0))$ est donc un nœud. Si $(x_0;a(x_0))\ et\ (x_1;a(x_1))$ sont deux nœuds différents ($x_0 \neq x_1$), alors il se peut que $a(x_0)=a(x_1)$ et dans un tel cas, aux deux nœuds différents correspond un seul et même trivial.

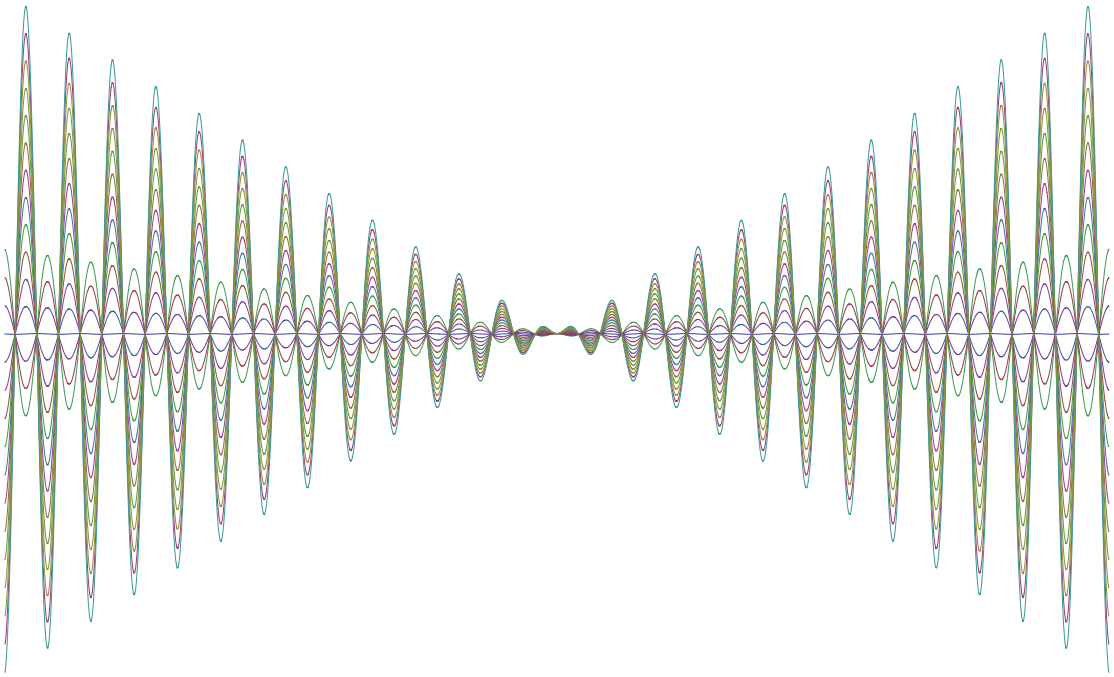
Si les fonctions $r(x)\, et\, t(x)$ ont en commun k zéros réels distincts et si $a(x)$ est une fonction strictement croissante ou strictement décroissante, alors nous avons k nœuds différents lesquels correspondent à k triviaux différents. Par exemple :

$$a(x)=x^3\ ;\ r(x)=(x^2+1)(x^2-1)(x-2)\ ;\ t(x)=(x^2-1)(x-2)(x-3)$$

montre bien, sur le graphique suivant, les trois nœuds différents $(-1;-1),(1;1)\, et\, (2;8)$ lesquels correspondent à trois triviaux différents formés respectivement des nombres $-1,1\, et\, 8$.



Voici à partir d'un carré arithmétique d'ordre 4, seize courbes qui forment un très beau tableau :



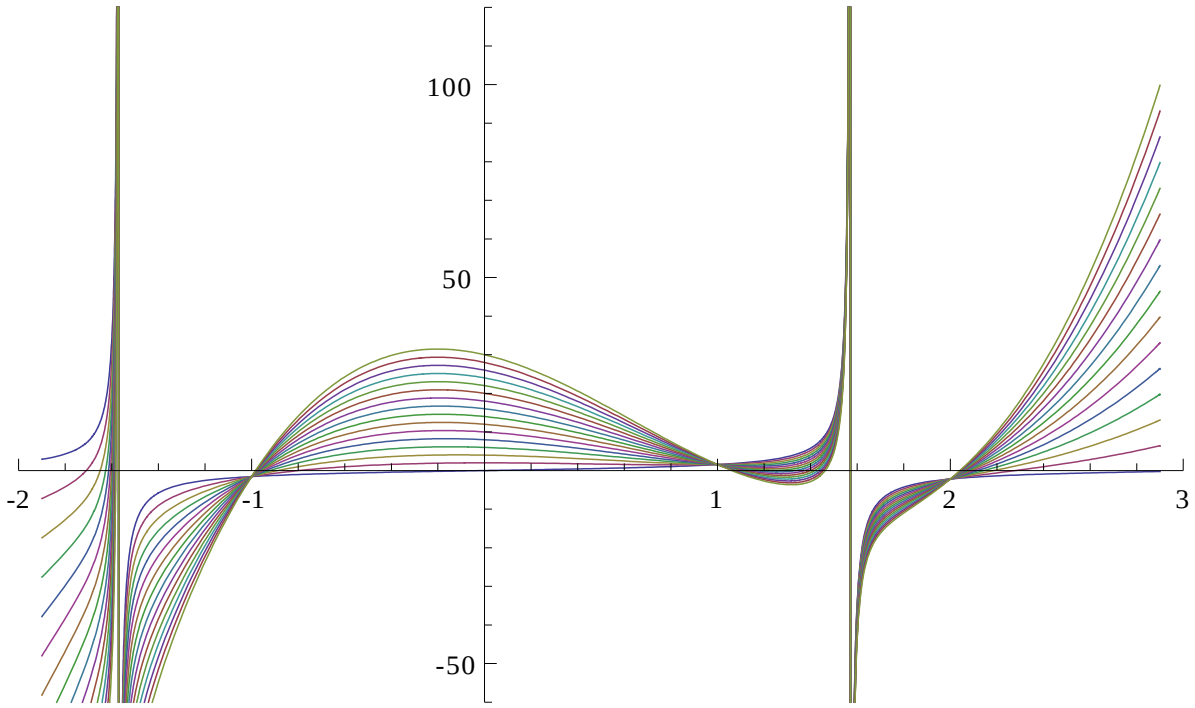
Celles-ci sont générées par la seconde structure générale des diaboliques avec :

$$u(x) = \cos(x) - 3x\sin(x) \ et \ r(x) = x\sin(x)$$

Revoyons cette seconde structure générale des diaboliques :

$$\begin{array}{cccc} 3r+u & 14r+u & 13r+u & u \\ 4r+u & 9r+u & 10r+u & 7r+u \\ 8r+u & 5r+u & 6r+u & 11r+u \\ 15r+u & 2r+u & r+u & 12r+u \end{array}$$

Toujours avec la structure des diaboliques, posons $u(x) = \tan(x)$ et $r(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$.
Nous obtenons les seize courbes suivantes avec les trois nœuds
$(-1; \tan(-1)), (1; \tan(1))$ et $(2; \tan(2))$.



Le graphique montre clairement qu'en dehors des nœuds, il n'y a aucune intersection, ce que nous savions déjà puisque $r(x) \neq 0$ implique seize nombres différents qui forment une suite arithmétique.

Le graphique montre également qu'entre $\frac{\pi}{2}$ et 2, tous les nombres du carré magique sont négatifs et qu'à $x = 0,8$, tous les nombres du carré magique sont positifs.

À $x = \frac{\pi}{2}$, il existe deux nœuds, l'un à ∞ et l'autre à $-\infty$. Il en est de même à $x = -\frac{\pi}{2}$.

12.3 Un carré très spécial

Nous allons maintenant nous servir de la structure générale des super-Dürer-alpha. Rappelons-nous qu'il n'existe que huit carrés magiques normaux super-Dürer-alpha que nous présentons de nouveau ici; ils sont notés de $1\ à\ 8$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \\ 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 15 & 1 & 14 \\ 5 & 10 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 13 & 2 \\ 9 & 6 & 12 & 7 \end{pmatrix}$$

$$1 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 3 \qquad\qquad 4$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 12 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 14 & 11 \\ 16 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 15 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 13 & 2 \\ 9 & 6 & 12 & 7 \\ 4 & 15 & 1 & 14 \\ 5 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 15 & 10 \\ 13 & 12 & 1 & 8 \\ 2 & 7 & 14 & 11 \end{pmatrix}$$

$$5 \qquad\qquad 6 \qquad\qquad 7 \qquad\qquad 8$$

En partant de la structure (2.4) des carrés magiques super-Dürer-alpha, nous pouvons trouver, par exemple, que le carré 1 ci-haut est déterminé par $A = 4, r = -1, t = 4$ tandis que le carré 3 est déterminé par $A = 1, r = 1, t = 4$. Voyons pour les huit carrés :

carré	A	r	t
1	4	-1	4
2	13	-4	1
3	1	1	4
4	16	-4	-1
5	1	4	1
6	16	-1	-4
7	4	4	-1
8	13	1	-4

puis trouvons les trois polynômes d'interpolation $A(x), r(x)\ et\ t(x)$ tels que :

$$A(1) = 4, A(2) = 13, \ldots, A(8) = 13\ ;\ r(1) = -1, r(2) = -4, \ldots, r(8) = 1\ ;\ t(1) = 4, t(2) = 1, \ldots, t(8) = -4$$

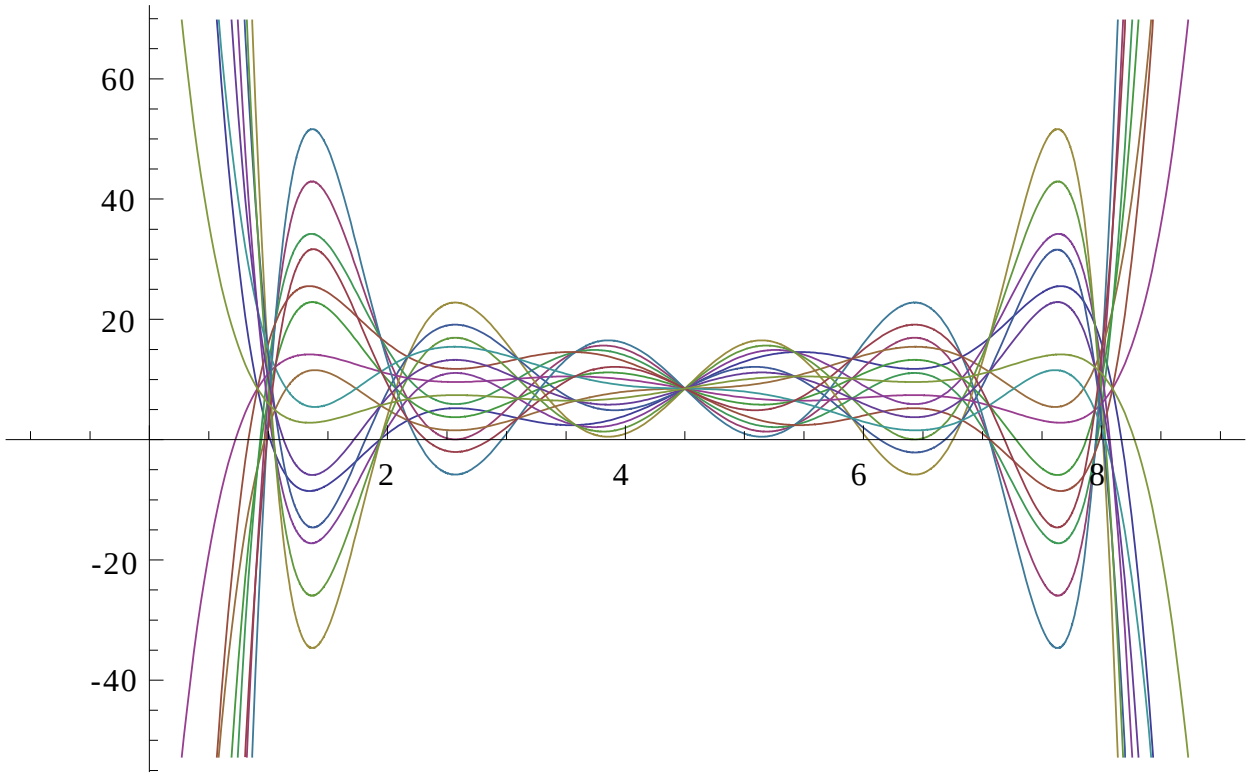
Nous trouvons les polynômes :

$$A\,(x) = -1769 + \frac{121409x}{28} - \frac{161307x^2}{40} + \frac{56981x^3}{30} - \frac{3981x^4}{8} + \frac{881x^5}{12} - \frac{57x^6}{10} + \frac{19x^7}{105}$$

$$r\,(x) = 723 - \frac{745261x}{420} + \frac{66171x^2}{40} - \frac{140533x^3}{180} + \frac{1639x^4}{8} - \frac{2723x^5}{90} + \frac{47x^6}{20} - \frac{47x^7}{630}$$

$$t\,(x) = 462 - \frac{468829x}{420} + \frac{41367x^2}{40} - \frac{87391x^3}{180} + \frac{1015x^4}{8} - \frac{841x^5}{45} + \frac{29x^6}{20} - \frac{29x^7}{630}$$

Nous allons maintenant placer ces trois polynômes dans la seconde structure générale des super -Dürer-alpha et ainsi obtenir seize polynômes complets du septième degré, tous différents. Ce carré M, formé de ces seize polynômes, est un super-Dürer-alpha avec ses 68 figures magiques caractéristiques; de plus, il est de somme magique S = 34. Nous montrerons que ces seize polynômes sont remarquables. En effet, ils possèdent le nœud $\left(\frac{9}{2};\frac{17}{2}\right)$ qui est un centre de symétrie et un point d'inflexion pour chaque courbe. Voyons-les :



Si nous posons $x = 1$, alors nous trouvons le super-Dürer-alpha normal noté 1 (voir ci-haut). En fait, si nous remplaçons x par l'entier i $(i = 1, 2, 3, ..., 7, 8)$, alors nous trouvons le super-Dürer-alpha normal noté i. Graphiquement, par exemple à $x = 4$, nous trouvons les valeurs de 1 à 16 avec les seize polynômes. Ce sont les seize entiers du carré normal noté 4. Ceci est une façon très sophistiquée de construire les huit super-Dürer-alpha normaux qui existent. (Voir 5.6).

Pour vérifier le nœud, il suffit d'évaluer les seize polynômes à $x = \frac{9}{2}$. Nous trouvons $\frac{17}{2}$ à chaque fois. Ce nœud correspond donc au trivial formé de $\frac{17}{2}$. Quant au point d'inflexion, il suffit de trouver les seize dérivées secondes et de les évaluer à $x = \frac{9}{2}$. Nous trouvons 0 à chaque fois. Puis, nous trouvons que les seize dérivées secondes possèdent chacune cinq zéros réels distincts; de plus, la courbe de chaque dérivée seconde montre bien que nos seize polynômes possèdent cinq points d'inflexion et que le nœud est bien un point d'inflexion commun aux seize courbes. Tous ces calculs ont été effectués très rapidement avec MATHEMATICA!!!

Lorsque nous observons le graphique des seize polynômes, il semble y avoir un axe de symétrie, plus précisément la droite verticale qui passe par le nœud. Voyons de plus près :

D'abord, le centre de symétrie. Pour démontrer que le nœud est bien un centre de symétrie, il suffit d'évaluer les seize polynômes à $\frac{9}{2} + h$ et à $\frac{9}{2} - h$. Dans les deux cas, la valeur de chaque polynôme a la forme $\frac{17}{2} + p(h)$. Prenons $f(x)$, un des seize polynômes. Évalué à $\frac{9}{2} + h$, il devient $\frac{17}{2} + p(h)$; évalué à $\frac{9}{2} - h$, il devient $\frac{17}{2} + q(h)$. Nous trouvons que :

$$f\left(\frac{9}{2}+h\right)+f\left(\frac{9}{2}-h\right)=\frac{17}{2}+p(h)+\frac{17}{2}+q(h)=17$$

d'où $q(h) = -p(h)$. Cela nous montre que le nœud est un centre de symétrie pour la courbe de chacun des seize polynômes. Il s'ensuit que le nœud est un centre de symétrie de la figure toute entière (elle comprend les seize courbes qui correspondent aux seize polynômes).

Puis, l'axe de symétrie vertical. Pour voir que la droite $x = 9/2$ est un axe de symétrie pour l'ensemble des seize courbes, il suffit de faire l'observation suivante. D'abord, numérotons chaque polynôme selon sa position dans le carré :

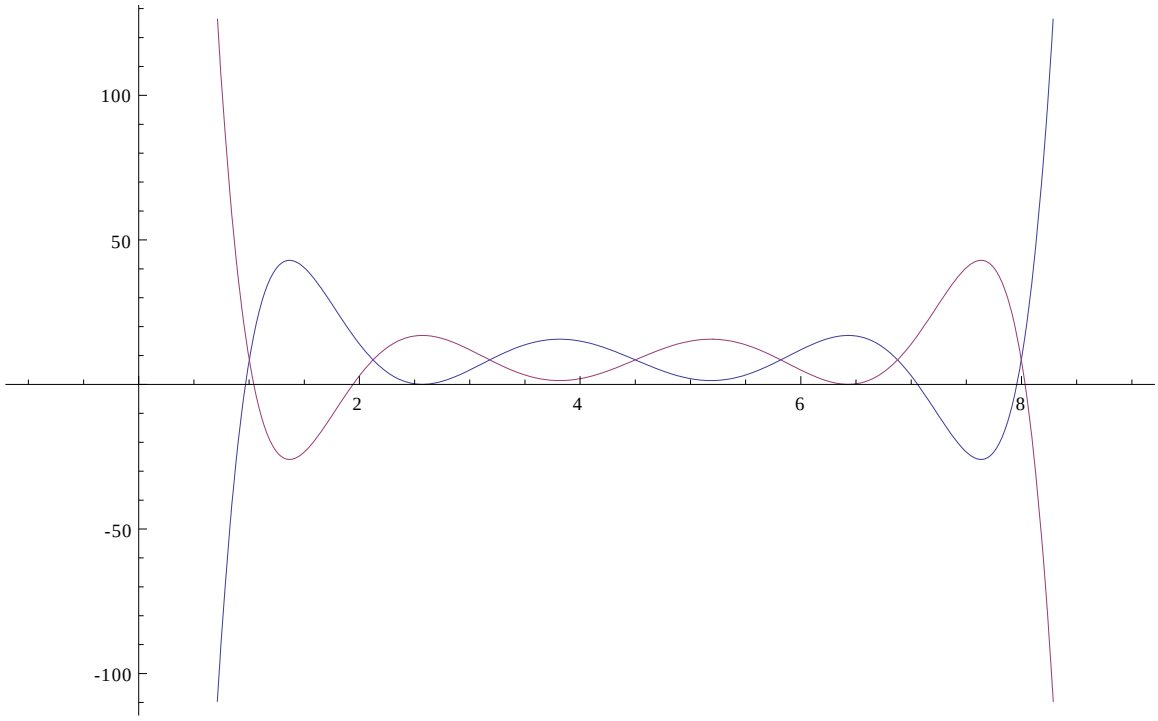
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Nous réalisons que le polynôme (1) prend à $x = 9/2 - h$, la même valeur que le polynôme (11) évalué à $9/2 + h$. De plus, le polynôme (11) prend à $x = 9/2 - h$, la même valeur que le polynôme (1) évalué à $9/2 + h$. Notons ici que $h \geq 0$. Les polynômes (1) et (11) seront associés

pour former la paire $(1\,;\,11)$ dont les courbes auront $x = 9/2$ comme axe de symétrie vertical. Il en sera de même avec les paires :

$$(2\,;\,12)\,;\,(3\,;\,9)\,;\,(4\,;\,10)\,;\,(5\,;\,15)\,;\,(6\,;\,16)\,;\,(7\,;\,13)\,;\,(8\,;\,14)$$

Voici illustré la paire $(2;12)$:



La droite $x = 9/2$ est l'axe de symétrie vertical. Si nous prenons une seule courbe, nous voyons alors le centre de symétrie mais pas l'axe de symétrie. Par contre, avec chaque couple, nous voyons bien l'axe de symétrie.

Ces seize polynômes ont une propriété extraordinaire : ils prennent tous une valeur entière dès que x est un entier, malgré les coefficients des polynômes!!! (Voir problème 3 de 12.5).

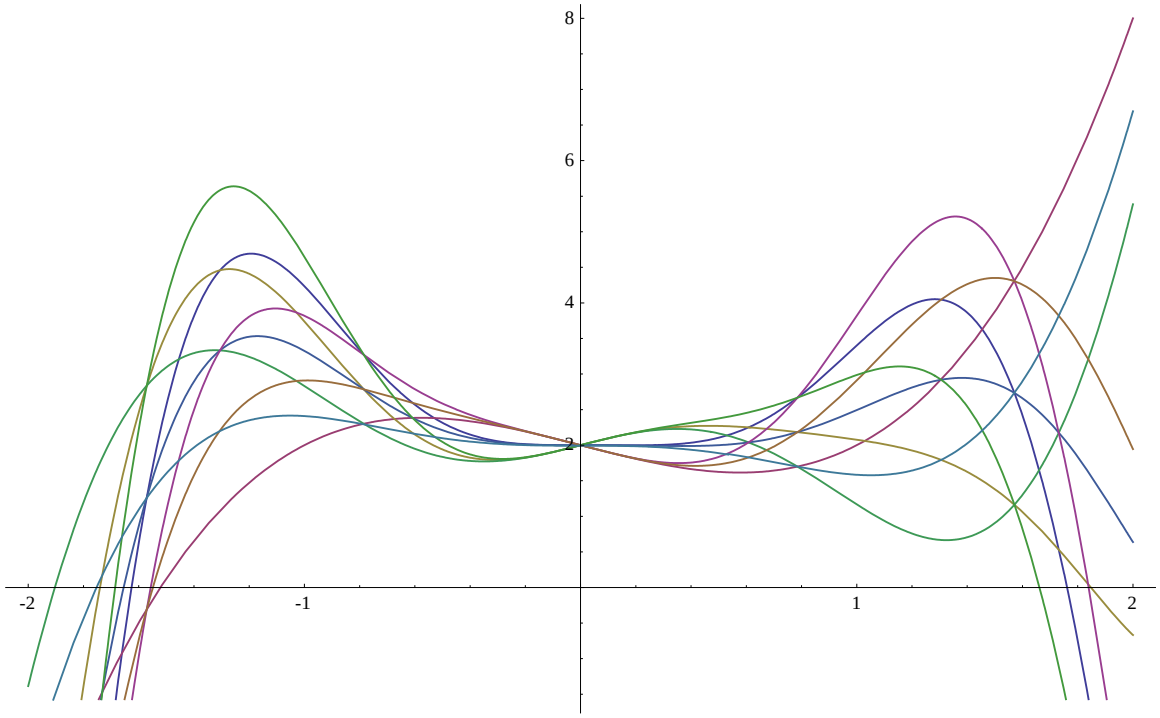
La somme magique du carré fonctionnel M qui renferme ces seize polynômes de degré 7 est 34, quelle que soit la valeur de x!!! (Voir problème 2 de 12.5).

12.4 D'autres carrés fonctionnels

1) Dans la seconde structure générale (voir 4.3.2) des carrés magiques d'ordre 3, posons :

$$a(x) = x^3 - x + 2;\ r(x) = x^3 \sin(2x)\ ;\ t(x) = x\cos(2x)$$

Nous obtenons les neuf courbes suivantes :



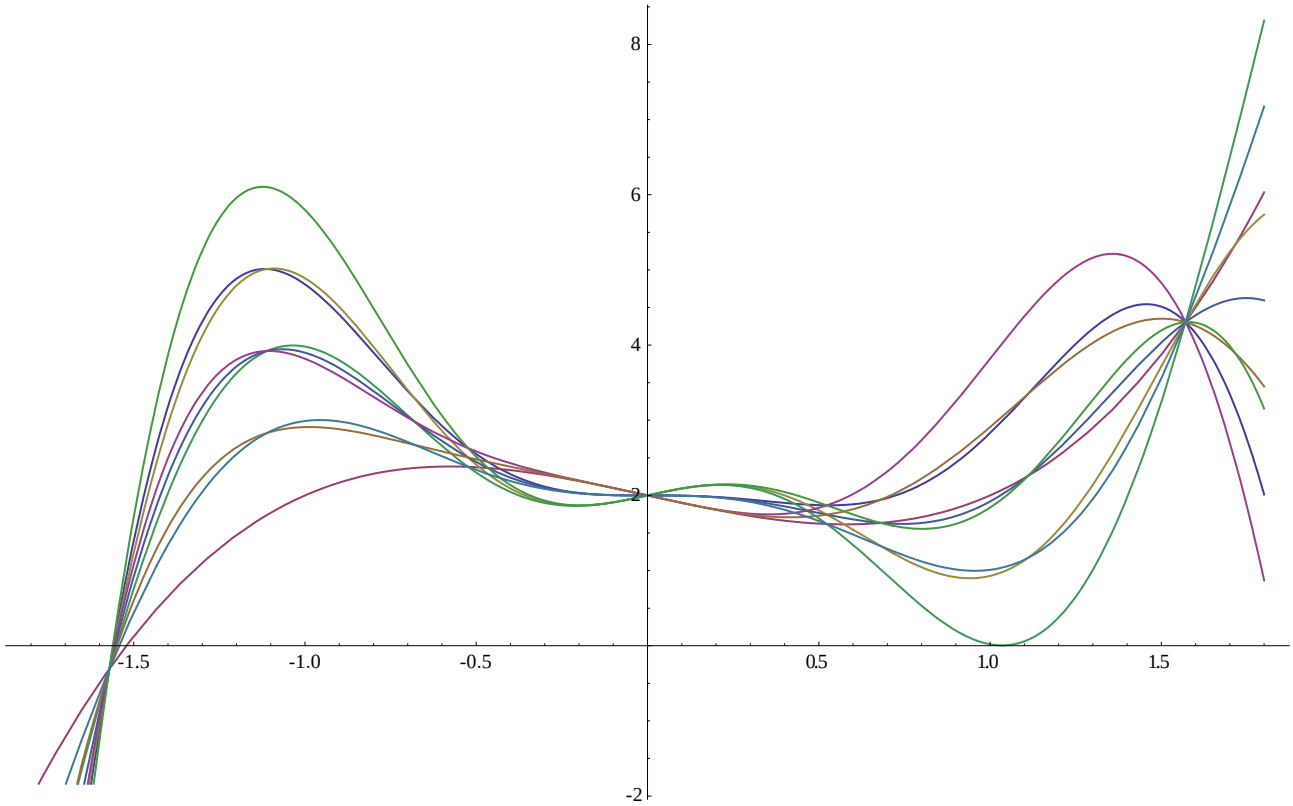
Dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ \infty[$, l'unique nœud se trouve à $x = 0$. Notons que A dans la seconde structure générale de 4.3.2 est remplacé ici par a.

Remarque : La deuxième structure générale des carrés magiques d'ordre 3 utilisée ci-haut est différente de celle présentée dans « Ordre 3 » de MATHEMATICA ou d'EXCEL. Cependant, l'une est un équivalent de l'autre. De plus, dans les deux cas, nous retrouvons le même ensemble de neuf courbes du graphique ci-dessus. Enfin, les deux structures sont équivalentes en ce sens qu'elles génèrent les mêmes carrés magiques.

2) Dans la seconde structure générale (voir 4.3.2) des carrés magiques d'ordre 3, posons :

$$a(x) = x^3 - x + 2;\ r(x) = x^3 \sin(2x)\ ;\ t(x) = x\cos(3x)$$

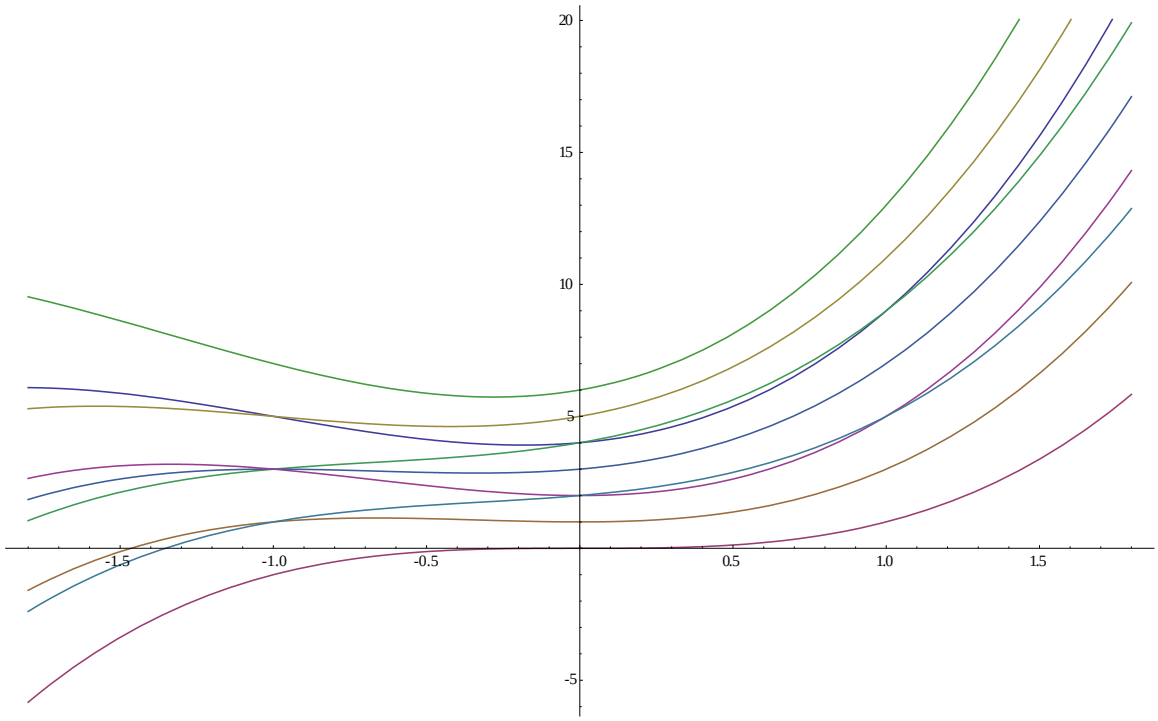
Nous obtenons les neuf courbes suivantes :



Nous avons cette fois un ensemble de neuf courbes qui possède une infinité de nœuds dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ \infty[$. En effet, $\sin(2x)$ *et* $\cos(3x)$ peuvent s'annuler simultanément pour une infinité de valeurs de x.

3) Dans la seconde structure générale (voir 4.3.2) des carrés magiques d'ordre 3, posons :

$$a(x) = x^3;\ r(x) = x^2 + 1;\ t(x) = x^2 + x + 2$$



Il n'y a aucun nœud puisque $r(x)\, et\, t(x)$ ne peuvent pas s'annuler simultanément. Plus précisément, $r(x)\, et\, t(x)$ ne s'annulent jamais ici.

Le problème 6 de 12.5 nous demande de trouver **l'intervalle des rencontres** c'est-à-dire l'intervalle dans lequel toutes les intersections vont se produire. En-dehors de cet intervalle, aucune intersection n'est possible.

Pour se faire, nous devons trouver les abscisses de toutes les intersections. Nous aurons à résoudre trente-six équations. Voyons d'abord les neuf polynômes définis par $a(x), r(x)$ et $t(x)$:

$$\begin{array}{ccc} 4+x+3x^2+x^3 & x^3 & 5+2x+3x^2+x^3 \\ 4+2x+2x^2+x^3 & 3+x+2x^2+x^3 & 2+2x^2+x^3 \\ 1+x^2+x^3 & 6+2x+4x^2+x^3 & 2+x+x^2+x^3 \end{array}$$

Ces neuf polynômes correspondent aux neuf courbes du graphique ci-haut. Ils sont numérotés (1), (2), …, (8), (9).

Nos trente-six équations seront formées comme suit : (1) = (2) ; (1) = (3) ; … ; (1) = (9) ; (2) = (3) ; (2) = (4) ; … ; (2) = (9) ; (3) = (4) ; (3) = (5) ; … ; (8) = (9).

Nous avons résolu ces trente-six équations pour trouver que les intersections ont lieu à $x=-1, x=0, x=1.$ L'intervalle des rencontres est donc $[-1;\, 1]$ dans lequel nous trouvons neuf

intersections. Vous remarquerez que la courbe (2) ne rencontre aucune autre courbe et qu'il en est de même de la courbe (8). Ici $(2) = x^3 \ et \ (8) = x^3 + 4x^2 + 2x + 6.$

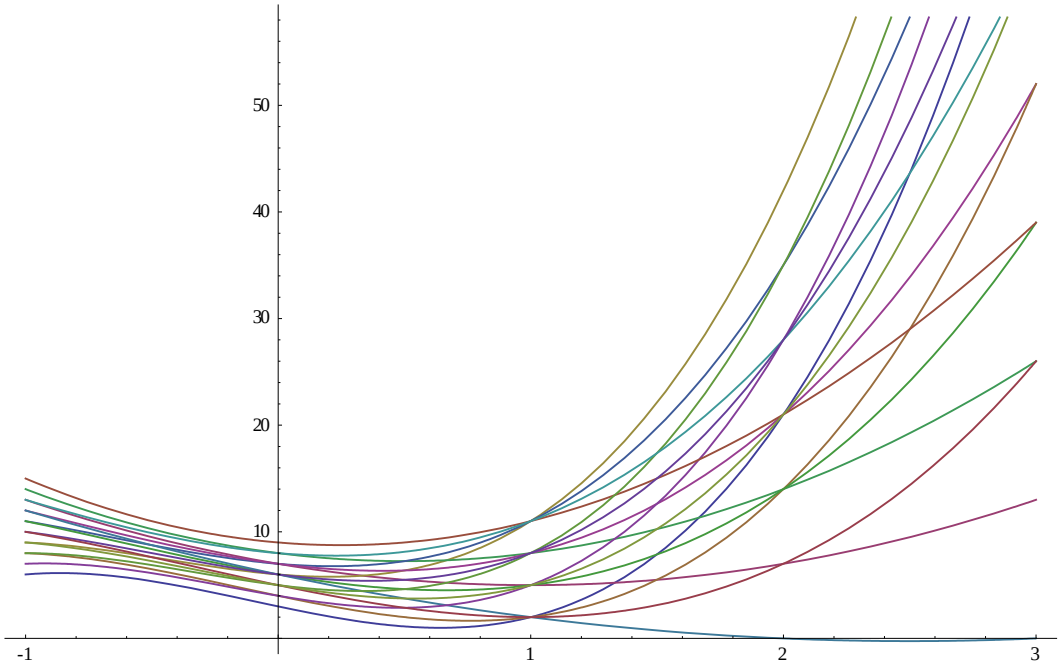
Si nous considérons les neuf courbes comme des autoroutes qui vont de $-\infty \ à \ \infty$, alors **les autoroutes les plus sécuritaires** sont la (2) et la (8) puisqu'aucune intersection n'est possible. **Les autoroutes les plus dangereuses** sont la (4) et la (6) car chacune a quatre intersections. Ici, $(4) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \ et \ (6) = x^3 + 2x^2 + 2.$

4) Nous venons de voir que les courbes qui représentent des fonctions situées dans un carré magique peuvent se rencontrer selon des nœuds. Si le carré magique est arithmétique, alors nous savons qu'il y a nœud à $x = x_0$ si et seulement si $r(x_0) = t(x_0) = 0.$ Cependant, il y a un autre type d'intersection très intéressant lorsque $r(x_0) \ et \ t(x_0)$ s'annulent mais non simultanément. Voyons l'exemple qui suit.

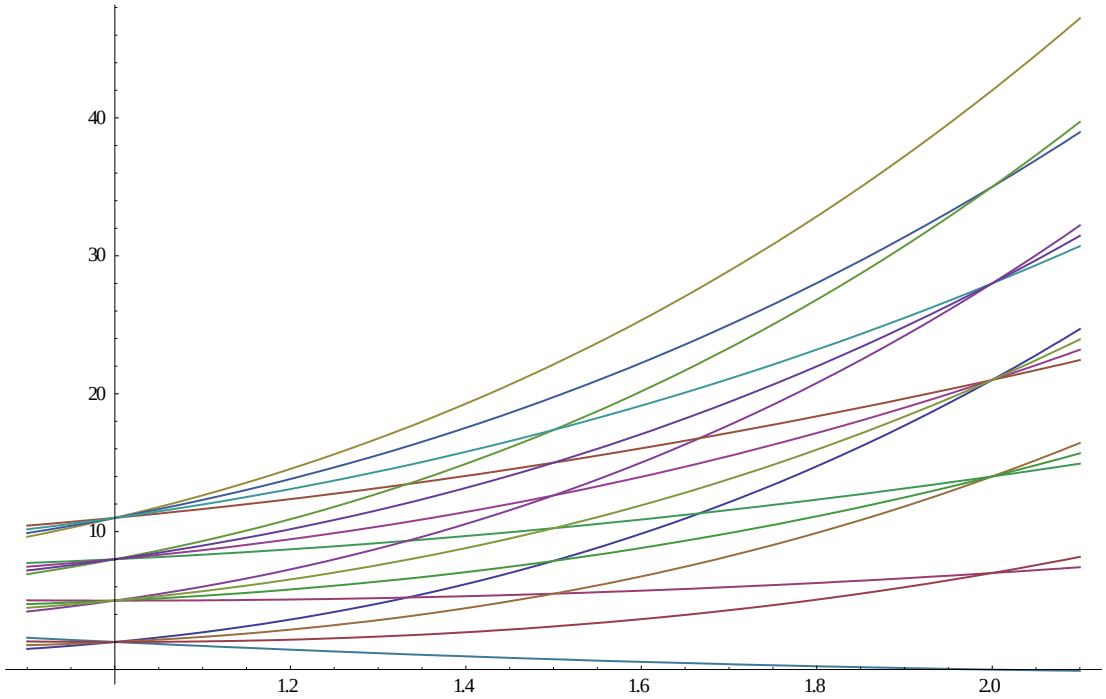
Dans la structure des super-Dürer-alpha qui est arithmétique, posons :

$$A(x) = x^2 - 5x + 6 \ ; \ r(x) = x^3 - 1 \ ; \ t(x) = x^2 + x + 1$$

L'ensemble des seize courbes obtenues ne possède aucun nœud puisque $t(x)$ ne s'annule jamais mais à $x = 1$, les seize courbes se rencontrent par groupes de quatre car $r(1) = 0 \ et \ t(1) \neq 0$. (Voir problème 9 de 12.5).



Observons de plus près :



Cela nous conduit vers une nouvelle piste de recherche!!! Comment expliquer toutes ces intersections et en particulier à $x = 2$?

Lorsque le carré est arithmétique, nous savons expliquer les nœuds et les intersections comme celles obtenues à $x = 1$.

Pouvons-nous expliquer ce qui se passe à $x = 2$? La réponse est oui!!! Évaluez les seize polynômes à $x = 2$. Vous trouvez alors les valeurs suivantes à partir d'un tableau arithmétique :

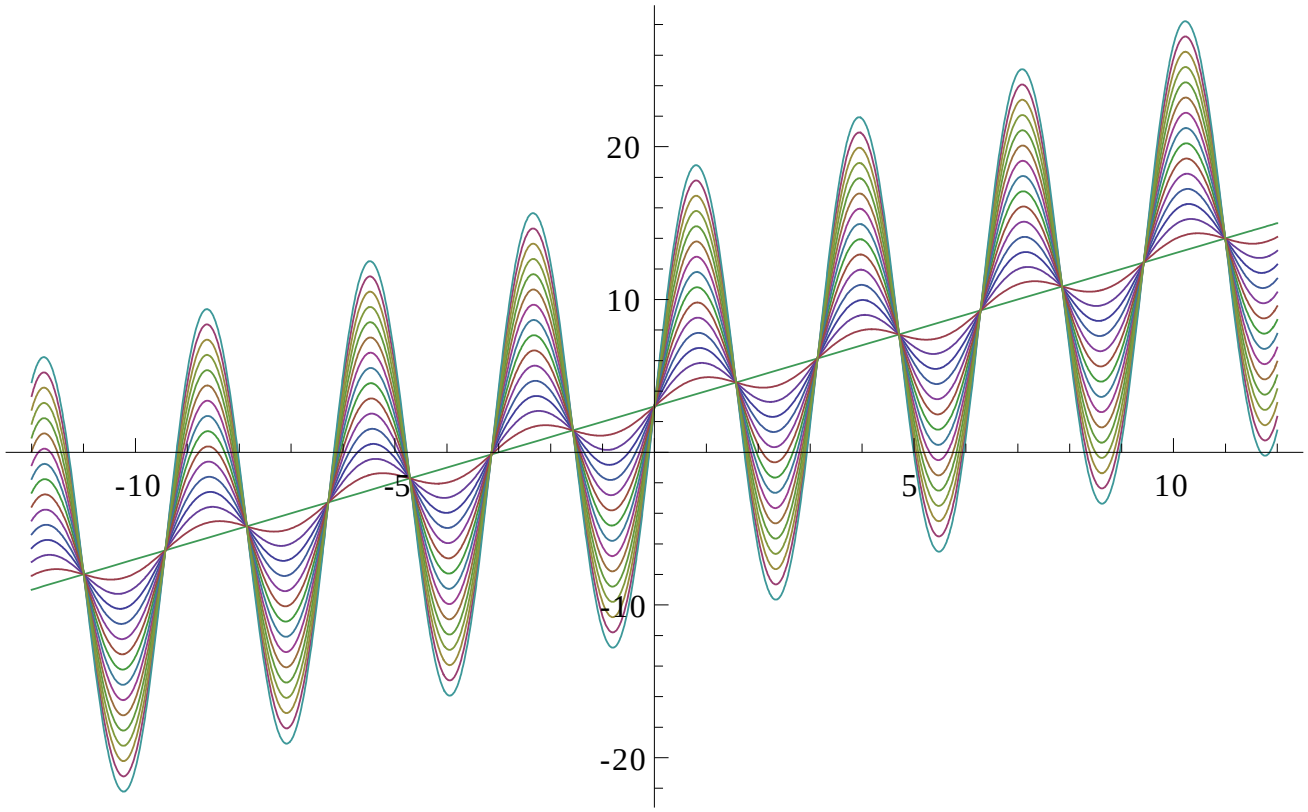
$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 & 21 \\ 7 & 14 & 21 & 28 \\ 14 & 21 & 28 & 35 \\ 21 & 28 & 35 & 42 \end{pmatrix}$$

Observez que $r(2) = t(2) = 7$.

Nous pourrions noter (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1) ce type d'intersections à $x = 2$.

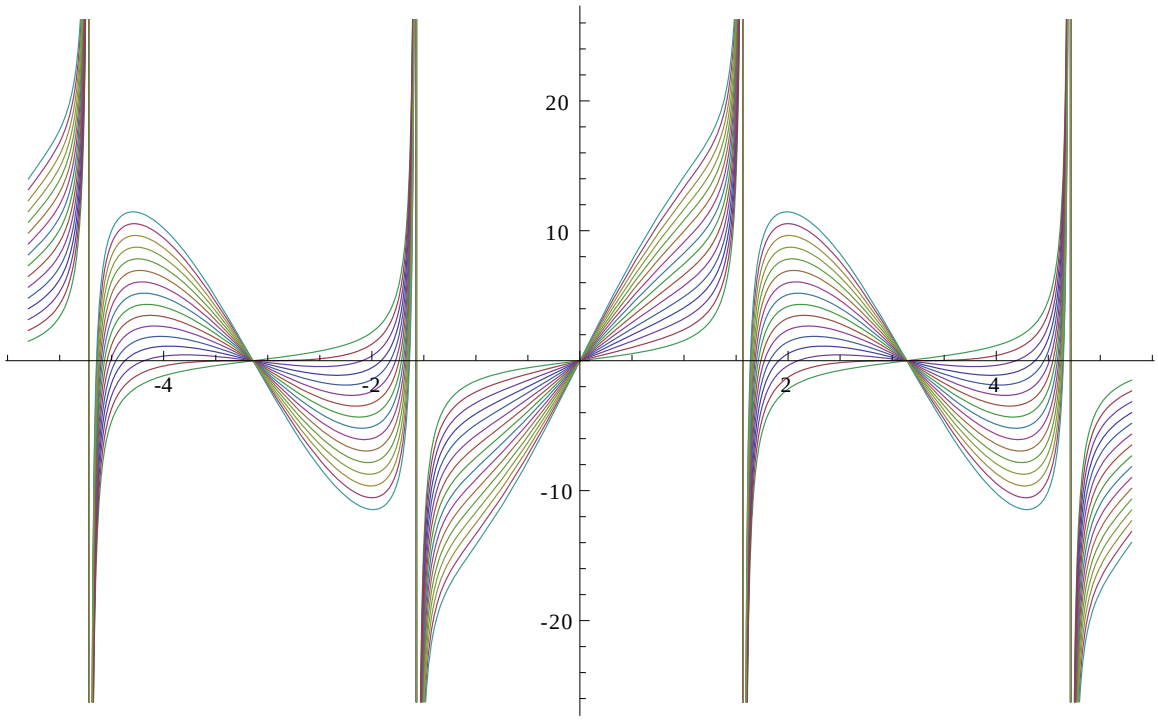
Enfin, que conclure si $r(x) = t(x)$? Qu'observez-vous à $x = 3$?

5) Dans la structure des diaboliques, posons $u(x) = x + 3$; $r(x) = \sin(2x)$



L'ensemble de ces seize courbes distinctes possède une infinité de nœuds. Il n'existe aucune autre intersection. Tous les nœuds sont situés sur la droite $u(x) = x + 3$.

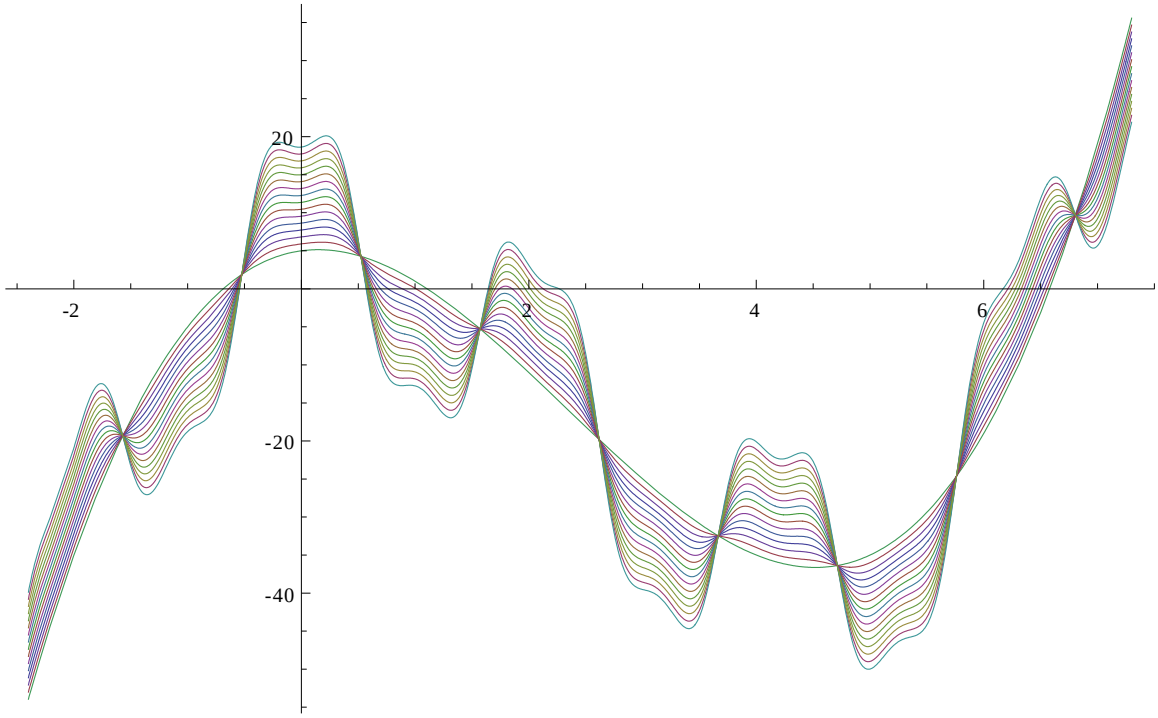
6) Dans la structure des diaboliques, posons $u(x) = \tan(x)$; $r(x) = \sin(x)$



L'ensemble de ces seize courbes distinctes possède une infinité de nœuds. Il n'existe aucune autre intersection en dehors des nœuds. Ceux-ci sont tous situés sur la courbe $u(x) = \tan(x)$.

Cependant, par exemple, nous trouvons deux nœuds à $\left(-\frac{\pi}{2};-\infty\right)$ et $\left(-\frac{\pi}{2};\infty\right)$ puis deux autres à $\left(\frac{\pi}{2};\infty\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2};-\infty\right)$.

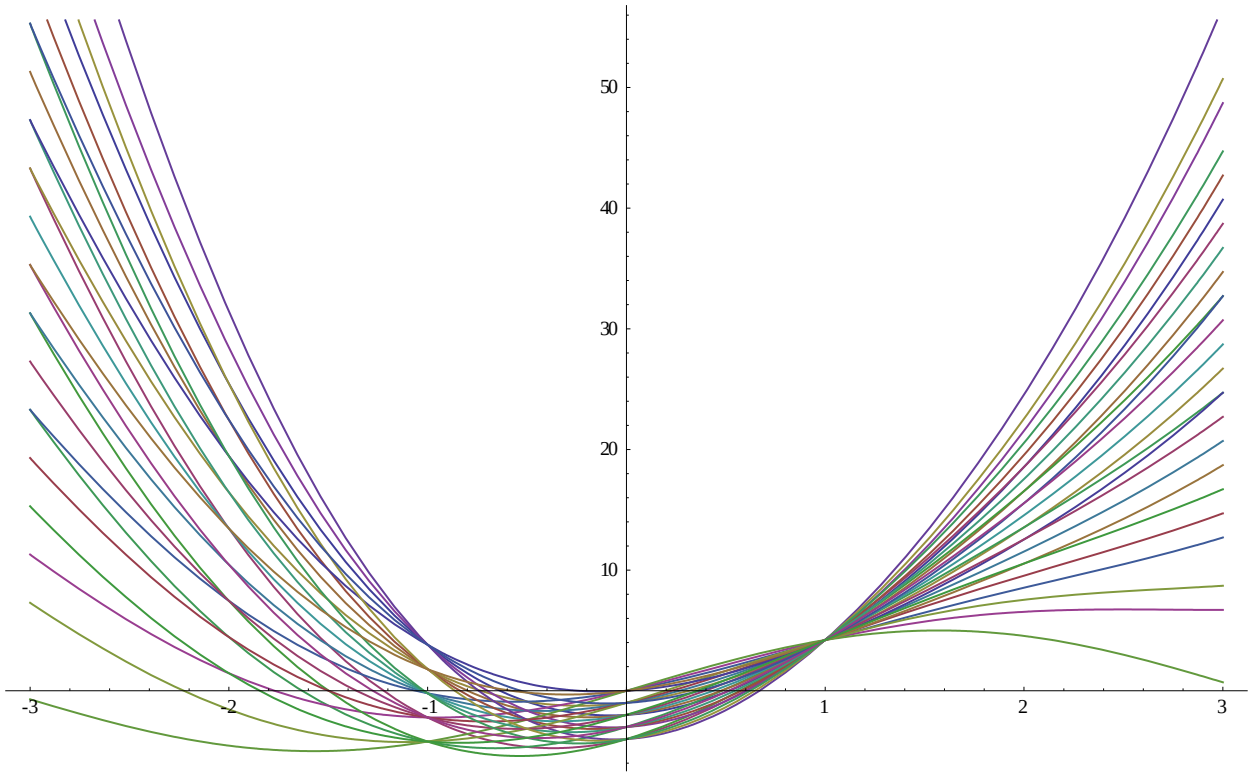
7) Dans la structure des diaboliques, posons $u(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 5$; $r(x) = \sin(2\cos(3x))$



L'ensemble de ces seize courbes distinctes possède une infinité de nœuds. Il n'existe aucune autre intersection en dehors de ceux-ci. Ces nœuds sont tous situés sur la courbe définie par $u(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 5$.

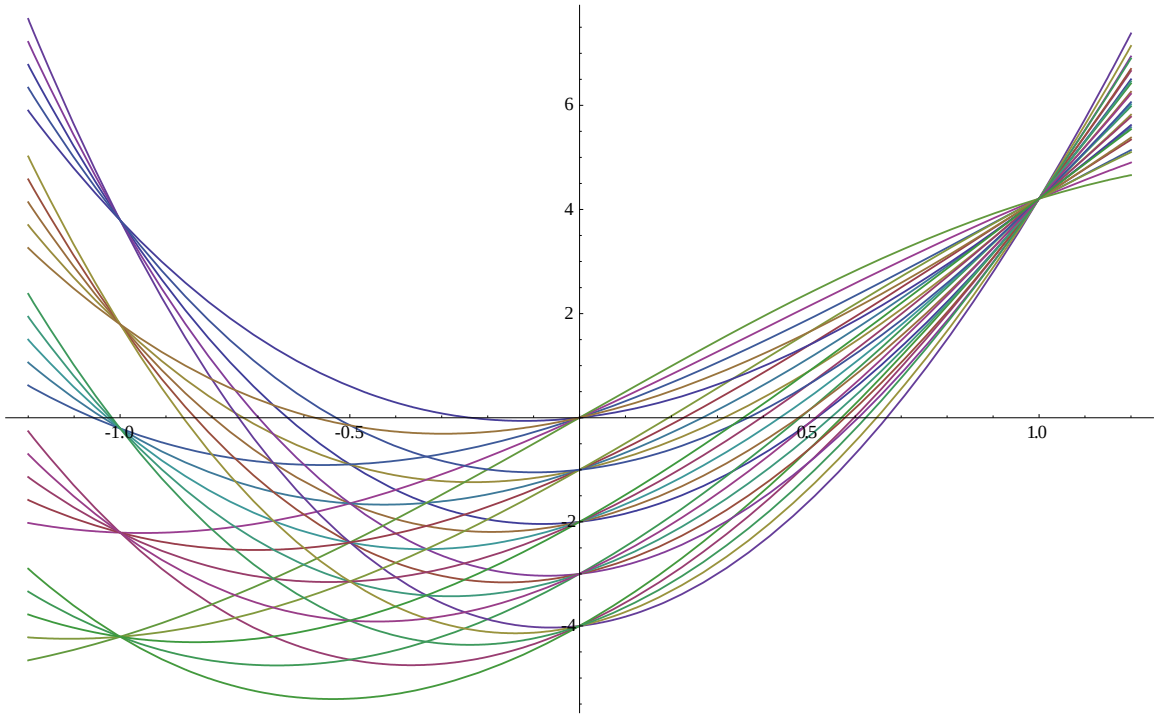
8) Dans la structure de carrés arithmétiques d'ordre 5 (Voir « Ordre 5 » dans la Partie 3, fichier MATHEMATICA, annexe 22, ou EXCEL, annexe 21), posons :

$$a(x) = 5\sin(x)\ ;\ r(x) = x^2 - x\ ;\ t(x) = x^2 - 1$$



L'ensemble de ces vingt-cinq courbes distinctes possède un seul nœud à $x = 1$. À $x = 0$ et $x = -1$ les vingt-cinq courbes se rencontrent par groupe de cinq courbes.

Le graphique suivant nous montre de plus près les différentes intersections.



9) Dans la structure des carrés arithmétiques d'ordre 5 du problème précédent, posons :

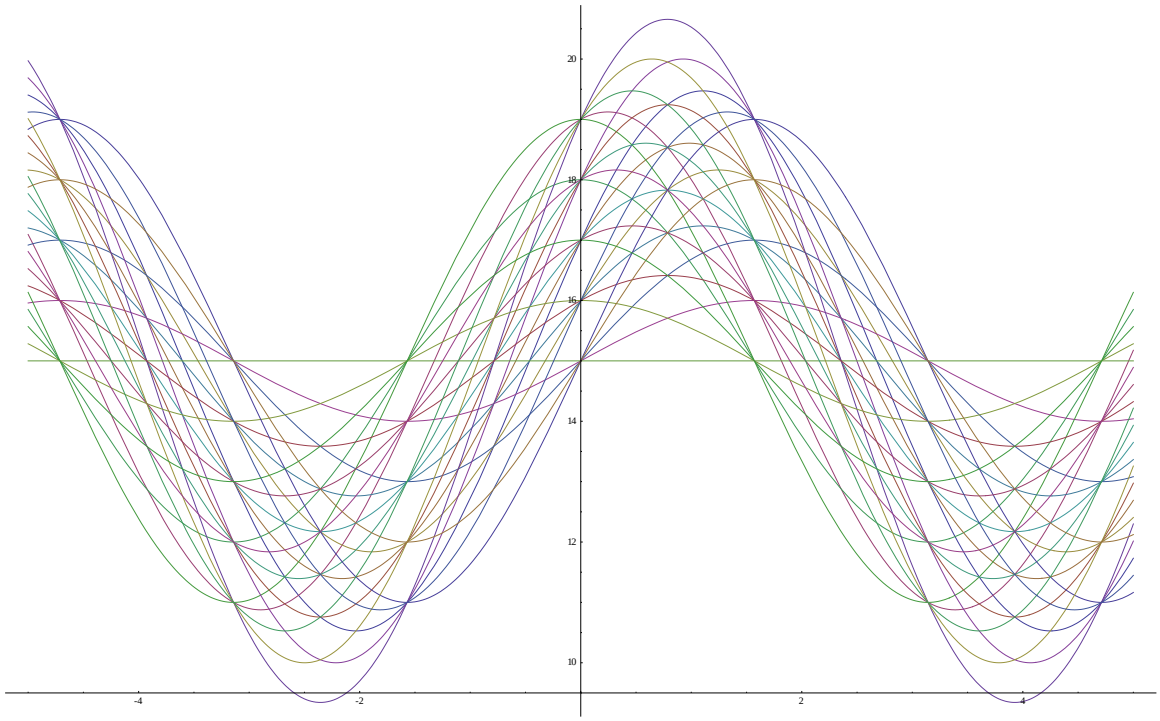
$$a(x) = 15 \text{ ; } r(x) = \sin(x) \text{ ; } t(x) = \cos(x)$$

L'ensemble des vingt-cinq courbes distinctes ne possède pas de nœud mais pour certaines valeurs de x, les vingt-cinq courbes se rencontrent par groupe de cinq courbes.

Le problème 10 de 12.5 nous demande de trouver ces valeurs de x dans l'intervalle $]-\infty \text{ ; } \infty[$ et de dire pourquoi il n'y a pas de nœud.

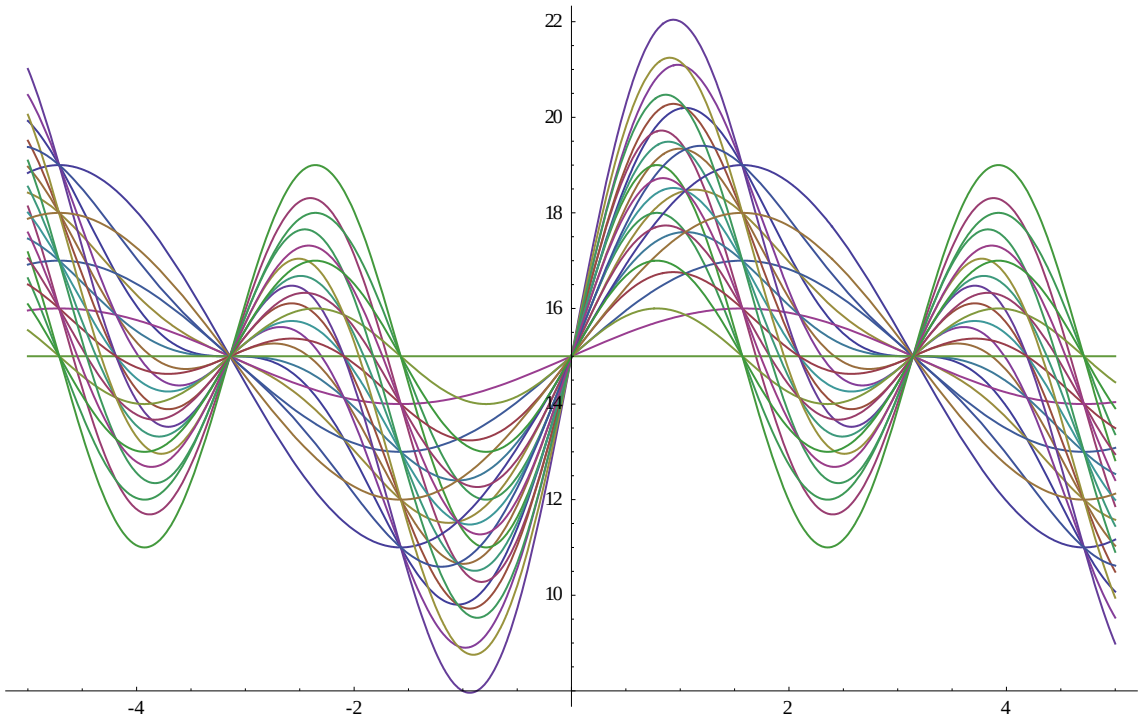
Sur le graphique qui suit, prenez l'abscisse x_0 du point le plus élevé. Observez comment les vingt- cinq courbes se rencontrent à x_0. Nous pourrions appeler ce type d'intersections, le :

Type : (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1) (voir dans l'encadré plus loin).

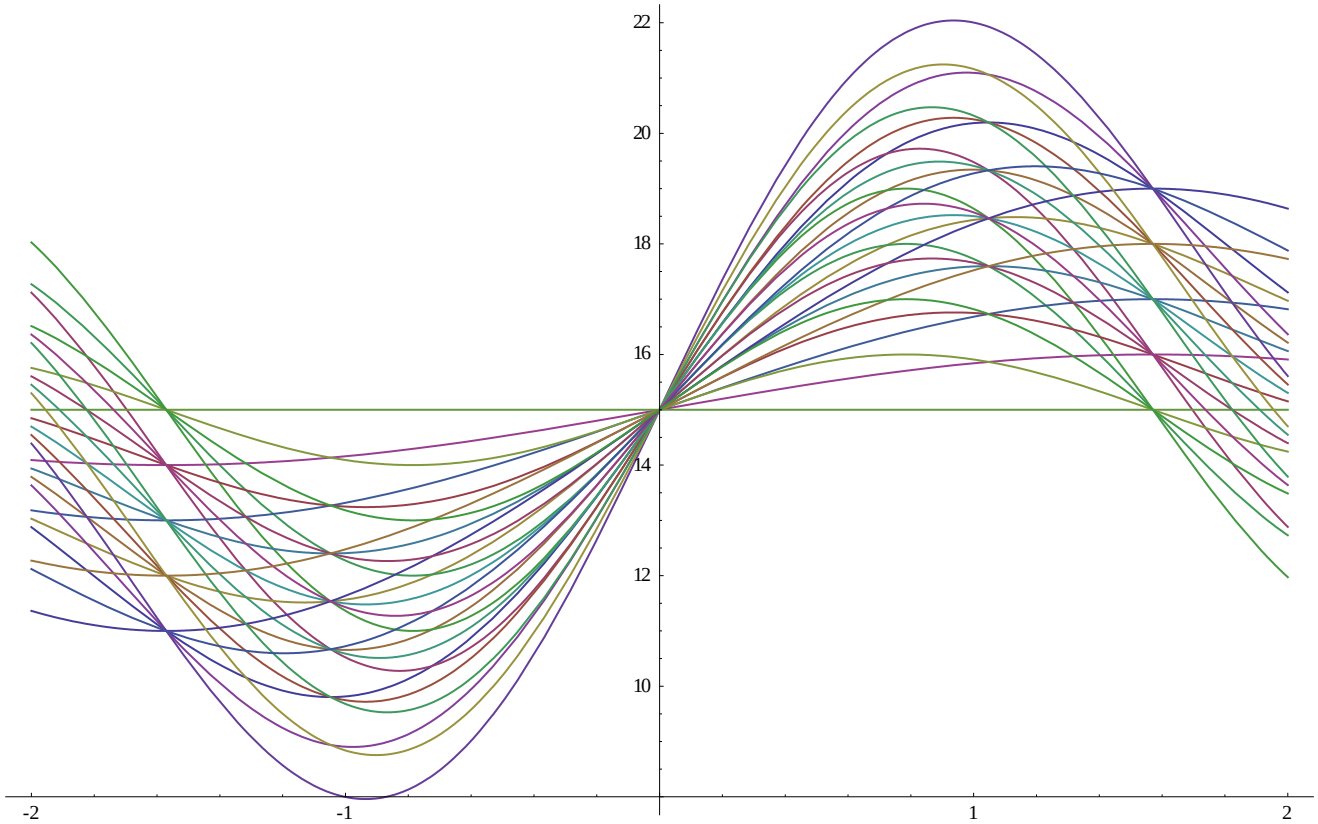


10) Dans la structure des carrés arithmétiques d'ordre 5 du problème précédent, posons :

$$a(x) = 15 \; ; \; r(x) = \sin(x) \; ; \; t(x) = \sin(2x)$$



L'ensemble des vingt-cinq courbes différentes possède une infinité de nœuds situés sur la droite $y = 15$, parallèle à l'axe des x. Il existe aussi une infinité de valeurs de x là où les vingt-cinq courbes se rencontrent par groupe de cinq courbes. Voyons de plus près :



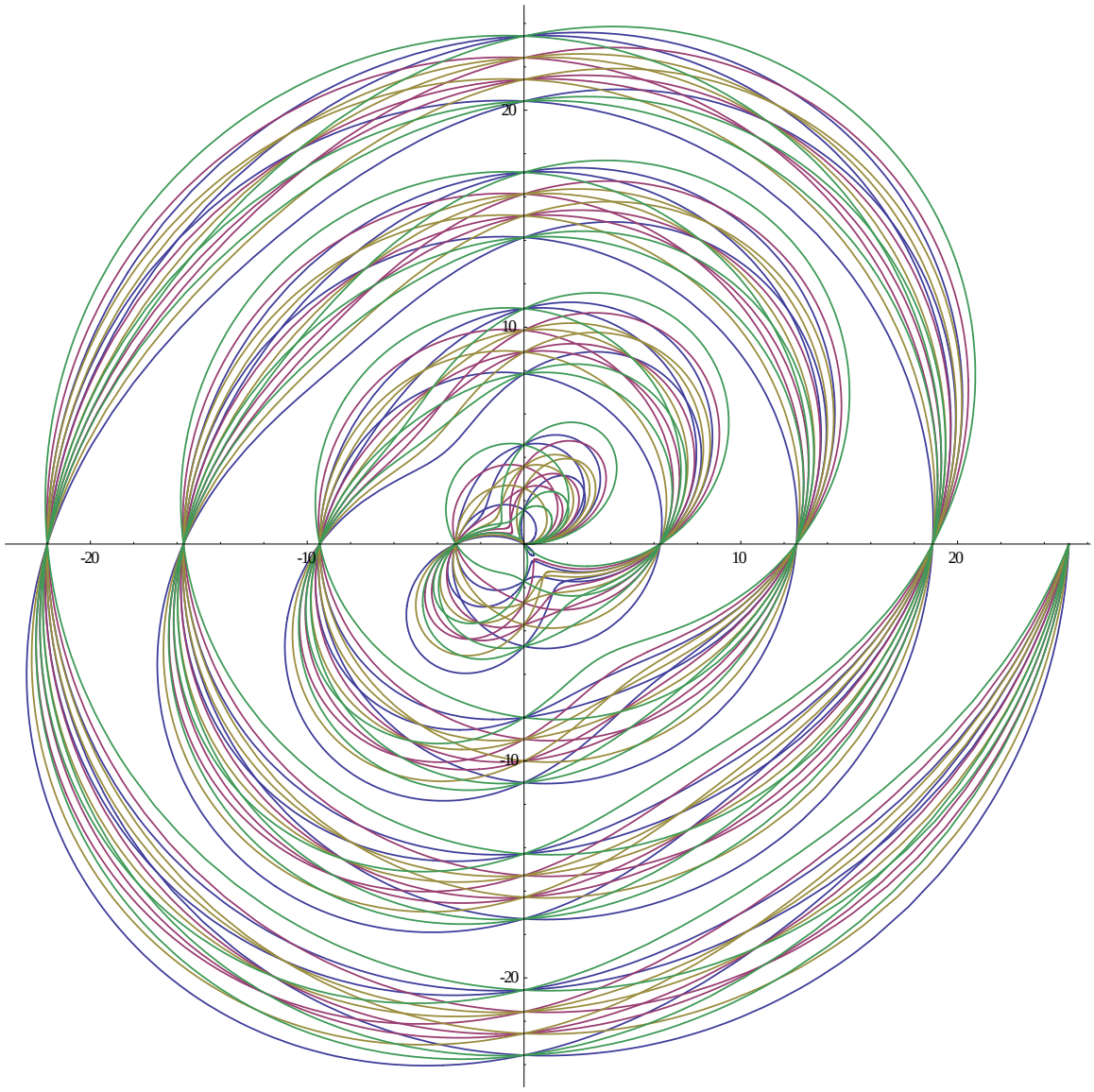
Observez le type : (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1). C'est le type 3 qui sera défini dans l'exemple 11 suivant. Il se produit à $x = \frac{\pi}{3} = 1,047197...$ En effet, $\sin(x) = \sin(2x) \neq 0$ pour $\cos(x) = 0,5$ d'où $x = \frac{\pi}{3}$. Pourquoi? (voir à la fin de 12.4).

11) En coordonnées polaires.

Nous allons prendre la structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 4 (Voir « Ordre 4 », fichier MATHEMATICA ou EXCEL) dans laquelle nous allons poser :

$$a(x) = x \text{ ; } r(x) = \sin(x) \text{ ; } t(x) = \sin(2x)$$

Au lieu d'utiliser les coordonnées cartésiennes habituelles, nous allons choisir ici les coordonnées polaires. Nous obtenons :



Rappelons que la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 4 utilisée ici est :

$$\begin{array}{cccc} a & a+3r+2t & a+3r+t & a+3t \\ a+2r+3t & a+r+t & a+r+2t & a+2r \\ a+r+3t & a+2r+t & a+2r+2t & a+r \\ a+3r & a+2t & a+t & a+3r+3t \end{array}$$

Nous allons définir trois types d'intersections pour une valeur donnée de la variable x. Lorsque k courbes passent par un même point, nous dirons que ce point est un **nœud d'ordre** k. Un nœud d'ordre n^2 sera tout simplement appelé nœud.

a) Le type 1 : Les n^2 courbes passent par un même point appelé nœud.
b) Le type 2 : Les n^2 courbes passent par n points de même abscisse, tous d'ordre n.
c) Le type 3 : Les n^2 courbes passent par $2n-1$ points de même abscisse. Ces points sont, de haut en bas, respectivement d'ordres $1, 2, 3, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 3, 2, 1$.
d) Notons que pour avoir ces trois types et bien d'autres, les n^2 fonctions se trouvent toujours dans un carré arithmétique.

Pouviez-vous prévoir les intersections de type 1 et de type 2 ? C'est l'objet du problème 12 de 12.5.

Une observation du graphique ci-haut laisse croire que nous avons le type 3 pour les valeurs :

(*) $$x = \frac{\pi}{3}\ ;\ x = \frac{2\pi}{3}\ ;\ x = \frac{4\pi}{3}\ ;\ x = \frac{5\pi}{3}$$

Est-ce exact ? (Voir problème 13 de 12.5). Nous pouvons déjà trouver $x = \frac{\pi}{3}\ et\ x = \frac{5\pi}{3}$ comme racines de l'équation $\sin(x) = \sin(2x) \neq 0.$ Comment trouver les autres valeurs de x? Ce sera avec $-\sin(x) = \sin(2x) \neq 0.$

Comment trouver ces trois types?

Nous allons utiliser les carrés arithmétiques d'ordre $n \geq 3$ soient les fichiers «Ordre 3» jusqu'à «Ordre 24» dans MATHEMATICA.

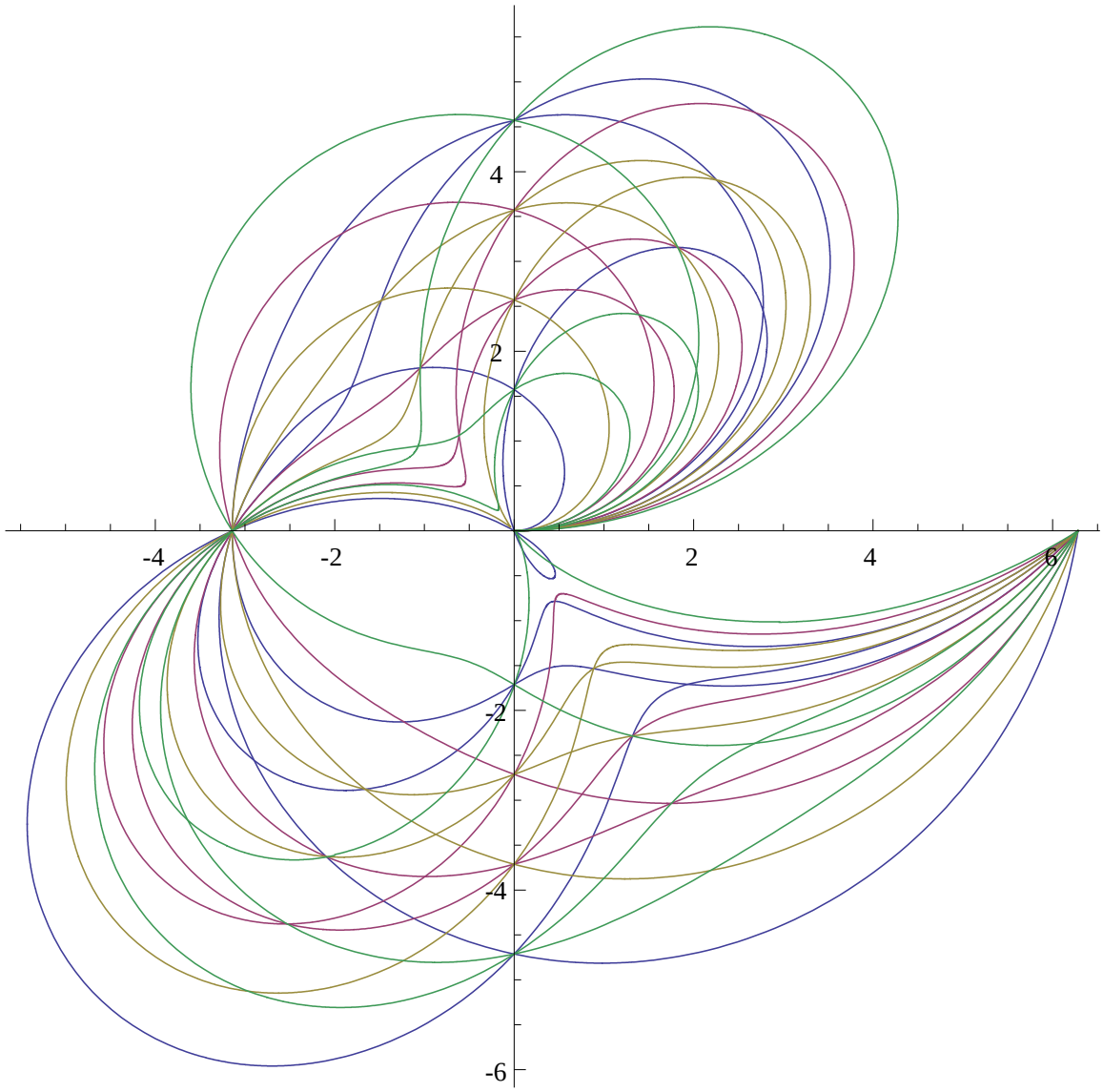
Le type 1 : les nœuds. Nous trouvons un nœud à $x = x_0$ si et seulement si $r(x_0) = t(x_0) = 0.$ Cela signifie que le carré magique est trivial formé du nombre $a(x_0)$.

Le type 2. Nous avons un type 2 à $x = x_0$ si et seulement si $r(x_0) = 0\ et\ t(x_0) \neq 0\ ou\ r(x_0) \neq 0\ et\ t(x_0) = 0.$ Cela signifie que le carré magique renferme n nombres différents, chacun apparaissant n fois.

Le type 3. Nous avons un type 3 à $x = x_0$ dès que $t(x_0) = \pm\ r(x_0) \neq 0.$

Nous pouvons retrouver ces trois types pour tous les ordres $n \geq 3.$

Quant aux autres types, en général, ils se retrouvent pour un ordre donné. Par exemple, le type 4 que nous rencontrons dans l'exemple 13) plus bas, ne peut pas se retrouver avec l'ordre 5.



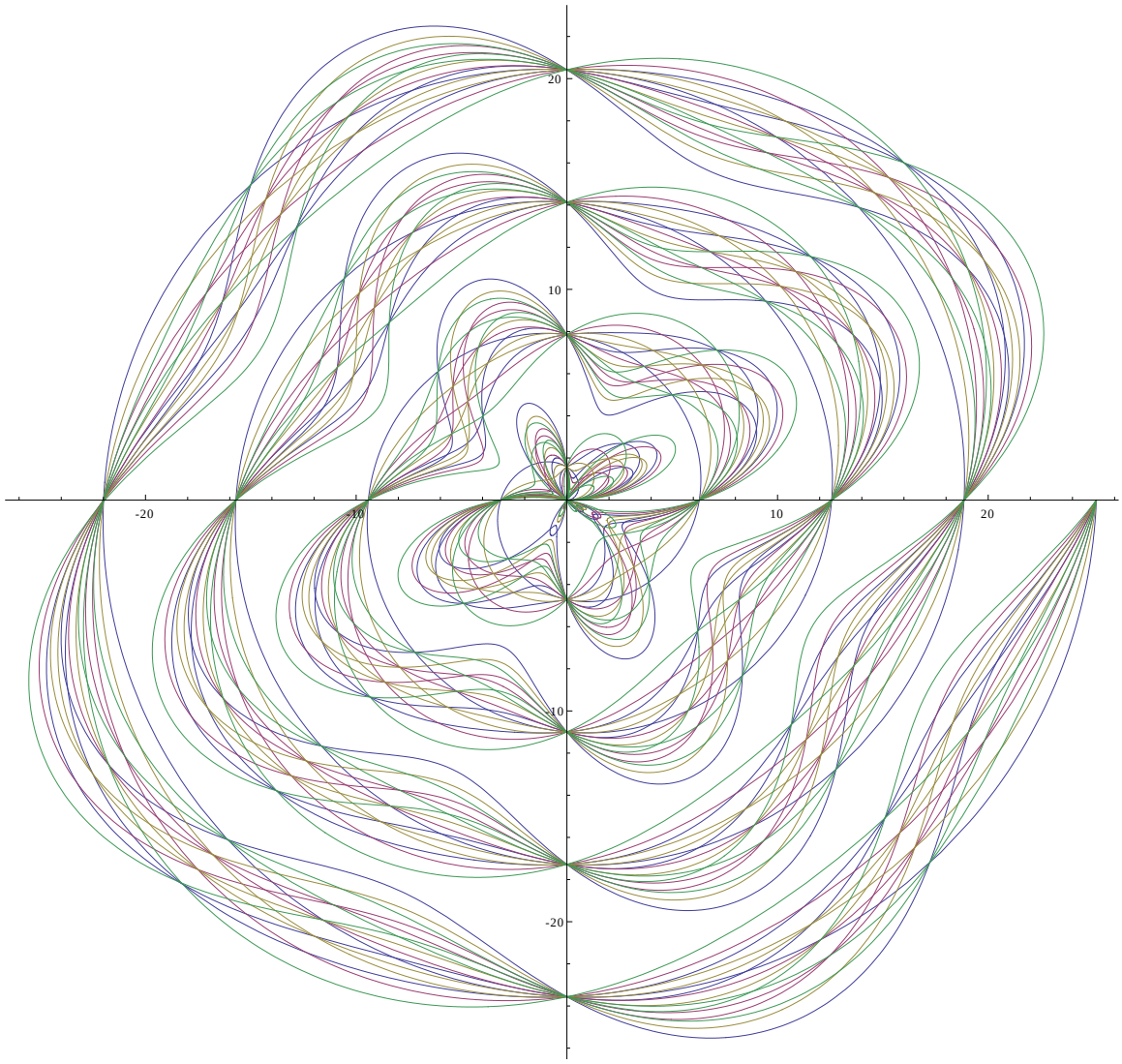
Ici nous voyons les seize courbes lorsque x varie de 0 à 2π. C'est la partie centrale du graphique précédent.

12) Toujours en coordonnées polaires.

Dans la structure générale de l'exemple 11, posons :

$$a(x) = x \text{ ; } r(x) = \sin(2x) \text{ ; } t(x) = \sin(4x)$$

En faisant varier x de $0 \text{ à } 8\pi$, nous obtenons le graphique suivant :



Nous pouvons écrire $r(x)$ *et* $t(x)$ comme suit :

$$r(x) = 2\sin(x)\cos(x) \ \ et \ \ t(x) = 4\sin(x)\cos(x)\cos(2x)$$

Ainsi, nous voyons que le facteur $\sin(x)$ est responsable des nœuds situés sur l'axe horizontal et que le facteur $\cos(x)$ est responsable des nœuds situés sur l'axe vertical. Quant au facteur $\cos(2x)$, il s'annule entre autre à $\pi/4$, valeur qui n'annule ni sin(x), ni cos(x). Donc à $x = \pi/4$, nous avons le type 2.

Mais sur le graphique ci-haut, dans le premier quadrant, nous observons quatre fois le type 2. En fait, si x varie de zéro à l'infini, il y aura une infinité de types 2 dans le premier quadrant.

Voyons, dans ce premier quadrant, le deuxième groupe de seize courbes. Celles-ci se rencontrent de la même façon que dans le premier groupe, de la même façon que dans le troisième groupe, de la même façon que dans tous les groupes. Voyons cela de plus près en considérant deux courbes C_1 et C_2 du premier groupe. C_1 et C_2 étant respectivement définies par :

$$x + k_1 \sin(2x) + k_2 \sin(4x) \ et \ x + k_3 \sin(2x) + k_4 \sin(4x)$$

où les $k_i = 0, 1, 2, 3.$

L'intersection entre C_1 et C_2 se trouve en résolvant l'équation :

(1) $$x + k_1 \sin(2x) + k_2 \sin(4x) = x + k_3 \sin(2x) + k_4 \sin(4x)$$

Maintenant, remarquez l'équation (2) suivante:

(2)
$$x + 2\pi + k_1 \sin(2(x+2\pi)) + k_2 \sin(4(x+2\pi)) = x + 2\pi + k_3 \sin(2(x+2\pi)) + k_4 \sin(4(x+2\pi))$$

Nous voyons que x est racine de l'équation (1) si et seulement si $x + 2\pi$ est racine de l'équation (2).

Nous pouvons donc conclure que les intersections du premier groupe se retrouvent intégralement dans le deuxième groupe. Puis dans le troisième groupe et ainsi de suite. Cela signifie que si C_1 et C_2 se rencontrent dans le premier groupe au point $(x; p(x))$, alors C_1 et C_2 se rencontrent dans le deuxième groupe au point $(x + 2\pi \ ; \ p(x) + 2\pi)$. Donc à $x = \pi / 4$, nous sommes dans le premier groupe avec un type 2. À $x = \pi / 4 + 2\pi$, nous sommes dans le deuxième groupe avec un type 2. À $x = \pi / 4 + 4\pi$, nous sommes dans le troisième groupe toujours avec un type 2, et ainsi de suite. De plus, si C_1 et C_2 se rencontrent dans le premier groupe, alors C_1 et C_2 se rencontrent dans tous les autres groupes.

Il est très facile d'obtenir tous les nœuds en trouvant les valeurs de x qui annulent simultanément $\sin(x)$ et $\cos(x)$ puis de trouver toutes les intersections de type 2 en cherchant toutes les valeurs de x qui font que $\cos(2x) = 0$ d'où $x = \frac{\pi}{4}$ pour le premier quadrant (Voir problème 15 de 12.5).

Dans le premier quadrant, nous trouvons un type 3, à $x = \pi / 6$ et à $x = \pi / 3$ (résoudre $t(x) = \pm r(x) \neq 0$). Pour démontrer le type 3 à $x = \pi / 6$, nous avons d'abord trouvé les seize

fonctions du carré arithmétique d'ordre 4 définies par $a(x) = x$; $r(x) = \sin(2x)$ *et* $t(x) = \sin(4x)$.

$$\begin{array}{cccc}
x & x + 3\mathrm{Sin}[2x] + 2\mathrm{Sin}[4x] & x + 3\mathrm{Sin}[2x] + \mathrm{Sin}[4x] & x + 3\mathrm{Sin}[4x] \\
x + 2\mathrm{Sin}[2x] + 3\mathrm{Sin}[4x] & x + \mathrm{Sin}[2x] + \mathrm{Sin}[4x] & x + \mathrm{Sin}[2x] + 2\mathrm{Sin}[4x] & x + 2\mathrm{Sin}[2x] \\
x + \mathrm{Sin}[2x] + 3\mathrm{Sin}[4x] & x + 2\mathrm{Sin}[2x] + \mathrm{Sin}[4x] & x + 2\mathrm{Sin}[2x] + 2\mathrm{Sin}[4x] & x + \mathrm{Sin}[2x] \\
x + 3\mathrm{Sin}[2x] & x + 2\mathrm{Sin}[4x] & x + \mathrm{Sin}[4x] & x + 3\mathrm{Sin}[2x] + 3\mathrm{Sin}[4x]
\end{array}$$

Nous avons ensuite évalué chaque fonction à $x = \pi / 6$ pour obtenir :

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\pi}{6} & \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} & 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \\
\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} & \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} & \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \\
2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} & 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \\
\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} & \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} & 3\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}
\end{array}$$

qui s'écrit :

$$\frac{\pi}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Dans le dernier carré à droite, nous trouvons :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & 2 & 3 & 4 & & \\
 & & & 3 & & &
\end{array}$$

Ce triangle montre que nous avons bien un type 3 à $x = \pi / 6$. C'est le **triangle caractéristique** du type 3. Nous allons identifier les seize fonctions du carré comme suit :

$$\begin{pmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) \\ (5) & (6) & (7) & (8) \\ (9) & (10) & (11) & (12) \\ (13) & (14) & (15) & (16) \end{pmatrix}$$

Le tableau ci-haut montre, par exemple, que les fonctions (2) et (5) prennent la même valeur $\frac{\pi}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{2}$ à $x=\pi/6.$ D'où les courbes (2) et (5) qui se rencontrent en un même point. De la même façon, les fonctions (4), (7), (10) et (13) prennent la même valeur $\frac{\pi}{6}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $à$ $x=\pi/6.$ Les courbes (4), (7), (10) et (13) se rencontrent en un même point.

Nous savons maintenant quelles courbes rencontrent quelles courbes dans un type 3. Nous le savons aussi pour le type 2 et le type 1.

Ainsi, dans le deuxième groupe, à $x=13\pi/6$, les courbes (2) et (5) se rencontrent en un même point et les courbes (4), (7), (10) et (13) se rencontrent aussi en un même point, tout comme dans le premier groupe.

Dans deux groupes consécutifs, la distance entre les deux points d'intersections des mêmes courbes est égale à 2π. Ainsi, le point d'intersection de (2) et (5) à $x=\pi/6$ est situé à 2π unités du point d'intersection de (2) et (5) à $x=13\pi/6.$ Il nous reste à démontrer que nous avons aussi un type 3 à

$$x=\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\ ;\ \frac{7\pi}{6}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\ ;\ \frac{11\pi}{6}$$

Pour trouver ces valeurs, nous avons résolu l'équation $t(x)=\pm r(x)\neq 0,$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi].$ Il fallait donc résoudre l'équation $\cos(2x)=\pm 0,5$ où $2x$ est dans l'intervalle $[0;4\pi].$

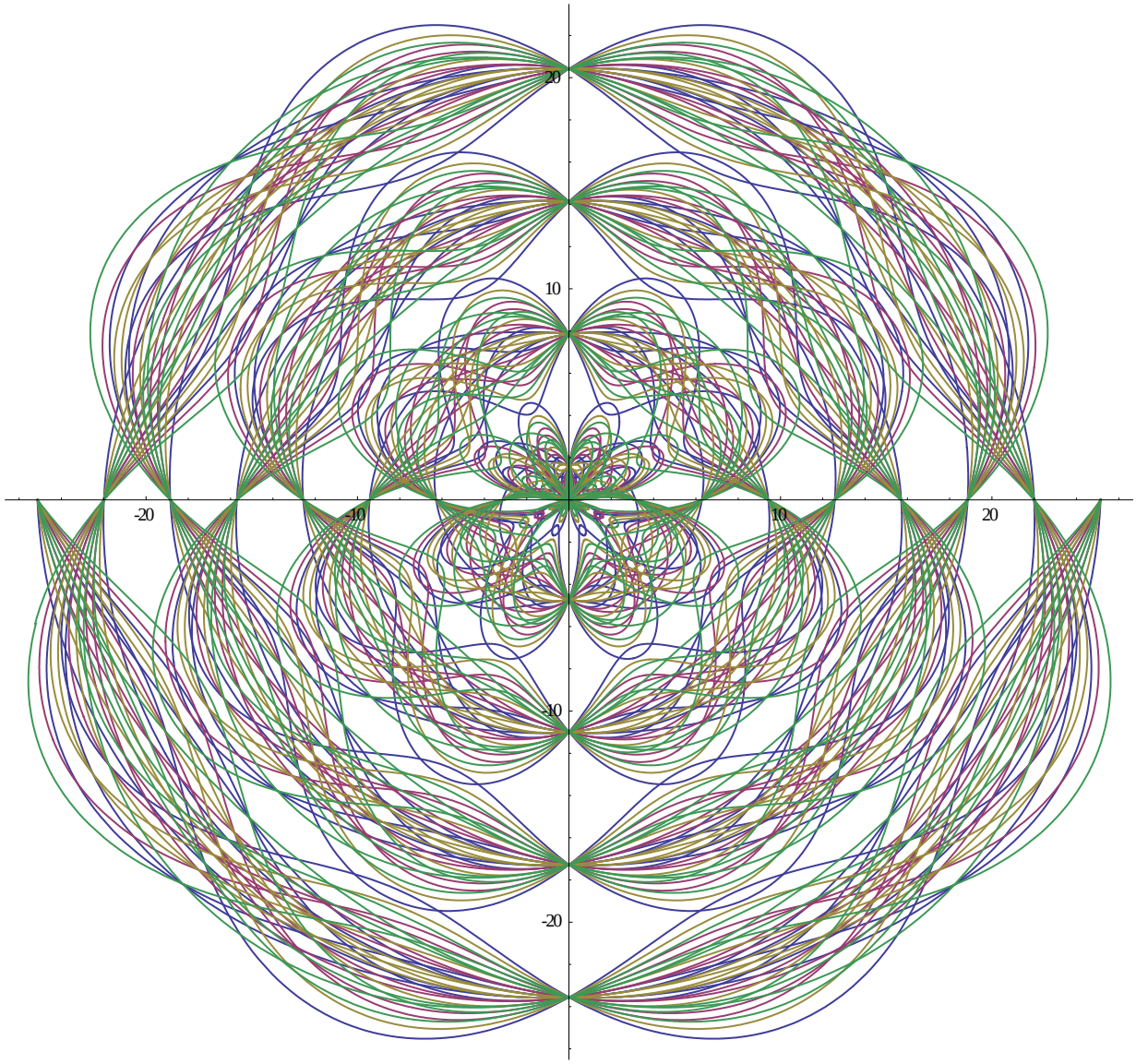
Pour montrer que ces valeurs conduisent bien à un type 3, évaluons les seize fonctions aux sept valeurs ci-haut et retrouvons le triangle caractéristique du type 3. Ainsi, à $x=\pi/3,$ vous trouverez le triangle :

$$\begin{array}{ccccccc}
-3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \\
 & & -1 & 0 & 1 & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Ce qui montre que nous avons le type 3 à $x=\pi/3.$ Il en est de même pour les six autres valeurs.

C'est grâce aux carrés arithmétiques si nous pouvons construire des ensembles de courbes avec d'aussi belles intersections de type 1, 2 et 3 pour ne nommer que ceux-là.

Terminons cet exemple en faisant varier x de -8π *à* 8π et admirons la beauté du graphique qui en résulte :



$$a(x) = x \; ; \; r(x) = \sin(2x) \; ; \; t(x) = \sin(4x)$$

où x varie de -8π *à* 8π.

13) Six types dans un intervalle de rencontres.

Nous voudrions construire seize courbes avec un nœud à $x=1$, un autre nœud à $x=7$, un type 2 à $x=4$, un type 3 à $x=3$ et $x=5$. De plus, nous aimerions que les nœuds soient situés sur la parabole $y=x^2$.

Nous allons utiliser la structure des carrés arithmétiques d'ordre 4 en posant $a(x)=x^2$, $r(x)=(x-1)(x-7)$ et $t(x)=(x-1)(x-7)(x-4)$.

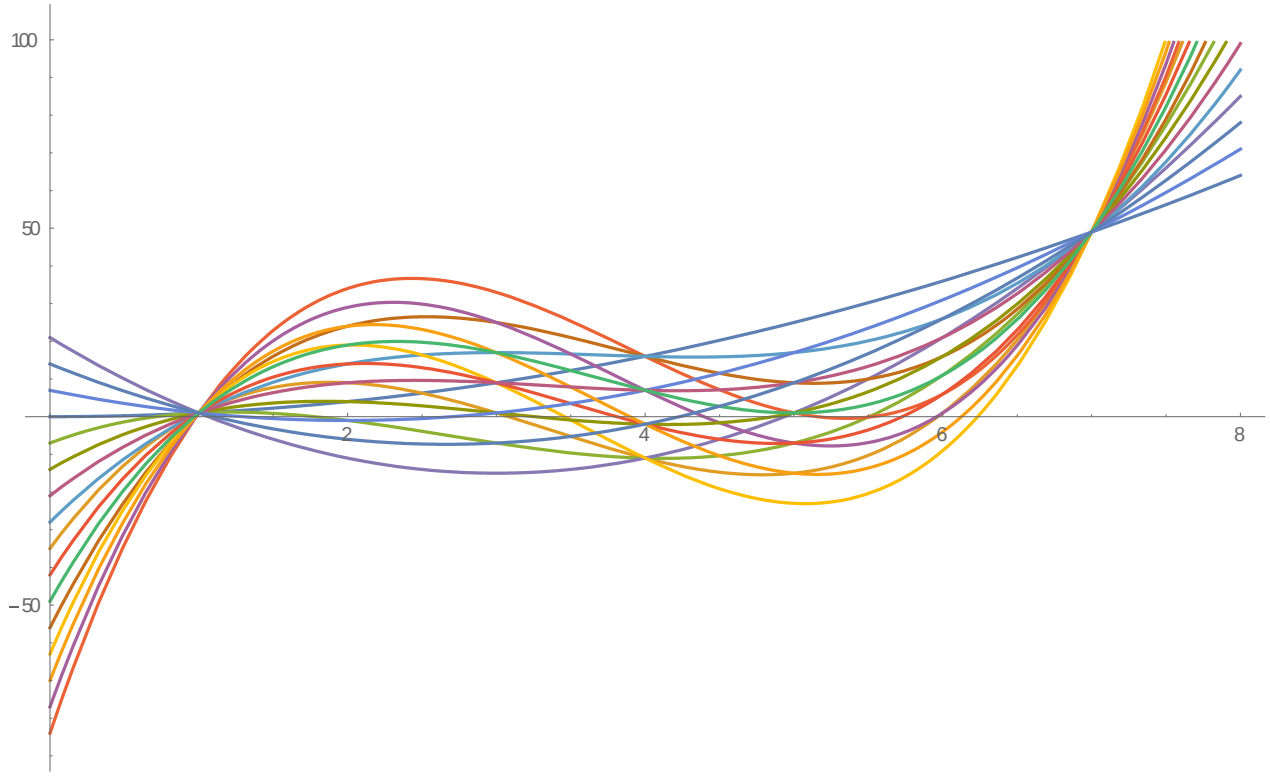
Nous voyons bien que $r(x)=t(x)=0$ si et seulement si $x=1$ et $x=7$. Les deux nœuds sont donc les points $(1\,;1)$ et $(7\,;49)$.

À $x=4$, nous avons $r(x)\neq 0$ et $t(x)=0$ d'où le type 2.

Quand $t(x)=\pm\, r(x)\neq 0$, nous trouvons le type 3 à $x=3$ et $x=5$.

Observez le nouveau type à $x=2$, $x=6$, $x=\frac{7}{2}$, $x=\frac{9}{2}$. Nous pourrions l'appeler le type 4.

Allons voir maintenant nos seize courbes. Pourrez-vous y trouver d'autres types?



Le graphique nous laisse croire que l'intervalle fermé [1 ; 7] est l'intervalle de rencontres. Cela signifie que les courbes ne se rencontrent jamais lorsque $x<1 \; ou \; x>7.$ Pour démontrer ce résultat, nous pourrions résoudre cent-vingt équations ce qui est faisable mais tout de même un peu long! Nous allons procéder autrement. Considérons les deux fonctions différentes :

$$f(x)=x^2+u(x-1)(x-7)+v(x-1)(x-7)(x-4) \; et \; g(x)=x^2+s(x-1)(x-7)+w(x-1)(x-7)(x-4)$$

où chaque variable u,v,s,w peut prendre seulement les valeurs $0,1,2,3.$ Pour trouver les abscisses des points d'intersection, il faut résoudre l'équation $f(x)-g(x)=0.$ Nous obtenons :

$$(x-1)(x-7)[(u-s)+(v-w)(x-4)]=0$$

D'où les racines $x=1 \; et \; x=7,$ ce qui est évident à cause des deux nœuds. Il reste à montrer que la troisième racine se situe dans l'intervalle $[1;7].$ Pour la trouver, il faut résoudre :

$$(*) \qquad (u-s)+(v-w)(x-4)=0$$

Premier cas : $v=w$ donc $u \neq s$ sans quoi nous aurions $f=g.$ Or ici, les seize fonctions sont différentes. Alors (*) n'a pas de racine. Cela se produit si $f-g$ est du second degré.

Deuxième cas : $v \neq w$ d'où nous avons $x=4+\dfrac{s-u}{v-w}.$ Or cette fraction vérifie $-3 \leq \dfrac{s-u}{v-w} \leq 3$ (voir problème 17 de 12.5). Cela montre bien que $1 \leq x \leq 7.$ Finalement, toutes les intersections ont lieu dans l'intervalle fermé $[1;7]$ qui est donc **l'intervalle des rencontres**.

12.5 Problèmes:

1) Trouver neuf polynômes différents qui passent tous par les points A, B et C respectivement d'abscisses 1, 2 et 3, qui sont situés sur la courbe de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 9.$
2) Le super-Dürer-alpha M formé de seize polynômes du septième degré (voir plus haut) a pour somme magique S = 34. Nous devons conclure, quelle que soit la valeur attribuée à x, que M sera un carré magique de somme S = 34. Est-ce exact? Expliquez.
3) Dans 12.3, montrez que les polynômes $A(x), r(x) \, et \, t(x)$ prennent tous des valeurs entières dès que x est entier. En déduire qu'il en sera de même pour les seize polynômes du carré M.
   (Voir Partie 3, annexe 15.)
4) Montrez que l'ensemble des neuf courbes de 12.4, exemple 1, possède un seul nœud.
5) Montrez que l'ensemble des neuf courbes de 12.4, exemple 2, possède une infinité de nœuds.
6) Trouvez l'intervalle des rencontres des neuf courbes de 12.4, exemple 3.
7) Toujours avec les neuf courbes de 12.4, exemple 3, indiquez quel polynôme correspond à chacune des courbes et identifiez les courbes qui se rencontrent et où elles se rencontrent.
8) Construisez seize courbes qui possèdent trois nœuds et aucune autre intersection.
9) Dans 12.4, exemple 4, expliquez pourquoi à $x = 1,$ les seize courbes se rencontrent par groupe de quatre courbes. Montrez que les seize courbes sont différentes.
10) Dans l'exemple 9 de 12.4, trouvez dans $]-\infty\,;\infty[$, toutes les valeurs de x pour lesquelles les vingt-cinq courbes se rencontrent par groupe de cinq courbes. Pourquoi n'y a-t-il pas de nœud?
11) Dans l'exemple 10 de 12.4, trouvez dans $]-\infty\,;\infty[$, toutes les valeurs de x pour lesquelles les vingt-cinq courbes se rencontrent par groupe de cinq courbes. Trouvez également tous les nœuds.
12) Dans l'exemple 11 de 12.4, pouviez-vous prévoir les intersections de type 1 et celles de type 2 ? Localisez toutes les intersections de type 1 et de type 2.
13) Toujours dans l'exemple 11, démontrez que nous avons le type 3 pour :

$$x = \frac{\pi}{3}\ ;\ x = \frac{2\pi}{3}\ ;\ x = \frac{4\pi}{3}\ ;\ x = \frac{5\pi}{3}$$

14) Dans l'exemple 10 de 12.4, montrez que nous avons le type 3 à $x = -\pi / 3.$
15) Localisez toutes les intersections de type 1 et de type 2 dans l'exemple 12 de 12.4.
16) Vous devez placer quatre polynômes en x dans les cases d'un carré d'ordre 2 de telle sorte que le carré devienne magique pour seulement deux valeurs de la variable x.
    a) Donnez vos quatre polynômes.
    b) Donnez les deux valeurs de x qui rendent magique le carré.
17) Montrez que $-3 \le \dfrac{s-u}{v-w} \le 3$ sachant que chaque variable u, v, s, w peut prendre seulement les valeurs $0, 1, 2, 3$ avec $v \ne w.$

18) Considérons n^2 courbes qui possèdent trois types 3 à $x_1, x_2\ et\ x_3$. S'il n'y a aucune autre intersection entre $x_1\ et\ x_2$, et entre $x_2\ et\ x_3$, alors nous dirons que les trois types 3 sont consécutifs. Construisez seize courbes qui possèdent seulement trois types 3 consécutifs.

13. Les carrés magiques de Christian Boyer

13.1 Introduction

Christian Boyer est né en France, près de Bordeaux, en mai 1958. Il est ingénieur, informaticien et mathématicien. Parmi ses centres d'intérêts, mentionnons les nombres premiers, les algorithmes de factorisation et les mathématiques récréatives, en particulier, les carrés, cubes et hyper-cubes magiques.

Ses carrés et cubes magiques sont extraordinaires et d'une grande beauté!!! Nous allons les voir sous peu mais avant, parlons de multi-magie, de carrés multiplicatifs et de carrés additifs-multiplicatifs.

Soit A, un carré magique d'ordre n. Si, dans chaque case, nous élevons au carré le nombre qui s'y trouve, alors nous obtenons un nouveau carré. Celui-ci, en général, n'est pas magique mais quand il l'est, nous disons alors que A est un **carré bi-magique**.

Si nous mettons au carré chaque nombre d'un carré magique A et que le carré qui en résulte est encore magique et si en plus, nous mettons au cube chaque nombre de A et que le carré qui en résulte est toujours magique, alors nous disons que A est un **carré tri-magique.**

Si nous mettons tous les nombres d'un carré magique A, respectivement à la puissance 2, 3, 4, …, k et que tous les carrés qui en résultent sont magiques, alors nous disons que A est un **carré k-multi-magique**.

Un carré bi-magique est donc un carré 2-multi-magique et un carré tri-magique est un carré 3-multi-magique.

Voyons maintenant un autre type de carrés : les **carrés multiplicatifs**. La multiplication remplace ici l'addition.

Si, dans un carré, le produit de tous les nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale donne toujours le même nombre P, alors nous disons que notre carré est un **carré multiplicatif.** Le nombre P est appelé **produit magique.**

Si, en plus d'être magique, notre carré est multiplicatif, alors nous disons que c'est un **carré additif-multiplicatif** ou encore, **un carré magique multiplicatif.**

13.2 Les carrés k-multi-magiques

Voici un objet mathématique exceptionnel; c'est un carré bi-magique d'ordre 11 formé de 121 nombres premiers consécutifs allant de 5 à 701, en excluant 523, 641 et 677. Il est donc formé de 121 nombres premiers choisis parmi les 126 premiers nombres premiers. Les deux sommes magiques sont : S_1 **= 3 497** et S_2 **= 1 578 251**.

C'est le premier carré bi-magique formé exclusivement de nombres premiers tous différents. Il a été construit par Christian Boyer en novembre 2006. Le voici :

137	131	317	47	5	457	541	359	467	353	683
401	277	239	647	23	421	229	181	7	419	653
463	269	701	59	157	257	563	557	179	191	101
593	311	379	503	197	83	53	521	149	619	89
307	617	397	241	571	661	109	107	79	127	281
373	443	29	587	383	61	19	409	631	389	173
73	11	607	433	613	577	263	97	227	313	283
43	599	151	199	509	487	223	163	293	691	139
673	37	113	271	193	31	601	431	331	337	479
67	233	103	439	499	251	547	659	491	41	167
367	569	461	71	347	211	349	13	643	17	449

Christian Boyer, novembre 2006

En mai 2001, Christian Boyer et André Viricel ont construit un **carré tétra-magique (4-multi-magique)** d'ordre 512; Il renferme 262 144 entiers consécutifs allant de 0 à 262 143. Pour le rendre normal, il suffit d'ajouter 1 à chaque nombre du carré et le nouveau carré sera toujours tétra-magique (voir le théorème 13.2). Dans le carré normal, nous trouverons aux extrémités de la première rangée, le plus petit et le plus grand entier du carré et sur la dernière rangée, à l'extrémité droite, nous trouverons l'ordre 512 du carré.

0	139938	18244	…	243899	122205	262143
140551	1957	156227	…	105916	260186	121592
18959	157869	3403	…	258740	104274	243184
…	…	…	…	…	…	…
242703	104109	258891	…	3252	158034	19440
121607	260517	105539	…	156604	1626	140536
261632	122018	244036	…	18107	140125	511

Christian Boyer et André Viricel, mai 2001

Les quatre sommes magiques de ce carré tétra-magique sont :

S_1 = 67 108 608

S_2 = 11 728 056 920 832

S_3 = 2 305 825 417 061 203 968

S_4 = 483 565 716 171 561 366 524 160

S_5 **= 105 636 341 097 042 573 844 228 866 048**

En plus d'être tétra-magique, ce carré a la propriété suivante : la somme des puissances 5 des entiers de chacune des 512 rangées est toujours égale à S_5 !!! Si le carré était normal, les sommes magiques seraient évidemment différentes des précédentes.

Puis, un mois plus tard, en juin 2001, Christian Boyer et André Viricel trouvent un carré magique incroyable!!! **Le premier carré penta-magique (5-multi-magique) connu**; il est d'ordre 1024.

Ses sommes magiques sont :

S_1 = 536 870 400

S_2 = 375 299 432 076 800

S_3 = 295 147 342 229 667 840 000

S_4 = 247 587 417 561 640 996 243 120 640

S_5 = 216 345 083 469 423 421 673 932 062 720 000

0	733632	419712	…	628863	314943	1048575
866545	395569	745329	…	303246	653006	182030
685538	82978	791138	…	257437	965597	363037
…	…	…	…	…	…	…
685597	83933	790941	…	257634	964642	362978
867086	395982	744590	…	303985	652593	181489
1023	733759	418943	…	629632	314816	1047552

Christian Boyer et André Viricel, juin 2001

Ce carré penta-magique renferme 1 048 576 entiers consécutifs allant de 0 à 1 048 575. Pour le rendre normal, il suffit d'ajouter 1 à chaque nombre du carré et le nouveau carré sera toujours penta-magique (voir le théorème 13.2). Dans le carré normal, nous trouverons aux extrémités de la première rangée, le plus petit et le plus grand entier du carré et sur la dernière rangée, à l'extrémité gauche, nous trouverons l'ordre 1024 du carré. Évidemment, pour le carré normal, les cinq sommes seront différentes de celles citées plus haut.

Le 31 janvier 2003, Christian Boyer nous présente un nouveau carré tétra-magique d'ordre 256.

2003	63 073	58 550	…	7094	2401	63 699
64 256	2738	6245	…	59 237	62 898	1024
65 140	4038	7441	…	57 873	61 638	372
…	…	…	…	…	…	…
65 163	3897	7662	…	58 094	61 497	395
64 511	2637	6298	…	59 290	62 797	1279
1836	63 134	58 441	…	6985	2462	63 532

Christian Boyer, janvier 2003

Ce tétra-magique renferme 65 536 entiers consécutifs allant de 0 à 65 535. Le nombre 2003, année de sa construction, se trouve à l'extrémité gauche de la première rangée. Les sommes magiques sont :

S_1 = 8 388 480 S_2 = 366 495 487 360 S_3 = 18 013 848 757 862 400

S_4 = 944 437 268 143 413 954 688

Voici Les principaux objectifs poursuivis en multi-magie :

a) Construire un carré k-multi-magique pour tout entier k > 1.
b) Construire un carré k-multi-magique dont l'ordre sera le plus petit.
c) Être le premier à construire un carré k-multi-magique pour un k donné.
d) Être le premier à construire un carré k-multi-magique du plus petit ordre.
e) Plus généralement, obtenir le maximum de propriétés dans le minimum de place et avec les plus petits entiers possibles.

Par exemple, nous connaissons un carré tri-magique d'ordre 128 (Gaston Tarry, France, 1905), d'ordre 64 (Général Eutrope Cazalas, France, 1933), d'ordre 32 (William H. Benson, États-Unis, 1976) et **d'ordre 12** (Walter Trump, Allemagne, 2002). Ce dernier, d'ordre 12, est du plus petit ordre!!!

Christian Boyer et André Viricel ont été les premiers à trouver un carré penta-magique en juin 2001; il est d'ordre 1024. Mais en juin 2003, Li Wen , de Chine, trouve un penta-magique d'ordre 729, formé de 531 441 entiers consécutifs allant de 0 à 531 440. Puis, Li Wen trouve un penta-magique presque normal (formé d'entiers positifs tous différents) d'ordre 36. C'est l'ordre le plus petit **connu** pour un penta-magique presque normal (Partie 3, annexe 22, fichier 3)).

Mais pouvons-nous atteindre l'objectif a)? La réponse est oui puisque dans «The American Mathematical Monthly» d'octobre 2007, Harm Derksen, Christian Eggermont et Arno van den Essen ont démontré le résultat suivant :

Théorème 13.1 :

Il existe un carré k-multi-magique pour tout ordre p^k où p est un nombre premier $\geq 2k-1$.

Seulement, les ordres sont très élevés. Avec le théorème précédent, le plus petit tri-magique est d'ordre $5^3 = 125$ alors que celui de Walter Trump est d'ordre 12. Toujours avec le théorème précédent, le plus petit 10-multi-magique est d'ordre $19^{10} = 6\,131\,066\,257\,801$. L'objectif b) est donc vraiment justifié!!!

Les recherches en multi-magie consistent donc à trouver des carrés k-multi-magiques pour des nouvelles valeurs de k et à trouver le plus petit ordre pour un k-multi-magique. Puis à trouver des carrés k-multi-magiques spéciaux. Par exemple, trouver un carré tri-magique formé de nombres premiers distincts, ou de nombres triangulaires, …, trouver un carré penta-magique presque normal d'ordre < 36.

Théorème 13.2 :

Soit A, un carré k-multi-magique d'ordre n. Si nous ajoutons le nombre u à chaque nombre du carré A, alors nous obtenons un nouveau carré B qui est lui aussi k-multi-magique.

Preuve :

Elle est basée sur le développement du binôme de Newton :

$$(a+u)^k = C_0^k a^k + C_1^k a^{k-1}u + C_2^k a^{k-2}u^2 + \dots C_r^k a^{k-r}u^r + \dots + C_{k-1}^k a\,u^{k-1} + C_k^k u^k$$

où $C_r^k = \dfrac{k!}{r!(k-r)!}$.

Prenons dans A, une rangée ou une colonne ou une grande diagonale et notons ses nombres a_i puis prenons dans B, la même rangée ou colonne ou grande diagonale et notons ses nombres b_i. Nous pouvons alors écrire, quelle que soit la rangée, colonne ou grande diagonale :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = S_1 \ ; \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = S_2 \ ; \ \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = S_3 \ ;\dots; \ \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-1} = S_{k-1} \ ; \ \sum_{i=1}^{n} a_i^k = S_k$$

Puisque A est k-multi-magique, alors pour $j = 1, 2, 3, \dots, k$, S_j prend la même valeur quelle que soit la rangée, colonne ou grande diagonale. Dans le carré B, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^k = \sum_{i=1}^{n} (a_i + u)^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k + C_1^k u \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-1} + C_2^k u^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-2} + \dots + C_{k-1}^k u^{k-1} \sum_{i=1}^{n} a_i + n u^k =$$
$$S_k + C_1^k u\, S_{k-1} + C_2^k u^2 S_{k-2} + \dots + C_{k-1}^k u^{k-1} S_1 + n u^k$$

ce qui montre que dans le carré B, la somme des puissances k est la même pour toutes les rangées, colonnes et grandes diagonales. Le carré B est donc k-multi-magique puisque l'égalité précédente est vraie pour tous les exposants entiers du membre de gauche allant de $1 \ à \ k$.

Notons ici que $S_0 = n$.

Terminons en disant qu'à ce jour, nous connaissons des carrés k-multi-magiques où k est un entier tel que $1 \le k \le 14$.

13.3 Les carrés multiplicatifs

Nous allons utiliser, dans tout carré multiplicatif, que des entiers positifs (> 0).

Voici un carré multiplicatif d'ordre 5 ayant le plus petit produit magique possible.

12	35	1	40	18
36	2	24	7	25
14	45	15	4	8
5	16	42	30	3
10	6	20	9	28

Christian Boyer, 2005

Ce carré a pour produit magique le nombre **P = 302 400**; son plus petit entier est 1, son plus grand est 45.

Puis les meilleurs carrés magiques additifs-multiplicatifs connus d'ordre 8 et 9 (meilleurs signifie plus petit S, plus petit P et plus petit nombre maximum) :

222	66	225	63	5	7	68	104
1	35	52	136	198	74	189	75
132	296	21	175	9	15	78	34
45	3	102	26	148	264	25	147
51	117	10	6	200	84	259	33
168	100	231	37	39	153	2	30
91	17	8	20	42	150	99	333
50	126	111	297	119	13	40	4

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 8x8, ***P = 51 407 948 592 000****,* ***S = 760****, le plus petit entier est 1 et le plus grand est 333.*

75	38	207	102	11	20	91	56
5	44	49	104	57	50	153	138
133	200	17	92	45	66	21	26
99	30	39	14	175	152	23	68
78	63	22	15	184	119	100	19
136	161	76	25	42	117	10	33
28	13	40	77	34	69	114	225
46	51	150	171	52	7	88	35

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 8x8, ***P = 67 463 283 888 000****,* ***S = 600****, le plus petit entier est 5 et le plus grand est 225.*

38	150	248	10	7	65	44	153	69
4	63	39	22	102	184	190	25	155
110	17	115	76	225	93	2	42	104
186	152	50	13	5	70	207	33	68
117	3	28	138	88	34	31	95	250
23	55	170	279	57	100	78	8	14
200	62	114	35	130	1	51	92	99
21	52	9	136	46	66	125	310	19
85	230	11	75	124	171	56	26	6

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 9x9, ***P = 2 987 659 715 040 000, S = 784,*** *le plus petit entier est 1 et le plus grand est 310.*

84	145	133	80	11	6	104	243	34
40	99	2	78	135	119	224	29	114
208	27	102	112	261	38	30	55	7
95	196	87	1	60	88	153	52	108
9	20	44	85	182	81	19	168	232
17	156	216	171	56	116	5	70	33
203	57	140	66	8	10	54	68	234
22	4	90	189	51	130	174	152	28
162	136	26	58	76	252	77	3	50

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 9x9, ***P = 7 349 391 483 033 600, S = 840****,*
le plus petit entier est 1 et le plus grand est 261.

En août 2016, **Sébastien Miquel** a trouvé un carré magique additif-multiplicatif d'ordre 7. Celui-ci est presque normal et son ordre est le plus petit connu. Voici ce magnifique carré :

126	66	50	90	48	1	84
20	70	16	54	189	110	6
100	2	22	98	36	72	135
96	60	81	4	10	49	165
3	63	30	176	120	45	28
99	180	14	25	7	108	32
21	24	252	18	55	80	15

Sa somme magique est S = 465 et son produit magique est P = 150 885 504 000. Le plus petit entier du carré est 1 et le plus grand, 252. Pour trouver ce carré, il aura fallu environ six cents heures de calcul avec un ordinateur muni d'un processeur i7-920!!!

Théorème 13.3 :

Si nous élevons à la puissance k tous les nombres d'un carré multiplicatif de produit P, alors nous obtenons un nouveau carré multiplicatif de produit P^k et ce, quel que soit l'entier k > 1.

Nous pourrions dire que les carrés multiplicatifs sont **infiniment multi-magiques**!!!

Il est évident que si nous multiplions par k tous les nombres d'un carré multiplicatif d'ordre n et de produit P, alors nous obtenons un nouveau carré multiplicatif de produit $k^n P$. Terminons avec ces quelques résultats :

Théorème 13.4 :

Un carré multiplicatif normal d'ordre $n \geq 2$ n'existe pas.

Preuve :

Soit λ, le produit des n^2 nombres d'un carré magique multiplicatif, alors $P = \sqrt[n]{\lambda}$. Si les n^2 nombres sont les entiers consécutifs de 1 à n^2, alors $P = \sqrt[n]{(n^2)!}$. Il est évident que P doit être un entier or $\sqrt[n]{(n^2)!}$ n'est jamais un entier lorsque n est un entier ≥ 2. Il en résulte qu'un **carré multiplicatif normal n'existe pas**. Montrons que $\sqrt[n]{(n^2)!}$ n'est jamais un entier lorsque $n \geq 2$.

Supposons que $\sqrt[n]{(n^2)!}$ soit un entier k. Alors $(n^2)! = k^n$ et cela implique que si p est un facteur premier de $(n^2)!$, alors dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$, l'exposant de p sera un multiple non nul de n. Or, le plus grand nombre premier dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$ n'apparaîtra qu'une seule fois!!! Voyons pourquoi mais rappelons d'abord le célèbre postulat de Bertrand démontré par Tchebychev :

Il existe au moins un nombre premier p qui vérifie $n < p \leq 2n$ quel que soit l'entier $n \geq 1$.

___ p _____ n^2 _____ $2\,p$ _____

Parmi les entiers $1, 2, 3, \ldots, n^2 - 1, n^2$, choisissons p, le plus grand nombre premier tel que $p < n^2$. Nous pouvons alors observer que:

a) $2\,p$ et n^2 ne sont jamais des nombres premiers dès que $n \geq 2$.

b) $2\,p \neq n^2$ dès que $n \geq 2$; en effet, nous avons $p \geq 3$.

c) $2\,p < n^2$ contredit le postulat de Bertrand.

d) $2\,p > n^2$ est obligatoire.

e) aucun entier inférieur à p possède p comme facteur premier.

f) n ne peut pas contenir un facteur premier $p_1 \geq p$ puisque nous aurions $n^2 > 2\,p$.

g) tout nombre composé m tel que $p < m < n^2$ ne peut pas contenir un facteur premier $p_1 \geq p$. Si c'était le cas, nous aurions $m = a\,p_1$ avec l'entier $a \geq 2$. Or, il est évident que m serait supérieur ou égal à $2\,p$, ce qui contredit que $m < n^2$.

h) le nombre p fait partie des nombres premiers que nous trouvons dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$. Le prochain facteur p n'apparaîtra que dans $2\,p$ qui est tel que $2\,p > n^2$.

Nous pouvons donc conclure si $n \geq 2$:

1) que tous les facteurs premiers dans $(n^2)!$, excepté p, sont tous strictement inférieurs à p.

2) que dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$, p ne s'y trouve qu'une seule fois.

3) que dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$, p est le plus grand.

4) que $\sqrt[n]{(n^2)!}$ n'est jamais un entier.

5) **qu'aucun carré multiplicatif normal ne peut exister.**

Par exemple, aucun carré multiplicatif normal d'ordre $n = 9$ ne peut exister. En effet, dans la décomposition en facteurs premiers de $81!$, nous trouvons que 79, le plus grand nombre premier inférieur à 81, est unique. Tous les autres facteurs premiers sont strictement inférieurs à 79.

Théorème 13.5 :

Il existe un carré multiplicatif pour tous les ordres $n \geq 1$.

Preuve :

Le cas $n = 1$ ne présente aucun intérêt. Le cas $n = 2$ nous donne :

$$\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, soit un carré trivial (celui de gauche) de produit $P = k^2$, soit un carré qui contient trois zéros (celui de droite) de produit $P = 0$ où m occupe un des quatre coins.

Pour le cas $n \geq 3$, nous allons nous servir des carrés magiques. Pour construire un carré multiplicatif d'ordre n, nous allons d'abord trouver un carré magique presque normal d'ordre n, lequel existe toujours. Dans chaque case du carré magique, nous allons remplacer l'entier x qui s'y trouve par l'entier 2^x. Ainsi nous obtiendrons un nouveau carré qui sera évidemment multiplicatif formé de n^2 nombres positifs différents. Si la somme du carré magique est S, alors le produit du carré multiplicatif sera 2^S.

Nous aurions pu choisir une toute autre base et ainsi remplacer x par 3^x ou 4^x ou 5^x ou π^x, ...

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$S = 15$

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

$P = 2^{15} = 32\,768$

D'où le carré multiplicatif de produit $P = 32\,768$ suivant :

16	512	4
8	32	128
256	2	64

Enfin, un dernier résultat :

Théorème 13.6 :

Un carré multiplicatif d'ordre 3 et de produit $P \neq 0$ a obligatoirement comme centre le nombre $\sqrt[3]{P}$.

Dans l'exemple précédent, nous voyons bien que $\sqrt[3]{32\,768} = 32$ ou encore que $32^3 = 32\,768$.

La preuve est laissée en exercice (problème 3 de 13.7). Si $P = 0$, alors il se peut que le nombre central soit non nul. Donnez un exemple.

13.4 Carrés magiques de puissances

Ce sont des carrés magiques formés de n^2 nombres, tous affectés d'un même exposant. Le premier carré magique connu d'ordre 4, formé de carrés, a été construit par Euler en 1770.

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

Euler, 1770, S_2 = 8515

Les premiers carrés magiques connus d'ordre 5 formés de carrés, ont été construits par Christian Boyer en 2004 :

1^2	2^2	31^2	3^2	20^2
22^2	16^2	13^2	5^2	21^2
11^2	23^2	10^2	24^2	7^2
12^2	15^2	9^2	27^2	14^2
25^2	19^2	8^2	6^2	17^2

Christian Boyer, 2004, S_2 = 1375

Les premiers carrés magiques d'ordre 6 de carrés, ont été construits par Christian Boyer en juin 2005 :

2^2	1^2	36^2	5^2	0^2	35^2
6^2	33^2	20^2	29^2	4^2	13^2
25^2	7^2	14^2	24^2	31^2	12^2
21^2	32^2	11^2	15^2	22^2	16^2
34^2	18^2	23^2	10^2	19^2	9^2
17^2	8^2	3^2	28^2	27^2	26^2

Christian Boyer, 2005, $S_2 = 2551$

Les premiers carrés magiques d'ordre 7 formés de carrés ont été construits par Christian Boyer en juin 2005; celui-ci contient tous les entiers de 0 à 48, tous affectés de l'exposant 2.

25^2	45^2	15^2	14^2	44^2	5^2	20^2
16^2	10^2	22^2	6^2	46^2	26^2	42^2
48^2	9^2	18^2	41^2	27^2	13^2	12^2
34^2	37^2	31^2	33^2	0^2	29^2	4^2
19^2	7^2	35^2	30^2	1^2	36^2	40^2
21^2	32^2	2^2	39^2	23^2	43^2	8^2
17^2	28^2	47^2	3^2	11^2	24^2	38^2

Christian Boyer, 2005, $S_2 = 5432$

De plus, si nous enlevons tous les exposants 2, alors nous pourrons constater que les sept rangées sont magiques, donc bi-magiques.

Quant aux carrés magiques d'ordre 3, formés de carrés distincts, le problème reste ouvert.

Voici maintenant le premier carré semi-magique connu d'ordre 5, formé de cubes positifs distincts, publié en 2005 par Christian Boyer. Le carré magique d'ordre 5 formé de cubes positifs distincts existe-t-il? En juillet 2017, nous n'en savions toujours rien.

9^3	47^3	54^3	64^3	96^3
23^3	97^3	6^3	48^3	72^3
10^3	14^3	67^3	101^3	42^3
110^3	36^3	21^3	3^3	28^3
40^3	70^3	98^3	18^3	38^3

Christian Boyer, 2005, S_3 = 1 408 896

Puis en terminant, voici le plus petit carré magique connu de puissances 4, il est d'ordre 15. Il a été construit par Christian Boyer et François Labelle en septembre 2011. Le plus grand nombre du carré est 3683^4 et le plus petit est 2^4. Enfin, sa somme magique est $232\ 666\ 823\ 866\ 022$. Voici ce carré presque normal; **n'oubliez pas, tous ses entiers doivent être mis à la puissance 4.**

1424	89	2581	374	272	2337	3198	850	782	1230	612	1068	2583	445	861
3509	1936	121	216	675	1974	1786	486	297	2444	621	605	658	1452	940
109	545	1308	46	22	777	1110	16	36	2109	50	3161	2886	1744	2331
544	34	986	1353	984	1691	2314	3075	2829	890	2214	408	1869	170	623
2	10	24	2553	1221	763	1090	888	1998	2071	2775	58	2834	32	2289
732	1769	305	3175	2286	1716	1386	2921	1016	462	1397	976	660	61	1254
792	1914	330	1525	1098	3302	2667	1403	488	889	671	1056	1270	66	2413
1968	123	3567	979	712	646	884	2225	2047	340	1602	1476	714	615	238
490	1176	1568	378	483	1190	833	231	525	2499	168	98	2261	2842	3094
783	432	27	752	2350	2541	2299	1692	1034	3146	2162	135	847	324	1210
595	1428	1904	1764	2254	210	147	1078	2450	441	784	119	399	3451	546
2726	1504	94	968	3025	567	513	2178	1331	702	2783	470	189	1128	270
105	252	336	2142	2737	980	686	1309	2975	2058	952	21	1862	609	2548
111	555	1332	2507	1199	14	20	872	1962	38	2725	3219	52	1776	42
1524	3683	635	1650	1188	1586	1281	1518	528	427	726	2032	610	127	1159

13.5 Le plus petit tri-magique, un petit penta-magique et deux bi-magiques

Nous présentons ici le carré tri-magique normal du plus petit ordre. Il a été construit par **Walter Trump** en juin 2002 et il est **d'ordre 12**. Christian Boyer a déjà démontré qu'il n'existe pas de tri-magiques normaux d'ordres inférieurs à 10 et de son côté, Walter Trump a démontré qu'il n'existe pas de tri-magiques normaux d'ordres 10 et 11. Le tri-magique normal qui suit est donc du plus petit ordre et c'est en ce sens que nous pouvons dire qu'il est le meilleur tri-magique normal. Sa somme magique est 870.

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

Premier tri-magique normal connu d'ordre 12 de Walter Trump, juin 2002.

Les sommes magiques sont : $S_1 = 870$ $S_2 = 83\,810$ $S_3 = 9\,082\,800$

Ce carré a une propriété intéressante : si u *et* v sont dans les cases $(i\ ;\ j)$ *et* $(i\ ;\ 13-j)$, alors $u+v=145=\frac{2S}{n}=\frac{2\times 870}{12}$. Par exemple, nous avons : $1+144=127+18=68+77=145$.

Dans un carré magique associatif, la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\frac{2S}{n}$. Ici, la somme des nombres situés dans deux

cases symétriques par rapport à la verticale, qui sépare le carré en deux parties égales, est toujours $\frac{2S}{n}$.

Voici maintenant un carré penta-magique presque normal du plus petit ordre connu. Il a été construit par **Li Wen** le 31 août 2008 et il est d'ordre 36. Ses sommes magiques sont :

$$S_1 = 242\,172 \quad S_2 = 2\,404\,039\,764 \quad S_3 = 26\,598\,135\,571\,308$$
$$S_4 = 309\,190\,059\,075\,899\,988 \quad S_5 = 3\,697\,835\,586\,559\,070\,794\,572$$

Vous trouverez ce penta-magique d'ordre 36 dans la Partie 3.

Li Wen a aussi trouvé en juin 2003, un penta-magique d'ordre 729, formé des entiers consécutifs allant de 0 à 531 440.

En février 2009, Li Wen trouve un super penta-magique d'ordre 396 qui est aussi un tri-magique pandiagonal!!!

Puis, **voici le plus petit carré bi-magique d'ordre 6**; il est presque normal :

72	18	17	16	49	47
13	52	36	5	50	63
38	35	7	66	15	58
20	53	34	39	69	4
55	1	57	56	26	24
21	60	68	37	10	23

Carré bi-magique de Lee Morgenstern

$$S_1 = 219 \quad S_2 = 10663$$

Lee Morgenstern a construit ce carré bi-magique d'ordre 6 en mai 2006. C'est le plus petit pour les raisons suivantes :

1) Aucun carré bi-magique presque normal d'ordre 6 ne peut contenir comme plus grand nombre, un nombre inférieur à 72.
2) Aucun carré bi-magique presque normal d'ordre 6 ne peut avoir une somme magique S_1 inférieure à 219.

3) Aucun carré bi-magique presque normal d'ordre 6 ne peut avoir comme seconde somme magique, S_2, un nombre inférieur à 10 663.

C'est pourquoi nous disons que ce carré est **le meilleur carré bi-magique presque normal d'ordre 6.** Il est très intéressant de voir que $f(219) = 16058$ tandis que $f(10663) = 351$. L'élévation au carré des 36 nombres du carré bi-magique ci-haut, entraîne une perte de 15 707 figures magiques!!!

En terminant, voici le **carré bi-magique normal d'ordre 8**, de Georges Pfeffermann :

56	34	8	57	18	47	9	31
33	20	54	48	7	29	59	10
26	43	13	23	64	38	4	49
19	5	35	30	53	12	46	60
15	25	63	2	41	24	50	40
6	55	17	11	36	58	32	45
61	16	42	52	27	1	39	22
44	62	28	37	14	51	21	3

Carré bi-magique de Georges Pfeffermann

Le premier carré bi-magique normal fut trouvé par Georges Pfeffermann en 1890; il est d'ordre 8. De plus, nous savons aujourd'hui qu'il n'existe pas de carrés bi-magiques normaux d'ordre 3, 4, 5, 6 et 7. L'ordre le plus petit est donc $n = 8$.

Vous trouverez tous ces carrés multi-magiques sur le site de Christian Boyer : **multimagie.com**.

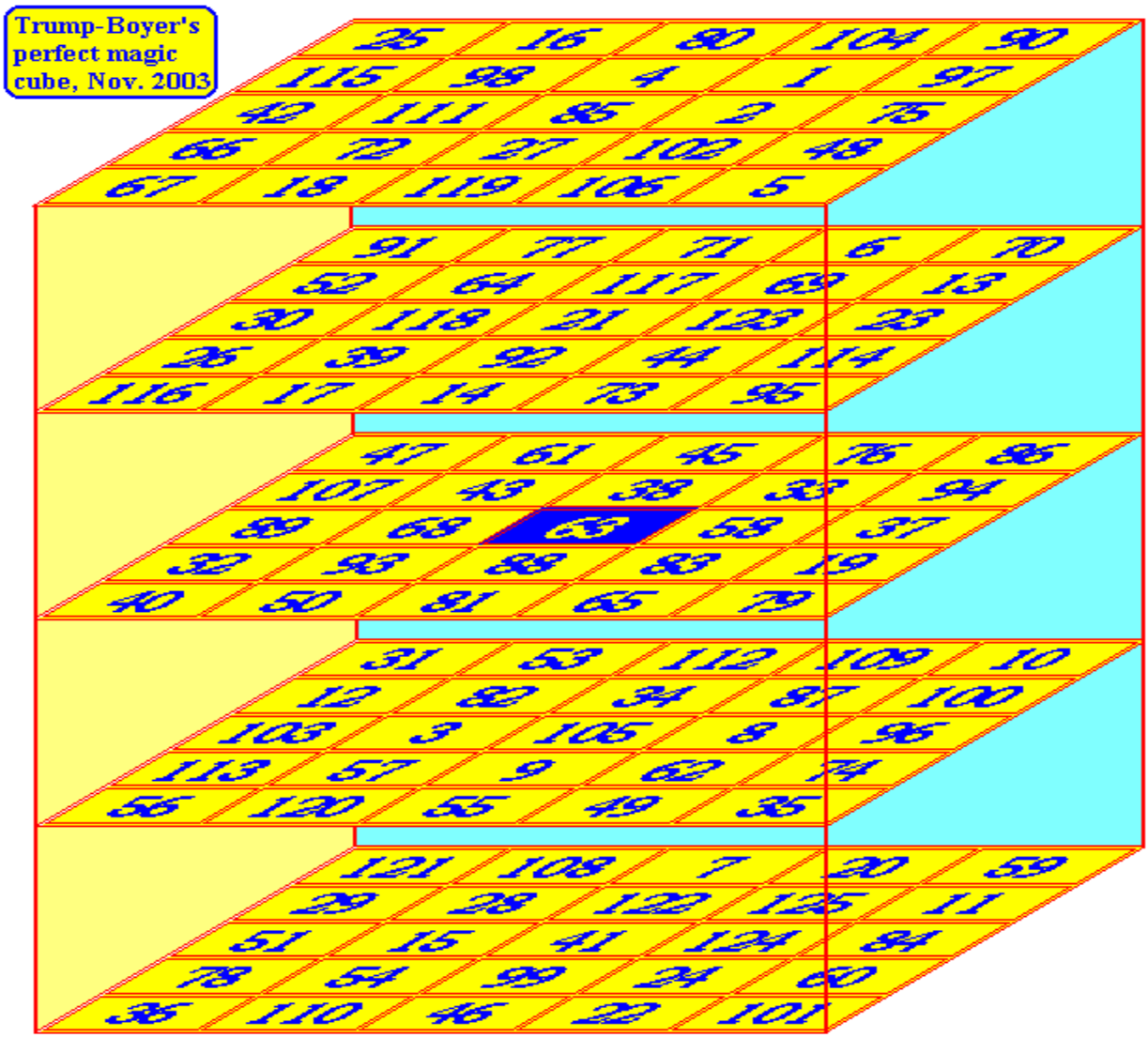
13.6 Les cubes magiques parfaits

Christian Boyer et Walter Trump ont construit en novembre 2003 **le plus petit cube magique parfait normal d'ordre 5**. Il a été démontré que les cubes magiques parfaits normaux d'ordres 2, 3 et 4 n'existent pas. Pour qu'un cube soit magique parfait normal, il faut :

a) qu'il renferme tous les entiers consécutifs de 1 à n^3.
b) chaque fois que n petits cubes (cases) ont leurs centres alignés, la somme des entiers qui s'y trouvent est toujours égale au même nombre $S = \dfrac{n(n^3+1)}{2}$.

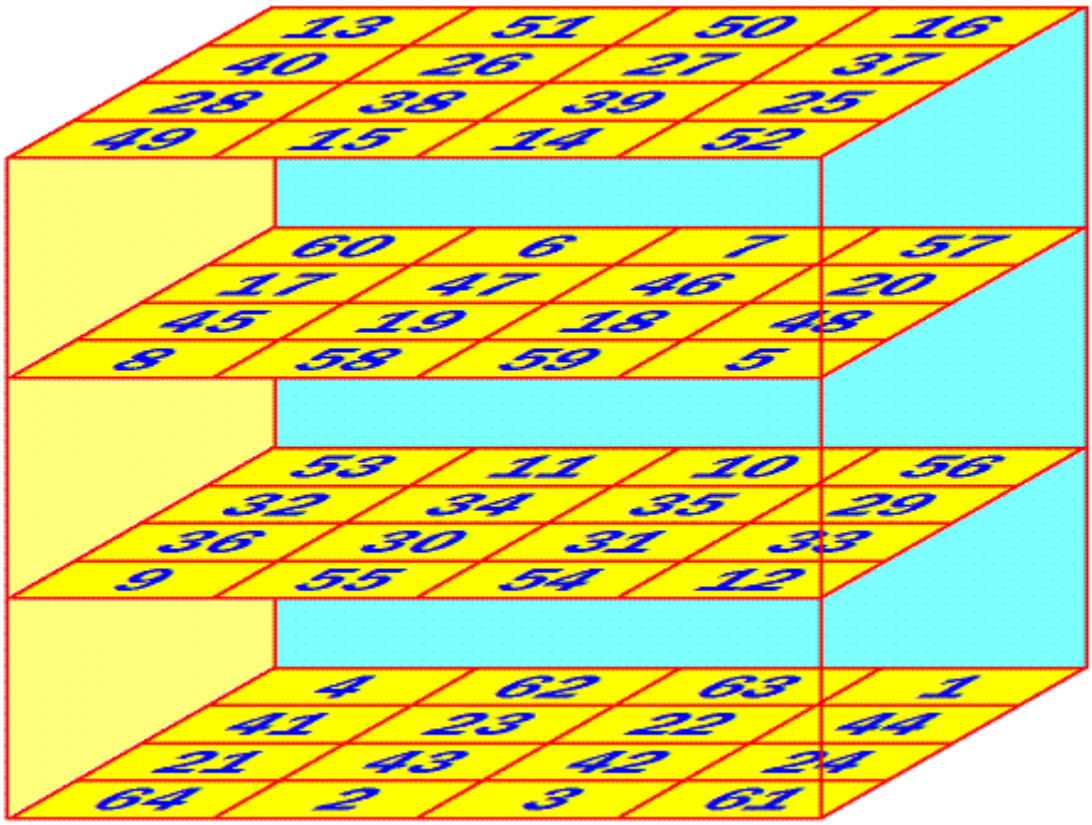
Cela signifie que nous trouvons dans le cube $3n+6$ carrés magiques de somme S soit $3n$ carrés magiques planaires parallèles aux faces du cube et six carrés magiques planaires obliques. De façon plus précise, le nombre NA d'alignements dans un cube magique parfait d'ordre n, est donné par : $NA = 3n^2 + 6n + 4$. **Si tous ces alignements sont magiques, alors le cube est dit magique parfait.**

Voici donc ce cube magique parfait normal d'ordre 5; sa somme magique est $S = 315$ et $f(315) = 1\,142\,341$. Cela signifie que nous pouvons choisir cinq cases de somme 315 de $1\,142\,341$ façons différentes. C'est la fréquence de ce cube magique parfait normal ou encore, c'est le nombre de figures magiques (groupes de cinq cases de somme magique $S = 315$) que possède ce cube.



Un des plus beaux objets du monde mathématique!!!

On s'intéresse aux cubes magiques déjà depuis plusieurs siècles. En 1640, Pierre Simon de Fermat (1601-1665) construisit un cube magique presque parfait d'ordre 4.



Ici, 64 alignements sur les 76 possibles, sont magiques. C'est déjà extraordinaire pour l'époque!!!

Nous allons terminer en présentant les premiers cubes magiques parfaits normaux publiés depuis 1866.

Comme pour les carrés magiques, un cube magique d'ordre n est **presque normal** s'il renferme n^3 entiers ≥ 1 tous différents deux à deux.

Dans le tableau qui suit, seul celui de Fermat, publié en 1640, n'est pas parfait.

Ordre	Inventeur	Pays	Date
3	Cube magique parfait presque normal : impossible		
4	Presque parfait, par Pierre de Fermat	France	1640
	Parfait presque normal : impossible, prouvé par Richard Schroeppel	États-Unis	1972
5	Walter Trump - Christian Boyer	Allemagne - France	Nov. 2003
6	Walter Trump	Allemagne	Sept. 2003
7*	Reverend Andrew H. Frost	Angleterre (1)	1866
8	Gustavus Frankenstein	États-Unis (2)	1875
9*	Charles Planck	Angleterre	1905
10	Li Wen	Chine	1988 (3)
11*	Frederick A. P. Barnard	États-Unis	1888
12	William H. Benson	États-Unis	1981
...	...	...	...
8192**	Christian Boyer	France	2003

(*) Ces cubes ont des caractéristiques supplémentaires de pandiagonalité (diagonales brisées et/ou triagonales brisées également magiques).
(**) Ce cube a des caractéristiques supplémentaires de multi-magie (reste magique parfait quand ses nombres sont élevés au carré ou au cube ou à la puissance 4).
(1) Et aussi Inde: Frost était anglais, mais était à cette époque missionnaire à Nasik, en Inde.
(2) Et aussi Allemagne: Frankenstein est né en Allemagne, et avait 2 ans quand sa famille a émigré à Cincinnati, États-Unis.
(3) Li Wen nous a envoyé ce cube en déc. 2003. Il ne l'avait jamais publié avant. Li indique qu'il l'avait construit dès 1988.

13.7 Problèmes

1) Construisez un carré multiplicatif d'ordre 4 et trouvez son produit magique.
2) Démontrez qu'un cube magique parfait presque normal d'ordre 3 n'existe pas.
3) Démontrez le théorème 13.6 de 13.3.
4) Démontrez qu'un cube magique parfait presque normal d'ordre 4 n'existe pas.
5) Vérifiez que le cube magique presque parfait de Fermat possède bien 64 alignements magiques sur ses 76 possibles.
6) Quelle est la somme magique d'un cube magique parfait normal d'ordre 12?
7) Quel est le nombre de figures magiques dans un cube magique normal d'ordre 3?
8) Quel est le nombre de figures magiques dans un cube magique normal d'ordre 4?
9) Trouvez les sommes magiques d'un carré 6-multi-magique normal d'ordre 4096. Ce carré renferme tous les entiers consécutifs de 1 à 16 777 216.
10) Prenez chaque carré k-multi-magique de la section 13.2 (excepté le premier), rendez-le normal et trouvez ses sommes magiques.
11) Si nous vous donnons un carré multiplicatif, alors pouvez-vous le transformer en carré magique? Se peut-il que le carré magique obtenu soit normal?
12) Pouvez-vous construire un carré magique presque normal A formé exclusivement de nombres irrationnels tel que $A \neq k\,B$ où B est un carré magique et k un nombre réel?
13) Démontrez qu'un carré magique d'ordre 3 ne peut pas être bi-magique s'il est presque normal.
14) Soit le carré magique d'ordre 3 suivant :

	A	
B		C

    a) Montrez que $A \neq B$ et $A \neq C$ implique que le carré n'est pas bi-magique.
    b) En déduire qu'un carré bi-magique d'ordre 3 presque normal n'existe pas.
15) En vous servant uniquement du carré magique M, pouvez-vous construire une infinité de carrés multiplicatifs?
16) Si dans un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$, les n^2 nombres sont différents deux à deux, alors le produit magique est non nul. Montrez-le.

14. Varia

14.1 Les carrés magiques d'ordre 3 formés d'entiers carrés

Au chapitre 13, nous avons vu des carrés magiques formés d'entiers carrés parfaits distincts. Mais à ce jour, nous ne connaissons pas de carré magique d'ordre 3 qui serait formé de huit ou neuf entiers carrés parfaits distincts et non nuls. **Le problème est donc ouvert.**

Nous avons construit deux carrés magiques presque normaux formés de cinq entiers carrés parfaits pour celui de gauche et de six entiers carrés parfaits pour celui de droite :

1705	7^2	2641
49^2	1465	23^2
17^2	2881	35^2

Cinq entiers carrés

19^2	35^2	17^2
553	25^2	697
31^2	5^2	889

Six entiers carrés

Mais il y a mieux! Andrew BREMNER de Tempe, Arizona, a construit en 1997, le carré magique presque normal suivant dans lequel nous retrouvons sept entiers carrés parfaits :

373^2	289^2	565^2
360 721	425^2	23^2
205^2	527^2	222 121

Sept entiers carrés

Par contre, un carré magique d'ordre 3 peut contenir neuf entiers carrés parfaits. Seulement, celui-ci ne sera pas presque normal. En voici trois :

5^2	1^2	7^2
7^2	5^2	1^2
1^2	7^2	5^2

29^2	1^2	41^2
41^2	29^2	1^2
1^2	41^2	29^2

34^2	14^2	46^2
46^2	34^2	14^2
14^2	46^2	34^2

Le carré pourrait même être trivial!!!

Voici maintenant un carré semi-magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés parfaits distincts. La somme magique est S = 21 609. La somme de chaque rangée, chaque colonne et de la grande diagonale secondaire est 21 609. Quant à la grande diagonale principale, sa somme est 38 307. Ce carré a été construit par Lee Sallows; il est «presque magique»!!!

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

Les deux grandes questions sont les suivantes :

1) Pouvons-nous trouver un carré magique d'ordre 3 qui contient le maximum d'entiers carrés parfaits distincts?
2) Pouvons-nous trouver un carré formé de neuf entiers carrés parfaits distincts qui possède le plus grand nombre de rangées, colonnes et grandes diagonales magiques?

Pour le moment, pour 1), nous en sommes à sept entiers carrés parfaits distincts sur neuf et pour 2), nous avons sept sommes magiques sur huit.

En novembre 2006, Lee Morgenstern publie le résultat suivant :

Théorème 14.1 :

Dans un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés parfaits distincts et non nuls, le plus petit entier carré parfait ne peut pas être 1.

Notez qu'il s'agit ici d'entiers carrés parfaits dans l'ensemble des entiers positifs. Pour simplifier, nous pourrions dire : «entier carré» au lieu «d'entier carré parfait». Dans tous les cas, il s'agit d'un entier positif affecté de l'exposant 2.

En décembre 2006, Lee Morgenstern nous fournit ce résultat :

Théorème 14.2 :

S'il existe un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés distincts et non nuls, alors ces neuf entiers sont tous supérieurs à 10^{14}.

Avec ce dernier théorème, nous voyons bien que pour construire un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés distincts, nous devrons utiliser de très grands nombres. La tâche s'avère compliquée!!! Puis un tel carré magique n'existe peut-être pas et alors, Il faut le démontrer. Mais s'il en existe un, pour le trouver, il nous faut la combinaison «courage plus très bon programme plus ordinateur».

Lee Morgenstern nous présente d'autres très beaux résultats; en voici quelques-uns à travers le théorème suivant :

Théorème 14.3 :

Dans un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés :

1) Les neuf nombres sont tous nuls ou sont tous non nuls.
2) Les neuf nombres sont tous pairs ou sont tous impairs.
3) Les neuf nombres sont tous multiples de 3 ou sont tous non multiples de 3.

Preuve :

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	k^2

Les nombres $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ sont des entiers positifs ou nuls. Les neuf nombres du carré sont donc des entiers carrés. Nous supposons magique ce carré. Alors :

1) Nous allons montrer que si un entier du carré est nul, alors tous les autres le sont. Le problème 2 de 4.3.8 nous permet d'écrire que :

   (*) $\quad 2a^2 = f^2 + h^2$; $2c^2 = d^2 + h^2$; $2g^2 = b^2 + f^2$; $2k^2 = b^2 + d^2$

   Dans l'égalité $2a^2 = f^2 + h^2$, dès qu'une inconnue prend la valeur 0, alors les 2 autres prennent aussi la valeur 0. En effet, si $a = 0$, alors il est évident que $f = h = 0$. Si $f = 0$, alors $2a^2 = h^2$ et $h = a\sqrt{2}$, ce qui implique $a = h = 0$. De même, si $h = 0$, alors $a = f = 0$.

   Si $a = 0$, alors (*) nous montre que $f = h = 0$ puis $c = d = 0$, $b = g = 0$ et $k = 0$. La somme magique est $S = 0$ donc $e = 0$. Les neuf nombres du carré sont tous nuls.

   Il en est de même avec $w = 0$ si w est un élément de l'ensemble $\{b, c, d, f, g, h, k\}$.

   Enfin, si $e = 0$, alors $a^2 + e^2 + k^2 = 0$ d'où $a^2 + k^2 = 0$ et $a = k = 0$. Avec $a = 0$, nous avons vu que les huit autres nombres sont tous égaux à 0.

   Donc, dès qu'un entier carré est nul, alors les neuf entiers carrés le sont. Cela signifie également que si un entier carré est non nul, alors les neuf entiers carrés le sont.

2) Nous allons montrer que si un entier du carré est pair, alors tous les autres le sont. Si dans $2a^2 = f^2 + h^2$, une inconnue est un entier pair, alors les deux autres sont des entiers pairs. En effet, si $a = 2m$, $a^2 = 4m^2$ et $8m^2 = f^2 + h^2$. Il est clair que f *et* h sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs. Si f *et* h sont tous les deux impairs, alors ils ont la forme $4r + 1$ *ou* $4r + 3$ et leurs carrés ont la forme $4r + 1$. Il s'ensuit que :

   $f^2 + h^2 = 4r + 2$, ce qui contredit que $f^2 + h^2$ soit un multiple de 4.

Si maintenant $f = 2m$, alors $f^2 = 4m^2$ et $2a^2 = 4m^2 + h^2$ ce qui implique que h soit pair, $h = 2m_1$, et finalement que a soit pair puisque nous avons $2a^2 = 4m^2 + 4m_1^2$ et $a^2 = 2m^2 + 2m_1^2$. De même, $h = 2m$ implique $a\,et\,f$ pairs.

Si a est pair, alors selon (*), nous aurons $f\,et\,h$ pairs, $c\,et\,d$ pairs, $b\,et\,g$ pairs et k pair. La somme magique S est donc paire d'où $3e^2$ est pair et finalement e est pair.

Il en est de même avec w pair si w est un élément de l'ensemble $\{b, c, d, f, g, h, k\}$.

Enfin, si e est pair, alors $a^2 + k^2 = 2e^2$ implique a pair et nous venons de voir que a pair implique que les neuf entiers soient pairs. En effet, $a\,et\,k$ doivent avoir la même parité mais $a\,et\,k$ impairs nous conduit à la contradiction impair = pair.

Donc, dès qu'un entier carré est pair, alors les neuf entiers carrés le sont. Cela signifie aussi que si un entier carré est impair, alors les neuf entiers carrés le sont.

3) Nous allons montrer que si un entier du carré est un multiple de 3, alors tous les autres le sont aussi. Nous savons que $a^2 + b^2 + c^2 = 3e^2$. **Si a est un multiple de 3**, alors $b\,et\,c$ le sont aussi. En effet, $b^2 + c^2$ est un multiple de 3 ce qui implique que $b\,et\,c$ le sont obligatoirement. Si b n'est pas un multiple de 3, alors b^2 a la forme $3r+1$ et si c est un multiple de 3, alors $b^2 + c^2$ est de la forme $3r+1$ ce qui mène à une contradiction. De même si b est un multiple de 3 et c n'est pas un multiple de 3. Si $b\,et\,c$ ne sont pas des multiples de 3, alors $b^2 + c^2$ sera de la forme $3r+2$, ce qui mène à une contradiction. Donc, $b\,et\,c$ sont des multiples de 3. Il en serait de même si nous partions **avec b multiple de 3 ou c multiple de 3.**

   Maintenant, si un entier quelconque du carré est un multiple de 3, alors celui-ci est dans une rangée et les deux autres entiers de cette rangée sont aussi des multiples de 3. Donc les trois colonnes renferment toutes des multiples de 3 puisque dans chaque colonne, il y a un multiple de 3.

   Si un entier du carré est un multiple de 3, alors tous les entiers du carré le sont. Cela signifie que si un entier du carré n'est pas un multiple de 3, alors tous les entiers du carré ne sont pas des multiples de 3.

14.2 Indépendance, dépendance et degré de dépendance de deux carrés magiques

Soient A et B, deux carrés magiques issus d'une même structure générale E de fréquence k. Cela signifie que tous les carrés magiques issus de E ont en commun k figures magiques, celles que possède E.

Il arrive souvent que A et B possèdent plus que k figures magiques. Supposons que A possède k+a figures magiques et que B possède k+b figures magiques. Nous dirons que a est le nombre de figures magiques supplémentaires de A et que b est le nombre de figures magiques supplémentaires de B (relativement à E). Si a et b sont nuls, alors nous dirons que les carrés magiques A et B sont **indépendants**. Si a est nul et b est non nul, alors A et B seront aussi indépendants; de même si a est non nul et b est nul.

Maintenant, avec a et b non nuls, nous dirons aussi que A et B sont indépendants s'ils ont en commun exactement k figures magiques.

Cependant, si A et B ont en commun plus que k figures magiques, alors nous dirons que A et B sont **dépendants**.

Soient a > 0 et b > 0 avec, sans perte de généralité, $a \geq b$. Si A et B ont en commun k+r figures magiques, alors le **nombre r/b** sera appelé **degré de dépendance** et sera noté λ d'où :

$$\lambda = \frac{r}{b}$$

Nous pouvons résumer en disant que A et B sont indépendants si et seulement s'ils ne possèdent en commun que k figures magiques, soient celles de E.

S'ils en possèdent plus que k, alors ils sont dépendants de degré λ , nombre compris entre 0 et 1. Il est clair que si λ = 0, A et B ont un degré de dépendance nul donc A et B sont indépendants.

Les exemples qui suivent montreront que λ dépend de la structure générale de laquelle sont issus les carrés magiques A et B.

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 6 & 19 & 60 \\ 51 & 28 & 11 & 18 \\ 12 & 15 & 54 & 27 \\ 22 & 59 & 24 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 22 & 9 & 19 & 56 \\ 57 & 18 & 11 & 20 \\ 3 & 15 & 62 & 26 \\ 24 & 64 & 14 & 4 \end{pmatrix}$$

A est de somme 108 avec f(108) = 31 et B est de somme 106 avec f(106) = 29. Ces deux carrés magiques sont des Dürer. A possède (14 + 10) + 7 figures magiques et B possède (14 + 10) + 5 figures magiques. De plus, en illustrant les figures magiques de A et B, nous

trouvons 25 figures magiques en commun (voir sur la Partie 3, annexe 23, le programme 03). Les 24 figures magiques entre parenthèses sont les 14 que tous les carrés magiques d'ordre 4 possèdent plus les 10 autres que possèdent tous les Dürer. Parmi les 7 supplémentaires que possède A et les 5 supplémentaires que possède B, une figure magique est commune.

Vus comme des carrés magiques, nous avons : k = 14, a = 17 et b = 15 d'où $\lambda = \frac{11}{15}$. Vus

comme des Dürer, nous avons : k = 24, a = 7 et b = 5 d'où $\lambda = \frac{1}{5}$

Le degré de dépendance entre A et B est donc plus élevé si nous regardons A et B comme de simples carrés magiques. Il est plus faible si nous les regardons comme des Dürer.

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 1 & 19 & 51 \\ 62 & 8 & 20 & 7 \\ 4 & 21 & 48 & 24 \\ 5 & 67 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Le carré C est aussi un Dürer de somme 97 avec f(97) = 29. En tant que carrés magiques, A et C sont dépendants avec $\lambda = \frac{10}{15}$.

En tant que Dürer, A et C sont dépendants de degré $\frac{0}{5} = 0$ donc A et C sont indépendants. En effet, A et C ont en commun seulement les 24 figures magiques caractéristiques des Dürer.

De la même façon, B et C sont des Dürer indépendants mais B et C sont dépendants en tant que simples carrés magiques avec $\lambda = \frac{10}{15}$.

Il est préférable de garder λ sous forme de fraction car cela nous apprend beaucoup plus que si nous avions la forme décimale. Par exemple, avec $\lambda = \frac{11}{15}$, nous savons que sur la possibilité d'avoir 15 figures magiques supplémentaires en commun, A et B en ont 11. Quant au nombre 0,73333…, celui-ci ne nous renseigne pas de façon aussi précise.

Considérons maintenant les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Nous savons que chacun possède exactement 86 figures magiques et que tous ont en commun les mêmes 14 figures magiques caractéristiques de l'ordre 4. Chacun des 7040 possède donc 14+72 figures magiques.

Pouvons-nous trouver A et B, parmi les 7040 normaux, qui ont en commun seulement 14 figures magiques? En d'autres mots, pouvons-nous trouver A et B indépendants en tant que simples carrés magiques normaux?

La réponse est OUI. Nous avons fabriqué un programme dans MAPLE qui nous a permis de trouver plusieurs paires de carrés magiques (A, B) qui sont indépendants. Par exemple :

6	12	7	9
16	5	10	3
1	4	15	14
11	13	2	8

A

12	5	10	7
13	2	15	4
8	11	6	9
1	16	3	14

B

Ces carrés A et B n'ont que 14 figures magiques en commun; ce sont les 14 figures magiques que possèdent tous les carrés magiques d'ordre 4. Toute autre figure magique (et il y en a 72) de A ne se retrouve pas dans B. Ces deux carrés magiques sont donc indépendants. Il existe des milliers de telles paires. En voici une autre :

15	2	13	4
12	7	10	5
1	14	3	16
6	11	8	9

3	5	14	12
16	10	1	7
9	15	8	2
6	4	11	13

Avec les 880 carrés magiques normaux primitifs d'ordre 4, nous avons trouvé 29 494 paires de carrés magiques indépendants!!! Donc dans chacune de ces paires, les deux carrés magiques n'ont que 14 figures magiques en commun. De toutes les paires de carrés magiques normaux formées à partir des 880 primitifs, seulement 7,626% sont des paires de carrés indépendants.

14.3 Des diviseurs universels pour les carrés magiques d'ordre 3

Nous avons trouvé W, un carré semi-magique avec diagonale secondaire magique, qui possède une propriété remarquable.

W =

0	1	1
1	0	1
1	1	0

Quel que soit A, un carré magique d'ordre 3, il existe B, un autre carré magique d'ordre 3 tel que A = BW (il s'agit du produit matriciel). De plus, B est unique. C'est pourquoi nous dirons que W est un diviseur de A.

Mais W divise tous les carrés magiques d'ordre 3. Nous appellerons W, un **diviseur universel** pour les carrés magiques d'ordre 3.

Par exemple :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 \\ 19 & 14 & 9 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 24 & 26 & 16 \\ 14 & 22 & 30 \\ 28 & 18 & 20 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 19 & 11 & 3 \\ 5 & 15 & 13 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Voyons cela de plus près en observant d'abord que si A est un carré magique quelconque d'ordre 3, alors A^2 possède la structure suivante :

$$A^2 = \begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix} = W$$

Plus précisément, A est tout simplement la structure générale des carrés magiques d'ordre 3. Remarquons que W est un carré semi-magique de somme $X+2Y$ avec sa diagonale **secondaire** magique(ici W est **presque magique-s**).

Il est évident que W est un carré magique si et seulement si $X=Y$; en effet, $3X=X+2Y$ implique $X=Y$ et $X=Y$ implique que W est trivial donc magique.

Maintenant, nous allons faire le produit AW :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & n & T-m-n \\ \frac{4T}{3}-2m-n & \frac{T}{3} & 2m+n-\frac{2T}{3} \\ m+n-\frac{T}{3} & \frac{2T}{3}-n & \frac{2T}{3}-m \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}}_{W}$$

pour constater que nous obtenons un carré magique de somme $T(X+2Y)$. Puisque nous savons au départ que AW est un carré semi-magique de somme $T(X+2Y)$ (voir le théorème 9.1, chapitre 9), alors, nous avons besoin de trouver seulement la somme de chaque diagonale et de s'assurer qu'elle vaut $T(X+2Y)$. C'est ce que nous avons obtenu.

Nous avons ensuite trouvé WA puis nous avons fait $AW-WA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cela implique que $AW=WA$ et que WA est aussi un carré magique. Donc AW est toujours un carré magique.

Passons à la question importante suivante : un carré magique A est-il toujours le produit BW où B est un carré magique? Autrement dit, pouvons-nous résoudre l'équation qui suit?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & n & T-m-n \\ \frac{4T}{3}-2m-n & \frac{T}{3} & 2m+n-\frac{2T}{3} \\ m+n-\frac{T}{3} & \frac{2T}{3}-n & \frac{2T}{3}-m \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}}_{W}$$

où les inconnues sont a, b, S. La réponse est oui et nous trouvons une solution unique déterminée par :

$$a = \frac{m(X+2Y)-TY}{(X-Y)(X+2Y)} \; ; \; b = \frac{n(X+2Y)-TY}{(X-Y)(X+2Y)} \; ; \; S = \frac{T}{X+2Y}$$

à la condition que $X - Y \neq 0 \; et \; X + 2Y \neq 0.$

Le carré W est donc un diviseur de A puisque B est unique et que $BW = WB.$ De plus, W est un diviseur de A quel que soit A.

C'est pourquoi nous appelons W, un diviseur universel et nous voyons qu'il en existe une infinité.

Si les conditions ci-haut ne sont pas respectées, alors W ne sera jamais un diviseur puisque ou bien B n'existe pas, ou bien il existe une infinité de carrés magiques B qui vérifient $A = BW$.

Terminons avec un autre résultat : nous avons $AB = BA$ et AB a la même structure que W.

AB est donc un carré semi-magique avec diagonale secondaire magique de somme $\frac{T^2}{X+2Y}$.

Exemple 1 :

Avec $m = 12$; $n = 13$; $T = 42$; $X = 0$; $Y = 1$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 \\ 19 & 14 & 9 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Avec $m = 9$; $n = 13$; $T = 36$; $X = 0$; $Y = 1$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 9 & 13 & 14 \\ 17 & 12 & 7 \\ 10 & 11 & 15 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 11 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Même si A renferme neuf entiers, il se peut que B renferme des nombres rationnels non entiers.

Exemple 2:

Avec $m=12$; $n=13$; $T=33$; $X=0$; $Y=1$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 8 \\ 7 & 11 & 15 \\ 14 & 9 & 10 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 19 & 11 & 3 \\ 5 & 15 & 13 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Nous voyons ici que B renferme neuf nombres rationnels. Puisque nous préférons construire des exemples où $A, B\, et\, W$ renferment que des entiers, alors de cet exemple, nous allons en trouver un autre où les trois carrés seront formés d'entiers.

En effet, $A=BW \Leftrightarrow 2A=2(BW)=(2B)W$ d'où :

$$\underset{2A}{\begin{pmatrix} 24 & 26 & 16 \\ 14 & 22 & 30 \\ 28 & 18 & 20 \end{pmatrix}} = \underset{2B}{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 19 & 11 & 3 \\ 5 & 15 & 13 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Avec $m=12$; $n=13$; $T=42$; $X=7$; $Y=2$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 \\ 19 & 14 & 9 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = \frac{1}{55}\underset{B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{55A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{55B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

Exemple 3 :

Avec $m=104; n=64; T=297; X=7; Y=2$,
$m=104; n=74; T=297; X=7; Y=2$, $m=109; n=59; T=297; X=7; Y=2\, et$
$m=81; n=41; T=198; X=7; Y=2, nous\, obtenons\, respectivement$:

$$\begin{pmatrix} 104 & 64 & 129 \\ 124 & 99 & 74 \\ 69 & 134 & 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 15 \\ 14 & 9 & 4 \\ 3 & 16 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 104 & 74 & 119 \\ 114 & 99 & 84 \\ 79 & 124 & 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 12 & 9 & 6 \\ 5 & 14 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 109 & 59 & 129 \\ 119 & 99 & 79 \\ 69 & 139 & 89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 13 & 9 & 5 \\ 3 & 17 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 81 & 41 & 76 \\ 61 & 66 & 71 \\ 56 & 91 & 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Nous venons de voir deux diviseurs universels pour les carrés magiques d'ordre 3. Enfin voyons comment un carré magique d'ordre 3 peut se décomposer en facteurs de deux façons différentes :

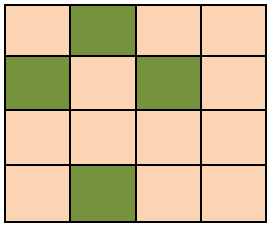
$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{B'}{\begin{pmatrix} 495 & 440 & 220 \\ 110 & 385 & 660 \\ 550 & 330 & 275 \end{pmatrix}} \underset{W'}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

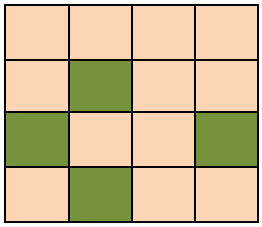
Pour une étude plus approfondie, voir sur la Partie 3, l'annexe 10 « Diviseurs universels ».

14.4 Comment perdre un cerf-volant?

Nous allons partir ici avec l'espace des super-Dürer-alpha c'est-à-dire des hyper-magiques d'ordre 4 qui possèdent le cerf-volant haut-gauche et le cerf-volant gauche-bas :



Cerf-volant haut-gauche



Cerf-volant gauche-bas

Voici la structure générale des super-Dürer-alpha (voir 5.6) :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \frac{3S-2a-6b}{4} & \frac{S-2a+2b}{4} \\ \frac{2S-2a-3b}{3} & \frac{S-a}{3} & \frac{10a+6b-S}{12} & \frac{S+2a+6b}{12} \\ \frac{2a+6b-S}{4} & \frac{S+2a-2b}{4} & \frac{S-2a}{2} & \frac{S-2b}{2} \\ \frac{7S-10a-6b}{12} & \frac{5S-2a-6b}{12} & \frac{2a}{3}+b-\frac{S}{6} & \frac{S+2a}{6} \end{pmatrix}$$

$$Structure\ générale\ des\ \sup er-Dürer-alpha\ de\ somme\ S$$

puis le carré F suivant :

$$F = \begin{pmatrix} Z & Y & R & X \\ Y & W & X & M \\ R & X & Z & Y \\ X & M & Y & W \end{pmatrix}$$

Si les quatre rangées sont magiques, alors $M = Z + R - W$. Cela nous permet de constater que F est alors un carré semi-magique (notez que $F = F^t$, sa transposée). Si les deux diagonales sont magiques, alors :

$$X = \frac{W+Z}{2}\ ;\ Y = \frac{3W+Z-2R}{2}$$

$M = Z + R - W$; $X = \dfrac{W+Z}{2}$; $Y = \dfrac{3W+Z-2R}{2}$ font que F est magique de somme $2(W+Z)$. Nous allons maintenant trouvé AF *et* FA et constater que :

$AF \neq FA$.

AF est un super-Dürer de somme $2S(W+Z)$ avec un cerf-volant haut-gauche.

FA est un super-Dürer de somme $2S(W+Z)$ avec un cerf-volant gauche-bas.

C'est déjà extraordinaire que AF *et* FA soient des super-Dürer avec chacun un cerf-volant. Nous pouvons les voir comme des super-Dürer-alpha ayant perdu chacun un cerf-volant et donc n'ayant plus le droit de porter le nom de super-Dürer-alpha!!!

Si F est facteur à droite, alors il y a perte du cerf-volant gauche-bas. Si F est facteur à gauche, alors il y a perte du cerf-volant haut-gauche.

Remarquez, par exemple, qu'il est possible que FA possède un cerf-volant haut-gauche si nous donnons aux variables des valeurs très particulières; cependant, en général FA ne possède pas ce cerf-volant. Voyons quelques exemples.

Remarque : dire qu'un carré magique possède un cerf-volant sous-entend qu'il est magique.

Exemple 1 :

Avec $a=4$; $b=5$; $S=34$; $R=9$; $W=15$; $Z=11$, nous trouvons :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix} \; ; \; F = \begin{pmatrix} 11 & 19 & 9 & 13 \\ 19 & 15 & 13 & 5 \\ 9 & 13 & 11 & 19 \\ 13 & 5 & 19 & 15 \end{pmatrix}$$

$$AF = \begin{pmatrix} 400 & 404 & 448 & 516 \\ 460 & 504 & 412 & 392 \\ 436 & 368 & 484 & 480 \\ 472 & 492 & 424 & 380 \end{pmatrix} \; ; \; FA = \begin{pmatrix} 520 & 460 & 376 & 412 \\ 384 & 404 & 528 & 452 \\ 508 & 472 & 364 & 424 \\ 356 & 432 & 500 & 480 \end{pmatrix}$$

Le carré magique A est normal et le carré F est magique de somme 52. Le carré AF est un super-Dürer de somme 34x52 = 1768 avec son cerf-volant haut-gauche. Le carré FA est un super-Dürer de somme 52x34 = 1768 avec son cerf-volant gauche-bas. Les carrés AF *et* FA sont presque normaux et bien évidemment différents.

Exemple 2 :

Nous allons voir dans cet exemple que FA possède les 2 cerfs-volants. Pour avoir le cerf-volant haut-gauche magique, nous allons dans le carré général FA et nous additionnons les expressions situées dans les cases du cerf-volant haut-gauche et nous posons cette somme moins $2S(W+Z)$ égale à 0. Plus précisément, nous trouvons :

$$\left(a-3b+\frac{S}{2}\right)\left(4R-7W+3Z\right)=0$$

Donc FA aura le cerf-volant haut-gauche si et seulement si l'équation précédente est vérifiée.

Nous allons garder A, notre super-Dürer-alpha et plutôt changer F en posant :

$$R=\frac{7W-3Z}{4}$$

Avec notre nouveau F, nous savons que FA possède le cerf-volant haut-gauche. Maintenant, nous pouvons affirmer que FA est un super-Dürer-alpha quel que soit A et quelle surprise, AF est devenu aussi un super-Dürer-alpha!!! Voyons notre nouveau F :

Z	$\frac{1}{4}(-W+5Z)$	$\frac{1}{4}(7W-3Z)$	$\frac{W+Z}{2}$
$\frac{1}{4}(-W+5Z)$	W	$\frac{W+Z}{2}$	$\frac{1}{4}(3W+Z)$
$\frac{1}{4}(7W-3Z)$	$\frac{W+Z}{2}$	Z	$\frac{1}{4}(-W+5Z)$
$\frac{W+Z}{2}$	$\frac{1}{4}(3W+Z)$	$\frac{1}{4}(-W+5Z)$	W

Avec $a = 7$; $b = 8$; $S = 58$; $W = 15$: $Z = 11$, nous trouvons :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 28 & 15 \\ 26 & 17 & 5 & 10 \\ 1 & 14 & 22 & 21 \\ 24 & 19 & 3 & 12 \end{pmatrix} \; ; \; F = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 18 & 13 \\ 10 & 15 & 13 & 14 \\ 18 & 13 & 11 & 10 \\ 13 & 14 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$AF = \begin{pmatrix} 856 & 764 & 688 & 708 \\ 676 & 720 & 844 & 776 \\ 820 & 800 & 652 & 744 \\ 664 & 732 & 832 & 788 \end{pmatrix} \; ; \; FA = \begin{pmatrix} 667 & 757 & 793 & 799 \\ 809 & 783 & 683 & 741 \\ 715 & 709 & 841 & 751 \\ 825 & 767 & 699 & 725 \end{pmatrix}$$

Ici A est un super-Dürer-alpha presque normal de somme 58. Le carré F est magique de somme 52. Les carrés AF *et* FA sont des super-Dürer-alpha de somme 52x58 = 3016.

Nous voyons que le carré magique F de l'exemple 1 faisait perdre un cerf-volant tandis que le carré magique F de l'exemple 2 préserve les 2 cerfs-volants.

14.5 Deux grandes curiosités!!!

Considérons le A-Dürer (Dürer associatif) suivant :

$A =$

19	5	38	50
33	55	22	2
54	34	1	23
6	18	51	37

Nous avons vu au chapitre 9 que les puissances entières positives impaires d'un A-Dürer sont toujours des A-Dürer. Mais ici, nous allons faire une découverte extraordinaire!!!

1) Les 16 entiers de A^3 sont formés de 6 chiffres. Ils commencent tous par 3 et se terminent tous par 2. Ils ont donc tous la forme 3 (4 chiffres) 2.
2) Les 16 entiers de A^5 sont formés de 10 chiffres et ont la forme 4 (7 chiffres) 08.
3) Les 16 entiers de A^7 sont formés de 14 chiffres et ont la forme : 552 (8 chiffres) 152.
4) Les 16 entiers de A^{15} sont formés de 31 chiffres et ont la forme :
   13 683 914 (16 chiffres) 5 870 592.
5) Les 16 entiers de A^{21} sont formés de 43 chiffres et ont la forme :
   270 096 206 611 (21 chiffres) 9 539 708 928

Il semble en être ainsi pour toutes les puissances entières positives impaires!!! Comment expliquer ce phénomène?

Pour le moment, nous nous contentons de vous présenter cette observation et peut-être trouverez-vous l'explication!

Voyons ce qui se passe avec un autre A-Dürer :

$B =$

25	81	53	37
56	34	62	44
54	36	64	42
61	45	17	73

Le phénomène n'est pas tout à fait le même.

1) Les 16 entiers de B^3 commencent tous par 1.
2) Les 16 entiers de B^5 commencent tous par 72.
3) Les 16 entiers de B^7 commencent tous par 277.
4) Les 16 entiers de B^9 commencent tous par 106 719.
5) Les 16 entiers de B^{15} commencent tous par 60 503 580 888.

Par contre, pour toutes les puissances que nous venons de voir, tous les entiers se terminent comme suit :

0 6 8 2

6 4 2 4

4 6 4 2

6 0 2 8

Ainsi, pour toutes ces puissances, le premier entier à partir de la gauche de la première rangée se termine toujours par 0, le quatrième entier à partir de la gauche de la quatrième rangée se termine toujours par 8, le troisième entier à partir de la gauche de la deuxième rangée se termine toujours par 2, et ainsi de suite.

Il est beaucoup plus facile d'expliquer pourquoi ces entiers se terminent ainsi. Voyons de plus près.

Nous trouvons que les derniers chiffres des entiers de B^2 sont :

0 2 8 6

6 4 2 4

4 2 4 6

6 8 2 0

Puis nous trouvons que les derniers chiffres des entiers de $B^3 = B\,B^2$ sont :

0 6 8 2

6 4 2 4

4 6 4 2

6 0 2 8

Enfin, nous trouvons que les derniers chiffres des entiers de $B^5 = B^3B^2$ sont :

0	6	8	2
6	4	2	4
4	6	4	2
6	0	2	8

c'est-à-dire les mêmes que dans le cas de B^3. C'est pourquoi les entiers de B^{2k-1} se terminent tous de la même façon que ceux de B^3 et ce, quel que soit l'entier $k \geq 2$.

Voici le A-Dürer presque normal B^7. Vous pouvez voir que les seize entiers commencent tous par 277 et que les derniers chiffres sont ceux du tableau ci-haut.

2777979393249280	2778031457243136	2778005425246208	2777990549819392
2778008214388736	2777987760676864	2778013792673792	2777997057818624
2778006354960384	2777989620105216	2778015652102144	2777995198390272
2778012862959616	2777997987532800	2777971955535872	2778024019529728

Puis le A-Dürer presque normal A^9 ci-dessous. Tous ses entiers sont formés de 18 chiffres et ont tous la forme 6932 (10 chiffres) 6688.

693268670877906688	693267086568466688	693270821012146688	693272178991666688
693270255187346688	693272744816466688	693269010372786688	693266747073586688
693272631651506688	693270368352306688	693266633908626688	693269123537746688
693267199733426688	693268557712946688	693272292156626688	693270707847186688

Ce que nous venons d'observer peut aussi se produire avec d'autres carrés magiques, des super-Dürer (hyper-magiques d'ordre 4), des ultra-magiques-alpha d'ordre 5, par exemple.

14.6 Carrés magiques et entiers modulo(k)

Considérons l'ensemble E des entiers modulo (k).

$$E = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;\ k-1\} \quad \text{où } k \geq 2 \text{ est un entier.}$$

Nous allons construire un carré magique d'ordre n en attribuant aux variables libres de la structure générale, des valeurs dans E. Notez que la somme magique S fait partie des variables libres.

Maintenant, si n est un entier qui n'est pas dans E, alors nous pouvons toujours trouver un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n + mk$ soit dans E. Donc $n = k_i - mk$ où $k_i \in E$.

Une figure est magique si et seulement si la somme des entiers de cette figure est S. À partir de la structure générale, nous obtiendrons un carré magique qui contient un certain nombre de figures magiques dont les rangées, colonnes et grandes diagonales, par définition. Prenons par exemple la figure magique suivante dont la somme est S :

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S$$

Si u_i n'est pas dans E, alors il sera remplacé $k_i - m_i k$ où $k_i \in E$ $et\ m_i \in \mathbb{Z}$. Afin que tous les entiers du carré soient dans E, nous devons réécrire le membre de gauche de (1). Celui-ci s'écrit maintenant comme une somme d'entiers de E plus un multiple entier de k et le total est toujours S. Nous pouvons donc écrire : $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = S + mk$ où les $k_i \in E$. Notez que les k_i ne sont pas forcément distincts.

Exemple 1 : $k = 3 et\, n = 4$.

Dans la structure générale des Dürer, nous avons donné aux variables les valeurs $1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 2\, et\, 2$ pour la somme magique. Nous avons obtenu le Dürer suivant de somme $S = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons $-1 et -2$ qui ne sont pas dans $E = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$. Nous remplacerons -1 par $2 + (-3)$ et -2 par $1 + (-3)$. Quant au 3, il est remplacé par $0 + 3$.

Ainsi M devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, nous avions dans la dernière rangée, $-2+0+1+3=2=S$. Maintenant, nous avons, $1+0+1+0+(-3+3)=2=S$ ou encore $1+0+1+0=2=S-(-3+3)$.

Exemple 2 : $k=11 et\, n=9$.

Nous allons construire un carré magique d'ordre 9 formé d'entiers modulo (11). Nous allons d'abord construire un carré magique normal d'ordre 9 en utilisant le fichier «Ordre 9» de MATHEMATICA ou EXCEL ou le fichier MAPLE. Ce carré sera donc arithmétique.

Ici, nous avons :

$$E=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$$

Puisque la somme magique du carré normal est 369 et que $369=6+33\times 11$, alors nous prendrons $S=6$, évidemment dans E. Voici donc le carré normal :

45	76	35	66	25	56	15	46	5
4	44	75	34	65	24	55	14	54
53	3	43	74	33	64	23	63	13
12	52	2	42	73	32	72	22	62
61	11	51	1	41	81	31	71	21
20	60	10	50	9	40	80	30	70
69	19	59	18	49	8	39	79	29
28	68	27	58	17	48	7	38	78
77	36	67	26	57	16	47	6	37

Modulo(11), tous ces entiers deviennent :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 9 & 1 & 10 & 2 & 0 & 3 & 10 \\ 9 & 3 & 10 & 8 & 0 & 9 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & 9 & 7 & 10 & 6 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 7 & 1 & 8 & 4 & 9 & 5 & 10 \\ 9 & 5 & 10 & 6 & 9 & 7 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Le carré magique M d'ordre 9 est formé de 81 entiers modulo (11) dont la somme magique est 6 modulo(11). Par exemple, la première rangée de M est obtenue de la première rangée du carré normal en remplaçant chaque entier par $k_i + m_i k$. La somme de la première rangée est donc : $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) + 31 \times 11 = (6 + 2 \times 11) + 31 \times 11 = 6 + 33 \times 11 = S + 11m.$

Puisque le carré normal est associatif, alors M est associatif (voir problème 57 de 14.18). Deux entiers en position symétrique par rapport au centre de M, ont toujours pour somme

$$5 \bmod (11) = \frac{2 \times 369}{9} = 82 = 5 \bmod (11).$$

14.7 Six décompositions d'un carré magique en une somme de carrés magiques

Nous allons voir que la somme d'un carré magique M d'ordre $n \geq 3$, avec un de ses équivalents peut donner des résultats étonnants. En fait, cinq éléments de symétrie vont apparaître. Par exemple : $M + R^2(M)$ est un carré magique à symétrie centrale ce qui veut dire que deux cases symétriques par rapport au centre du carré renferment le même nombre. Nous pouvons aussi montrer que $M - R^2(M)$ est un carré magique avec l'antisymétrie centrale, ce qui veut dire que si a et b sont situés dans des cases symétriques par rapport au centre du carré, alors a + b = 0. Il en découlera une première décomposition de M en une somme de deux carrés magiques dont l'un aura la symétrie centrale et l'autre, l'antisymétrie centrale.

$$M = \frac{M + R^2(M)}{2} + \frac{M - R^2(M)}{2}$$

De plus, nous montrerons que cette décomposition est unique.

<u>Premier cas</u> : $M + R^2(M)$ **Élément de symétrie : le centre du carré**.

L'effet de la rotation de 180° de M est de permuter le contenu de deux cases symétriques par rapport au centre du carré. Si dans M , deux cases symétriques par rapport au centre du carré renferment les nombres x et y, alors dans $R^2(M)$, nous trouverons dans les mêmes cases les nombres y et x. Donc dans les mêmes cases de $M + R^2(M)$, nous trouverons le même nombre x + y tandis que dans les mêmes cases de $M - R^2(M)$, nous trouverons x – y et y – x.

Nous pouvons affirmer : $M + R^2(M)$ est un carré magique avec la symétrie centrale et $M - R^2(M)$ est un carré magique avec l'antisymétrie centrale.

Puis, si un carré magique U possède à la fois la symétrie centrale et l'antisymétrie centrale, alors ce carré est le carré nul. En effet, $R^2(U) = U$ (symétrie centrale) et $R^2(U) = -U$ (antisymétrie centrale) d'où $U = -U$ et finalement $U = 0$.

Maintenant nous avons le théorème suivant :

Théorème 14.4 :

Tout carré magique M peut s'écrire comme une somme de deux carrés magiques dont l'un possède la symétrie centrale et l'autre, l'antisymétrie centrale et ce, de façon unique :

$$M = \frac{M + R^2(M)}{2} + \frac{M - R^2(M)}{2}$$

Pour montrer l'unicité de la décomposition, supposons $M = A + B = C + D$ où $A et C$ sont à symétrie centrale (SC), $B et D$ à antisymétrie centrale (ASC). Nous avons alors $A - C = D - B$ d'où $A - C$ est à la fois à (SC) et à (ASC) donc $A - C = 0 \ et \ A = C.$ De la même façon, nous trouvons $B = D.$ Ainsi nous voyons que cette décomposition est unique.

Voyons un exemple où M est un carré magique d'ordre 4 de somme $S = 1052.$ Dans la décomposition, la somme du premier carré est évidemment S et celle du second, $0.$

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 250 & 218 & 398 & 186 \\ 266 & 378 & 388 & 20 \\ 342 & 284 & 2 & 424 \\ 194 & 172 & 264 & 422 \end{pmatrix}} = \underset{(SC)}{\begin{pmatrix} 336 & 241 & 285 & 190 \\ 345 & 190 & 336 & 181 \\ 181 & 336 & 190 & 345 \\ 190 & 285 & 241 & 336 \end{pmatrix}} + \underset{(ASC)}{\begin{pmatrix} -86 & -23 & 113 & -4 \\ -79 & 188 & 52 & -161 \\ 161 & -52 & -188 & 79 \\ 4 & -113 & 23 & 86 \end{pmatrix}}$$

<u>Deuxième cas</u> : $M + R_*(M)$ **Élément de symétrie : la verticale qui passe par le centre**.

$R_*(M)$ a pour effet de permuter le contenu de deux cases symétriques par rapport à la verticale qui passe par le centre du carré. Il s'ensuit que $M + R_*(M)$ est un carré magique (puisque M est magique) qui est symétrique par rapport à la verticale qui passe par le centre du carré tandis que $M - R_*(M)$ est antisymétrique par rapport à cette même verticale.

Si un carré magique est à la fois symétrique et antisymétrique relativement à cette verticale qui passe par le centre du carré, alors ce carré est nul.

Théorème 14.5 :

Tout carré magique M peut s'écrire comme une somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique par rapport à la verticale qui passe par le centre du carré et l'autre, antisymétrique par rapport à cette même verticale et ce, de façon unique :

$$M = \frac{M + R_*(M)}{2} + \frac{M - R_*(M)}{2}$$

Dans l'exemple suivant, il s'agit toujours du même carré magique M écrit comme somme d'un carré magique à symétrie verticale (SV) et d'un carré magique à antisymétrie verticale (ASV).

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 250 & 218 & 398 & 186 \\ 266 & 378 & 388 & 20 \\ 342 & 284 & 2 & 424 \\ 194 & 172 & 264 & 422 \end{pmatrix}} = \underset{(SV)}{\begin{pmatrix} 218 & 308 & 308 & 218 \\ 143 & 383 & 383 & 143 \\ 383 & 143 & 143 & 383 \\ 308 & 218 & 218 & 308 \end{pmatrix}} + \underset{(ASV)}{\begin{pmatrix} 32 & -90 & 90 & -32 \\ 123 & -5 & 5 & -123 \\ -41 & 141 & -141 & 41 \\ -114 & -46 & 46 & 114 \end{pmatrix}}$$

<u>Troisième cas</u> : $M + R_*^1(M)$ **Élément de symétrie : la diagonale principale**.

Nous savons que $R_*^1(M) = M^t$, que $M + M^t$ est symétrique et que $M - M^t$ est antisymétrique.

De plus, seul le carré nul est à la fois symétrique et antisymétrique d'où le résultat suivant :

Théorème 14.6 :

Tout carré magique M peut s'écrire comme une somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique par rapport à la diagonale principale et l'autre, antisymétrique par rapport à la diagonale principale et ce, de façon unique :

$$M = \frac{M + R_*^1(M)}{2} + \frac{M - R_*^1(M)}{2} = \frac{M + M^t}{2} + \frac{M - M^t}{2}$$

Toujours notre carré magique M qui s'écrit cette fois comme somme d'un carré magique symétrique par rapport à la diagonale principale (SDP) et d'un carré magique antisymétrique par rapport à la diagonale principale (ADP).

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 250 & 218 & 398 & 186 \\ 266 & 378 & 388 & 20 \\ 342 & 284 & 2 & 424 \\ 194 & 172 & 264 & 422 \end{pmatrix}} = \underset{(SDP)}{\begin{pmatrix} 250 & 242 & 370 & 190 \\ 242 & 378 & 336 & 96 \\ 370 & 336 & 2 & 344 \\ 190 & 96 & 344 & 422 \end{pmatrix}} + \underset{(ASDP)}{\begin{pmatrix} 0 & -24 & 28 & -4 \\ 24 & 0 & 52 & -76 \\ -28 & -52 & 0 & 80 \\ 4 & 76 & -80 & 0 \end{pmatrix}}$$

<u>Quatrième cas</u> : $M + R_*^2(M)$ **Élément de symétrie : l'horizontale qui passe par le centre.**

L'effet de R_*^2 sur M est de permuter le contenu de deux cases symétriques par rapport à l'horizontale qui passe par le centre du carré. Il s'ensuit que $M + R_*^2(M)$ est symétrique par

rapport à cette horizontale tandis que $M - R_*^2(M)$ est antisymétrique par rapport à cette horizontale.

De plus, seul le carré nul est à la fois symétrique et antisymétrique d'où le résultat suivant :

Théorème 14.7:

Tout carré magique M peut s'écrire comme une somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique par rapport à l'horizontale qui passe par le centre du carré et l'autre, antisymétrique par rapport à cette même horizontale et ce, de façon unique :

$$M = \frac{M + R_*^2(M)}{2} + \frac{M - R_*^2(M)}{2}$$

Revoici notre carré magique M et sa nouvelle décomposition en une somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique par rapport à la droite horizontale qui passe par le centre du carré tandis que l'autre est antisymétrique par rapport à cette même droite. De plus, cette décomposition est toujours unique.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 250 & 218 & 398 & 186 \\ 266 & 378 & 388 & 20 \\ 342 & 284 & 2 & 424 \\ 194 & 172 & 264 & 422 \end{pmatrix}} = \underset{(SH)}{\begin{pmatrix} 222 & 195 & 331 & 304 \\ 304 & 331 & 195 & 222 \\ 304 & 331 & 195 & 222 \\ 222 & 195 & 331 & 304 \end{pmatrix}} + \underset{(ASH)}{\begin{pmatrix} 28 & 23 & 67 & -118 \\ -38 & 47 & 193 & -202 \\ 38 & -47 & -193 & 202 \\ -28 & -23 & -67 & 118 \end{pmatrix}}$$

<u>Cinquième cas</u> : $M + R_*^3(M)$ **Élément de symétrie : la diagonale secondaire.**

L'effet de R_*^3 sur M est de permuter le contenu de deux cases symétriques par rapport à la diagonale secondaire. Il s'ensuit que $M + R_*^3(M)$ est symétrique par rapport à la diagonale secondaire tandis que $M - R_*^3(M)$ est antisymétrique par rapport à la diagonale secondaire.

De plus, seul le carré nul est à la fois symétrique et antisymétrique d'où le résultat suivant :

Théorème 14.8 :

Tout carré magique M peut s'écrire comme une somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique par rapport à la diagonale secondaire et l'autre, antisymétrique par rapport à la diagonale secondaire et ce, de façon unique :

$$M = \frac{M + R_*^3(M)}{2} + \frac{M - R_*^3(M)}{2}$$

Enfin, M s'écrit comme une somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique par rapport à la diagonale secondaire et l'autre, antisymétrique par rapport à la diagonale secondaire. Cette décomposition est unique.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 250 & 218 & 398 & 186 \\ 266 & 378 & 388 & 20 \\ 342 & 284 & 2 & 424 \\ 194 & 172 & 264 & 422 \end{pmatrix}} = \underset{(SDS)}{\begin{pmatrix} 336 & 321 & 209 & 186 \\ 265 & 190 & 388 & 209 \\ 257 & 284 & 190 & 321 \\ 194 & 257 & 265 & 336 \end{pmatrix}} + \underset{(ASDS)}{\begin{pmatrix} -86 & -103 & 189 & 0 \\ 1 & 188 & 0 & -189 \\ 85 & 0 & -188 & 103 \\ 0 & -85 & -1 & 86 \end{pmatrix}}$$

Nous venons de trouver les cinq décompositions du carré magique M en une somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique et l'autre, antisymétrique, relativement à chacun des cinq éléments de symétrie que nous venons de présenter.

Pour chacun de ces éléments de symétrie, nous savons que seul le carré nul est à la fois symétrique et antisymétrique, résultat qui conduit à l'unicité de la décomposition. (Voir les problèmes à la fin de ce chapitre).

Nous remarquons que les cinq décompositions ont la forme :

$$M = \frac{M + M'}{2} + \frac{M - M'}{2} = (Symétrique) + (Antisymétrique)$$

Nous verrons d'autres exemples à la fin de cette section avec M, un carré magique d'ordre 5.

<u>Sixième cas</u> :

Voyons maintenant notre sixième décomposition, cette fois en une somme de trois carrés magiques.

Nous allons montrer que tout carré magique M de somme S peut s'écrire comme une somme de trois carrés magiques dont le premier est de somme nulle avec la propriété d'antisymétrie centrale, le deuxième est de somme nulle et le troisième est de somme S.

Considérons E_n, l'espace vectoriel sur les réels des carrés magiques d'ordre $n \geq 3$ puis S_n, le sous-espace des carrés magiques de sommes nulles et enfin P_n, le sous-espace des carrés magiques de sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale. Évidemment, nous pouvons écrire :

$$P_n \subset S_n \subset E_n$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 14.9 :

Soit P_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques de sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale, alors :

$$Dim(P_n) = \frac{n(n-2)}{2} \; si\, n\; pair \qquad Dim(P_n) = \frac{(n-1)^2}{2} \; si\, n\, impair$$

La démonstration de ce théorème est dans l'annexe 14 de la Partie 3 de cet ouvrage.

Dans l'exemple qui suit, nous avons $n = 4$. La dimension de P_n est 4. Pour avoir une base de P_n, il suffit de trouver quatre carrés magiques linéairement indépendants de sommes nulles ayant l'antisymétrie centrale. Nous pourrons ainsi construire le premier carré dans la décomposition de M.

La dimension de S_n est 7. Pour trouver une base, il suffit de compléter la base de P_n en lui ajoutant trois carrés magiques de sommes nulles de façon à obtenir sept carrés linéairement indépendants. C'est avec ces trois nouveaux carrés que nous construirons le deuxième carré de la décomposition de M.

La dimension de E_n est 8. Il reste à ajouter à la base de S_n, un carré magique de somme 1 convenablement choisi, afin d'obtenir une base de E_n. Voici les quatre carrés magiques de

sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale, les trois carrés magiques de sommes nulles et le carré magique de somme 1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ;\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;\ A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour trouver la décomposition de M , nous devons d'abord résoudre l'équation :

$$a\,A_1 + b\,A_2 + c\,A_3 + d\,A_4 + f\,A_5 + g\,A_6 + h\,A_7 + S\,A_8 = M$$

Nous aurons alors notre décomposition :

$$M = \underbrace{(a\,A_1 + b\,A_2 + c\,A_3 + d\,A_4)}_{\substack{somme\,nulle\,avec \\ antisymétrie\,centrale}} + \underbrace{(f\,A_5 + g\,A_6 + h\,A_7)}_{somme\,nulle} + S\,A_8$$

Pour notre carré magique M dont nous connaissons déjà cinq décompositions, nous avons trouvé :

$$a = -802\ ;\ b = 218\ ;\ c = 398\ ;\ d = 266\ ;\ f = 60\ ;\ g = -802\ ;\ h = 422\ ;\ S = 1052$$

Voici maintenant la sixième décomposition de M en une somme, cette fois, de trois carrés magiques dont le premier est de somme nulle avec l'antisymétrie centrale, le deuxième est de somme nulle et le troisième, de somme S qui détermine la somme magique de M.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 250 & 218 & 398 & 186 \\ 266 & 378 & 388 & 20 \\ 342 & 284 & 2 & 424 \\ 194 & 172 & 264 & 422 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{antisymétrie\,centrale \\ somme\,nulle}}{\begin{pmatrix} -802 & 218 & 398 & 186 \\ 266 & 318 & 138 & -722 \\ 722 & -138 & -318 & -266 \\ -186 & -398 & -218 & 802 \end{pmatrix}} + \underset{somme\,nulle}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -802 & 742 \\ -380 & 422 & 320 & -362 \\ 380 & -482 & 482 & -380 \end{pmatrix}}$$

$$+ \underset{somme\,S}{\begin{pmatrix} 1052 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1052 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1052 \\ 0 & 1052 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Théorème 14.10 :

> Tout carré magique M de somme S peut s'écrire comme une somme de trois carrés magiques dont le premier est de somme nulle avec l'antisymétrie centrale, le deuxième est de somme nulle et le troisième est de somme S.

Cette décomposition n'est pas unique. En général, celle-ci changera si nous changeons de base.

Voyons quelques exemples avec M , un carré magique d'ordre 5.

Nous allons écrire M comme somme de deux carrés magiques dont l'un est symétrique et l'autre, antisymétrique relativement à l'élément de symétrie indiqué.

Exemple 1 : l'élément de symétrie est la droite horizontale qui passe par le centre du carré.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}} = \underset{(SH)}{\begin{pmatrix} 43 & 8 & 34 & 24 & 21 \\ 15 & 37 & 30 & 27 & 21 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 48 \\ 15 & 37 & 30 & 27 & 21 \\ 43 & 8 & 34 & 24 & 21 \end{pmatrix}} + \underset{(ASH)}{\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & -18 & 3 \\ -7 & -11 & 14 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & -14 & 7 & -11 \\ -7 & -4 & -4 & 18 & -3 \end{pmatrix}}$$

Exemple 2 : l'élément de symétrie est la droite verticale qui passe par le centre du carré.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}} = \underset{(SV)}{\begin{pmatrix} 37 & 9 & 38 & 9 & 37 \\ 20 & 23 & 44 & 23 & 20 \\ 30 & 34 & 2 & 34 & 30 \\ 16 & 41 & 16 & 41 & 16 \\ 27 & 23 & 30 & 23 & 27 \end{pmatrix}} + \underset{(ASV)}{\begin{pmatrix} 13 & 3 & 0 & -3 & -13 \\ -12 & 3 & 0 & -3 & 12 \\ -16 & 6 & 0 & -6 & 16 \\ 6 & 7 & 0 & -7 & -6 \\ 9 & -19 & 0 & 19 & -9 \end{pmatrix}}$$

Exemple 3 : l'élément de symétrie est le centre du carré.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}} = \underset{(SC)}{\begin{pmatrix} 34 & 27 & 34 & 5 & 30 \\ 9 & 30 & 30 & 34 & 27 \\ 30 & 34 & 2 & 34 & 30 \\ 27 & 34 & 30 & 30 & 9 \\ 30 & 5 & 34 & 27 & 34 \end{pmatrix}} + \underset{(ASC)}{\begin{pmatrix} 16 & -15 & 4 & 1 & -6 \\ -1 & -4 & 14 & -14 & 5 \\ -16 & 6 & 0 & -6 & 16 \\ -5 & 14 & -14 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 15 & -16 \end{pmatrix}}$$

Exemple 4 : l'élément de symétrie est la diagonale principale.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}} = \underset{(SDP)}{\begin{pmatrix} 50 & 10 & 26 & 14 & 30 \\ 10 & 26 & 42 & 34 & 18 \\ 26 & 42 & 2 & 22 & 38 \\ 14 & 34 & 22 & 34 & 26 \\ 30 & 18 & 38 & 26 & 18 \end{pmatrix}} + \underset{(ASDP)}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 & -8 & -6 \\ -2 & 0 & 2 & -14 & 14 \\ -12 & -2 & 0 & 6 & 8 \\ 8 & 14 & -6 & 0 & -16 \\ 6 & -14 & -8 & 16 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exemple 5 : l'élément de symétrie est la diagonale secondaire.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}} = \underset{(SDS)}{\begin{pmatrix} 34 & 11 & 42 & 19 & 24 \\ 25 & 30 & 36 & 20 & 19 \\ 22 & 28 & 2 & 36 & 42 \\ 13 & 48 & 28 & 30 & 11 \\ 36 & 13 & 22 & 25 & 34 \end{pmatrix}} + \underset{(ASDS)}{\begin{pmatrix} 16 & 1 & -4 & -13 & 0 \\ -17 & -4 & 8 & 0 & 13 \\ -8 & 12 & 0 & -8 & 4 \\ 9 & 0 & -12 & 4 & -1 \\ 0 & -9 & 8 & 17 & -16 \end{pmatrix}}$$

Exemple 6 :

Nous allons décomposer M en une somme de trois carrés magiques dont le premier est de somme nulle avec l'antisymétrie centrale, le deuxième est de somme nulle et le troisième est de somme S. Pour ce faire, nous avons procédé comme dans le sixième cas ci-haut.

Ici, $Dim(P_5) = 8 \; et \; Dim(S_5) = 14.$ Il est facile de construire un ensemble E formé de huit carrés magiques de sommes nulles ayant l'antisymétrie centrale et étant linéairement indépendants. Pour les six autres de sommes nulles, nous avons utilisé une base de E_5 puis avons complété E afin d'obtenir une autre base de S_5 et enfin, nous avons ajouté le carré magique de somme S pour obtenir une autre base de E_5.

Notre décomposition a donc la forme :

$$(a\,A_1 + b\,A_2 + c\,A_3 + d\,A_4 + e\,A_5 + f\,A_6 + g\,A_7 + h\,A_8) + (j\,A_9 + k\,A_{10} + m\,A_{11} + p\,A_{12} + q\,A_{13} + \\ + r\,A_{14}) + S\,A_{15}$$

Dans la première parenthèse, nous avons une combinaison linéaire des A_i de E qui est, de la décomposition, le premier carré magique de somme nulle avec l'antisymétrie centrale. Le deuxième carré magique de somme nulle est la combinaison linéaire de la seconde parenthèse et le troisième, le carré magique de somme S.

Pour trouver les coefficients, il suffit de résoudre l'équation :

$$a\,A_1 + b\,A_2 + c\,A_3 + d\,A_4 + e\,A_5 + f\,A_6 + g\,A_7 + h\,A_8 + j\,A_9 + k\,A_{10} + m\,A_{11} + \\ + p\,A_{12} + q\,A_{13} + r\,A_{14} + S\,A_{15} = M$$

Pour tous les carrés magiques d'ordre 5, le dernier carré de la décomposition a toujours la même structure. Il en était de même avec le carré d'ordre 4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ordre\,4 \qquad\qquad Ordre\,5$$

Ce sont les carrés magiques responsables de la somme $S\ de\ M$.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{antisymétrie\ centrale \\ somme\ nulle}}{\begin{pmatrix} -111 & 134 & 38 & 6 & -67 \\ 8 & -34 & 44 & 4 & -22 \\ 14 & -90 & 0 & 90 & -14 \\ 22 & -4 & -44 & 34 & -8 \\ 67 & -6 & -38 & -134 & 111 \end{pmatrix}} + \underset{somme\ nulle}{\begin{pmatrix} 31 & -122 & 0 & 0 & 91 \\ 0 & 60 & 0 & -114 & 54 \\ 0 & 0 & 2 & -62 & 60 \\ 0 & 52 & 60 & 0 & -112 \\ -31 & 10 & -62 & 176 & -93 \end{pmatrix}} +$$

$$+ \underset{somme\ S}{\begin{pmatrix} 130 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 & 0 \\ 0 & 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 130 \\ 0 & 0 & 130 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Terminons avec une autre façon, beaucoup plus simple, de décomposer M en une somme de trois carrés magiques comme ci-haut.

Soit M, un carré magique de somme S . Selon le premier cas, nous savons que $M = A + B$ où A est un carré magique qui possède l'antisymétrie centrale et B, un carré magique qui possède la symétrie centrale. Soit maintenant M', un carré magique de somme nulle. Nous avons :

$$M = A + B = A + M' + (B - M')$$

qui est la décomposition cherchée. En effet, nous avons bien :

A, un carré magique avec l'antisymétrie centrale et donc, de somme nulle.

M', un carré magique de somme nulle.

$B-M'$, un carré magique de somme S puisque B est de somme S.

Voyons un exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -15 & 4 & 1 & -6 \\ -1 & -4 & 14 & -14 & 5 \\ -16 & 6 & 0 & -6 & 16 \\ -5 & 14 & -14 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 15 & -16 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 34 & 27 & 34 & 5 & 30 \\ 9 & 30 & 30 & 34 & 27 \\ 30 & 34 & 2 & 34 & 30 \\ 27 & 34 & 30 & 30 & 9 \\ 30 & 5 & 34 & 27 & 34 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 13 & 3 & 0 & -3 & -13 \\ -12 & 3 & 0 & -3 & 12 \\ -16 & 6 & 0 & -6 & 16 \\ 6 & 7 & 0 & -7 & -6 \\ 9 & -19 & 0 & 19 & -9 \end{pmatrix} \qquad B-M' = \begin{pmatrix} 21 & 24 & 34 & 8 & 43 \\ 21 & 27 & 30 & 37 & 15 \\ 46 & 28 & 2 & 40 & 14 \\ 21 & 27 & 30 & 37 & 15 \\ 21 & 24 & 34 & 8 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 50 & 12 & 38 & 6 & 24 \\ 8 & 26 & 44 & 20 & 32 \\ 14 & 40 & 2 & 28 & 46 \\ 22 & 48 & 16 & 34 & 10 \\ 36 & 4 & 30 & 42 & 18 \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & -15 & 4 & 1 & -6 \\ -1 & -4 & 14 & -14 & 5 \\ -16 & 6 & 0 & -6 & 16 \\ -5 & 14 & -14 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 15 & -16 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 3 & 0 & -3 & -13 \\ -12 & 3 & 0 & -3 & 12 \\ -16 & 6 & 0 & -6 & 16 \\ 6 & 7 & 0 & -7 & -6 \\ 9 & -19 & 0 & 19 & -9 \end{pmatrix}}_{M'} +$$

$$+ \underbrace{\begin{pmatrix} 21 & 24 & 34 & 8 & 43 \\ 21 & 27 & 30 & 37 & 15 \\ 46 & 28 & 2 & 40 & 14 \\ 21 & 27 & 30 & 37 & 15 \\ 21 & 24 & 34 & 8 & 43 \end{pmatrix}}_{B-M'}$$

Nous pouvons voir que $M \ et \ B-M'$ sont de somme $S=130$ et que $A \ et \ M'$ sont de sommes nulles. Nous avons pris M' dans l'exemple 2 ci-haut. Nous pouvions aussi prendre une structure générale de carrés magiques d'ordre 5, celle des Ariane par exemple, et poser $S=0$. Nous aurions ainsi obtenu M', notre carré magique de somme nulle.

Un même carré magique M peut donc s'écrire de plusieurs façons différentes comme sommes de carrés magiques spéciaux.

14.8 Carré magique de fréquence k généré par une structure générale de fréquence k

La question que nous nous posons ici est la suivante : un carré magique issu d'une structure générale de fréquence k et de dimension w peut-il avoir une fréquence k? Il est clair que tout carré magique qui provient de cette structure générale de fréquence k, possède au moins k figures magiques, à savoir celles de la structure générale.

Par exemple, la fréquence de la structure générale des Dürer est 24 et sa dimension est 7. Cela signifie que tous les Dürer possèdent les 24 figures magiques de cette structure générale. Cependant, il arrive très souvent qu'un Dürer possède plus que 24 figures magiques (certains en possèdent même 86).

Pouvons-nous trouver un Dürer qui a exactement 24 figures magiques? Se pourrait-il que tous les Dürer possèdent une vingt-cinquième figure magique qui n'est pas forcément la même pour tous? **La réponse est oui à la première question, non à la seconde**. Nous allons montrer qu'il existe toujours un carré magique de fréquence k issu d'une structure générale de fréquence k.

Plus précisément, nous allons construire un carré magique de somme $S > 0$ qui sera issu d'une structure générale de fréquence k, lequel possèdera exactement k figures magiques. Nous savons déjà que peu importe la valeur attribuée à chaque variable libre, le carré qui en résulte est magique et possède au moins les k figures magiques de la structure générale. Si nous changeons les valeurs des variables, nous obtenons toujours un carré magique avec les mêmes k figures magiques plus, très souvent, m nouvelles figures magiques.

Considérons F, l'ensemble de toutes les figures de la structure générale qui sont différentes de ses k figures magiques. Nous allons regarder, une par une, toutes les figures de F afin de les rendre non magiques. Voici comment nous pouvons nous y prendre. **D'abord, observons que toutes les sommes des figures de F sont des expressions linéaires, sans terme constant, formées d'un certain nombre de variables x_i :** $\sum \lambda_i x_i$ **avec** $1 \le i \le w$.

Par exemple, avec $n = 4 \ et \ w = 7$: $\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_5 x_5 + \lambda_7 x_7$. Notons que $x_w = S$. Puis nous allons classer en groupes toutes les figures de F. Le groupe G_i renferme toutes les figures dont les sommes commencent par la variable x_i. Cela signifie que dans ces sommes, nous n'avons pas les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

Groupe G_1	
$a_1 x_1 + \ldots$	
$a_2 x_1 + \ldots$	Les sommes commencent avec la variable x_1.
...	

Groupe G_2	
$b_1x_2+\ldots$	
$b_2x_2+\ldots$	Les sommes commencent avec la variable x_2.
$\ldots$	

Groupe G_3	
$c_1x_3+\ldots$	
$c_2x_3+\ldots$	Les sommes commencent avec la variable x_3.
$\ldots$	

…

Groupe G_{w-1}	
$g_1x_{w-1}+\ldots$	
$g_2x_{w-1}+\ldots$	Les sommes commencent avec la variable x_{w-1}.
$\ldots$	

Groupe G_w	
$h_1S+\ldots$	
$h_2S+\ldots$	Les sommes commencent avec la variable $x_w=S$.
$\ldots$	

Nous voulons que toutes les sommes des w groupes ci-haut soient différentes de S. Dans le dernier groupe, aucune somme n'est égale à S. En effet, toutes les sommes égales à S ne font pas partie du dernier groupe; elles ont été mises de côté dès le début (revoir la définition de F).

Nous allons maintenant commencer la construction de notre carré magique qui doit posséder comme figures magiques les seules k figures magiques de la structure générale. D'abord, nous allons donner une valeur à chaque variable libre et en particulier, nous allons prendre $x_w=S>0$. Ainsi, si dans le groupe G_w , nous trouvons une somme λS avec $\lambda\neq 1$, alors cette somme ne sera pas magique.

Allons dans le groupe G_1. Nous changerons la valeur attribuée à x_1 mais conserverons les valeurs attribuées aux autres variables. Pour chaque somme, trouvons la valeur de x_1 qui la rend magique. Puis ordonnons toutes ces valeurs de la plus petite à la plus grande, appelée v_1.

Nous allons attribuer à la variable x_1 la valeur définitive $v_1 + 1$. Ainsi, toutes les sommes dans G_1 ne seront pas magiques.

Allons dans le groupe G_2. Nous changerons la valeur attribuée à x_2 mais conserverons les valeurs attribuées aux autres variables. Pour chaque somme, trouvons la valeur de x_2 qui la rend magique. Mais attention!!!Dans G_1, il peut y avoir des sommes que contiennent la variable x_2. Pour chacune de ces sommes dans G_1, trouvons aussi la valeur de x_2 qui la rend magique. Toutes ces valeurs de x_2 qui proviennent de G_1 et de G_2 seront placées en ordre de la plus petite à la plus grande appelée v_2. La valeur définitive de x_2 sera $v_2 + 1$ à la condition que $v_2 \neq v_1$ puisque nous préférons éviter les répétitions. Si $v_1 = v_2$, alors la valeur définitive de x_2 sera, par exemple, $v_2 + 2$. Ainsi nous n'avons aucune somme magique ni dans G_1, ni dans G_2.

De même, dans G_3, G_2 et G_1, considérons toutes les sommes qui contiennent la variable x_3. Cherchons ensuite les valeurs de x_3 qui rendent ces sommes magiques. Ensuite, nous les ordonnons de la plus petite à la plus grande appelée v_3. Puis la valeur définitive de x_3 sera $v_3 + \lambda$ où $\lambda \geq 1$ est un entier qui nous assure que les trois valeurs définitives de $x_1, x_2\ et\ x_3$ sont différentes deux à deux. Donc aucune somme magique dans $G_1, G_2 et\ G_3$.

Nous continuons de cette manière jusqu'au groupe G_{w-1}. Enfin, le groupe G_w ne peut pas contenir des sommes magiques puisque $S \neq 0$.

Nous venons de construire un carré magique issu d'une structure générale de fréquence k qui possède exactement k figures magiques, celles de la structure générale. Ce procédé nous assure l'existence d'un tel carré magique mais il s'applique difficilement à la construction d'un carré d'ordre élevé. Par exemple, un carré d'ordre 10 possède 17 310 309 456 440 figures tandis qu'un carré d'ordre 30 en possède :

98 033 481 673 745 855 663 769 301 429 072 553 612 301 102 054 273 844 800

Nous savons maintenant qu'il n'est pas possible que tous les Dürer possèdent une vingt-cinquième figure magique même si elle n'est pas la même pour tous. La raison en est qu'il existe au moins un Dürer qui possède exactement 24 figures magiques. Revoici le théorème 6.2 :

Théorème 14.11

Il existe au moins un carré magique de fréquence k issu d'une structure générale de fréquence k.

Si nous considérons l'ensemble de tous les carrés magiques issus d'une structure générale de fréquence k, alors nous pouvons affirmer que le nombre maximum de figures magiques communes à tous ces carrés magiques est k.

Voici en terminant, une idée intuitive qui peut nous aider à trouver **rapidement** un carré magique de fréquence k issu d'une structure générale de fréquence k : **donner aux variables de très grandes valeurs**. Cependant, avec de la chance, nous pouvons en trouver avec des petites valeurs. Voyez les six Dürer suivants respectivement de sommes $200, 192, 131, 90, 88 \, et \, 85$ avec en rouge, le plus grand nombre du carré ainsi que son plus petit nombre.

$$\begin{pmatrix} 12 & 121 & 11 & 56 \\ 13 & 54 & 101 & 32 \\ 152 & 20 & 25 & 3 \\ 23 & 5 & 63 & 109 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 & 121 & 11 & 48 \\ 13 & 46 & 101 & 32 \\ 144 & 20 & 25 & 3 \\ 23 & 5 & 55 & 109 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 & 71 & 9 & 39 \\ 20 & 28 & 69 & 14 \\ 95 & 19 & 15 & 2 \\ 4 & 13 & 38 & 76 \end{pmatrix}$$

$$f(200) = 24 \qquad f(192) = 24 \qquad f(131) = 24$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 16 & 3 & 69 \\ 25 & 47 & 6 & 12 \\ 52 & 4 & 33 & 1 \\ 11 & 23 & 48 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 16 & 4 & 67 \\ 25 & 46 & 6 & 11 \\ 50 & 3 & 33 & 2 \\ 12 & 23 & 45 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 16 & 22 & 43 \\ 1 & 64 & 8 & 12 \\ 48 & 2 & 11 & 24 \\ 32 & 3 & 44 & 6 \end{pmatrix}$$

$$f(90) = 24 \qquad f(88) = 24 \qquad f(85) = 24$$

Ceux-ci ont été trouvés en effectuant des millions d'essais à l'aide d'un programme que nous avons construit dans MAPLE.

Les deux Dürer qui suivent ont 24 figures magiques pour celui de gauche (les nombres sont plus grands) et 26 figures magiques pour celui de droite (les nombres sont plus petits).

$$\begin{pmatrix} 1143 & 1314 & 1224 & 959 \\ 2096 & 87 & 1162 & 1295 \\ 21 & 1139 & 2252 & 1228 \\ 1380 & 2100 & 2 & 1158 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 178 & 249 & 259 & 94 \\ 131 & 222 & 197 & 230 \\ 156 & 174 & 187 & 263 \\ 315 & 135 & 137 & 193 \end{pmatrix}$$

$$f(4640) = 24 \qquad f(780) = 26$$

Ces huit derniers carrés magiques sont tous presque normaux.

14.9 Un tour de magie

Nous allons créer un tour de magie à partir d'un carré magique presque normal M d'ordre 6. Par exemple, nous allons choisir M et quatre de ses équivalents. Nous aurons donc cinq carrés magiques différents formés chacun de trente-six entiers positifs différents.

Ensuite, nous allons fabriquer un certain nombre d'objets, chacun ayant une forme géométrique formée de six cases et pouvant être déposée sur l'un des cinq carrés magiques ci-haut de façon à couvrir parfaitement six cases du carré choisi.

Le magicien va demander à une personne, de choisir, au hasard, un des cinq carrés puis de choisir, au hasard, un des objets. La personne ne sait pas que les carrés sont magiques. Le magicien fera cependant remarquer que les cinq carrés sont différents et que chacun renferme trente-six nombres différents.

Ensuite, la personne devra déposer l'objet sur le carré choisi et ce, peu importe comment et peu importe où, en autant que six cases soient parfaitement couvertes par l'objet.

La personne fera ensuite la somme des nombres contenus dans les six cases couvertes. Soit x, cette somme.

Le magicien a déjà déposé dans une enveloppe un carton sur lequel est inscrit le nombre y.

Et voilà la surprise!!! Nous trouvons x = y!!!

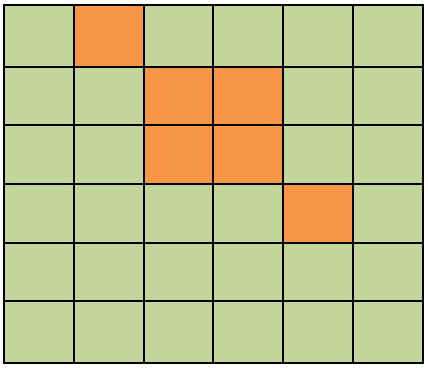
Comment cela est-il possible? Voyons de plus près.

Nous allons choisir pour carré M l'hyper-magique d'ordre 6 et de somme $S = 150$ suivant, lequel est presque normal. Les huit équivalents de M sont différents deux à deux et sont, évidemment, presque normaux de somme $S = 150$.

1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14
5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9

M

Le carré suivant renferme un premier objet (ici une super-figure). Placé comme nous voulons et où nous voulons sur le carré M, en autant que six cases soient parfaitement couvertes, la somme des nombres des six cases couvertes sera 150.

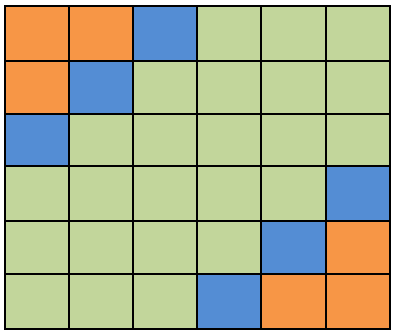


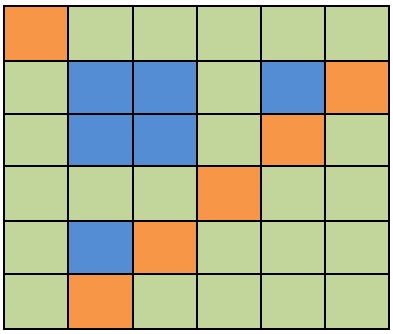
1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14
5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9

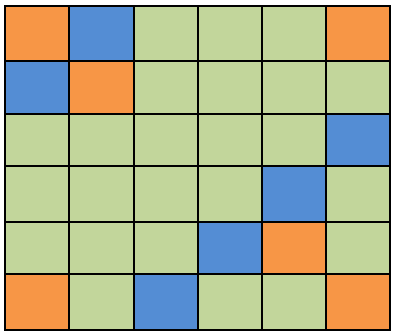
1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14
5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9

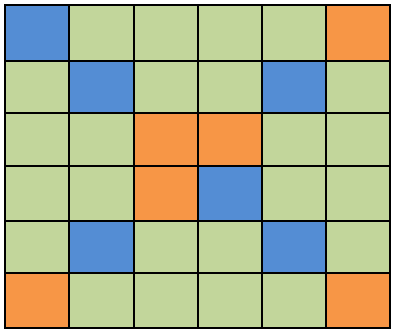
Nous avons placé quatre fois l'objet sur M et dans chaque cas, nous avons obtenu pour somme le nombre $x = 150$. Et oui, le magicien sait que le carré est magique de somme $S = 150$ et que la figure est une super-figure donc peu importe où la personne l'a placée, la somme des cases couvertes est 150. C'est le nombre que le magicien avait placé dans l'enveloppe!!!

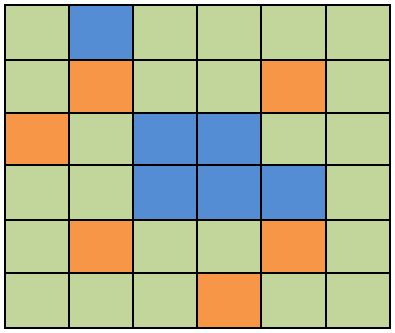
Nous allons maintenant illustrer quelques super-figures qui seront les objets que devra choisir la personne interpelée.

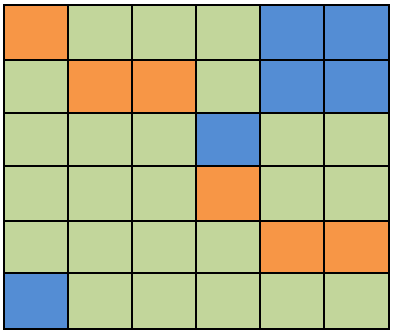












Nous venons d'illustrer treize super-figures. Le magicien peut donc offrir à la personne choisie pour participer à ce tour, de prendre un objet parmi treize (ou moins).

Nous avons placé dans M deux super-figures (deux objets) parmi les treize ci-haut. Il est facile de vérifier la somme 150 pour chaque figure.

1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14
5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9

M

En résumé :

1) Le magicien présente cinq carrés différents d'ordre 6, chacun formé de trente-six entiers positifs différents. La personne invitée à participer à ce tour doit en choisir un au hasard.
2) Puis le magicien présente à la personne treize objets (ou moins); celle-ci en choisit un au hasard.
3) Elle le place ensuite sur le carré, peu importe comment, en autant qu'il couvre parfaitement six cases. Puis elle fait la somme des nombres situés dans les six cases couvertes.
4) Le nombre ainsi obtenu est celui que le magicien a placé dans l'enveloppe.

14.10 Les carrés magiques associatifs

Dans 7.1, nous avons défini un carré magique associatif de somme S comme suit : quelle que soit la paire de cases symétriques par rapport au centre du carré, la somme des nombres qui s'y trouvent est toujours $\frac{2S}{n}$. Dans le cas impair, cette définition implique que la case centrale est toujours $\frac{S}{n}$. Puisque la case symétrique de la case centrale est la case centrale elle-même, la somme donne aussi $\frac{2S}{n}$. Nous avons donc toujours la paire $\{case\ centrale\ ,\ case\ centrale\}$.

Ainsi, dans le cas d'un carré arithmétique fabriqué avec ALG-1 ou ALG-2, nous savons que sa somme magique est donnée par :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n(n-1)}{2}t$$

Puisqu'il est associatif, la somme des deux nombres situés dans deux cases symétriques est :

$$w = 2a + (n-1)r + (n-1)t$$

Ce résultat est obtenu à la section 11.3, sous le deuxième encadré vert qui suit l'énoncé du théorème 11.3.

Il est donc facile de voir que : $$w = \frac{2}{n}S$$

Ce résultat est bien conforme avec la définition ci-haut.

Nous allons passer maintenant à **une autre définition :**

Un **carré magique associatif** est un carré magique de somme S tel que, quelle que soit **la paire de cases distinctes symétriques** par rapport au centre du carré, la somme des nombres qui s'y trouvent est toujours la même soit w.

Si notre carré magique est associatif, alors nous montrerons que :

$$w = \frac{2S}{n}$$

Premier cas : n **est pair :**

Plaçons-nous sur une grande diagonale. Nous avons alors $\frac{n}{2}$ paires de cases dont la somme est w

d'où le résultat : $\frac{n}{2}\ w = S$ et finalement $w = \frac{2S}{n}$.

Deuxième cas : n est impair :

En utilisant la première et la dernière rangée, nous avons n paires de cases distinctes symétriques par rapport au centre du carré. Il s'ensuit que $n\,w = 2S$ d'où $w = \frac{2S}{n}$. En se servant de la colonne centrale, nous voyons que la case centrale renferme : $S - \frac{n-1}{2}.\frac{2S}{n} = \frac{S}{n}$.

Ainsi, un carré magique associatif d'ordre impair, a obligatoirement pour centre le nombre $\frac{S}{n}$.

Théorème 14.12 :

Un carré magique d'ordre $n \geq 3$ et de somme S est associatif si et seulement si $w = \frac{2S}{n}$ où w est la somme obtenue dans toutes les paires de cases distinctes symétriques par rapport au centre du carré.

Si pour une seule paire de cases distinctes symétriques par rapport au centre du carré, la somme des nombres qui s'y trouvent n'est pas $\frac{2S}{n}$, alors le carré magique n'est pas associatif.

Si la somme est $\frac{2S}{n}$, alors il faudra trouver la somme de toutes les paires de cases distinctes symétriques si nous voulons montrer que le carré est associatif.

Dans le cas impair, si la case centrale ne renferme pas le nombre $\frac{S}{n}$, alors le carré magique ne peut pas être associatif. Que la case centrale renferme $\frac{S}{n}$ ne garantit pas que le carré soit associatif. (Voir problème 23 de 14.18)

14.11 Nouveau carré magique à l'aide de quatre permutations

Soit M, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 4$. À l'aide de quatre permutations, nous allons trouver un nouveau carré magique presque normal M'; voici comment :

1) Nous permutons les deux premières rangées et les deux dernières rangées de M pour obtenir le carré M*.
2) Nous permutons les deux premières colonnes et les deux dernières colonnes de M*pour obtenir le carré M'.
3) Les carrés M et M' sont magiques et **primitifs**.

Il est évident que les permutations des rangées et des colonnes font que le carré obtenu est toujours semi-magique. Il reste à montrer qu'il est magique. Examinons pour cela le sous-carré d'ordre 2 situé dans le coin haut-gauche de M et voyons ce qu'il devient dans M' :

a	b
e	f

Dans M

f	e
b	a

Dans M'

Nous voyons que a et f sur la diagonale principale de M se retrouvent sur la diagonale principale de M'. Il en sera de même pour les trois autres sous-carrés d'ordre 2 situés dans les trois autres coins de M. Le carré M' est donc magique.

Finalement, les quatre coins de M sont différents des quatre coins de M' d'où M et M' sont primitifs.

Voyons un exemple :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{M^*}{\begin{pmatrix} 5 & 10 & 11 & 8 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{M'}{\begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 & 11 \\ 15 & 4 & 1 & 14 \\ 3 & 16 & 13 & 2 \\ 6 & 9 & 12 & 7 \end{pmatrix}}$$

Le passage de M à M'à l'aide de ces quatre permutations définit la fonction f_4^n où $n \geq 4$ est l'ordre du carré. Nous pouvons donc écrire :

$$f_4^n(M) = M'$$

Dans l'exemple ci-haut, nous avions $f_4^4(M) = M'$.

Que se passe-t-il si M est un carré magique quelconque? Que dire de f_4^n (M)? La fonction f_4^n a-t-elle des propriétés intéressantes?

Si M est un carré magique quelconque d'ordre n, alors f_4^n (M) est un carré magique. Ceux-ci sont-ils obligatoirement primitifs?

Théorème 14.13 :

La fonction f_4^n possède les quatre propriétés suivantes :

1) $f_4^n(A+B) = f_4^n(A) + f_4^n(B)$

2) $f_4^n(k\,M) = k\, f_4^n(M)$

3) $f_4^n(f_4^n(M)) = M$

4) $f_4^n \; est\, bijective\, de\, E_n \to E_n$

où A, B, M sont des carrés magiques quelconques d'ordre $n \geq 4$, k un nombre réel quelconque et E_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre n.

La fonction f_4^n est donc linéaire puisque nous avons 1) et 2). De plus, c'est un automorphisme de E_n.

Ajoutons ici que $f_4^n(0) = 0$ et que $f_4^n(M) \neq 0$ lorsque $M \neq 0$. Avec 3), nous montrerons que la fonction f_4^n est injective et surjective donc bijective de $E_n \to E_n$. (Voir problème 36 de 14.18).

Nous vous laissons le soin de voir ce qui se passe si les permutations sont différentes de celles utilisées ici. (Voir problème 48 de 14.18).

14.12 Carrés magiques composés

Nous avons construit dans le chapitre 10, des carrés premiers donc formés de n^2 nombres premiers et certains étaient premiers parfaits puisque les n^2 nombres premiers étaient consécutifs. D'autres étaient des carrés hyper-premiers.

Nous voulons ici construire des carrés magiques sans nombre premier.

Pouvons-nous trouver un carré composé pour tous les ordres $n \geq 3$? Le théorème suivant nous donne la réponse :

Théorème 14.14 :

> Pour tous les ordres n, $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés presque normaux.

Première preuve :

Nous présentons trois preuves de ce théorème dans l'annexe 13 «Preuve des théorèmes 14.14 et 14.15». Voici tout de même les grandes lignes de cette première preuve :

1) Si $k \geq 3$ est un entier, alors $k! > k$.
2) Pour l'entier $k \geq 2$, les entiers consécutifs $k!+2$, $k!+3$, $k!+4$, … , $k!+k$ sont tous composés (non premiers).
3) Soit $I_1 = [a\ ;\ b]$ où $a \geq 1$ et $b \geq 3$ sont des entiers. Cet intervalle contient $m = b - a + 1$ entiers consécutifs. Nous allons construire l'intervalle : $J_1 = [b!+2\ ;\ b!+b-a+2]$.
4) J_1 contient m entiers consécutifs composés. De plus, $I_1 \cap J_1 = \varnothing$ et J_1 est toujours à la droite de I_1, en général très loin!!!
5) Maintenant, si $m = n^2$, $n \geq 3$, alors nous aurons un intervalle qui contient n^2 entiers composés consécutifs d'où notre premier carré magique presque normal M_1 lequel contient n^2 entiers consécutifs composés dont le plus petit est $b!+2$.
6) Nous pouvons poursuivre en posant : $I_2 = J_1$ et trouver l'intervalle J_2 avec lequel nous construirons notre deuxième carré magique, M_2, sans nombre premier.
7) Il est clair que M_1 *et* M_2 sont différents et en continuant ainsi, nous aurons une infinité de carrés presque normaux formés de n^2 entiers consécutifs sans nombre premier.

Nous appelons «**carré composé»**, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ qui ne renferme aucun nombre premier.
Si les n^2 entiers d'un carré composé sont consécutifs, alors nous dirons que ce carré est un **«carré composé parfait».**
Si les n^2 entiers d'un carré composé forment une suite arithmétique de raison r, où r est un entier ≥ 2, alors nous dirons que ce carré est un **«carré hyper-composé».**

Par exemple, si vous voulez une suite de 49 entiers consécutifs non premiers, vous pouvez prendre :

(1) $$50! + 2 \; ; \; 50! + 3 \; ; \; 50! + 4 \; ; \ldots ; \; 50! + 49 \; ; \; 50! + 50$$

Nous savons que nous pouvons toujours construire un carré magique d'ordre $n \geq 3$ à partir d'une suite arithmétique de raison non nulle formée de n^2 nombres, voir l'annexe 25 «Carré avec suite arithmétique». Donc, à partir de la suite (1), nous pouvons construire un carré magique presque normal d'ordre 7 formé de quarante-neuf entiers consécutifs non premiers. De plus, ce carré composé sera parfait.

Notez la taille de l'entier $50!$:

30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000

Nous voyons que pour $n = 7,$ il existe un carré composé mais celui-ci n'est pas tout à fait celui que nous désirons : ses nombres sont beaucoup trop grands!!! De toute façon, il confirme bien la véracité du théorème ci-haut!!!

Heureusement, nous avons trouvé un carré composé d'ordre 7, beaucoup plus sympathique!!! Nous le verrons un peu plus loin avec ses quarante-neuf entiers de cinq chiffres.

Pratiquement, comment pouvons-nous trouver une suite de n^2 entiers ≥ 2, consécutifs et tous non premiers? Il est clair qu'une telle suite est située entre deux nombres premiers consécutifs. Il suffit donc de regarder entre les deux nombres premiers consécutifs de toutes les paires de nombres premiers consécutifs $\{2 \; ; \; 3\}; \; \{3 \; ; \; 5\}; \; \{5 \; ; \; 7\}; \; \{7 \; ; \; 11\}; \ldots$. Nous savons que l'intervalle cherché existe et qu'il est très loin. Nous pouvons donc nous mettre à sa recherche en espérant en trouver un beaucoup plus proche. C'est ce qui arrive en général.

Entre 2 et 3, nous ne trouvons aucun entier. Entre 3 et 5, nous trouvons l'entier 4. Entre 13 et 17, nous trouvons les entiers 14, 15 et 16; et ainsi de suite. La première suite d'entiers positifs, consécutifs et non premiers que nous chercherons devra contenir neuf entiers afin de pouvoir construire notre premier carré composé parfait d'ordre 3.

Nous avons créé pour cela un programme dans MAPLE qui regarde ce qu'il y a entre les deux nombres premiers consécutifs de toutes les paires de nombres premiers consécutifs et cela, jusqu'à ce que nous trouvions, pour une première fois, au moins n^2 entiers consécutifs.

Le tableau suivant nous donne l'ordre n du carré, le premier intervalle $[p_1 \; ; \; p_2]$ dont les extrémités sont des nombres premiers consécutifs dans lequel nous trouvons au moins n^2 entiers consécutifs compris entre $p_1 \, et \, p_2$, ce nombre d'entiers et enfin la somme magique du carré construit avec les n^2 entiers consécutifs qui commencent par $p_1 + 1$. Par exemple, pour $n = 5$, nous trouvons l'intervalle $[1327 \; ; \; 1361]$ dans lequel il y a trente-trois entiers consécutifs $1328;1329;...;1360$. Nous prendrons les vingt-cinq premiers afin de construire le carré composé parfait qui aura la plus petite somme magique. Les sommes magiques du tableau sont les plus petites pour les carrés composés parfaits d'ordre n.

(*%)

3	$[113 \; ; \; 127]$	13	$S = 354$
4	$[523 \; ; \; 541]$	17	$S = 2126$
5	$[1327 \; ; \; 1361]$	33	$S = 6700$
6	$[15683 \; ; \; 15727]$	43	$S = 94209$
7	$[19609 \; ; \; 19661]$	51	$S = 137438$
8	$[31397 \; ; \; 31469]$	71	$S = 251436$
9	$[155921 \; ; \; 156007]$	85	$S = 1403658$
10	$[370261 \; ; \; 370373]$	111	$S = 3703115$

Pour chaque valeur de $n \geq 3$, l'intervalle $[p_1 \; ; \; p_2]$ qui suit renferme le plus petit nombre premier p_1. Ainsi, avec $n = 5$, si nous prenions tout intervalle qui précède $[1327 \; ; \; 1361]$, alors nous aurions toujours moins de vingt-cinq entiers consécutifs composés entre $p_1 \, et \, p_2$. Donc impossible de construire un carré magique d'ordre 5. De plus, l'intervalle contient trente-trois entiers consécutifs et en partant de 1328, nous sommes assurés d'obtenir le carré composé parfait dont la somme magique est la plus petite. Voyons maintenant quatre carrés composés parfaits de plus petites sommes :

$$\begin{pmatrix} 119 & 120 & 115 \\ 114 & 118 & 122 \\ 121 & 116 & 117 \end{pmatrix}$$
$$S = 354$$

$$\begin{pmatrix} 524 & 535 & 531 & 536 \\ 538 & 529 & 533 & 526 \\ 537 & 530 & 534 & 525 \\ 527 & 532 & 528 & 539 \end{pmatrix}$$
$$S = 2126$$

$$\begin{pmatrix} 1342 & 1349 & 1336 & 1343 & 1330 \\ 1329 & 1341 & 1348 & 1335 & 1347 \\ 1346 & 1328 & 1340 & 1352 & 1334 \\ 1333 & 1345 & 1332 & 1339 & 1351 \\ 1350 & 1337 & 1344 & 1331 & 1338 \end{pmatrix}$$
$$S = 6700$$

$$\begin{matrix} 19637 & 19654 & 19629 & 19646 & 19621 & 19638 & 19613 \\ 19612 & 19636 & 19653 & 19628 & 19645 & 19620 & 19644 \\ 19643 & 19611 & 19635 & 19652 & 19627 & 19651 & 19619 \\ 19618 & 19642 & 19610 & 19634 & 19658 & 19626 & 19650 \\ 19649 & 19617 & 19641 & 19616 & 19633 & 19657 & 19625 \\ 19624 & 19648 & 19623 & 19640 & 19615 & 19632 & 19656 \\ 19655 & 19630 & 19647 & 19622 & 19639 & 19614 & 19631 \end{matrix}$$

$$S = 137\,438$$

La construction d'un carré composé parfait d'ordre n de plus petite somme s'avère très difficile lorsque n est très grand. Nous devons aller très loin dans la liste des nombres premiers et si la rareté de ceux-ci n'est pas suffisamment grande, alors nous aurons de la difficulté à trouver un intervalle relativement long sans nombre premier.

Quant aux carrés hyper-composés, la construction est beaucoup plus simple et il en est de même pour les carrés composés qui ne sont ni parfaits, ni hyper-composés. Voyons deux algorithmes.

Pour construire M, un carré hyper-composé :

1) On prendra une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre $n \geq 3$ (chapitre 11).
2) On prendra, par exemple, $a = 4$, $r = 2$, $t = 2n$ pour construire M.
3) Le carré M est tel que voulu. (Voir annexe 25, Partie 3).

Pour construire un carré composé tel que ses n^2 entiers ne forment pas une suite arithmétique :

1) On prendra une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre $n \geq 3$.
2) On prendra, par exemple, $a = 4$, $r = 2$, $t = 2(n+1)$ pour construire M.
3) Le carré M est tel que voulu.

$$\begin{pmatrix} 32 & 46 & 20 & 34 & 8 \\ 6 & 30 & 44 & 18 & 42 \\ 40 & 4 & 28 & 52 & 16 \\ 14 & 38 & 12 & 26 & 50 \\ 48 & 22 & 36 & 10 & 24 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 36 & 54 & 22 & 40 & 8 \\ 6 & 34 & 52 & 20 & 48 \\ 46 & 4 & 32 & 60 & 18 \\ 16 & 44 & 12 & 30 & 58 \\ 56 & 24 & 42 & 10 & 28 \end{pmatrix}$$

$$a = 4; r = 2; t = 10; S = 140 \qquad a = 4; r = 2; t = 12; S = 160$$

Le carré de gauche est un hyper-composé d'ordre 5 et de somme **140**. Le carré de droite est un carré composé d'ordre 5 et ses entiers ne forment pas une suite arithmétique; sa somme est **160**. Observez le chiffre des unités dans chaque colonne du carré de droite!!! Mais le carré composé parfait d'ordre 5 vu plus haut a pour somme **6700**, la plus petite possible!!!

Nous cherchons les plus petites sommes possibles. Par exemple, pouvons-nous avoir des sommes magiques plus petites que 140 pour les carrés hyper-composés d'ordre 5? Nous vous laissons cette question.

Nous allons maintenant trouver les plus petits carrés composés d'ordres 3 et 4. Notre programme dans MAPLE (voir la Partie 3, annexe 23, programme 15) nous permet de trouver qu'il n'existe qu' un seul carré composé primitif d'ordre 3 dont la plus petite somme est 36. Par contre, pour l' ordre 4, il existe vingt-quatre carrés composés primitifs dont la plus petite somme est 57.

$$\begin{pmatrix} 6 & 16 & 14 \\ 20 & 12 & 4 \\ 10 & 8 & 18 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 21 & 10 & 25 \\ 14 & 22 & 9 & 12 \\ 27 & 8 & 18 & 4 \\ 15 & 6 & 20 & 16 \end{pmatrix}$$

$$S = 36 \qquad\qquad S = 57$$

Terminons avec ce très beau résultat :

Théorème 14.15 :

Pour tous les ordres $n, n \geq 3,$ il existe une infinité de carrés magiques presque normaux qui renferment n^2 entiers consécutifs dont un seul est un nombre premier.

Preuve : Voir, l'annexe 13 : «Preuve des théorèmes 14.14 et 14.15».

Théorème 14.15.1 :

Soit $[p\ ;\ q],$ un intervalle fermé tel que $p \geq 3\ et\ q$ soient des nombres premiers consécutifs. Alors le nombre d'entiers de cet intervalle est un entier impair. Dans un tel intervalle, il y a donc un nombre impair de nombres composés entre $p\ et\ q.$

Preuve : Voir problème 62 de 14.18.

Les trois carrés suivants sont des carrés magiques respectivement de sommes 351, 2122 et 6695. Chacun renferme un seul nombre premier (en rouge). De plus, ces carrés sont arithmétiques et renferment 9, 16 et 25 entiers consécutifs. Nous avons là **trois nouveaux intrus** (voir 14.13 et le glossaire).

$$\begin{pmatrix} 118 & 119 & 114 \\ 113 & 117 & 121 \\ 120 & 115 & 116 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 523 & 534 & 530 & 535 \\ 537 & 528 & 532 & 525 \\ 536 & 529 & 533 & 524 \\ 526 & 531 & 527 & 538 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1341 & 1348 & 1335 & 1342 & 1329 \\ 1328 & 1340 & 1347 & 1334 & 1346 \\ 1345 & 1327 & 1339 & 1351 & 1333 \\ 1332 & 1344 & 1331 & 1338 & 1350 \\ 1349 & 1336 & 1343 & 1330 & 1337 \end{pmatrix}$$

Nous vous recommandons fortement l'annexe 13 «Preuves des théorèmes 14.14 et 14.15».

14.13 Des carrés composés surprenants d'ordre 5 et quelques curiosités

Un des carrés de la section 14.12, celui de somme 160, est un carré composé tel que ses vingt-cinq entiers ne forment pas de suite arithmétique. Celui-ci est très particulier. Le voici à nouveau :

36	54	22	40	8
6	34	52	20	48
46	4	32	60	18
16	44	12	30	58
56	24	42	10	28

a = 4 ; r = 2 ; t = 12 ; S = 160

Un tel carré nous montre que dans chaque colonne, les cinq entiers se terminent tous par le même chiffre soit 6, 4, 2, 0 et 8. Ce carré est arithmétique, associatif et composé.

Puis en voici un deuxième :

48	78	28	58	8
6	46	76	26	66
64	4	44	84	24
22	62	12	42	82
80	30	60	10	40

a = 4 ; r = 2 ; t = 18 ; S = 220

Ce carré nous montre que dans chaque rangée, les cinq entiers se terminent tous par le même chiffre soit 8, 6, 4, 2 et 0. Il est arithmétique, associatif et composé.

Un carré **vertical** est un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ tel que tous les entiers de chaque colonne se terminent par le même chiffre.

Un carré **horizontal** est un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ tel que tous les entiers de chaque rangée se terminent par le même chiffre.

Un carré **vertical-alpha** est un carré vertical dans lequel nous trouvons m groupes de dix colonnes, m un entier ≥ 0, et un dernier groupe de r colonnes avec $0 \leq r < 10$. Dans chaque groupe, pour chaque paire de colonnes distinctes, tous les entiers de l'une se terminent par un même chiffre u et tous les entiers de l'autre se terminent par un même chiffre v, avec $u \neq v$. Donc, si nous réunissons les m groupes de dix colonnes, nous aurons m colonnes dont les entiers se terminent par 0 puis m colonnes dont les entiers se terminent par 1 et ainsi de suite jusqu'à 9.

Un carré **horizontal-alpha** se définit de la même façon. Il suffit de remplacer vertical par horizontal et colonne par rangée dans la définition du carré vertical-alpha.

Notons ici que si M est un carré vertical, alors sa transposée M^t est un carré horizontal et si M est un carré horizontal, alors sa transposée M^t est un carré vertical.

Théorème 14.16 :

Il existe une infinité de carrés verticaux-alpha d'ordre 5 et il existe une infinité de carrés horizontaux-alpha d'ordre 5.

Preuve :

Appelons A, le carré vertical-alpha ci-haut. Ce carré est arithmétique et ses coordonnées sont :

$$a = 4 \; ; \; r = 2 \; ; \; t = 12$$

Nous allons montrer que le carré défini par $a = 4$; $r = 2$; $t = 12 + 10k$ où k est un entier ≥ 1, est un carré vertical-alpha A' et que si un entier de A en position $(i\,;\,j)$ se termine par un certain chiffre, alors dans A', en position $(i\,;\,j)$, l'entier qui s'y trouve se termine par le même chiffre.

Dans A, tout entier a la forme $4+2k_1+12k_2$ où k_1 *et* k_2 sont des entiers ≥ 0 *et* ≤ 4. L'entier de A' en position $(i\,;\,j)$ est donc l'entier de A en position $(i\,;\,j)$ auquel nous ajoutons le nombre $10k\,k_2$. Il est clair que les deux entiers se terminent par le même chiffre et que A' est un carré vertical-alpha. Pour les carrés horizontaux-alpha, la preuve est la même. Nous pouvons aussi affirmer :

S'il existe un carré vertical-alpha ou horizontal-alpha d'ordre $n \geq 3$, alors il en existe une infinité.

Voici un exemple :

36	54	22	40	8
6	34	52	20	48
46	4	32	60	18
16	44	12	30	58
56	24	42	10	28

a = 4; r = 2; t = 12; S = 160

56	94	32	70	8
6	54	92	30	78
76	4	52	100	28
26	74	12	50	98
96	34	72	10	48

a = 4; r = 2; t = 22; S = 260

Le carré de droite provient du carré de gauche avec pour choix: $k=1$. La valeur de t est donc passée de 12 à 22.

Notez que pour conserver les mêmes chiffres en passant du carré de gauche au carré de droite, nous aurions pu ajouter le même multiple de 10 dans chaque case (cas trivial!) ou encore, le même chiffre dans chaque case. Mais ce n'est pas le cas ici. Pour passer de 36 à 56, nous avons ajouté 20 alors que pour passer de 54 à 94, nous avons ajouté 40 et ainsi de suite.

En terminant, nous vous laissons avec cette question et quelques curiosités :

Comment trouver un carré vertical-alpha pour tous les ordres $n \geq 3$? Voir l'annexe 5, Partie 3.

Le problème 12 de 14.18 nous montre qu'il est facile de trouver un carré vertical ou horizontal pour tous les ordres $n \geq 3$. **Nos efforts porteront plutôt sur la recherche de carrés verticaux-alpha et de carrés horizontaux-alpha.** Voir le problème 53 de 14.18.

Les trois carrés verticaux et le carré horizontal présentés dans cette section sont tous alpha.

Voyons quelques curiosités :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 29 & 3 & 19 & 41 \\ 16 & 44 & 18 & 14 \\ 35 & 21 & 9 & 27 \\ 12 & 24 & 46 & 10 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 43 & 13 & 17 & 97 \\ 23 & 91 & 37 & 19 \\ 97 & 29 & 13 & 31 \\ 7 & 37 & 103 & 23 \end{pmatrix}$$

$$S = 92 \qquad\qquad S = 170$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 523 & 534 & 530 & 535 \\ 537 & 528 & 532 & 525 \\ 536 & 529 & 533 & 524 \\ 526 & 531 & 527 & 538 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1332 & 1333 & 1328 \\ 1327 & 1331 & 1335 \\ 1334 & 1329 & 1330 \end{pmatrix}$$

$$S = 2122 \qquad\qquad S = 3993$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1327 & 1338 & 1334 & 1339 \\ 1341 & 1332 & 1336 & 1329 \\ 1340 & 1333 & 1337 & 1328 \\ 1330 & 1335 & 1331 & 1342 \end{pmatrix} \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 1341 & 1348 & 1335 & 1342 & 1329 \\ 1328 & 1340 & 1347 & 1334 & 1346 \\ 1345 & 1327 & 1339 & 1351 & 1333 \\ 1332 & 1344 & 1331 & 1338 & 1350 \\ 1349 & 1336 & 1343 & 1330 & 1337 \end{pmatrix}$$

$$S = 5338 \qquad\qquad S = 6695$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 15 \\ 5 & 19 & 1 & 11 \\ 13 & 6 & 10 & 7 \\ 14 & 2 & 17 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 19 & 10 & 4 & 6 \\ 13 & 3 & 16 & 7 \\ 2 & 12 & 8 & 17 \\ 5 & 14 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$S = 36 \qquad\qquad S = 39$$

Le carré M_1 est un Dürer presque normal de somme 92. Il renferme seulement quatre nombres premiers, tous situés sur la première rangée!!!

Le carré M_2 est un Dürer de somme 170. Il n'est pas presque normal puisqu'il renferme quatre doublés. Mais, excepté 91, tous ses nombres sont premiers!!!

Le carré M_3 est un Dürer de somme 2122. Il est presque normal et renferme seize entiers consécutifs dont un seul est premier!!! Les carrés M_4, M_5 *et* M_6 sont presque normaux, respectivement d'ordres 3, 4 et 5 et de sommes magiques 3993, 5338 et 6695. Ils renferment

un seul nombre premier, le même pour les trois carrés!!! De plus, les neuf entiers de M_4 sont consécutifs et se retrouvent tous dans M_5 . Les seize entiers de M_5 sont consécutifs et se retrouvent tous dans M_6 et enfin, les vingt-cinq entiers de M_6 sont consécutifs.

Les carrés M_7 *et* M_8 sont presque normaux et renferment autant de nombres premiers (en rouge) que de nombres non premiers (le plus petit en bleu). Ils sont de sommes 36 et 39. Il existe 384 carrés magiques qui renferment les mêmes nombres que M_7 soit 48 primitifs et il existe 512 carrés magiques qui contiennent les mêmes nombres que M_8 soit 64 primitifs. Observez que M_7 *et* M_8 renferment les mêmes nombres premiers lesquels forment quatre paires de nombres premiers jumeaux (2 ; 3), (5 ; 7), (11 ; 13), (17 ; 19), si nous acceptons 2 et 3 comme nombres premiers jumeaux. Par définition, deux nombres premiers sont jumeaux s'ils s'écrivent p et p + 2.

Puis M_9 , un très beau carré magique presque normal d'ordre 5 dont la case centrale renferme un nombre composé lequel est entouré des vingt-quatre premiers nombres premiers impairs :

61	37	17	29	73
97	7	19	53	41
23	67	27	89	11
31	59	71	43	13
5	47	83	3	79

M_9 = le bel-Intrus-27

Sa somme magique est $S = 217$ et $f(217) = 728.$ Quel bel objet mathématique!!!

Nous pourrions définir un intrus comme suit :

Un **intrus** est un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ qui contient un nombre de nature différente de celle de tous les autres. Si celui-ci est dans la case centrale d'un carré d'ordre impair, alors nous dirons que l'intrus est un «**bel-intrus**».

L'intrus-27 ci-haut est un intrus d'ordre 5 puisqu'il est magique presque normal et contient le **nombre composé 27** dans sa case centrale tandis que les vingt-quatre autres sont **premiers**. Puisque 27 est dans la case centrale, c'est un **bel-intrus (bel-intrus-27).**

Pour $n \geq 3$, nous pouvons toujours trouver un intrus puisque nous pouvons toujours construire un carré magique presque normal qui contient un seul nombre premier.

Le carré M_{10} est un intrus d'ordre 3 dont la case centrale renferme un nombre premier lequel est entouré de huit nombres composés; remarquez que tous les entiers impairs de ce carré se situent sur la diagonale secondaire et que $S = 177$.

60	84	33
32	59	86
85	34	58

M_{10} = le bel-intrus-59

Voyons les deux carrés magiques suivants :

94	95	90
89	93	97
96	91	92

M_{11}

1683	1690	1677	1684	1671
1670	1682	1689	1676	1688
1687	1669	1681	1693	1675
1674	1686	1673	1680	1692
1691	1678	1685	1672	1679

M_{12}

Chacun renferme exactement deux nombres premiers situés dans les cases vertes. Tous les autres nombres sont composés. Le plus petit nombre premier est situé directement à gauche du centre tandis que le plus grand nombre premier est situé directement à droite du centre. De plus, les neuf entiers de M_{11} sont consécutifs et le plus petit est 89. De même, les vingt-cinq entiers de M_{12} sont consécutifs et le plus petit est 1669. Les sommes magiques sont

$S = 279$ *et* $S = 8405$. Pouvons-nous construire des carrés magiques d'ordre 5 qui renferment exactement z nombres premiers distincts où z = 3, 4, 5, 6, 7 et 8? La réponse est oui et pour cela, nous allons nous construire une table de nombres premiers, avec MAPLE ou MATHEMATICA, qui contiendra les 10 000 premiers nombres premiers, par exemple. Pour z = 3, nous allons chercher dans la table, 3 nombres premiers consécutifs $p_1 < p_2 < p_3$ tel que $p_3 - p_1 = 24$. Les vingt-cinq entiers consécutifs

$$p_1 ; p_1 + 1; p_1 + 2; ...; p_3$$

vont nous permettent de construire un carré magique qui renferme seulement trois nombres premiers soient p_1, p_2 *et* p_3. Les vingt-deux autres sont composés.

Ici, nous avons trouvé $p_1 = 199$, $p_2 = 211$ *et* $p_3 = 223$. Observons que $223 - 199 = 24$. Pour construire le carré magique, nous utilisons le fichier « Ordre 5 » avec a = 199, r = 1 et t = 5, ce qui nous donne le carré magique suivant de somme $S = 1055$:

213	220	207	214	201
200	212	219	206	218
217	199	211	223	205
204	216	203	210	222
221	208	215	202	209

M_{13}

Le carré M_{13} renferme vingt-cinq entiers consécutifs dont trois seulement sont premiers lesquels occupent les cases centrales vertes.

De la même façon, nous avons construit les carrés magiques presque normaux d'ordre 7 qui suivent et qui contiennent exactement trois nombres premiers; nous voulions ici $p_3 - p_1 = 48$.

16790	16807	16782	16799	16774	16791	16766
16765	16789	16806	16781	16798	16773	16797
16796	16764	16788	16805	16780	16804	16772
16771	16795	16763	16787	16811	16779	16803
16802	16770	16794	16769	16786	16810	16778
16777	16801	16776	16793	16768	16785	16809
16808	16783	16800	16775	16792	16767	16784

M_{14}

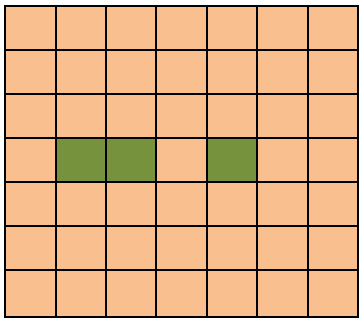
Le carré M_{14} est de somme magique $S = 117509$ et renferme exactement trois nombres premiers, situés dans les cases centrales vertes. Ici, a = 16763, r = 1 et t = 7.

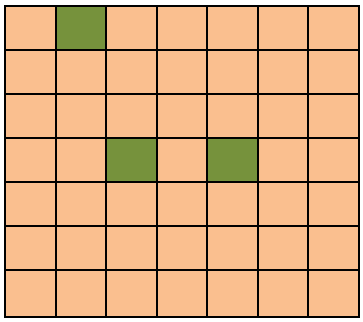
12868	12885	12860	12877	12852	12869	12844
12843	12867	12884	12859	12876	12851	12875
12874	12842	12866	12883	12858	12882	12850
12849	12873	12841	12865	12889	12857	12881
12880	12848	12872	12847	12864	12888	12856
12855	12879	12854	12871	12846	12863	12887
12886	12861	12878	12853	12870	12845	12862

M_{15}

Le carré M_{15} est de somme magique $S = 90\,055$ et renferme exactement trois nombres premiers, situés dans les cases vertes. Ici, a = 12841, r = 1 et t = 7.

Avec a = 5591, r = 1 et t = 7, nous avons trouvé un autre carré magique presque normal d'ordre 7 et de somme $S = 39\,305$ qui contient exactement trois nombres premiers; ceux-ci sont disposés dans les cases vertes du carré suivant (à gauche) :





Le carré de droite est obtenu avec a = 15683, r = 1 et t = 7. Il contient aussi exactement trois nombres premiers situés dans les cases vertes. Sa somme magique est $S = 109\,949$.

Résumons le procédé :

1) Nous voulons construire un carré magique d'ordre n formé de n^2 entiers consécutifs dont les premier et dernier sont respectivement les nombres premiers p_1 *et* p_2, avec $p_1 < p_2$.
2) Nous cherchons dans notre table de nombres premiers, p_1 *et* p_2 de façon à avoir l'égalité $p_2 - p_1 + 1 = n^2$ et à avoir le nombre de nombres premiers désiré entre p_1 *et* p_2.
3) Le nombre premier p_2 est forcément impair.
4) Si n est impair, alors $p_1 \neq 2$. Pourquoi? Réponse : $p_2 \neq 2$ serait pair!!!
5) Si n est pair, alors p_1 ne peut pas être impair. Pourquoi? Donc $p_1 = 2$. Cela signifie que le premier entier de la suite des n^2 entiers consécutifs devra commencer par 2. Ainsi, pour :

$$n = 4,\ p_2 = 2 + 15 = 17\ (7\,\textit{nombres premiers})$$
$$n = 6,\ p_2 = 2 + 35 = 37\ (12\,\textit{nombres premiers})$$
$$n = 8,\ p_2 = 2 + 63 = 65$$

Pour n pair, il se peut que p_2 ne soit pas un nombre premier ($n = 8$) et s'il est premier, alors nous aurons un minimum de sept nombres premiers. Il est donc impossible, pour

$n = 4$, de construire un carré magique qui contiendra exactement 2, 3, 4, 5 ou 6 nombres premiers. De même, il sera impossible, pour $n = 6$, de construire un carré magique qui contiendra exactement 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ou 11 nombres premiers.

6) C'est donc le cas n *pair* qui cause problème. Pour n impair, en utilisant ce procédé et ALG-1, nous construisons des carrés arithmétiques qui sont associatifs et qui renferment le nombre de nombres premiers désiré. Le plus petit étant directement à gauche du centre et le plus grand, directement à droite du centre.
7) Qu'allons-nous faire lorsque n est pair? Nous allons enlever la contrainte qui veut que les extrémités de la suite des n^2 entiers consécutifs soient des nombres premiers. Nous allons quand même exiger que les nombres entiers soient consécutifs.

Voyons un premier exemple avec $n = 4$.

À partir de 14-1, ordre 4 de la première page, nous avons trouvé une suite de seize entiers consécutifs, formée des entiers de 80 à 95, dans laquelle il n'y a que deux nombres premiers. Le carré magique qui s'ensuit est construit avec ALG-2; le voici de somme magique $S = 350$:

80	91	87	92
94	85	89	82
93	86	90	81
83	88	84	95

M_{16}

Notre deuxième exemple, avec $n = 4$, montre un carré magique qui contient 3 nombres premiers seulement et ce, avec la suite des entiers de 20 à 35. La somme magique est $S = 110$:

20	31	27	32
34	25	29	22
33	26	30	21
23	28	24	35

M_{17}

Puis un exemple avec $n = 6$. Nous avons trouvé la suite de 1326 à 1361 qui contient deux nombres premiers soient 1327 et 1361. Avec ALG-3, nous trouvons le carré magique suivant, lequel est défini par a = 1326, r = 1 et t = 6. Sa somme magique est $S = 8061$. Le voici :

1326	1350	1343	1349	1337	1356
1360	1333	1348	1339	1351	1330
1359	1335	1340	1346	1353	1328
1358	1352	1341	1347	1334	1329
1327	1336	1345	1342	1354	1357
1331	1355	1344	1338	1332	1361

M_{18}

La grande question : existe-t-il une suite de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 1 qui renferme exactement k nombres premiers avec $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n^2$?

Si la réponse à cette question est oui, alors nous pouvons construire un carré magique presque normal d'ordre n qui contiendra exactement k nombres premiers et ce, quel que soit $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n^2$?

Nous allons tenter de répondre à cette question.

Voyons d'abord ceci : si $n = 4$, alors une suite de seize entiers consécutifs tous ≥ 3, ne peut pas contenir plus que huit nombres premiers!! Si $n = 5$, alors une suite de vingt-cinq entiers consécutifs tous ≥ 3, ne peut pas contenir plus que treize nombres premiers!! Donc avec n^2 entiers consécutifs tous ≥ 3, nous ne pourrons jamais avoir n^2 nombres premiers. Plus précisément, voyons le résultat suivant :

Si deux entiers ≥ 3 sont consécutifs, alors un seul peut être un nombre premier. Cela implique qu'une suite de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 3, peut contenir au maximum $(n^2+1)/2$ nombres premiers si n est impair et au maximum $n^2/2$ nombres premiers si n est pair. (Ici, $n \geq 3$).

Il reste à regarder deux cas : la suite commence par 1 ou la suite commence par 2.

Cas 1 :

La suite commence par 1 et n est pair. Nous aurons alors les couples : (1 ; 2) (3 ; 4) (5 ; 6) … et le résultat est le même que dans l'encadré précédent.

La suite commence par 1 et n est impair. Nous aurons alors les couples : (1 ; 2) (3 ; 4) (5 ; 6) … (2n-1 ; 2n) et 2n+1 et le résultat est le même que dans l'encadré précédent.

Cas 2 :

La suite commence par 2. Nous aurons alors les couples : (2 ; 3) (4 ; 5) (6 ; 7) (8 ; 9)… et nous observons que le premier couple renferme deux nombres premiers tandis que le quatrième couple (qui est toujours là puisque $n \geq 3$) n'en renferme aucun. Nous avons donc le même résultat que dans l'encadré précédent, que n soit pair ou impair.

D'où le résultat qui suit :

Une suite de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 1, peut contenir au maximum $(n^2+1)/2$ nombres premiers si n est impair et au maximum $n^2/2$ nombres premiers si n est pair. (Ici, $n \geq 3$).

Considérons maintenant une suite formée de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 1. Avec ces entiers, nous voulons construire un carré magique qui renferme exactement k nombres premiers. Cela est-il possible et si oui, quelles sont les valeurs de k permises? Voici comment nous allons procéder :

1) Nous allons construire un carré magique M, normal d'ordre $n \geq 3$.
2) Nous allons compter le nombre de nombres premiers dans M. **Soit $p(M)$, ce nombre**.
3) Nous allons considérer la suite des n^2 entiers consécutifs suivante :

   (*) $(n^2+1)!+2$; $(n^2+1)!+3$; $(n^2+1)!+4$; … ; $(n^2+1)!+(n^2+1)$

4) La suite précédente (*) ne contient aucun nombre premier (Voir problème 61 de 14.18).
5) Appelons (s_1), la suite formée des entiers consécutifs de 1 à n^2.

6) Un déplacement de (s_1) consiste à déplacer (s_1) de 1 unité vers la droite. Ainsi, après un déplacement, la suite (s_1) devient la suite (s_2) qui contient les entiers consécutifs de 2 à n^2+1. Après un déplacement de la suite (s_2), nous obtenons la suite (s_3) qui contient les entiers consécutifs de 3 à n^2+2.
7) De façon équivalente, le k-ième déplacement de la suite (s_1) revient à ajouter le nombre k à chaque nombre de (s_1) donc à chaque nombre du carré magique M.
8) Nous pouvons alors affirmer qu'après un nombre fini de déplacements, M ne possèdera plus de nombres premiers. Pourquoi?
9) À chaque déplacement, M peut perdre un nombre premier au plus.
10) Donc, nous pouvons construire un carré magique M qui sera formé de n^2 entiers consécutifs et qui contiendra k nombres premiers avec $0 \le k \le p(M)$.

Par exemple, nous voulons un carré magique d'ordre 10 formé de cent entiers consécutifs tous ≥ 1 et renfermant exactement cinq nombres premiers. Nous allons procéder ainsi :

1) Nous construisons un carré magique normal d'ordre 10 (avec le fichier «Ordre 10 de MATHEMATICA ou d'EXCEL ou avec CM-arith-4k+2 dans MAPLE).
2) Nous trouvons $p(M)=25$.
3) Nous savons qu'en ajoutant le nombre 1 dans chaque case du carré, un nombre fini de fois, nous trouverons, de façon certaine, de 0 à 25 nombres premiers dans notre carré. Il y en aura donc un qui contiendra exactement cinq nombres premiers.
4) Notez ici que pour avoir cinq nombres premiers, nous devrons ajouter le nombre 1 au carré normal au moins vingt-deux fois. Nous allons donc commencer par ajouter 22 dans chaque case du carré et ensuite, ajouter 1 à la fois. (Voir l'ordre 10 dans 14-1).

Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Théorème 14.17 :

Pour tous les ordres $n \ge 3$, nous pouvons trouver un carré magique M formé de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 1 qui renferme exactement k nombres premiers où $0 \le k \le p(M)$.

Rappelons que $p(M)$ est le nombre de nombres premiers contenus dans un carré magique normal M.

Maintenant, que se passe-t-il si $p(M) < k \leq n^2$?

Nous n'allons pas répondre ici à cette question!!! (Problème 25 de 14.18).

Nous vous suggérons fortement le problème 25 de 14.18!!! Nous voyons que nous pouvons construire un carré magique A, d'ordre $n \geq 3$ qui contiendra un nombre $g_n(A)$ de nombres premiers. Ces carrés ont la forme $M + p$ où M est normal et p, un entier ≥ 1 qui est le plus petit à fournir $g_n(M+p)$ nombres premiers dans $M + p$. Il est clair que $M + p$ est formé d'entiers consécutifs ≥ 1.

Par exemple, M est un carré magique normal d'ordre 6 et $p = 109$ est le plus petit entier ≥ 1 qui donne cinq nombres premiers dans $M + 109$. Nous avons alors $g_6(M + 109) = 5$.

Nous avons fait une observation extraordinaire!!! Pour $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \; et \; 12$, p est toujours un nombre premier lorsque $g_n(M + p) < p(M)$. Cependant, il arrive qu'avec $p = 1$, nous trouvions $g_n(M + 1) = p(M) + 1$. Voyons avec $n = 6$:

$$
\begin{aligned}
&g_6(M+1) = 12 = p(M) + 1 \\
&g_6(M) = 11 = p(M) \\
&g_6(M+3) = 10 \\
&g_6(M+13) = 9 \\
&g_6(M+19) = 8 \\
&g_6(M+59) = 7 \\
&g_6(M+89) = 6 \\
&g_6(M+109) = 5 \\
&g_6(M+293) = 4 \\
&g_6(M+503) = 3 \\
&g_6(M+1237) = 2 \\
&g_6(M+1321) = 1 \\
&g_6(M+15683) = 0
\end{aligned}
$$

Tous les entiers en rouge sont des nombres premiers!!!

Vous voulez un carré magique presque normal d'ordre 6 qui contient exactement deux nombres premiers, alors il vous suffit de prendre $M + 1237$. Si nous acceptions 1 comme nombre premier, alors p serait toujours un nombre premier pour $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \; et \; 12$. Pour $n = 13$, $g_{13}(M) = 39$ et p est toujours un nombre premier pour :

$$g_{13}(M + p) = 38, 37, \ldots, 4, 3, 2.$$

Pour $g_{13}(M+p)=1$ *et* $g_{13}(M+p)=0$, nous n'avons pas trouvé la valeur de p à cause d'un manque de mémoire. Cependant, nous savons que $p > 2\,700\,000$.

Voici pour terminer le résultat suivant :

Théorème 14.18 :

Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous pouvons construire un carré magique presque normal qui contiendra n^2 entiers consécutifs parmi lesquels il y aura exactement k nombres premiers et ce, pour toutes les valeurs de k qui vérifient :

$$0 \leq k \leq p(M)$$

Ce carré aura la forme $M+p$ avec M, un carré normal et p, un nombre premier.

Pour la preuve, voir l'annexe 11 (Carrés magiques avec k nombres premiers).

En terminant, voici le carré magique presque normal suivant qui renferme douze nombres premiers consécutifs que vous retrouverez dans le fichier 14-1 (annexe 11) :

29	96	18	44	52	67
34	31	48	76	59	58
148	32	41	53	28	4
38	42	47	61	50	68
20	43	70	66	71	36
37	62	82	6	46	73

Les douze nombres premiers sont situés sur les deux grandes diagonales et les vingt-quatre autres entiers sont pairs et différents de deux. La somme magique est S = 306. De plus, ce carré possède 13 287 figures magiques!!!

Nous vous recommandons fortement l'annexe 11.

14.14 Carrés magiques et permutations

Que se passe-t-il si nous permutons les chiffres de tous les nombres d'un carré magique? Voyons un exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 35 & 34 & 38 & 37 \\ 31 & 39 & 33 & 41 \\ 28 & 24 & 48 & 44 \\ 50 & 47 & 25 & 22 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 73 & 83 & 43 & 53 \\ 14 & 33 & 93 & 13 \\ 44 & 84 & 42 & 82 \\ 22 & 52 & 74 & 05 \end{pmatrix}$$

Le carré A est magique de somme S = 144. Pour obtenir le carré B, nous avons regardé celui-ci comme étant A vu dans un miroir. Le carré B est donc obtenu comme suit : si l'entier pq est dans la case $(i\,;\,j)$ de A, alors l'entier qp est dans la case $(i\,;n+1-j)$ de B. Mais ici, B n'est plus un carré magique! **Si A et B sont magiques, alors nous dirons qu'ils sont miroirs**. Voyons un autre exemple où cette fois nous allons permuter les chiffres de tous les entiers de C et construire D comme suit : si l'entier pq est dans la case $(i\,;\,j)$ de C, alors dans la case $(i\,;\,j)$ de D, nous aurons l'entier qp.

$$C = \begin{pmatrix} 35 & 34 & 38 & 37 \\ 31 & 39 & 33 & 41 \\ 28 & 24 & 48 & 44 \\ 50 & 47 & 25 & 22 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 53 & 43 & 83 & 73 \\ 13 & 93 & 33 & 14 \\ 82 & 42 & 84 & 44 \\ 05 & 74 & 52 & 22 \end{pmatrix}$$

Nous avons ici $C = A$ donc un carré magique de somme 144. Mais le carré D n'est plus magique! **Si C et D sont magiques, alors nous dirons qu'ils sont des permutés.**

Voici la question que nous devons nous poser :

> Comment construire les carrés magiques A et C afin d'obtenir, après permutation, que les carrés B et D soient magiques?

Voyons un premier exemple :

Nous allons construire les deux carrés magiques d'ordre 4 suivants qui sont des super-Dürer :

5	2	3	6
2	7	4	3
5	2	3	6
4	5	6	1

M

6	3	5	2
4	3	5	4
3	6	2	5
3	4	4	5

N

Ils sont tous les deux de somme S = 16. Construisons les carrés A = 10M + N et B = 10N + M. Nous trouvons :

56	23	35	62
24	73	45	34
53	26	32	65
43	54	64	15

A

65	32	53	26
42	37	54	43
35	62	23	56
34	45	46	51

B

Le carré B est le permuté de A et réciproquement. A et B sont des super-Dürer puisque M et N le sont. De plus, A et B ont la même somme magique, ici S = 176, puisque M et N ont la même somme magique.

Donc, nous avons trouvé le permuté de A. Nous allons trouver maintenant son carré miroir; pour cela, il suffit de trouver $R_*(B)$:

56	23	35	62
24	73	45	34
53	26	32	65
43	54	64	15

A

26	53	32	65
43	54	37	42
56	23	62	35
51	46	45	34

C

C est le carré miroir de A. C'est aussi un super-Dürer de somme S = 176. Notez que A, B et C sont presque normaux.

A, B et C ont la même somme magique car il en est de même de M et N. Ce n'est pas le cas si les sommes magiques de M et N sont différentes. Trouvez un exemple.

Remarque : Quand nous passons d'un carré M à un de ses équivalents, le nombre qui occupe une case donnée dans M restera inchangé dans l'équivalent même si la position de la case a changé. Ainsi, la case dans B qui renferme 26 contient toujours 26 dans $R_*(B)$ et non 62.

Voyons un autre exemple :

9	6	4	3	1
3	1	9	6	4
6	4	3	1	9
1	9	6	4	3
4	3	1	9	6

M

8	7	5	2	1
5	2	1	8	7
1	8	7	5	2
7	5	2	1	8
2	1	8	7	5

N

M et N sont des carrés magiques d'ordre 5 de même somme S = 23. Construisons les carrés A = 10M + N et B = 10N + M. Nous trouvons :

98	67	45	32	11
35	12	91	68	47
61	48	37	15	92
17	95	62	41	38
42	31	18	97	65

A

89	76	54	23	11
53	21	19	86	74
16	84	73	51	29
71	59	26	14	83
24	13	81	79	56

B

B est le permuté de A et réciproquement. Puisque M et N ont la même somme magique S = 23, alors il s'ensuit que A et B ont aussi la même somme magique S = 253.

Trouvons le carré miroir de A soit C = $R_*(B)$:

98	67	45	32	11
35	12	91	68	47
61	48	37	15	92
17	95	62	41	38
42	31	18	97	65

A

11	23	54	76	89
74	86	19	21	53
29	51	73	84	16
83	14	26	59	71
56	79	81	13	24

C

Le carré miroir de A est le carré magique C aussi de somme S = 253. Notez que A, B et C sont presque normaux.

Voyons un avant-dernier exemple :

Voici sept carrés magiques d'ordre 5 et de somme magique S = 24, tous formés que des chiffres allant de 1 à 9. En plus, tous ces carrés renferment la figure magique (fusée) suivante :

(*) (1 ; 2) (2 ; 2) (3 ; 2) (4 ; 1) (4 ; 3)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 1 & 8 \\ 9 & 6 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Le carré $M=10^6A+10^5B+10^4C+10^3D+10^2E+10F+G$ est toujours un carré magique avec la fusée (*) ; il est de somme 1 111 111 $\times$ 24. Nous pouvons permuter A, B, C, D, E, F, et G de 5040 façons et donc obtenir 5040 carrés magiques qui possèdent la figure magique (*) et qui ont tous la même somme soit 26 666 664. Tous ces carrés renferment vingt-cinq entiers différents formés de sept chiffres. Voici M :

$$M = \begin{pmatrix} 3567894 & 4432115 & 2343436 & 8899877 & 7423342 \\ 7633238 & 6654433 & 6555544 & 1234556 & 4588893 \\ 5322124 & 6677867 & 8766666 & 2232123 & 3667884 \\ 6467963 & 5566655 & 2434286 & 4444443 & 7753317 \\ 3675445 & 3335594 & 6566732 & 9855665 & 3233228 \end{pmatrix}$$

Si nous appliquons aux sept chiffres des vingt-cinq nombres de M , par exemple, la permutation :

$$abcdefg \rightarrow gbcdefa$$

alors, le travail sera un peu long avec risque d'erreurs, surtout si la permutation est plus compliquée. De façon équivalente, il suffit de permuter dans l'expression de $M, A et G$. Nous obtiendrons :

$$M' = 10^6 G + 10^5 B + 10^4 C + 10^3 D + 10^2 E + 10F + A$$

Tous les 5040 carrés magiques contiendront (*), auront la même somme, seront différents (à cause de 3567894 dans M qui est formé de sept chiffres différents) et renfermeront vingt-cinq entiers différents (car c'est le cas pour M).

Si nous voulons un carré formé de vingt-cinq nombres de quatre chiffres, il suffira de choisir quatre carrés parmi les sept présentés ci-haut. De même, si nous voulons des nombres de trois chiffres.

Le carré $100A + 10B + C$ sera formé de vingt-cinq entiers positifs différents de trois chiffres. En permutant $A, B et C$, nous aurons six carrés magiques (avec (*)), de somme 2664.

Un dernier exemple :

Voici un très bel ensemble formé de vingt-quatre carrés magiques qui possèdent tous des propriétés remarquables!

1. Ce sont des carrés magiques d'ordre 10.
2. Ils sont tous différents.
3. Ils sont tous presque normaux.
4. Tous ces carrés sont formés d'entiers de quatre chiffres; nous conviendrons, par exemple, que l'entier 497 doit s'écrire 0497 et que l'entier 17 doit s'écrire 0017. Dans chaque carré, nous trouvons dix tels entiers (un par rangée).
5. Ces vingt-quatre carrés magiques ont tous la même somme magique soit 49995.
6. Dans tous ces carrés, sur chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, on retrouve quatre fois chaque chiffre de 0 à 9.
7. Si nous choisissons deux carrés quelconques F et G, alors deux nombres qui occupent la même position dans F et dans G, possèdent exactement les mêmes quatre chiffres.

8. Si nous choisissons deux carrés quelconques F et G, alors on peut toujours trouver une permutation de quatre chiffres qui appliquée aux cent entiers de F donnera G.
9. On peut partager ces vingt-quatre carrés magiques en trois groupes disjoints de huit carrés. Dans le **groupe 1**, les huit carrés ont la propriété suivante : si deux entiers sont symétriques par rapport au centre du carré alors, si l'un s'écrit abcd, l'autre s'écrit cdab. Dans le **groupe 2**, les huit carrés ont la propriété suivante : si deux entiers sont symétriques par rapport au centre du carré, alors, si l'un s'écrit abcd, l'autre s'écrit dcba. Le centre du carré joue donc le rôle de parfait miroir. Enfin dans le **groupe 3**, les huit carrés ont la propriété suivante : si deux entiers sont symétriques par rapport au centre du carré, alors, si l'un s'écrit abcd, l'autre s'écrit badc.
10. Dans chaque groupe, on trouve deux carrés magiques primitifs H et K, chacun étant accompagné de trois équivalents soit celui obtenu par une rotation de 90° de H, une rotation de 180° de H et une rotation de 270° de H. Il en est de même pour K.

Quels sont donc ces vingt-quatre carrés magiques? Comment pouvons-nous les fabriquer?

D'abord, nous avons construit un carré d'ordre 10 dans lequel tous les chiffres de 0 à 9 apparaissent une et une seule fois dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale. Ce carré, appelé **carré latin diagonal**, est donc magique de somme 45. Appelons A ce carré. Nous avons obtenu B par une rotation de A de 90°, M par une rotation de A de 180°et P par une rotation de A de 270°. Enfin, nous avons construit le carré :

$$1000A+100B+10M+P$$

lequel est magique de somme 49995. Puis nous avons observé que ce carré magique d'ordre 10 renferme cent entiers positifs différents.

Voici A : pour le trouver, nous avons d'abord rempli les deux grandes diagonales puis nous avons complété le carré ligne par ligne avec une grande prudence. Puis B, une rotation de A de 90° :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 0 & 9 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 9 & 5 & 6 & 7 & 4 & 0 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 1 & 5 & 9 & 3 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 9 & 2 & 7 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 9 & 4 & 0 & 3 & 7 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & 4 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 1 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 0 & 8 & 6 & 1 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 6 & 8 & 2 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 0 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 0 & 5 & 3 & 4 & 9 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 0 & 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 9 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 9 & 7 & 3 & 1 & 2 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 0 & 9 & 3 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 6 & 9 & 7 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 6 & 8 & 2 & 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Enfin, M *et* P, avec les rotations de 180° et 270°.

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 & 2 & 8 & 6 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 1 & 6 & 8 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 8 & 1 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 1 & 9 & 2 & 7 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 7 & 3 & 0 & 4 & 9 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 3 & 9 & 5 & 1 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 0 & 4 & 7 & 6 & 5 & 9 & 1 \\ 8 & 6 & 2 & 9 & 0 & 1 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 6 & 8 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 8 & 6 & 9 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 7 & 9 & 6 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 2 & 4 & 9 & 1 & 6 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 9 & 0 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 1 & 3 & 7 & 9 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 8 & 7 & 4 & 3 & 0 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 0 & 8 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 5 & 0 & 7 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 0 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Le carré magique $U = 1000A + 100B + 10M + P$ est donc :

$$U = \begin{pmatrix} 0974 & 1817 & 2399 & 3426 & 4188 & 5663 & 6552 & 7001 & 8235 & 9740 \\ 5823 & 4695 & 3237 & 7710 & 1062 & 0588 & 9306 & 2449 & 6954 & 8171 \\ 1700 & 9244 & 5861 & 6057 & 7529 & 4136 & 0488 & 8615 & 2373 & 3992 \\ 2655 & 6930 & 8048 & 1382 & 5414 & 9799 & 3821 & 0576 & 7107 & 4263 \\ 3566 & 8058 & 6413 & 9979 & 2730 & 7302 & 4145 & 5297 & 0621 & 1884 \\ 8418 & 2106 & 9752 & 4541 & 0273 & 3027 & 7999 & 1364 & 5880 & 6635 \\ 6342 & 0771 & 7605 & 2138 & 9997 & 1454 & 8213 & 4880 & 3069 & 5526 \\ 9239 & 7323 & 1586 & 8804 & 3641 & 2975 & 5760 & 6158 & 4492 & 0017 \\ 7181 & 5469 & 4924 & 0693 & 8805 & 6210 & 1077 & 3732 & 9546 & 2358 \\ 4097 & 3582 & 0170 & 5265 & 6356 & 8841 & 2634 & 9923 & 1718 & 7409 \end{pmatrix}$$

Les vingt-quatre carrés magiques sont obtenus en effectuant les vingt-quatre permutations de A, B, M *et* P. Par exemple, nous obtenons le carré magique $V = 1000M + 100A + 10P + B$. Notons que U est dans le groupe 1 et que V est dans le groupe 3. (Voir la propriété 9 ci-haut).

Nous ne donnerons pas ici les vingt-trois autres carrés; ils seront dans l'annexe 33, Partie 3 de cet ouvrage. Vous pouvez aussi les trouver avec MATHEMATICA ou MAPLE.

Montrons maintenant les quatre premières propriétés mentionnées plus haut :

1. Il est évident que ces carrés sont d'ordre 10. Ils sont magiques puisque $A, B, M \; et \; P$ sont magiques de somme 45.

2. Il sera facile de vérifier que les vingt-quatre carrés sont différents (voir Partie 3, annexe 33.) Il suffit que dans U, nous trouvions un nombre de quatre chiffres différents, ce qui est bien le cas. En effet, si en position (i, j) dans U, nous avons un nombre de quatre chiffres différents, alors les vingt-quatre permutations donneront vingt-quatre nombres différents en position (i, j) dans les vingt-quatre carrés d'où vingt-quatre carrés différents.

3. D'abord, nous avons vérifié que les cent nombres dans U sont tous différents ce qui implique que les cent nombres de chacun des vingt-trois autres carrés sont tous différents. En effet, si x et y sont différents dans U, alors en appliquant la même permutation aux quatre chiffres de x et de y, nous obtenons deux nombres différents. Si ces deux nombres étaient les mêmes, alors la permutation inverse donnerait deux nombres égaux ce qui contredirait que x et y sont différents. Les cent nombres dans les vingt-quatre carrés sont donc tous différents.

4. Nous savons que les carrés $A, B, M \; et \; P$ renferment le chiffre 0 sur chaque rangée et sur chaque colonne. Donc les vingt-quatre carrés renferment sur chaque rangée exactement neuf nombres de quatre chiffres et un nombre de moins de quatre chiffres.

Pour terminer, mentionnons que nous venons de décrire le groupe des vingt-quatre carrés magiques ci-haut (dont le carré U) mais nous n'avons pas démontré toutes les propriétés. Par exemple, la propriété 9 relative aux trois groupes de huit carrés ne sera pas démontrée ici. Cependant, nous pouvons au moins vérifier que les vingt-quatre carrés la possèdent. En fait, nous pouvons nous assurer que les vingt-quatre carrés possèdent bien toutes ces propriétés. Le travail sera un peu long et très technique mais relativement simple.

14.15 Carrés magiques et structures algébriques

14.15.1 Introduction

Certains ensembles de carrés semi-magiques et magiques possèdent des structures algébriques intéressantes et génèrent de très beaux problèmes.

Ainsi, l'ensemble des carrés semi-magiques d'ordre n, formés de nombres réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n^2 - 2n + 2$.

L'ensemble des carrés magiques d'ordre n, formés de nombres réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n^2 - 2n$.

L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre 4 possède beaucoup de sous-espaces vectoriels:

les Dürer de dimension 7; les A-Dürer de dimension 5, les diaboliques de dimension 2, les diaboliques-alpha de dimension 2, les triviaux de dimension 1; les super-Dürer de dimension 5, les super-Dürer-alpha de dimension 3 et les super-Dürer-bêta de dimension 2. Et nous pourrions en construire beaucoup d'autres!

Pouvons-nous trouver des ensembles de carrés magiques qui possèdent d'autres structures algébriques?

La réponse est oui. Nous nous limiterons ici aux structures de groupes, d'anneaux et de corps. À travers les questions suivantes, nous allons découvrir quelques situations pour le moins étonnantes!!! **Pour les quatre questions qui suivent, tous les éléments des anneaux que nous cherchons sont des matrices.**

Question 1 : Pouvons-nous trouver A, un anneau infini unitaire non-commutatif qui contient B, un sous-anneau propre infini non-unitaire mais commutatif et C, un sous-anneau propre infini de B qui est un corps commutatif?

Question 2 : Pouvons-nous trouver A, un anneau infini commutatif non-unitaire qui contient B, un sous-anneau propre infini tel que :

$$\forall x,\ y \in A,\ x\,y \in B$$

Question 3 : M est une matrice carrée dont le déterminant est nul. De plus, M est inversible!!! Expliquez.

Question 4 : Pouvons-nous trouver un anneau infini A qui renferme un sous-anneau propre infini B tel qu'il existe dans A deux éléments distincts $u\ et\ v$ tels que :

$$xu = ux = x \quad \forall x \in B$$
$$xv = vx = x \quad \forall x \in B$$

14.15.2 Structures de groupes, d'anneaux et de corps

L'ensemble A des carrés semi-magiques d'ordre n est un **groupe abélien** pour l'addition. Puisque le produit matriciel de deux carrés semi-magiques est un carré semi-magique (voir 9.2), alors A possède une structure **d'anneau** avec cette multiplication matricielle. Nous pouvons même dire que cet anneau est **unitaire**. En effet, le carré semi-magique formé de uns sur la diagonale principale et de zéros ailleurs est l'unité (élément neutre pour la multiplication) que nous notons I . Nous avons donc :

$$MI = IM = M$$

pour tout carré semi-magique dans A et nous pouvons énoncer :

L'ensemble A des carrés semi-magiques d'ordre n possède une structure d'anneau unitaire non commutatif lorsque muni de l'addition matricielle et de la multiplication matricielle.

L'ensemble des carrés semi-magiques d'ordre 4 possède une structure d'anneau unitaire non commutatif et admet l'ensemble des super-Dürer-bêta (voir plus bas) comme sous-anneau commutatif non unitaire.

À son tour, l'anneau commutatif non unitaire des super-Dürer-bêta renferme l'ensemble des triviaux comme sous-anneau commutatif unitaire lequel est aussi un **idéal non premier**.

Appelons M , l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 formées de nombres réels. Appelons C l'ensemble des carrés semi-magiques d'ordre 4 ; S, l'ensemble des super-Dürer-beta et T , l'ensemble des triviaux d'ordre 4. Nous avons ainsi :

$$T \subset S \subset C \subset M$$

et le résultat suivant :

Théorème 14.19 :

M est un anneau unitaire non commutatif.
C est un anneau unitaire non commutatif.
S est un anneau non unitaire commutatif.
T est un anneau unitaire commutatif, idéal non premier de S.

Preuve :

Il est bien connu que M est un anneau non commutatif qui admet pour unité la matrice identité I. De même, C est un anneau non commutatif unitaire.

Soit maintenant S, l'anneau des super-Dürer-bêta. Ce sont les carrés magiques de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \end{pmatrix}$$

Il est facile, par exemple avec MATHAMATICA, de montrer que si A et B sont des super-Dürer-bêta, alors AB = BA = t où t est un trivial donc un super-Dürer-Bêta. Le produit matriciel est alors commutatif dans S mais S ne contient pas d'unité.

En effet, supposons que S contienne un super-Dürer-bêta Z qui soit unité et considérons A, un super-Dürer-bêta non trivial (il y en a une infinité). Alors nous avons : AZ = A et AZ = t, un trivial. Il y a donc contradiction et nous devons conclure que S n'est pas unitaire.

T est aussi un anneau commutatif car le produit de deux triviaux A et B est commutatif et est toujours un trivial (voir le théorème 9.2 de la section 9.2). C'est un anneau unitaire. En effet, T contient le trivial suivant :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

lequel est l'élément neutre pour la multiplication. Enfin, T est un idéal non premier de S car nous pouvons trouver deux super-Dürer-bêta A et B qui ne sont pas dans T avec AB dans T.

Nous allons maintenant montrer que T est un corps commutatif. Pour cela, il faut montrer que si un trivial est non nul, alors il possède un inverse. Il est facile de trouver cet inverse :

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous venons de trouver une matrice carrée dont le déterminant est nul et pourtant, cette matrice est inversible!!!

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 14.20 :

Soit T, l'ensemble des carrés magiques triviaux d'ordre n. Alors T est un corps commutatif.

14.15.3 Inverse d'un carré magique

Considérons un carré magique M. Existe-t-il un carré magique C tel que $M\,C = I$ où I est la matrice carrée identité? Cela revient à se demander si M , en tant que matrice carrée, est inversible. Si le déterminant de M est nul, alors M ne sera pas inversible. Si le déterminant de M est non nul, alors M sera inversible et la question qui se pose : son inverse C sera-t-il un carré magique? En général, la réponse est non. La question finale : quand l'inverse sera-t-il magique?

Tous les triviaux non nuls d'ordre n ont un déterminant nul mais sont inversibles si l'unité est E = (1/n) W où W est le trivial formé de 1.

Théorème 14.21 :

Tout carré magique d'ordre 3 dont le déterminant est non nul a pour inverse un carré magique.

Soit A, un carré magique d'ordre 3 dont le déterminant $(2m+n-T)(3n-T)T$ est non nul :

$$A = \begin{pmatrix} m & n & T-m-n \\ \frac{4T}{3}-2m-n & \frac{T}{3} & 2m+n-\frac{2T}{3} \\ m+n-\frac{T}{3} & \frac{2T}{3}-n & \frac{2T}{3}-m \end{pmatrix}$$

Nous avons résolu l'équation $AB = I$ où I est la matrice identité standard :

$$\begin{pmatrix} m & n & T-m-n \\ \frac{4T}{3}-2m-n & \frac{T}{3} & 2m+n-\frac{2T}{3} \\ m+n-\frac{T}{3} & \frac{2T}{3}-n & \frac{2T}{3}-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix} = I$$

pour trouver :

$$a = \frac{6mn+3n^2-5mT-4nT+2T^2}{3(2m+n-T)(3n-T)T} \; ; \; b = \frac{2m+n-2T}{3(2m+n-T)T} \; ; \; S = \frac{1}{T} \qquad (*)$$

ce qui détermine B de façon unique. Nous avons aussi résolu $BA=I$ pour trouver également (*). Donc le carré magique B est l'inverse de A puisque l'unique B vérifie $AB=BA=I$. Voici B :

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \frac{6mn+3n^2-5mT-4nT+2T^2}{3T(-3n+T)(-2m-n+T)} & \frac{2m+n-2T}{3(2m+n-T)T} & -\frac{-6mn-3n^2-mT+nT+T^2}{3T(-3n+T)(-2m-n+T)} \\ \frac{3n+2T}{3(3n-T)T} & \frac{1}{3T} & \frac{3n-4T}{3(3n-T)T} \\ \frac{6mn+3n^2-5mT-7nT+3T^2}{3T(-3n+T)(-2m-n+T)} & \frac{2m+n}{3(2m+n-T)T} & -\frac{-6mn-3n^2-mT+4nT}{3T(-3n+T)(-2m-n+T)} \end{pmatrix}$$

Nous voyons que si A est formé seulement d'entiers, alors A^{-1} renferme des rationnels non entiers. En particulier, le centre de A^{-1} n'est jamais un entier.

Exemple : $m=4; n=9; T=15$, nous trouvons $a=23/360; b=-13/90; S=1/15$ d'où :

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23/360 & -13/90 & 53/360 \\ 19/180 & 1/45 & -11/180 \\ -37/360 & 17/90 & -7/360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/360 & -13/90 & 53/360 \\ 19/180 & 1/45 & -11/180 \\ -37/360 & 17/90 & -7/360 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez retrouver, dans le chapitre 5, les structures générales des super-Dürer, des super-Dürer-alpha, des super-Dürer-bêta, des A-Dürer, des diaboliques et des diaboliques-alpha. Le déterminant de chacune de ces structures générales est nul. Donc, aucun des carrés magiques issus de ces structures générales n'est inversible relativement à la matrice identité standard I. (Voir aussi la section 9.5 du chapitre 9).

14.16 Des triplets spéciaux de carrés magiques

14.16.1 Introduction

Nous allons trouver ici des triplets de carrés magiques qui ont une propriété remarquable. Soit le triplet formé des carrés magiques A, B, C d'ordre n.

Si x, y, z occupent la même position respectivement dans A, B, C, alors nous aurons :

$$x^2 + y^2 = z^k \quad \text{où } k \geq 2 \text{ est un entier}$$

et ce, quelle que soit cette même position.

Ce résultat est basé sur la solution d'une équation diophantienne bien connue :

$$(*) \qquad x^2 + y^2 = z^n \quad \text{où } n \geq 2 \text{ est un entier}$$

ainsi que notre connaissance des carrés k - multi-magiques.

14.16.2 Solutions de l'équation diophantienne (*)

Nous allons définir deux polynômes $p_n(x)$ *et* $q_n(x)$ à l'aide des formules récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= p_n(x) - x\,q_n(x) \\ q_{n+1}(x) &= q_n(x) + x\,p_n(x) \end{aligned} \quad \text{où } p_1(x) = 1 \; et \; q_1(x) = x$$

Voici les cinq premiers polynômes $p_n(x)$ et les cinq premiers polynômes $q_n(x)$:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 & q_1(x) &= x \\ p_2(x) &= 1 - x^2 & q_2(x) &= 2x \\ p_3(x) &= 1 - 3x^2 & q_3(x) &= 3x - x^3 \\ p_4(x) &= 1 - 6x^2 + x^4 & q_4(x) &= 4x - 4x^3 \\ p_5(x) &= 1 - 10x^2 + 5x^4 & q_5(x) &= 5x - 10x^3 + x^5 \end{aligned}$$

Une autre façon de construire ces polynômes fait intervenir les nombres complexes :

$$p_n(x) = \frac{(1+i\,x)^n + (1-i\,x)^n}{2}$$
$$q_n(x) = \frac{(1+i\,x)^n - (1-i\,x)^n}{2\,i}$$

Ces polynômes possèdent une propriété remarquable :

$$p_n^2(x) + q_n^2(x) = (x^2+1)^n$$

Il est clair que ces polynômes prennent des valeurs entières lorsque le nombre x est un entier. De plus, nous obtenons une infinité de solutions entières de l'équation diophantienne $X^2 + Y^2 = Z^n$ en posant :

$$X = p_n(x)\ ;\ Y = q_n(x)\ ;\ Z = x^2+1$$

Par exemple, trouvons des solutions entières de l'équation $X^2 + Y^2 = Z^5$. Nous aurons :

$$X = p_5(x) = 1-10\,x^2 + 5\,x^4\ ;\ Y = q_5(x) = 5\,x-10\,x^3 + x^5\ ;\ Z = x^2+1$$

Pour $x=1$, nous trouvons $X=-4$; $Y=-4$; $Z=2$ d'où la solution positive $X=4$; $Y=4$; $Z=2$. Donnons des solutions positives pour :

$$x=2:\quad X=41\ ;\ Y=38\ ;\ Z=5$$
$$x=3:\quad X=316\ ;\ Y=12\ ;\ Z=10$$
$$x=4:\quad X=1121\ ;\ Y=404\ ;\ Z=17$$

Nous pouvons vérifier, par exemple, que nous avons bien $1121^2 + 404^2 = 17^5$; en effet $1256641 + 163216 = 1419857$.

Nous pouvons donc trouver une infinité de solutions entières positives pour l'équation $X^2 + Y^2 = Z^n$ quel que soit l'entier $n \geq 2$.

14.16.3 Construction des triplets

Commençons avec un exemple. Nous voulons trouver trois carrés magiques A, B, C tels que si x, y, z occupent la même position respectivement dans A, B, C, alors quelle que soit cette position, nous aurons $x^2 + y^2 = z^3$. Pour ce faire, nous aurons besoin d'une solution entière positive de l'équation $X^2 + Y^2 = Z^3$ et de M, un carré 3-multi-magique.

Nous noterons M_2 le carré magique formé des carrés et M_3, le carré magique formé des cubes. Ainsi, si u occupe la position $(i\,;\,j)$ dans M , alors nous trouverons u^2 à la même position dans M_2 et u^3 à la même position dans M_3 et ce, quelle que soit la position $(i\,;\,j)$.

En se servant de $p_3(x)\ et\ de\ q_3(x)$, nous trouvons la solution $(11\,;\,2\,;\,5)$; en effet, nous avons bien $11^2 + 2^2 = 5^3$. Nous préférons une solution avec les trois entiers différents ce qui nous assure d'avoir $A \neq B$. Maintenant, posons :

$$A = 11M_3\ ;\ B = 2M_3\ ;\ C = 5M_2$$

Si u occupe la position $(i\,;\,j)$ dans M , alors nous trouvons à la même position $11u^3, 2u^3,\ 5u^2$ respectivement dans A, B, C . Nous avons donc :

$$(11u^3)^2 + (2u^3)^2 = 11^2u^6 + 2^2u^6 = (11^2 + 2^2)u^6 = 5^3u^6 = (5u^2)^3$$

Voilà trouvés nos trois carrés magiques. Cependant, il faudrait être plus explicite. Quel est ce carré M ? Nous allons prendre pour M le carré normal 3-multi-magique d'ordre 12 de Walter Trump, présenté ci-dessous.

Par exemple, prenons la case où se trouve le nombre 119. La même case dans le carré magique A renferme le nombre $11\times119^3 = 18536749$. La même case dans le carré magique B renferme le nombre $2\times119^3 = 3370318$ et cette même case dans le carré magique C renferme le nombre $5\times119^2 = 70805$. Nous avons : $18536749^2 + 3370318^2 = 70805^3$. Il en serait de même si nous partions de n'importe laquelle des cases du carré M ci-dessous. Pour cela, nous écrivons : $[A]^2 + [B]^2 = [C]^3$ qui résume simplement la propriété que nous venons d'illustrer. Dans cette égalité, il n'y a aucune somme ni aucun produit de carrés magiques.

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

Carré 3-multi-magique normal de Walter Trump construit en juin 2002

Voyons un autre exemple avec le carré magique M suivant :

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

Nous voulons cette fois obtenir $[A]^2 + [B]^2 = [C]^2$ avec l'égalité $3^2 + 4^2 = 5^2$. Nous posons : $A = 3M$; $B = 4M$; $C = 5M$. Soit le nombre u en position $(i\ ;\ j)$ dans M ; alors nous aurons en position $(i\ ;\ j)$ respectivement dans A, B, C, les nombres $3u, 4u, 5u$. Nous avons bien $(3u)^2 + (4u)^2 = (5u)^2$.

12	45	42	3
15	30	33	24
27	18	21	36
48	9	6	39

3 M

16	60	56	4
20	40	44	32
36	24	28	48
64	12	8	52

4 M

20	75	70	5
25	50	55	40
45	30	35	60
80	15	10	65

5 M

Nous pouvons vérifier que :

$30^2+40^2=50^2 \quad 36^2+48^2=60^2 \quad 48^2+64^2=80^2$, ainsi de suite.

D'une façon générale, si nous voulons $[A]^2+[B]^2=[C]^n$ où $n\geq 2$ est entier, alors nous partirons de l'équation $X^2+Y^2=Z^n$ et d'une de ses solutions entières positives (a,b,c).
Nous allons considérer deux cas :

$n\geq 3$ **est impair.**

Nous prendrons M, un carré n-multi-magique et nous poserons :

$$A=aM_n\ ;\ B=bM_n\ ;\ C=c\ M_2$$

Si u occupe la position $(i\ ;\ j)$ dans M, alors nous aurons en position $(i\ ;\ j)$ respectivement dans A,B,C, les nombres au^n, bu^n, cu^2. Nous vérifions sans peine :

$$(au^n)^2+(bu^n)^2=(a^2+b^2)u^{2n}=c^nu^{2n}=(cu^2)^n$$

$n\geq 2$ **est pair.**

Posons $n=2k$ et partons avec l'équation $X^2+Y^2=Z^{2k}$ puis le carré M, un k-multi-magique. Posons maintenant :

$$A=aM_k\ ;\ B=bM_k\ ;\ C=cM$$

Si u occupe la position $(i\ ;\ j)$ dans M, alors nous aurons en position $(i\ ;\ j)$ respectivement dans A,B,C, les nombres au^k, bu^k, cu. Nous vérifions sans peine :

$$(au^k)^2+(bu^k)^2=(a^2+b^2)u^{2k}=c^{2k}u^{2k}=(cu)^{2k}=(cu)^n$$

Dans le cas impair, nous avons besoin que M soit un n-multi-magique alors que dans le cas pair, nous avons besoin d'un $(n/2)$-multi-magique.

Nous savons qu'il existe un n-multi-magique quel que soit l'entier $n \geq 1$ mais à ce jour, nous connaissons un n-multi-magique que pour $1 \leq n \leq 14$. Donc, nous connaissons un 14-multi-magique mais son ordre est 2^{44}. La manipulation d'un tel carré est presqu'impossible!!!

Théoriquement, nous pourrions nous rendre jusqu'à $[A]^2 + [B]^2 = [C]^{28}$ puisque nous aurions alors besoin d'un 14-multi-magique lequel est connu.

Précisons que si M est un carré n-multi-magique, alors nous notons M_i, le carré magique obtenu en élevant chaque nombre de M à la puissance i, un entier tel que $1 \leq i \leq n$. Nous posons $M_1 = M$.

Lorsque $n = 2$, C.A. Pickover [2], nomme le triplet (A, B, C), un triplet Pythagoricien. Dans l'exemple vu plus haut, nous avons un triplet Pythagoricien diabolique puisque le carré M d'ordre 4 est un diabolique (voir chapitre 5 : Les carrés magiques d'ordre 4).

Terminons avec le cas $n = 1$.

Nous partons avec l'équation $X^2 + Y^2 = Z$, laquelle possède des solutions entières positives évidentes. Nous allons prendre M, un carré 2-multi-magique. Posons maintenant :

$$A = aM \ ; \ B = bM \ ; \ C = cM_2$$

Si u occupe la position $(i \ ; \ j)$ dans M, alors nous aurons en position $(i \ ; \ j)$ respectivement dans A, B, C, les nombres au, bu, cu^2. Nous vérifions sans peine :

$$(au)^2 + (bu)^2 = (a^2 + b^2)u^2 = cu^2$$

La cas $n = 1$ peut donc se joindre au cas impairs $n \geq 3$. Nous aurions alors les cas impairs $n \geq 1$ et les cas pairs $n \geq 2$.

14.16.4 Un triplet déterminé par M , un carré premier 2-multi-magique

Nous allons présenter ici un triplet tel que $[A]^2 + [B]^2 = [C]^1$ et M , un 2 -multi-magique d'ordre 11 formé de 121 nombres premiers choisis parmi les 126 premiers nombres premiers.

137	131	317	47	5	457	541	359	467	353	683
401	277	239	647	23	421	229	181	7	419	653
463	269	701	59	157	257	563	557	179	191	101
593	311	379	503	197	83	53	521	149	619	89
307	617	397	241	571	661	109	107	79	127	281
373	443	29	587	383	61	19	409	631	389	173
73	11	607	433	613	577	263	97	227	313	283
43	599	151	199	509	487	223	163	293	691	139
673	37	113	271	193	31	601	431	331	337	479
67	233	103	439	499	251	547	659	491	41	167
367	569	461	71	347	211	349	13	643	17	449

Christian Boyer, novembre 2006

Posons : $A = 3M$; $B = 4M$; $C = 25M_2$.

Si u occupe la position $(i\ ;\ j)$ dans M , alors nous aurons en position $(i\ ;\ j)$ respectivement dans A, B, C , les nombres $3u$, $4u$, $25u^2$. Nous vérifions sans peine :

$$(3u)^2 + (4u)^2 = (3^2 + 4^2)u^2 = 25u^2$$

Ainsi, par exemple, avec $u = 137$, nous avons $(3\times137)^2 + (4\times137)^2 = 25\times137^2$.

Mentionnons que M contient 121 nombres premiers tous différents deux à deux.

14.17 Carrés magiques de sommes consécutives

Nous savons que tous les carrés magiques normaux d'ordre 4 sont de sommes 34. Si nous ajoutons l'entier 1 dans toutes les cases d'un tel carré, sa somme devient 38. De cette façon, nous obtenons des carrés magiques presque normaux d'ordre 4 de sommes 34, 38, 42, 46,…

Mais pouvons-nous trouver un carré presque normal d'ordre 4 de somme 35? La réponse est oui. En effet, le carré suivant renferme une **figure complète** que nous appelons **figure idéale.**

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

Figure idéale

La figure qui renferme les entiers 13, 14, 15 et 16 est une figure complète car chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale possède une seule case de cette figure.

La figure complète ci-haut est une **figure idéale** car elle contient les quatre plus grands entiers du carré.

Si nous ajoutons l'entier 1 dans les quatre cases de cette figure idéale, alors nous obtenons un carré magique presque normal de somme 35. Si nous ajoutons l'entier $k \geq 0$, alors nous aurons un carré presque normal de somme $34 + k$.

Définition :

Dans un carré d'ordre n, une « **figure complète** » est un groupe de n cases distinctes tel que chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale renferme une seule de ces cases.

Une « **figure idéale** » est une figure complète qui renferme les n plus grands nombres du carré.

Un carré magique presque normal qui possède une figure idéale est appelé « **carré magique idéal** » ou simplement « **carré idéal** »

Si le carré est normal et possède une figure idéale, alors nous dirons que c'est un « **carré normal idéal** »

Théorème 14.22

Aucun carré d'ordre 3 possède une figure complète.

Tous les carrés d'ordre $n \geq 4$ possèdent au moins une figure complète.

La preuve est laissée en exercice. (Voir le problème 4 de 4.3.8 et le problème 59 de 5.18.)

Considérons un carré magique d'ordre $n \geq 4$. Il se peut que celui-ci ne possède pas de figure idéale. Pour constater cela, il suffit de localiser les n plus grands nombres du carré et de voir que ceux-ci ne forment pas une figure complète. Il en est de même pour tous ses équivalents.

Si M est un carré magique normal d'ordre $n \geq 4$, alors sa somme magique est :

$$S = \frac{n^3 + n}{2}$$

Notre objectif est de construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de S, la plus petite somme pour un carré presque normal.

Si M est un carré normal idéal, alors notre objectif est atteint. Mais pouvons-nous affirmer qu'il existe au moins un carré normal idéal pour tous les ordres $n \geq 4$?

Nous en connaissons au moins un pour les ordres 4, 5, 7, 8 et 9. Vous les verrez un peu plus loin.

Nous allons établir maintenant un premier résultat très intéressant!!!

Soit M, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 4$ et de somme magique T . Posons :

$$A = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$$

l'ensemble des entiers de la figure complète considérée avec :

$$y_1 < y_2 < ... < y_n$$

Soit B, l'ensemble des entiers de M qui ne sont pas dans la figure complète:

$$B = \{x_1, x_2, ..., x_{n^2-n-1}, x_{n^2-n}\}$$

avec : $$x_1 < x_2 < ... < x_{n^2-n-1} < x_{n^2-n}$$

Posons maintenant : $k_i = x_{n^2-n} + y_i$

Notre nouveau carré magique M', formé des entiers de B et des k_i est presque normal dont la somme magique T' est :

$$T' = T + x_{n^2-n}$$

Le carré magique M n'était pas forcément idéal mais M'est devenu un carré idéal!!!

Nous pouvons donc construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de T'.

Dans plusieurs cas, nous pourrons trouver une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de $T'' < T'$.

Voyons l'exemple qui suit :

Soit M, un carré magique normal d'ordre 5.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Figure complète qui n'est pas idéale

Nous avons :

$A = \{2 , 4 , 13 , 22 , 24\}$

$B \{1,3,5,6,7,8,9,10 ,11,12, 14,15,16,17,18,19,20,21,23,25\}$

$x_{n^2-n} = 25$; $k_i = 25 + y_i$; $T = 65$; $T' = 65 + 25 = 90$

Voici notre nouveau carré M' :

11	49	7	20	3
29	12	25	8	16
17	5	38	21	9
10	18	1	14	47
23	6	19	27	15

Carré M’

Ce carré est presque normal de somme $T' = 90$.

Notons qu’aucune figure complète de M n’est idéale. En effet, les entiers 21, 22, 23, 24 et 25 ne forment pas une figure complète!!!

Cependant, la même figure complète est idéale dans M’.

Nous pouvons donc construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de $T' = 90$.

Pour avoir celui de somme 91, il suffit d’ajouter l’entier 1 dans toutes les cases de la figure complète de M’. Pour avoir celui de somme 92, il suffit d’ajouter l’entier 2 dans toutes les cases de la figure complète de M’. Et ainsi de suite pour toutes les autres sommes 93, 94, …

Nous pouvons améliorer T' en posant :

$$k_i = 24 + y_i$$

d’où $T'' = 89$.

Il est donc possible de construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de $T'' = 89$. Nous ne pouvons pas faire mieux avec cette figure complète!!!

Théorème 14.23 :

Pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de $\frac{n^3 + 2n^2 + n}{2}$.

Preuve :

1) Prenons d'abord un carré magique normal d'ordre $n \geq 4$.
2) Puis trouvons une figure complète de ce carré (voir théorème 14.22).
3) n^2 est la plus grande valeur possible de x_{n^2-n}.
4) La somme magique de M'est donc :

$$T' = \frac{n^3 + n}{2} + n^2 = \frac{n^3 + 2n^2 + n}{2}$$

5) M'est un carré idéal d'où les sommes consécutives à partit de T'.

Pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe au moins un carré idéal.

Pour tous les ordres $n \geq 4$, existe-t-il un carré normal idéal?

La réponse est oui pour $n = 4, 5, 7, 8 \, et \, 9$.

Si nous trouvons un carré normal idéal, cela signifie qu'alors, nous pourrons trouver une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de $S = \frac{n^3 + n}{2}$, la plus petite somme possible pour un carré magique presque normal. Donc :

Si M est un carré magique normal idéal, alors il existe un carré magique presque normal pour toutes les sommes T qui vérifient $T \geq \frac{n^3 + n}{2}$.

Mais le carré magique normal idéal existe-t-il??

Nous en connaissons au moins un pour les ordres $n = 4, 5, 7, 8 et 9$. De plus, le nombre de carrés magiques normaux pour les ordres $6, 10, \ldots$ étant extrêmement grand (des milliards de milliards), il est normal de penser qu'au moins un de ces carrés renfermera une figure idéale!!!

D'où la conjecture :

Pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe au moins un carré magique normal idéal.

Nous avons trouvé les carrés normaux idéaux suivants :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

Carré normal idéal d'ordre 4

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

Carré normal idéal d'ordre 5

19	7	5	41	29	43	31
46	40	22	1	4	34	28
37	16	45	33	21	10	13
3	6	42	25	48	36	15
35	24	12	9	30	18	47
27	44	23	17	11	14	39
8	38	26	49	32	20	2

Carré normal idéal d'ordre 7

56	34	8	57	18	47	9	31
33	20	54	48	7	29	59	10
26	43	13	23	64	38	4	49
19	5	35	30	53	12	46	60
15	25	63	2	41	24	50	40
6	55	17	11	36	58	32	45
61	16	42	52	27	1	39	22
44	62	28	37	14	51	21	3

Carré normal idéal d'ordre 8

28	13	9	59	66	79	51	44	20
50	8	19	81	58	65	43	30	15
11	77	70	42	46	35	4	27	57
75	33	53	22	2	18	68	61	37
6	72	56	34	41	48	26	10	76
45	21	14	64	80	60	29	49	7
25	55	78	47	36	40	12	5	71
67	52	39	17	24	1	63	74	32
62	38	31	3	16	23	73	69	54

Carré normal idéal d'ordre 9

Voici un très beau résultat à partir du carré normal idéal d'ordre 5 ci-haut, lequel est pandiagonal :

Il existe une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre 5 de sommes consécutives à partir de $S = 65$, lesquels sont tous pandiagonaux!!!

Dans la section 6.1 du chapitre 6, nous avons construit vingt-cinq carrés magiques normaux pandiagonaux respectivement de centres 1 à 25. Nous trouvons une figure Idéale dans chacun!!! Pour chaque carré, toutes les diagonales brisées renferment une seule case de la figure complète. Nous pouvons donc construire une infinité de carrés magiques presque normaux, pandiagonaux, de sommes consécutives à partir de 65.

Également, un très beau résultat à partir du carré normal idéal d'ordre 7 ci-haut, lequel est aussi pandiagonal :

Il existe une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre 7 de sommes consécutives à partir de $S = 175$, lesquels sont tous pandiagonaux!!!

Notons que pour le carré d'ordre 5 ci-haut, nous retrouvons une seule case de la figure idéale dans chaque diagonale brisée. Il en est de même pour le carré d'ordre 7 ci-haut. Donc, si nous ajoutons l'entier $k \geq 0$ dans chaque case de la figure idéale, nous obtenons un carré magique presque normal et pandiagonal.

Définition :

Si une figure complète a une seule case dans chaque diagonale brisée, alors nous dirons que nous avons une « **figure complète pandiagonale** ».

Si la figure est idéale, alors nous parlerons d'une « **figure idéale pandiagonale** ».

Si un carré magique est presque normal et pandiagonal, alors une figure complète pandiagonale nous servira à construire une infinité de carrés magiques presque normaux pandiagonaux de sommes consécutives à partir de l'entier $\frac{n^3 + 2n^2 + n}{2}$. Si la figure complète est idéale et pandiagonale et si la carré magique est normal, alors elle nous permettra de construire une infinité de carrés magiques presque normaux pandiagonaux de sommes consécutives à partir de l'entier $\frac{n^3 + n}{2}$.

Théorème 14.24

Aucun carré d'ordre quatre possède une figure complète pandiagonale.

Preuve : voir le problème 41 de 14.18.

Les carrés d'ordres 8 et 9 ci-haut ne sont pas pandiagonaux. De plus, la figure complète de chacun est idéale mais n'est pas pandiagonale.

Quant au carré d'ordre 4 ci-haut, il n'est pas pandiagonal et sa figure complète est idéale mais, comme tous les carrés d'ordre 4, elle n'est pas pandiagonale.

Pouvons-nous trouver une figure complète pandiagonale dans tout carré d'ordre $n \geq 5$?

La réponse est oui pour au moins $n = 5 et\, n = 7$.

Voyons comme dernier exemple, un carré magique normal M, d'ordre 6 avec sa figure complète qui n'est pas idéale (ce carré ne possède pas de figure idéale!!!) :

1	25	18	24	12	31
35	8	23	14	26	5
34	10	15	21	28	3
33	27	16	22	9	4
2	11	20	17	29	32
6	30	19	13	7	36

Ce carré magique M est un carré arithmétique fabriqué avec ALG-3; il est normal d'où S = 111.

Selon le théorème 14.23, nous pouvons construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de : $\frac{n^3 + 2n^2 + n}{2} = \frac{216 + 72 + 6}{2} = 147.$

Nous avons :

$$A = \{17;18;26;27;34;36\}$$
$$B = \{1;2;3;...;33;35\}$$

Si nous ajoutons 19 à tous les entiers de A, alors nous obtiendrons un carré idéal presque normal de somme $111+19=130$. Par contre, ajouter 18 nous conduirait à une répétition.

Cependant, nous pouvons trouver un carré presque normal de somme 129 en ajoutant 3 dans toutes les cases de M.

Nous pouvons donc construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 129.

Nous aurons toutes les sommes consécutives à partir de $S = \frac{n^3 + n}{2}$, dès que notre carré magique normal M renfermera une figure idéale.

Si la figure complète n'est pas idéale, alors en ajoutant un entier convenablement choisi dans toutes les cases de celle-ci, nous obtiendrons un carré magique M'qui contiendra une figure idéale et à partir de M', nous pourrons construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de la somme T de M'.

Nous chercherons toujours à minimiser T, peu importe la façon!!! L'objectif étant d'avoir $T = S$.

Cet objectif est atteint dès que M est normal et que sa figure complète est idéale.

Enfin, nous **conjecturons** que pour $n \geq 4$, il existe un carré magique normal idéal.

Puisqu'un carré idéal M, de somme T, permet de générer une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de T, alors nous dirons que M est un **générateur**. Si M est normal, les sommes consécutives partiront de S et alors M sera appelé un **super-générateur**. Notre conjecture devient :

Pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe un super-générateur.

Les carrés normaux idéaux ci-haut d'ordres 4, 5, 7, 8 et 9 sont des super-générateurs.

En résumé :

Nous savons que pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe au moins un générateur.

1) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 4$.
2) Pour savoir si M est un carré idéal, il suffit de considérer les n cases qui renferment les n plus grands entiers du carré. Si ces n cases forment une figure complète, alors le carré est idéal. Sinon, il faudra trouver le carré idéal M'de somme T.
3) M'sera appelé «générateur de somme T» car il nous permet, grâce à sa figure complète, de construire une infinité de carrés magiques presque normaux, de sommes consécutives à partir de T inclus.
4) Dans certains cas, il est possible d'obtenir des sommes consécutives à partir d'un entier $< T$.
5) Dans l'exemple ci-haut, nous avions $T = 130$. Mais une somme de 129 était possible en partant de M en en ajoutant 3 dans chaque case du carré.
6) Pouvons-nous faire mieux?

Oui!!! Nous allons prendre un autre carré magique normal d'ordre 6 et une autre figure complète.

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

Nous avons :

$$A=\{20;24;26;27;34;36\}$$
$$B=\{1;2;3;...;33;35\}$$

Nous pouvons ajouter 16 à tous les entiers de A. Le carré est alors idéal presque normal de somme 127. D'où les sommes consécutives à partir de 127.

Notez que pour obtenir l'entier à ajouter aux entiers de A, il suffit de prendre :

$$1+x_{n^2-n}-y_1$$

où x_{n^2-n} est le plus grand entier de B et y_1, le plus petit entier de A.

D'un générateur 130, nous passons à un générateur 127. Une autre amélioration!!!

Pouvons-nous encore faire mieux?

Oui, avec le nouveau carré normal suivant et sa figure complète.

15	10	5	20	30	31
26	13	11	32	2	27
18	33	7	25	9	19
28	21	23	24	1	14
16	22	29	6	35	3
8	12	36	4	34	17

Nous avons:

$$A=\{28;31;32;33;35;36\}$$
$$B=\{1;2;3;...;34\}$$

Nous pouvons ajouter l'entier $34+1-28=7$ à tous les entiers de A afin d'obtenir un carré idéal presque normal de somme 118. Une très belle amélioration puisque nous passons d'un générateur 127 à un générateur 118. Si nous ajoutons 1 dans toutes les cases de M, alors nous trouvons un générateur 117. Nous nous approchons du super-générateur 111.

De plus, en ajoutant $5 ou 4$ dans la figure complète, nous obtenons un carré idéal presque normal de somme $116\ ou 115$. Mais avec cette figure complète, nous ne pouvons pas trouver un carré presque normal de sommes $112, 113 ou 114$.

Nous pouvons donc construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 115.

Que reste-t-il à faire?

1) Soit trouver trois carrés magiques presque normaux d'ordre 6 de sommes 112, 113 et 114.
2) Soit trouver un carré magique normal idéal d'ordre 6.

3) Dans les deux cas, nous aurons une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 111.

Ce dernier carré magique normal d'ordre 6 est pour nous, **notre meilleur carré d'ordre 6** en ce sens qu'en plus d'être normal, il nous permet de construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 115. Ce carré est «presque normal idéal» puisqu'il renferme, dans une figure complète, cinq des six plus grands entiers du carré soient 31, 32, 33, 35 et 36. Ce qui en fait aussi un excellent carré est le nombre28, grâce auquel nous trouvons les sommes à partir de 115. Nous continuons à chercher un carré normal avec une figure idéale donc un carré normal idéal.

EURÊKA!!! EURÊKA!!! EURÊKA!!!

Voilà qu'après deux semaines de recherche et avec notre programme dans MAPLE, nous avons enfin trouvé notre premier carré magique normal idéal d'ordre 6.

Cela vient renforcer la conjecture ci-haut et nous permet de construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 111.

Voici ce magnifique carré :

15	10	4	24	27	31
25	17	9	32	2	26
3	33	14	21	28	12
34	30	19	7	8	13
16	20	29	5	35	6
18	1	36	22	11	23

Premier carré normal idéal connu d'ordre 6

Nous connaissons maintenant un super-générateur pour les ordres 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Le carré ci-haut est maintenant notre meilleur carré magique d'ordre 6!!!

Si nous voulons construire un carré magique, par exemple, de somme 500, nous pourrions partir du carré normal ci-haut et ajouter 389 dans chaque case de la figure complète. Nous aurions alors dans notre carré, les entiers de 1 à 30 et les entiers de 420 à 425. Nous pourrions éviter ce grand écart en ajoutant 64 dans chaque case du carré puis ensuite, 5 dans chaque case de la figure complète. Les nombres du carré seraient 65 à 94 puis 100 à 105. D'où un certain équilibre!!!

Voyons maintenant une façon de construire une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre 6 de sommes consécutives à partir de 111.

1) Partons de M, le carré normal idéal d'ordre 6 ci-haut, de somme 111.
2) En ajoutant respectivement 1, 2, 3, 4 et 5 dans la figure complète de M, nous obtiendrons les sommes 112, 113, 114, 115 et 116.
3) Pour la somme 117, nous ajouterons 1 dans toutes les cases du carré M.
4) Puis, nous ajouterons 7, 8, 9, 10 et 11 dans la figure complète de M pour obtenir les sommes 118, 119, 120, 121 et 122.
5) Pour la somme 123, nous ajouterons 2 dans toutes les cases du carré M.
6) Ensuite, nous ajouterons 13, 14, 15, 16 et 17 dans la figure complète de M pour obtenir les sommes 124, 125, 126, 127 et 128.
7) Pour la somme 129, nous ajouterons 3 dans toutes les cases du carré M.
8) Et ainsi de suite.
9) De cette façon, nous conserverons l'équilibre!!!
10) Notons que M était un super-générateur.

Nous pouvons faire de même pour tous les ordres $n \geq 4$, même si le générateur n'est pas un super-générateur.

Enfin, nous pensons que le carré normal idéal d'ordre 6 ci-haut est le premier connu.

Puis, voici une autre façon de voir les sommes consécutives.

Appelons A, l'ensemble des carrés magiques presque normaux d'ordre 6. Nous trouvons donc dans A tous les carrés normaux lesquels ont pour somme 111. Pour tous les autres, la somme est > 111.

Nous pouvons nous demander s'il existe un carré dans A de somme k où k est un entier ≥ 111. La réponse est oui quel que soit l'entier k $\geq$ 111.

Cela signifie que nous pouvons trouver une infinité de carrés dans A de sommes consécutives à partir de 111.

Pour le moment, il en est de même pour les ordres 4, 5, 6, 7, 8 et 9 car nous connaissons un super-générateur pour ces ordres.

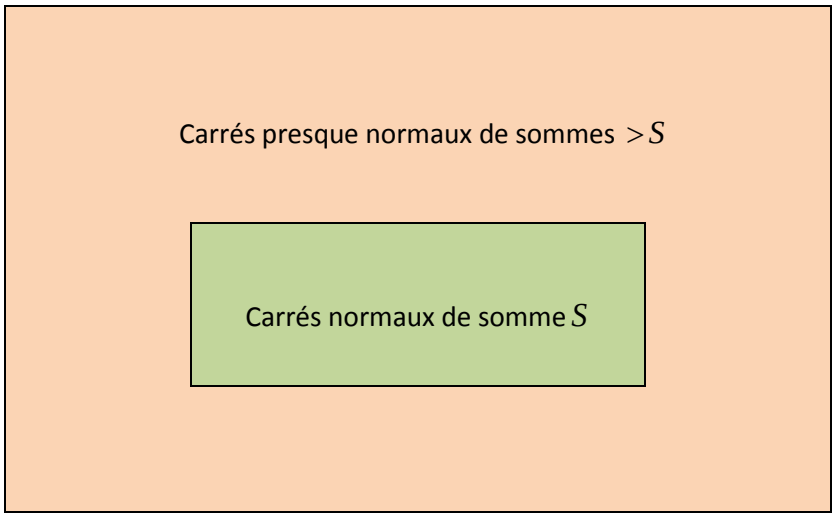
Si nous pouvons trouver un super-générateur pour l'ordre 10, alors il en sera de même pour cet ordre.

Rappelons qu'un super-générateur est un carré normal idéal.

C'était notre petite excursion dans les carrés magiques à sommes consécutives. Sans aucun doute, il reste encore beaucoup de résultats à découvrir; prouver la conjecture ci-haut, par exemple puis trouver un algorithme qui permettrait de construire des carrés normaux idéaux!!! Construire un carré normal idéal d'ordre 10.

Terminons avec ce résumé :

Voici l'ensemble des carrés magiques presque normaux d'ordre n avec $n \geq 4$:



1) La somme S des carrés magiques normaux d'ordre n est : $S = \dfrac{n^3 + n}{2}$.
2) Si T est la somme d'un carré magique presque normal, alors $T \geq S$.
3) Donc la plus petite somme des carrés magiques presque normaux d'ordre n est S.
4) Les carrés normaux font partie des presque normaux et ce sont les seuls de somme S.
5) Appelons W, l'ensemble des sommes de tous les carrés magiques presque normaux.
6) Alors S est la plus grande borne inférieure de W.
7) Posons $\lambda = S + n^2 = \dfrac{n^3 + n}{2} + n^2 = \dfrac{n^3 + 2n^2 + n}{2}$.

_____ S _____ λ _____

8) Pour tous les entiers $u \geq \lambda$, il existe au moins un carré magique presque normal de somme u.
9) Il existe toujours un carré magique normal donc de somme S pour tous les ordres $n \geq 3$.
10) Pour les entiers v qui vérifient $S < v < \lambda$, il existe au moins un carré presque normal de somme v si $n = 4;5;6;7;8;9$.
11) Pour les ordres $n \geq 10$, nous ne le savons pas!!!
12) Cependant, il se peut qu'il existe un carré presque normal pour certaines valeurs de v.
13) Nous **conjecturons** que pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe au moins un carré magique presque normal de somme magique k et ce, pour tout $k \geq S$.

14) Très souvent, nous pourrons faire mieux qu'avec λ. Voyons l'exemple qui suit.
15) Ce carré magique normal est arithmétique d'ordre 10 et s'obtient avec ALG-3 en posant : a = 1, r = 1 et t = 10. Sa figure complète renferme 38 comme plus petit entier.

1	81	30	31	50	60	61	80	20	91
99	12	22	69	59	49	32	72	82	9
98	13	23	68	58	48	38	73	83	3
7	17	77	34	44	54	64	27	87	94
96	86	76	35	45	55	65	26	16	5
95	85	75	36	46	56	66	25	15	6
4	84	74	37	47	57	67	24	14	97
93	18	28	63	53	43	33	78	88	8
2	19	29	62	52	42	39	79	89	92
10	90	71	70	51	41	40	21	11	100

Nous avons : $S = 505 \; et \; \lambda = 605$. Puis $101 - 38 = 63 \; et \; 505 + 63 = 568$. En ajoutant 63 dans toutes les cases de la figure complète, nous obtenons un carré magique idéal M de somme 568. M est idéal donc nous pouvons construire, à partir de celui-ci, une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 568. C'est donc un générateur de somme 568. Nous avons aussi les sommes 505, 515, 525, 535, 545, 555, 565 ainsi que 553 et 562. Il nous manque 54 sommes!!! **La déficience** δ de ce générateur est donc δ = 54. Il est évident que la déficience d'un super-générateur est δ = 0. Voir l'encadré vert suivant.

_____ S _____568_____ λ _____

Nous voyons bien ici que 568 nous permet de faire mieux qu'avec λ = 605.

Pouvez-vous trouver un meilleur générateur ou même un super-générateur?

Soit M, un carré magique normal d'ordre $n \geq 4$ qui est un générateur de somme $T \geq S$. La **déficience** δ de ce générateur est le nombre de sommes situées dans l'intervalle ouvert $]S\ ;\ T[$, que nous ne pouvons pas obtenir.

La déficience dépend de notre choix du carré normal et de sa figure complète.

Pour $n = 3$, il est impossible de construire des carrés presque normaux de sommes consécutives à partir de 15. Nous savons que la somme d'un presque normal est un multiple entier de 3. Nous pouvons fabriquer une infinité de carrés d'ordre 3 qui sont des multiples consécutifs de 3 : 15, 18, 21, 24, …et ce, en ajoutant dans toutes les cases du carré, les entiers 1, 2, 3, …

Pour les ordres $n \geq 10$, nous conjecturons qu'il est possible d'avoir les sommes consécutives à partir de celle du carré normal.

Nous savons maintenant comment trouver une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordres $n \geq 4$, de sommes consécutives à partir d'un certain entier > 0. De plus, pour les ordres 4, 5, 6, 7, 8, 9, les sommes consécutives commencent avec celle du carré normal soit $S = \dfrac{n^3 + n}{2}$.

14.17.1 Carrés doublement magiques

Nous allons construire un carré magique très spécial. Il est d'ordre 16, de somme $S = 2056$ et peut être vu comme un carré magique d'ordre 4 dont la somme A est un carré magique.

52	63	62	49	228	239	238	225	212	223	222	209	4	15	14	1
53	58	59	56	229	234	235	232	213	218	219	216	5	10	11	8
57	54	55	60	233	230	231	236	217	214	215	220	9	6	7	12
64	51	50	61	240	227	226	237	224	211	210	221	16	3	2	13
68	79	78	65	148	159	158	145	164	175	174	161	116	127	126	113
69	74	75	72	149	154	155	152	165	170	171	168	117	122	123	120
73	70	71	76	153	150	151	156	169	166	167	172	121	118	119	124
80	67	66	77	160	147	146	157	176	163	162	173	128	115	114	125
132	143	142	129	84	95	94	81	100	111	110	97	180	191	190	177
133	138	139	136	85	90	91	88	101	106	107	104	181	186	187	184
137	134	135	140	89	86	87	92	105	102	103	108	185	182	183	188
144	131	130	141	96	83	82	93	112	99	98	109	192	179	178	189
244	255	254	241	36	47	46	33	20	31	30	17	196	207	206	193
245	250	251	248	37	42	43	40	21	26	27	24	197	202	203	200
249	246	247	252	41	38	39	44	25	22	23	28	201	198	199	204
256	243	242	253	48	35	34	45	32	19	18	29	208	195	194	205

Voilà pourquoi ce carré est appelé **carré doublement magique**. C'est comme si nous avions deux carrés magiques dans le même carré!!!

Voyons ce carré d'ordre 4. Dans ses seize cases, nous trouvons un petit carré magique d'ordre 4. Le carré bleu, par exemple, est un diabolique normal. Si nous additionnons les quatre carrés magiques de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, alors nous trouvons toujours le même carré magique A.

496	540	536	484
500	520	524	512
516	504	508	528
544	492	488	532

A

Ce carré A est bien entendu magique de somme $S = 2056$. De plus, notre carré magique d'ordre 16 est normal. Appelons M ce carré d'ordre 16 et M', le grand carré d'ordre 4.

Le carré M'est magique de somme A.

Nous dirons que M et M' forment une paire de **carrés doublement magiques**.

Voici un autre carré magique M, cette fois d'ordre 12. Il est normal de somme $S = 870$. Nous pouvons voir ce carré comme étant un carré d'ordre 4. Nous trouvons un carré magique dans chacune de ses seize cases. Ces seize carrés sont d'ordre 3 et sont presque normaux. M'est de somme A, carré magique de somme $S = 870$.

31	36	29	130	135	128	121	126	119	4	9	2
30	32	34	129	131	133	120	122	124	3	5	7
35	28	33	134	127	132	125	118	123	8	1	6
40	45	38	85	90	83	94	99	92	67	72	65
39	41	43	84	86	88	93	95	97	66	68	70
44	37	42	89	82	87	98	91	96	71	64	69
76	81	74	49	54	47	58	63	56	103	108	101
75	77	79	48	50	52	57	59	61	102	104	106
80	73	78	53	46	51	62	55	60	107	100	105
139	144	137	22	27	20	13	18	11	112	117	110
138	140	142	21	23	25	12	14	16	111	113	115
143	136	141	26	19	24	17	10	15	116	109	114

286	306	278
282	290	298
302	274	294

A

Ce carré magique A est la somme magique de M'.

Voyons comment nous avons fabriqué les deux paires de carrés doublement magiques ci-haut.

1) Nous prenons la structure générale des diaboliques (voir 5.10) :
La somme magique de M' est $n.\ S = 4u + 30r.$

$$M' = \begin{pmatrix} u+3r & u+14r & u+13r & u \\ u+4r & u+9r & u+10r & u+7r \\ u+8r & u+5r & u+6r & u+11r \\ u+15r & u+2r & u+r & u+12r \end{pmatrix}$$

2) Puis nous posons:

$$u = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \ ; \ r = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \ ; \ r = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

respectivement pour la première paire et la seconde. Le carré u est en bleu dans chaque cas et il est normal. Quant à r, c'est un trivial formé du nombre n^2 où n est l'ordre du carré r. Il est bien évident que les carrés $u\ et\ r$ sont du même ordre!!!

3) Il en résulte un premier carré d'ordre 4x4 = 16 et d'un second d'ordre 4x3 = 12. De plus, ces deux carrés d'ordres 16 et 12 sont magiques puisque M' et A le sont. Ils sont normaux par construction.

Nous allons décrire maintenant le procédé que nous allons utiliser pour construire des paires de carrés doublement magiques. Celui-ci n'est pas unique. Les carrés de la paire sont notés M et M'et ces deux carrés sont en fait le même tableau que nous pouvons regarder de deux façons différentes!!! Appelons **«procédé DM»,** la démarche en trois étapes qui suit :

Première étape :

Nous prendrons une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre $m \geq 3.$ Pour ce faire, nous utiliserons les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3 (voir chapitre 11) ou encore, les fichiers «Ordre 3», «Ordre 4», … dans MATHEMATICA, EXCEL.

Cette structure est un carré magique défini à l'aide de trois variables $a, r\, et\, t.$ Nous allons poser :

$$t = m\,r$$

Ainsi, les m^2 termes formeront une suite arithmétique de raison r et ce carré sera défini à l'aide de deux variables seulement soient $a\, et\, r.$ Appelons M' ce carré.

La somme magique de M' est donc : $S' = m\,a + \dfrac{(m^3 - m)}{2}\, r.$

Deuxième étape :

Dans M', les variables ne seront pas remplacées par des nombres mais par des carrés magiques d'ordre $n.$ Nous prendrons :

1) $a = B,$ un carré magique normal d'ordre $n \geq 3.$
2) $r = C,$ un carré trivial du même ordre formé du nombre $n^2.$

Ainsi le carré M'renferme une suite arithmétique de m^2 carrés magiques d'ordre $n.$ Sa somme est le carré magique: $S' = m\,B + \dfrac{(m^3 - m)}{2}\, C.$

Troisième étape :

Nous pouvons maintenant voir M' comme étant un carré d'ordre $m\,n$ soit notre carré M. Nous pouvons conclure que M est un carré magique puisque M' et S' sont magiques. De plus, M est normal par construction. Enfin, la somme S de M est la même que celle de S' soit :

$$S = \frac{(m\,n)^3 + m\,n}{2}$$

Voyons un exemple du procédé DM.

Nous partons de la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 5 faite avec ALG-1 (voir «Ordre 5») et nous posons t = 5r pour obtenir M'.

$$M' = \begin{pmatrix} a+14r & a+21r & a+8r & a+15r & a+2r \\ a+r & a+13r & a+20r & a+7r & a+19r \\ a+18r & a & a+12r & a+24r & a+6r \\ a+5r & a+17r & a+4r & a+11r & a+23r \\ a+22r & a+9r & a+16r & a+3r & a+10r \end{pmatrix}$$

Dans ce carré magique de somme $5a+60r$, nous posons :

$$a = B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad r = C = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons ainsi notre carré M' :

130	135	128	193	198	191	76	81	74	139	144	137	22	27	20
129	131	133	192	194	196	75	77	79	138	140	142	21	23	25
134	127	132	197	190	195	80	73	78	143	136	141	26	19	24
13	18	11	121	126	119	184	189	182	67	72	65	175	180	173
12	14	16	120	122	124	183	185	187	66	68	70	174	176	178
17	10	15	125	118	123	188	181	186	71	64	69	179	172	177
166	171	164	4	9	2	112	117	110	220	225	218	58	63	56
165	167	169	3	5	7	111	113	115	219	221	223	57	59	61
170	163	168	8	1	6	116	109	114	224	217	222	62	55	60
49	54	47	157	162	155	40	45	38	103	108	101	211	216	209
48	50	52	156	158	160	39	41	43	102	104	106	210	212	214
53	46	51	161	154	159	44	37	42	107	100	105	215	208	213
202	207	200	85	90	83	148	153	146	31	36	29	94	99	92
201	203	205	84	86	88	147	149	151	30	32	34	93	95	97
206	199	204	89	82	87	152	145	150	35	28	33	98	91	96

formé de vingt-cinq carrés magiques presque normaux d'ordre 3 dont le normal en bleu.

Nous trouvons donc dans M' vingt-cinq carrés magiques presque normaux d'ordre 3 qui forment une suite arithmétique de raison r, un carré trivial formé du nombre 9 et dont le premier terme est un carré normal d'ordre 3. La somme S' de M'est le carré magique :

560	585	550
555	565	575
580	545	570

$$S' = 5B + 60C$$

Nous pouvons observer, pendant la construction de M', qu'apparaissent tous les entiers consécutifs de 1 à 225. Puisque $m = 5 et\, n = 3$, nous obtenons le carré M d'ordre 5x3 = 15 qui renferme donc tous les entiers de 1 à 225 et de plus, il est facile de voir que M est magique puisque M' et S' le sont.

Par exemple, nous voyons bien qu'à partir de la première rangée de M, nous avons :

$$130 + 193 + 76 + 139 + 22 = 560$$
$$135 + 198 + 81 + 144 + 27 = 585$$
$$128 + 191 + 74 + 137 + 20 = 550$$

Puis $560 + 585 + 550 = 1695$, la somme magique de S' qui est aussi la somme magique de M.

Nous venons de trouver une paire de carrés doublement magiques soit {M' ; M}

Nous dirons que M'est doublement magique ainsi que M.

Nous venons de construire un carré magique normal d'ordre 15 en utilisant les ordres 5 et 3.

De la même façon, nous pourrions construire des carrés magiques normaux d'ordres 5k où k est un entier ≥ 3.

Puis d'ordres $m\,n$ où $m \geq 3 et\, n \geq 3$ sont des entiers.

Nous avons donc un autre procédé pour construire des carrés magiques normaux!!! Ceux-ci sont doublement magiques!!!

Si vous voulez construire un carré magique normal d'ordre 20, nous vous suggérons d'utiliser le fichier «Ordre 20» de MATHEMATICA, EXCEL ou MAPLE. Mais si vous voulez construire un carré magique normal d'ordre 20 doublement magique, alors vous utiliserez le procédé DM avec les ordres 5 et 4 ou 4 et 5.

Revenons au dernier carré doublement magique que nous venons de construire. Puisque M' a été obtenu avec ALG-1, alors nous savons que M'est associatif. Donc si nous prenons deux carrés d'ordre 3 symétriques par rapport au centre du carré M'(ou M), alors la somme de ces deux carrés sera toujours :

$$\frac{2S'}{5} =$$

224	234	220
222	226	230
232	218	228

De plus, les petits carrés dans M'sont d'ordre 3 donc associatifs et M'est associatif d'où M est associatif. (Voir problème 58 de 14.18).

Voyons un dernier exemple où M est d'ordre 9 tandis que M'est d'ordre 3. À partir du fichier «Ordre 3» (voir MATHEMATICA ou EXCEL), dans la structure générale, nous posons $t = 3r$. Puis nous prenons un équivalent de cette structure générale afin d'obtenir le carré suivant :

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	4 9	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

120	135	114
117	123	129
132	111	126

S'

M'est un carré magique de somme S', à son tour carré magique de somme 369. Le carré M est magique normal de somme 369. Ici, la somme magique de M'est $S' = 3a + 12r$ avec :

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} et\ r = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Un carré magique M est **doublement magique** si les conditions suivantes sont respectées :

1) Le carré M, d'ordre mn, est normal avec $m \geq 3 et\ n \geq 3$, des entiers.
2) Nous pouvons voir M comme carré d'ordre m, noté M', tel que chacune de ses m^2 cases renferme un carré magique d'ordre n.
3) Le carré M'est magique et sa somme est un carré magique notée S'.
4) M et S' ont la même somme magique.

En d'autres mots, un carré magique M est doublement magique si nous voyons en lui un autre carré magique!!! En regardant ce carré, je vois un carré magique et vous, vous en voyez un autre.

Ce que nous venons de voir nous permet d'énoncer :

Le procédé DM permet de construire une infinité de carrés doublement magiques.

Le plus petit ordre d'un carré doublement magique est 9.

En général, les carrés magiques ne sont pas doublement magiques. Voyons un exemple :

Allez dans le fichier «Ordre 12» et construisez un carré arithmétique normal avec a = 1, r = 1 et t = 12. Dans ce carré magique, vu comme carré d'ordre 4, nous trouvons au moins un carré d'ordre 3 qui n'est pas magique. Vu comme carré d'ordre 3, nous trouvons au moins un carré d'ordre 4 qui n'est pas magique. Dans les deux cas, M' n'est pas magique.

L'étude des carrés doublement magiques nous offre un domaine de recherche extraordinaire!!! Nous allons observer quelques résultats pour le moins curieux!!!

Construisons M, un carré magique normal d'ordre 15 avec ALG-1 (fichier «Ordre 15») en posant a = 1, r = 1, t = 15. Puis subdivisons M en vingt-cinq sous-carrés d'ordre 3.

Nous constatons alors que tous ces carrés d'ordre 3 ne sont pas magiques!!!

La somme des carrés d'ordre 3 de chaque rangée et de chaque colonne donne le même carré A et celui-ci est magique de somme 1695, la même que celle de M. Quelle surprise!!! Voici ce carré A:

A =

570	635	490
485	565	645
640	495	560

M'est donc semi-magique. Il n'est pas magique car les deux diagonales donnent deux carrés différents de A et de plus, ceux-ci ne sont pas magiques :

570	1085	490
35	565	1095
640	45	560

Diagonale principale

570	605	490
455	565	675
640	525	560

Diagonale secondaire

Nous venons de voir que le carré M n'est pas doublement magique si M'est d'ordre 5.

Avec M' d'ordre 3, nous observons que celui-ci est semi-magique même si aucun des neuf carrés d'ordre 5 n'est magique. De plus, la somme de M'est un carré magique de somme 1695!!!

Construisons maintenant un carré magique normal d'ordre 16 avec ALG-2 (fichier «Ordre 16») en posant a = 1, r = 1, t = 16. Puis subdivisons ce carré en seize sous-carrés d'ordre 4.

Nous constatons alors que ces seize carrés d'ordre 4 ne sont pas magiques!!! Pour cela, il suffit de comparer les deux premières rangées de chacun.

La somme des carrés d'ordre 4 de chaque rangée et de chaque colonne donne le même carré A et celui-ci est trivial. Quelle autre surprise!!! Voici ce carré A:

A =

514	514	514	514
514	514	514	514
514	514	514	514
514	514	514	514

M'est donc semi-magique. Il n'est pas magique car les deux diagonales donnent un carré différent de A et de plus, celui-ci n'est pas magique :

412	476	540	604
416	480	544	608
420	484	548	612
424	488	552	616

Diagonale principale

412	476	540	604
416	480	544	608
420	484	548	612
424	488	552	616

Diagonale secondaire

Ces deux derniers carrés sont identiques et sont formés de seize entiers qui forment un tableau arithmétique!!!

Nous pourrions généraliser en n'exigeant pas que les carrés dans les cases de M' soient magiques comme dans les deux derniers exemples ci-haut.

Nous savons qu'une somme de carrés non magiques peut donner un carré magique (voir problème 50 de 14.18). Alors ici, pour que M soit doublement magique, il faut qu'il soit magique et que M' soit aussi magique avec la possibilité que la somme magique de M' soit un carré A qui n'est peut-être pas magique.

Un tel carré doublement magique existe-t-il?

Les deux derniers exemples nous montrent que M est magique, par construction, et que M'est semi-magique de somme A, un carré magique (lequel est trivial dans le dernier exemple).

Les carrés doublement magiques constituent une nouvelle aventure dans la grande aventure des carrés magiques.

Dernière question : un carré magique peut-il être **triplement magique**???

14.17.2 Carrés magiques emboîtés appelés r-tours

Voir annexe 3, Partie 3 de cet ouvrage.

14.18 Problèmes

Les problèmes de 1 à 3 se réfèrent à 14.3 et les carrés sont d'ordre 3.

1) Pour W, posons $X = 1 \; et \; Y = 0$. Étant donné A, trouvez B.
2) Pour W, posons $X = Y \neq 0$. Pouvons-nous dire que W est un diviseur pour les carrés magiques d'ordre 3?
3) En cherchant des exemples où $A = BW$, nous avons rencontré des carrés magiques A qui ont la structure suivante : $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$. Trouvez la condition nécessaire et suffisante pour que A possède cette structure. Montrez qu'alors B a la même structure avec la condition $(X - Y)(X + 2Y) \neq 0$.

4) Trouvez un carré magique d'ordre 3 formé de six entiers carrés tel que ses neuf nombres soient des entiers pairs.

5) Le carré magique presque normal d'ordre n qui a la plus petite somme est le carré normal. Montrez-le.
6) Soit un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés. Si le nombre central est un multiple de 7, alors tous les nombres du carré sont des multiples de 7. Montrez-le.
7) Soit un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés. Si le nombre central est un multiple de 11, alors tous les nombres du carré sont des multiples de 11. Montrez-le.
8) Soit un carré magique d'ordre 3 formé de neuf entiers carrés. Si le nombre central est un multiple de 5, alors pouvons-nous affirmer que tous les nombres du carré sont des multiples de 5?
9) Montrez qu'un carré magique qui possède l'antisymétrie centrale est de somme nulle.
10) Dans 6.1, nous avons présenté vingt-cinq carrés magiques pandiagonaux, normaux dont les centres sont respectivement 1, 2, 3, …, 23, 24, 25. Parmi ceux-ci, quels sont ceux qui, de façon certaine, ne sont pas associatifs.
11) Toujours parmi les 25 carrés magiques de 6.1, un carré de centre u est associatif. Quel est ce u? Montrez que ce carré de centre u est associatif et même, ultra-magique.
12) Montrez que pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés magiques presque normaux tels que tous les entiers de ces carrés se terminent par le même chiffre, ce chiffre pouvant varier de 0 à 9. En déduire que tous ces carrés sont à la fois verticaux et horizontaux.
13) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 6 tel que tous ses entiers se terminent par le chiffre 7.
14) Démontrez que pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés magiques presque normaux qui renferment n^2 entiers consécutifs dont un seul est premier.

15) Démontrez que pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés parfaits.
16) Montrez qu'il est possible de construire une suite de carrés magiques d'ordres strictement croissants (un d'ordre 3, un d'ordre 4, un d'ordre 5, …, un d'ordre k), aussi longue que nous voulons telle que tous les carrés de cette suite soient presque normaux et ne renferment qu'un seul nombre premier, le même pour tous. Voir $M_4, M_5 \ et \ M_6$ dans 14.13.
17) Démontrez que pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe un carré composé. La preuve doit être différente de celle présentée dans 14.12. Cette preuve ne doit pas prendre plus que 3 ou 4 lignes!!!
18) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 5 qui renferme exactement 4 nombres premiers; 5 nombres premiers; 6 nombres premiers; 7 nombres premiers et finalement, 8 nombres premiers. De plus, nous voulons que les 25 entiers soient consécutifs.
19) Le carré magique suivant est presque normal et renferme exactement deux nombres premiers. Quelle opération pouvons-nous effectuer afin d'obtenir un nouveau carré magique presque normal qui contiendra respectivement 1 et 3 nombres premiers?

364	365	360
359	363	367
366	361	362

20) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 3 et de somme $S = 81$ qui renferme exactement 3 nombres premiers.
21) Pourquoi les carrés $M_{11}, M_{12} \ et \ M_{13}$ sont-ils associatifs?
22) Un carré magique d'ordre 2 peut-il être associatif? Si oui, expliquez. Si non, donnez un exemple.
23) Trouvez un carré magique M, presque normal d'ordre 5 et de somme S tel que son centre soit S/5 et que M ne soit pas associatif.
24) Démontrez qu'un carré magique d'ordre 3 est toujours associatif.
25) Trouvez un carré magique presque normal d'ordre 10 formé de cent entiers consécutifs tel que celui-ci renferme 26 nombres premiers. Ici, $p(M) = 25$.
26) Soient M un carré magique et k, un nombre. Nous noterons M + k, le nouveau carré magique obtenu de M après avoir additionné k au nombre de chaque case de M. Soit maintenant M, un carré magique normal d'ordre 5. Nous avons donc $p(M) = 9$. Puis, définissons la fonction $g_n(A)$ comme étant la fonction qui fait correspondre au carré magique presque normal A, d'ordre n, le nombre de nombres premiers situés dans A. Ainsi, nous avons le tableau suivant :

$g_5(M)=9 \quad g_5(M+2)=8 \quad g_5(M+3)=7 \quad g_5(M+11)=6$

(**) $g_5(M+31)=5 \quad g_5(M+71)=4 \quad g_5(M+109)=3 \quad g_5(M+197)=2$

$g_5(M+1123)=1 \quad g_5(M+1327)=0$

Pour construire un carré magique d'ordre 5 qui renferme exactement 3 nombres premiers, il suffit de prendre un carré magique normal d'ordre 5 et d'additionner le nombre 109 au nombre de chaque case. Donc, il suffit de faire $M+109$.

Nous avons construit un programme dans MAPLE qui nous permet de trouver des tableaux (**). Ce programme n'est cependant plus disponible.

a) Trouvez A, un carré magique presque normal d'ordre 9 tel que $g_9(A)=0$.
b) Trouvez A, un carré magique presque normal d'ordre 3 tel que $g_3(A)=3$.
c) Existe-t-il un carré magique presque normal A d'ordre 13 tel que $g_{13}(A)=13$? Si oui, trouvez-le.
d) Existe-t-il un carré magique presque normal A d'ordre 13 tel que $g_{13}(A)=20$? Si oui, trouvez-le.

27) L'affirmation suivante est-elle vraie : «Il existe au moins 275 305 224 carrés magiques d'ordre 5, presque normaux, primitifs, qui renferment exactement trois nombres premiers»? Si vous répondez oui, alors pouvez-vous en donner 275 305 224?

28) Nous allons rappeler ici quelques résultats sur les carrés magiques reliés aux nombres premiers puis introduire les quadruplets jumeaux voisins.

a) Pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe un carré magique qui renferme n^2 nombres premiers distincts. (voir chapitre 10)
b) Pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés parfaits. (voir problème 15 ci-haut)
c) Pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés magiques qui renferment n^2 entiers consécutifs, tous ≥ 1, dont un seul est un nombre premier. (voir problème 14 ci-haut)

d) Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous pouvons trouver un carré magique M formé de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 1 qui renferme exactement k nombres premiers où $0 \leq k \leq p(M)$. (voir 14.13)

e) Pour tous les ordres $n \geq 3$, si notre carré magique est formé d'entiers consécutifs, tous ≥ 1, alors celui-ci ne peut pas contenir plus que $n^2 / 2$ nombres premiers si n est pair et ne peut pas contenir plus que $(n^2+1)/2$ nombres premiers si n est impair.

f) Par exemple, avec $n = 8$, il existe un carré magique formé de 64 entiers consécutifs tous ≥ 1, qui renferme soit 0, 1, 2, …, 18 nombres premiers. Il n'en existe aucun qui contienne 33, 34, …, 64 nombres premiers. Pour l'instant, nous ne pouvons rien affirmer de 19 à 32 nombres premiers.

Nous savons qu'il existe beaucoup de nombres premiers jumeaux c'est-à-dire des nombres premiers de la forme p, $p+2$. Nous pouvons parler de couple de nombres premiers jumeaux comme $(3;5), (5;7), \ldots, (41;43), \ldots$ Nous pourrions considérer $(2;3)$ comme une exception!!!

Nous ne savons pas, à ce jour, s'il existe une infinité de couples de nombres premiers jumeaux.

Nous appelons **triplet jumeau**, un triplet de nombres premiers de la forme $(p; p+2; p+4)$. Nous connaissons le triplet jumeau $(3;5;7)$. C'est le seul!!!

Nous appelons **n-uplet jumeau**, un n-uplet de nombres premiers de la forme :

$$(p; p+2; p+4; \ldots, p+2(n-1))$$

g) Démontrez qu'il n'existe qu'un seul triplet jumeau.

h) Démontrez qu'il n'existe pas de quadruplet (4-uplet) jumeau.

i) Démontrez qu'il n'existe pas de n-uplet jumeau avec n, un entier ≥ 5.

Nous appelons **quadruplet jumeau voisin**, un quadruplet de nombres premiers de la forme

$$(p; p+2; p+6; p+8)$$

Par exemple, $(11; 13 ; 17 ; 19)$. Nous y voyons deux paires de nombres premiers jumeaux séparées par un seul entier impair.

j) Démontrez que dans un quadruplet jumeau voisin, les chiffres des unités sont, dans cet ordre, 1, 3, 7, 9, à la condition que $p > 7$. Ce que nous retrouvons dans le quadruplet $(11; 13 ; 17 ; 19)$.

Nous avons construit un programme dans MAPLE qui nous permet de trouver des quadruplets jumeaux voisins, appelé «Quadruplets jumeaux voisins». Nous en avons trouvé, dans l'intervalle de 1 à 10^{10}, exactement 180529 et nous pourrions en trouver encore bien d'autres. En voici quelques-uns dont un très grand qui admet comme premier nombre, le nombre en rouge suivant :

$$(5;7;11;13)\ ;\ (11;13;17;19)\ ;\ (101;103;107;109)\ ;\ (191;193;197;199)\ ;\ (821;823;827;829)$$
$$(1481;1483;1487;1489)\ ;\ (1871;1873;1877;1879)\ ;\ (2081;2083;2087;2089)$$
$$(99000000925871\ ;\ 99000000925873\ ;\ 99000000925877\ ;\ 99000000925879)$$
$$(300000000000998893691\ ;\ ...93\ ;\ ...97\ ;\ ...99)$$

Il est donc possible de construire des carrés magiques presque normaux dans lesquels nous trouverons un ou plusieurs quadruplets jumeaux voisins (Partie 3, annexe 7, page 9).

k) Construisez deux carrés magiques presque normaux d'ordre 3 qui contiennent un seul quadruplet jumeau voisin.
l) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 3 qui contient deux quadruplets jumeaux voisins.
m) Construisez un carré magique presque normal d'ordre ? qui contient trois quadruplets jumeaux voisins.
n) Sans le construire, pouvez-vous indiquer comment fabriquer un carré magique dans lequel il y aurait neuf quadruplets jumeaux voisins? Nous vous suggérons d'utiliser le programme «Quadruplets jumeaux voisins». (Annexe 23, sous-programme 3 dans 35)
o) Sans le construire, pouvez-vous indiquer comment fabriquer un carré magique dans lequel il y aurait quinze quadruplets jumeaux voisins? Nous vous suggérons d'utiliser le programme «Quadruplets jumeaux voisins».

29) Démontrez qu'à l'exception du quadruplet $(5;7;11;13)$, tout quadruplet jumeau voisin a la forme $(11+30k\ ;\ 13+30k\ ;\ 17+30k\ ;\ 19+30k)$ où k est un entier ≥ 0.
30) Nous appelons **6-uplet jumeau voisin**, un 6-uplet de nombres premiers de la forme

$$(p;\ p+2;\ p+6;\ p+8;\ p+12;\ p+14)$$

1) Si $p>7$, montrez qu'un 6-uplet jumeau voisin a la forme

$$(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23\ ;\ 30k+25) \text{ avec } k, \text{ un entier} \geq 0.$$

2) En déduire qu'il n'existe qu'un seul 6-uplet jumeau voisin et donnez-le.

31) Trouvez tous les nombres premiers m *et* n qui vérifient l'équation $m+81=n$.
32) Construisez un Dürer presque normal qui renferme sur sa première rangée le quadruplet jumeau voisin $(11;13;17;19)$.

33) Ce problème présente une conjecture que nous appelons : conjecture CBCS.

Il existe une infinité de quadruplets jumeaux voisins.

34) Démontrez que pour tous les ordres $n \geq 4$, il est possible de trouver une infinité de carrés magiques presque normaux dont les sommes magiques sont consécutives. (Voir problème 59 de 5.18)

35) Avec n = 3, il est impossible de trouver une infinité de carrés magiques presque normaux dont les sommes magiques sont consécutives. Pourquoi?

36) Démontrez le théorème 14.13 de 14.11.

37) Trouvez toutes les figures magiques du dernier carré de 14.13 qui renferment les quatre cases centrales.

38) Dans 14.15.2, montrez que l'unité du corps T est unique.

39) Dans 14.15.2, montrez que l'inverse d'un élément de T est unique.

40) Répondez aux questions 1, 2, 3 et 4 de 14.15.1.

41) Démontrez le théorème 14.24.

42) Dans la Partie 1 de cet ouvrage, nous avons rencontré le Gaudi (carré 24). Celui-ci contient deux répétitions (deux fois le 10 et deux fois le 14). Il a probablement été obtenu à partir du carré d'Albert Dürer. Il est de somme 33. À partir du carré A suivant :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

pouvez-vous construire un carré magique de somme 33 formé d'entiers non négatifs et sans répétition? Ce serait une amélioration du Gaudi!!! Notons que les carrés 24 et A sont des Dürer. Nous pourrions également améliorer le carré de Gaudi avec un carré de somme 33 renfermant une seule répétition au lieu de deux. Comment?

43) En vous servant de la liste des 880 carrés magiques normaux primitifs d'ordre 4 (voir la Partie 3, annexe 23, programme 01), trouvez quatre carrés magiques de somme 33 formés d'entiers non négatifs, sans répétition, dont seulement deux seront des Dürer.

44) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 6, de somme magique 800 dont 115 est le plus petit entier.

45) Soit M, le carré magique d'ordre 3 suivant et W, un diviseur universel :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

M

X	Y	Y
Y	X	Y
Y	Y	X

W

a) Trouvez le déterminant de M.
b) Quand le déterminant de W s'annule-t-il?
c) Montrez que si X et Y sont des entiers non négatifs, alors le déterminant de W est non nul dès que X est différent de Y.
d) Montrez que si le déterminant de W est non nul, alors il existe un carré magique unique M' tel que M = W M'= M'W.
e) Montrez que si Z a la même structure que W, alors Z W = W Z et Z W a la même structure que W.
f) Montrez que si $\det(W) \neq 0$, alors il existe un carré magique M' tel que $M = W^k M'$ où k est un entier ≥ 1. De plus, $\det(M') \neq 0$. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{M}{M'} = W^k$$

où M est un carré magique quelconque d'ordre 3 à déterminant non nul.

g) Utilisez le carré M ci-haut puis X = 0 et Y = 1 pour W et finalement, k = 4. Montrez alors que : $M = W^4 M'$. Quel est le carré M'? Vérifiez que M' est magique.
h) Que se passe-t-il si le déterminant $\det(M) = 0$?

46) Montrez que si A est associatif, alors $kA + m$ est associatif.

47) Démontrez qu'une condition nécessaire pour qu'un carré magique d'ordre impair soit associatif est que la case centrale renferme le nombre $\frac{S}{n}$.

48) Considérons le carré magique suivant :

	a			c	
	d			b	

M

	d			b	
	a			c	

M’

Sur la diagonale principale de M, nous choisissons deux cases symétriques par rapport au centre du carré dans lesquelles nous trouvons les nombres a et b et ces deux cases sont séparées par k cases (sur le carré illustré, k = 2). Puis sur la diagonale secondaire, nous faisons exactement la même chose. Les quatre cases forment donc un carré.

Nous allons permuter les rangées a c et d b de M pour obtenir un nouveau carré M’. Ensuite nous allons permuter les colonnes d a et b c de M’ pour obtenir le carré M’’suivant :

	b			d	
	c			a	

M’’

a) Montrez que le nouveau carré M’’ est magique.

b) Montrez que si M est presque normal, alors M et M’’ sont primitifs.

c) Pouvez-vous trouver d’autres carrés M’’?

49) Dans 14.13, retrouvez la définition des carrés magiques appelés «intrus». Construisez maintenant un intrus presque normal d’ordre 5 qui renferme un nombre premier dans sa case centrale et vingt-quatre nombres composés dans ses autres cases. Pour vous aider, nous vous suggérons de consulter l’annexe 11 de la Partie 3. Votre carré sera un bel-intrus!!!

50) Construisez deux carrés A et B d'ordre 5 qui ne sont pas magiques mais dont la somme A+B est un carré magique.

51) Avec le procédé DM, pouvons-nous construire un carré doublement magique d'ordre 2p où p est un nombre premier?

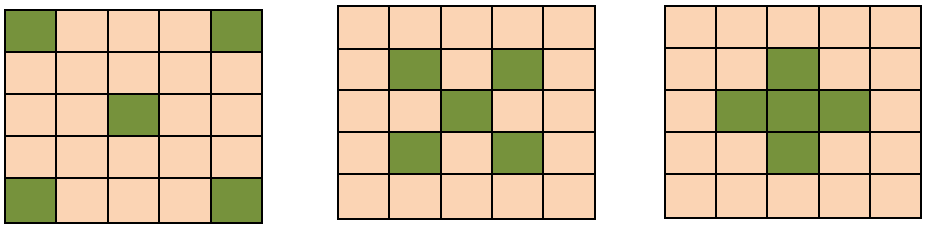
52) Dans la section 14.13, nous avons construit des carrés arithmétiques verticaux-alpha. Ceux-ci étaient formés que d'entiers pairs. Construisez un carré arithmétique vertical-alpha presque normal formé exclusivement d'entiers impairs.

53) Nous avons défini un carré magique vertical-alpha et horizontal-alpha dans la section 14.13 de ce chapitre. Montrez que si de tels carrés existent, alors l'ordre n de ces carrés est soit $n = 5$, soit $n = 20k$ où $k \geq 1$ est un entier.

54) Considérons le fichier «Ordre 10» dans lequel nous trouvons une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 10. Que se passe-t-il si $r = 10k_1 \; et \; t = 10k_2$ où $k_1 \; et \; k_2$ sont des entiers ≥ 0? Le carré sera-t-il presque normal?

55) Démontrez que dans un carré vertical d'ordre impair $n \geq 3$, si un des entiers est pair, alors tous les entiers du carré sont pairs et si un des entiers est impair, alors tous les entiers du carré sont impairs. Dans un carré vertical, il est donc impossible d'avoir, par exemple, les entiers 37 et 26. Il en est de même d'un carré horizontal.

56) Retrouvez le carré d'ordre 15 dans 14.17.1. Il est doublement magique et vu comme carré magique d'ordre 5, sa somme est le carré magique S'. Montrez que les figures (en vert) qui suivent sont magiques :



57) À partir des deux derniers carrés de 14.6, montrez que le carré normal qui est associatif Implique que M est associatif.

58) Dans 14.17.1, considérez un carré doublement magique. Si M' d'ordre m est associatif et si tous ses m^2 carrés d'ordre n sont associatifs, alors le carré M d'ordre mn est associatif.

59) Ce carré magique d'ordre 5 est-il un intrus? Un bel-intrus?

17	193	59	13	151
199	101	29	37	67
31	109	203	43	47
163	19	53	71	127
23	11	89	269	41

60) Construisez un bel-intrus d'ordre 7.

61) Il existe une suite J d'entiers consécutifs tous ≥ 1, **aussi longue que nous voulons**, laquelle ne renferme aucun nombre premier. Démontrez. (Voir (*) dans 14.13).

62) Démontrez le théorème 14.15.1 de la section 14.12.

63) Soit donné, l'intervalle fermé $[p\ ;\ q]$ où $p \geq 3\ et\ q$ sont des nombres premiers consécutifs. Si nous voulons exactement n^2 entiers composés dans l'intervalle ouvert $]p\ ;\ q[$, alors une condition nécessaire est que $n \geq 3$ soit un entier impair.

64) Nous n'avons jamais trouvé un intervalle $[p_1\,;\,p_2]$ tel que $p_1 \geq 3\ et\ p_2$ soient des nombres premiers consécutifs, qui renferme trente-six entiers composés. Pourquoi?

15. Les carrés multiplicatifs

15.1 Introduction

Considérons un carré d'ordre n tel que le produit des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale soit toujours égal à un même nombre P appelé produit magique. Un tel carré se nomme **carré multiplicatif**.

Notre objectif est de construire des carrés multiplicatifs d'ordre $n \geq 3$ presque normaux donc qui renferment que des entiers ≥ 1, tous différents deux à deux.

Si un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$ est presque normal, alors son produit magique est non nul. Il en est de même si les n^2 nombres d'un carré multiplicatif sont différents deux à deux, le produit sera toujours non nul. En effet, dans ce cas, si le carré contient le nombre 0, alors il n'en contient qu'un seul et ce carré ne pourra pas être multiplicatif.

Nous décidons dès maintenant de construire seulement des carrés multiplicatifs d'ordre $n \geq 3$ et de produit $P > 0$, donc contenant aucun zéro.

Ces carrés multiplicatifs existent pour tous les ordres $n \geq 1$. Pour $n = 1$, l'unique case contient un seul nombre.

5

Ici, rangée, colonne et diagonales se confondent et le produit magique est $P = 5$.

Pour $n = 2$, il est facile de montrer que le carré a une des formes suivantes :

k	k
k	k

0	0
m	0

Le carré de droite renferme trois zéros et m est un nombre réel quelconque. Mais ces carrés ne sont pas presque normaux! (Voir problème 1 de 15.7)

Pour $n \geq 3$, nous pouvons utiliser l'exponentiation pour construire une infinité de carrés multiplicatifs à partir d'un seul carré magique, lequel existe toujours.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$S = 15$

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

$P = 2^{15} = 32\,768$

16	512	4
8	32	128
256	2	64

$P = 32\,768$

D'où le carré multiplicatif de produit magique $P = 32\,768$. Ici, l'exponentiation était en base $a = 2$.

Nous aurions pu choisir une toute autre base et ainsi remplacer x dans le carré magique par 3^x *ou* 4^x *ou* 5^x, …

Par contre, ce procédé d'exponentiation nous donne des carrés multiplicatifs qui renferment de très grands nombres. Que dire si la base était 60 ou 34567? Cependant, nous verrons plus loin que tout carré multiplicatif formé de nombres positifs (>0) s'obtient par exponentiation!!!

Notons que dans le procédé d'exponentiation, tous les nombres du carré multiplicatif ont la forme a^m où m est un nombre du carré magique et $a > 0$, un nombre réel fixe.

Si A et B sont deux carrés magiques différents d'ordre $n \geq 3$, alors il est évident que les deux carrés multiplicatifs obtenus par exponentiation de base $0 < a < 1$ *ou* $a > 1$, seront différents.

De plus, si M est un carré magique d'ordre n et N, le carré multiplicatif obtenu par exponentiation, alors M et N possèdent exactement les mêmes figures magiques. Une figure magique dans un carré magique d'ordre n et de somme S est un groupe de n cases distinctes de somme S tandis qu'une figure magique dans un carré multiplicatif d'ordre n et de produit P est un groupe de n cases distinctes de produit P.

Si nous utilisons le procédé d'exponentiation, alors a, la base choisie, vérifiera toujours la relation $0 < a < 1 \; ou \; a > 1$. Avec $a = 1$, nous obtiendrions un carré trivial formé de 1.

Soit maintenant E_n, l'ensemble des carrés magiques d'ordre n et F_n, l'ensemble des carrés multiplicatifs d'ordre n, formés de nombres > 0. Alors il existe une injection de $E_n \; dans \; F_n$. Il existe également une injection de $F_n \; dans \; E_n$. Donc nous avons bien une bijection de $E_n \; sur \; F_n$. En effet, la première injection se fait avec l'exponentiation tandis que la seconde se fait à l'aide du logarithme.

Il y a donc autant de carrés magiques d'ordre n que de carrés multiplicatifs formés de nombres > 0, également d'ordre n.

15.2 Les carrés multiplicatifs d'ordre 3

Nous allons trouver la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 3 et de produit magique $P \neq 0$. Pour cela, nous devons savoir que si $P \neq 0$, alors P est le cube du nombre central (théorème 13.6 de 13.3). Si le nombre de la case centrale est d, alors $P = d^3$ et donc, $d \neq 0$. Il est clair que a, b, c, d et x sont non nul sachant que P est non nul.

a	b	$\frac{P}{ab}$
c	d	$\frac{P}{cd}$
$\frac{P}{ac}$	$\frac{P}{bd}$	x

En se servant de la troisième colonne et de la troisième rangée, il est facile de montrer que $x = \frac{abcd}{P} = \frac{abcd}{d^3} = \frac{abc}{d^2}$ puisque $P = d^3$. De plus, les diagonales sont magiques et nous conduisent toutes les deux à l'égalité $a^2bc = d^4$. Nous prendrons $b = \frac{d^4}{a^2c}$. Avec ces valeurs de x et b, il est facile de vérifier que le carré est multiplicatif. Voici donc une structure générale (*) des carrés multiplicatifs d'ordre 3 de produits non nuls.

(*)

a	$\frac{d^4}{a^2c}$	$\frac{ac}{d}$
c	d	$\frac{d^2}{c}$
$\frac{d^3}{ac}$	$\frac{a^2c}{d^2}$	$\frac{d^2}{a}$

Cette structure générale (*) génère tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 à produits non nuls. Si un carré multiplicatif M est presque normal, alors son produit est évidemment non nul et M sera issu de (*). Par exemple, avec $a = 40$, $c = 50$ et $d = 20$, nous obtenons le carré multiplicatif :

40	2	100
50	20	8
4	200	10

Ce carré multiplicatif est presque normal et son produit est $P = 8000$. Puisque $P \neq 0$, le nombre central est bien $\sqrt[3]{8000} = 20$.

Dans (*), $P \neq 0$ implique que les variables $a, c\ et\ d$ ne peuvent pas prendre la valeur 0. Tous les nombres de (*) sont donc non nuls. Si $a, c\ et\ d$ sont non nuls, alors tous les nombres de (*) le sont aussi et ainsi, $P \neq 0$. Donc $P = d^3$. Enfin, si $P = 0$, alors nous trouvons dans (*) au moins trois cases qui renferment le nombre 0 et le carré n'est pas presque normal. De plus, il se peut que le centre soit non nul.

Maintenant, avec $a, c\ et\ d$ non nuls, il se peut que certains nombres du carré soient négatifs même si $P > 0$. Regardons avec $a = -40$, $c = 50\ et\ d = 20$. Nous avons pris $d > 0$ car nous voulions $P > 0$. Le carré multiplicatif suivant n'est pas presque normal et $P = 8000$.

-40	2	-100
50	20	8
-4	200	-10

Enfin, dès que $a, c\ et\ d$ sont non nuls, nous savons aussitôt que $P = d^3$.

Par la suite, les variables $a, c\ et\ d$ seront toujours non nulles et ainsi le produit P sera toujours non nul.
Nous dirons aussi produit au lieu de produit magique.

Voyons maintenant ce qu'est un carré multiplicatif associatif. Un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 2$ et de produit P est **associatif** si le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[n]{P^2}$. Le carré (*) est associatif puisque le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est

$d^2 = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{d^6}$. Notons que la case centrale a pour case symétrique par rapport au centre du carré, la case central elle-même d'où $d.d = d^2$.

Théorème 15.1 :

Si un carré multiplicatif d'ordre impair $n \geq 3$ et de produit P est associatif, alors sa case centrale renferme le nombre $\sqrt[n]{P}$.

Preuve :

Sur une grande diagonale, nous avons $\frac{n-1}{2}$ paires de cases distinctes symétriques par rapport au centre du carré et la case centrale qui renferme le nombre m. Nous avons donc :

$$P = m\left(\sqrt[n]{P^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} = m\left(P^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = m\ P^{\frac{n-1}{n}}\ d'où\ m = P^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{P} \qquad si\ P \neq 0$$

Si $P = 0$, alors $\sqrt[n]{P^2} = 0$ et le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est évidemment 0. Puisque la case symétrique par rapport au centre du carré de la case centrale est la case centrale elle-même, alors celle-ci renferme $0 = \sqrt[n]{P}$. De plus, nous avons bien $\sqrt[n]{P}\sqrt[n]{P} = \sqrt[n]{P^2}$.

Théorème 15.2 :

Tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 avec $P \neq 0$, sont associatifs.

Preuve :

Voir la structure générale (*) ci-haut.

Un carré multiplicatif d'ordre 3 et de produit $P = 0$, peut être non associatif. Voici un exemple :

0	1	2
4	0	3
5	6	0

Théorème 15.3 :

Soit M, un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 2$ et de produit P. Si k est un nombre réel, alors le carré k M est multiplicatif de produit $k^n P$; de plus, si M est associatif alors k M est associatif. Si k M est associatif avec $k \neq 0$, alors M est associatif

Preuve : vous pouvez voir dans les deux lignes qui suivent comment se définit k M.

Si une figure magique dans M renferme les nombres $x_1, x_2, ..., x_n$ avec $x_1\, x_2 \ldots x_n = P$, alors cette figure renferme dans k M les nombres $k\, x_1, k\, x_2, ..., k\, x_n$ et le produit est $k^n P$. Puisque ce que nous venons de faire s'applique aux rangées, colonnes et grandes diagonales, le carré k M est donc multiplicatif (le produit sera toujours $k^n P$).

Si M est associatif, alors le produit des nombres $u\, et\, v$ situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[n]{P^2}$. Donc le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré k M est :

$$(k\,u)(k\,v) = k^2 \sqrt[n]{P^2} = \sqrt[n]{(k^2)^n P^2} = \sqrt[n]{(k^n P)^2}.$$

d'où k M est associatif. Si maintenant $k\,M$ est associatif avec $k \neq 0$, alors $M = \frac{1}{k}(k\,M)$ est associatif. Si $k = 0\ alors\ k\,M$ est associatif et nous ne pouvons rien dire sur M.

Revenons à la structure générale (*). Pour construire un carré presque normal, nous devons attribuer aux variables libres $a, c\, et\, d$, des valeurs entières ≥ 1, différentes deux à deux. Les autres nombres obtenus seront des rationnels que nous pourrons facilement rendre entiers en multipliant notre carré par le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Par exemple, prenons $a = 1, c = 2\ et\ d = 3$. Nous obtenons le carré multiplicatif M suivant :

1	$81/2$	$2/3$
2	3	$9/2$
$27/2$	$2/9$	9

M

18	729	12
36	54	81
243	4	162

18M

Le plus petit commun multiple de 2, 3 et 9 est 18 d'où le carré 18M est multiplicatif et associatif. Notons que le carré 18M peut s'obtenir directement de (*) avec $a = 18, c = 36 \ et \ d = 54$. Le théorème suivant nous dit pourquoi.

Théorème 15.4 :

> Soit M, un carré multiplicatif d'ordre 3 issu de (*) après avoir donné respectivement aux variables a, c et d les valeurs entières non nulles j, k et m. Soit maintenant u , le plus petit commun multiple des dénominateurs des rationnels contenus dans M. Si nous posons dans (*) $a = u\ j, c = u\,k \ et \ d = u\,m$, alors les neuf nombres du carré multiplicatif ainsi obtenu, soit u M, seront tous des entiers.

Preuve :

Posons dans la structure générale (*) $a = u\ j, c = u\,k \ et \ d = u\,m$. Il en résulte que le nombre de chaque case sera multiplié par u et sera évidemment un entier. Ce carré est donc u M.

Mais ce carré multiplicatif est-il presque normal? Il arrive souvent qu'il le soit mais voyons ce qui suit :

Exemple 1 :

Dans (*), posons $c = 162, a = 2 \ et \ d = 6$. Nous trouvons :

2	2	54
162	6	2/9
2/3	18	18

A

9	9	243
729	27	1
3	81	81

$\frac{9}{2}A$

En fait, pour obtenir le carré de droite, nous avons multiplié A par 648 et nous avons ensuite divisé 648 A par 144 ce qui est équivalent à multiplier A par 9/2. Pourquoi ces calculs? Revoici à nouveau (*) :

(*)

a	$\frac{d^4}{a^2c}$	$\frac{ac}{d}$
c	d	$\frac{d^2}{c}$
$\frac{d^3}{ac}$	$\frac{a^2c}{d^2}$	$\frac{d^2}{a}$

Le plus petit commun multiple des six dénominateurs dans (*) est le nombre u = 648 et $u\,A$ ne contient plus que des entiers. Selon le théorème précédent, nous pourrions obtenir 648 A en posant dans (*) : $c = 162 \times 648;\ a = 2 \times 648\ et\ d = 6 \times 648.$

Le carré 648 A est divisible par 144 (chacun de ses nombres est divisible par 144). Nous obtenons alors le carré multiplicatif $\frac{9}{2}A$ lequel n'est pas presque normal puisqu'il y a deux répétitions.

Nous allons trouver une **condition suffisante** pour que notre carré multiplicatif d'ordre 3 soit presque normal. La voici :

1) Les variables $a, c\ et\ d$ vont prendre des valeurs entières ≥ 1.
2) Celles-ci doivent vérifier : $c < a < d$.
3) Alors la suite des nombres de (*) :

$$\frac{a^2c}{d^2}\ ,\ \frac{ac}{d}\ ,\ c\ ,\ a\ ,\ d\ ,\ \frac{d^2}{a}\ ,\ \frac{d^2}{c}\ ,\ \frac{d^3}{ac}\ ,\ \frac{d^4}{a^2c}$$

est une suite strictement croissante et donc les neuf nombres du carré sont tous différents.

Le carré M issu de (*) sera formé de neuf nombres différents et il restera à faire partir les dénominateurs en multipliant le carré par le nombre u = le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions contenues dans notre carré. Puis, en terminant, le carré u M sera divisé par le plus grand commun diviseur de ses neuf entiers.

Ce dernier carré multiplicatif sera presque normal et ses neuf entiers seront tous premiers entre eux!!!

La condition ci-haut n'est pas nécessaire puisqu'avec $a = 18, c = 4\ et\ d = 6,$ le carré issu de (*) renferme déjà neuf entiers $\geq 1,$ tous différents deux à deux. Le carré est donc presque normal.

Si la partie 2) de la condition ci-haut n'est pas respectée, alors il faudra s'assurer qu'il n'y a pas de répétition (ce qui est facile dans un carré d'ordre 3). Si nous voulons construire un carré

multiplicatif presque normal en ne respectant pas la condition, alors il faudra peut-être recommencer quelques fois!!!

Exemple 2 :

Dans (*), nous posons $c = 6, a = 2 \ et \ d = 10.$ La condition n'est donc pas respectée. Nous obtenons les carrés suivants :

2	$\frac{1250}{3}$	$\frac{6}{5}$
6	10	$\frac{50}{3}$
$\frac{250}{3}$	$\frac{6}{25}$	50

A

1200	250000	720
3600	6000	10000
50000	144	30000

$600A$

75	15625	45
225	375	625
3125	9	1875

$\frac{600}{16}A$

Avant les simplifications dans le carré A, le plus petit commun multiple des dénominateurs était $600.$ Plus précisément, celui-ci est le plus petit commun multiple des dénominateurs de (*). Le carré $600A$ renferme que des entiers et leur plus grand commun diviseur est $16.$ D'où le carré multiplicatif final qui renferme neuf entiers premiers entre eux. Ce dernier carré, de produit 52 734 375, est presque normal et peut être obtenu de (*) avec :

$$c = 6 \times \frac{600}{16}, a = 2 \times \frac{600}{16} \ et \ d = 10 \times \frac{600}{16} \ soit \ c = 225, a = 75 \ et \ d = 375.$$

Pour trouver tous ces résultats, vous pouvez utiliser le fichier «Carré multiplicatif d'ordre 3» fait avec MATHEMATICA (Partie 3, annexe 22, fichier 9)).

Exemple 3 :

Dans (*), nous posons $c = 4, a = 18 \ et \ d = 6.$ La condition n'est donc pas respectée. Nous obtenons les carrés suivants :

18	1	12
4	6	9
3	36	2

A

23 328	1296	15 552
5184	7776	11 664
3888	46 656	2592

$1296A$

18	1	12
4	6	9
3	36	2

$\frac{1296}{1296}A$

Ce dernier carré est presque normal et son produit est $P = 216.$

Rappelons qu'un carré multiplicatif normal d'ordre $n \geq 2$ (qui contient tous les entiers de $1 \ à \ n^2$) n'existe pas (Voir chapitre 13, section 13.3).

Notre objectif sera de construire des carrés multiplicatifs presque normaux donc formés d'entiers ≥ 1 tous différents deux à deux.

Exemple 4 :

Dans (*), posons $c = 1, a = 2 \ et \ d = 3.$ Ici, la condition est respectée.

2	$\frac{81}{4}$	$\frac{2}{3}$
1	3	9
$\frac{27}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{2}$

A

72	729	24
36	108	324
486	16	162

$36A$

72	729	24
36	108	324
486	16	162

$\frac{36}{1}A$

Le carré $36A$ est presque normal puisque la condition est respectée. Les neuf entiers de $36A$ ont pour plus grand commun diviseur l'entier 1 (car ils sont premiers entre eux). Nous pouvons obtenir ce dernier carré de (*) en posant : $c = 36, a = 72 \ et \ d = 108$.

Résumons : pour construire un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3,

a) Dans (*), nous donnons aux variables $c, a \ et \ d$, des valeurs entières ≥ 1.
b) Celles-ci doivent vérifier : $c < a < d$.
c) Nous obtenons ainsi un carré multiplicatif A qui renferme neuf nombres différents deux à deux.
d) Appelons u , le plus petit commun multiple des dénominateurs de (*).
e) Le carré $u\,A$ est maintenant presque normal.
f) Appelons r, le plus grand commun diviseur des neuf entiers de $u\,A$.
g) Le carré $\frac{u}{r}A$ est multiplicatif, presque normal et renferme neuf entiers premiers entre eux. Le nombre rationnel $\frac{u}{r}$ est appelé le**« facteur correcteur».**

Plus précisément, u est le plus petit commun multiple des entiers :

$$\{a, c, d, d^2, ac, a^2c\}$$

Puis r est le plus grand commun diviseur des entiers :

$$\left\{ u\,a, \frac{u\,d^4}{a^2 c}, \frac{u\,a\,c}{d}, u\,c, u\,d, \frac{u\,d^2}{c}, \frac{u\,d^3}{a\,c}, \frac{u\,a^2 c}{d^2}, \frac{u\,d^2}{a} \right\}$$

Nous allons maintenant améliorer la condition suffisante ci-haut. Dans le résumé que nous venons de faire, b) deviendra :

(%) $\quad c < a < d \;\; ou \;\; d < a < c \;\; ou \;\; a < c < d \;\; ou \;\; d < c < a.$

Dès qu'une de ces quatre conditions est respectée, alors nous sommes assurés que le carré multiplicatif issu de (*) renfermera que des nombres différents deux à deux. Nous trouverons ensuite notre carré multiplicatif presque normal formé de neuf entiers premiers entre eux.

Nous devrons seulement surveiller si nous avons :

(&) $\quad a < d < c \;\; ou \;\; c < d < a.$

Ce sont les deux cas qui peuvent conduire à des répétitions. Il y a en tout, six cas; les quatre premiers (%) nous assurent qu'il n'y aura pas de répétition, ce qui n'est pas certain pour les deux autres (&).

Comment trouver les quatre cas (%) qui nous assurent qu'aucune répétition n'aura lieu? Pour cela, nous avons construit un exemple pour chacun des quatre cas de (%). Nous avons ensuite classé les neuf nombres du carré par ordre croissant et nous avons construit la suite des neuf expressions correspondantes dans (*).

Ainsi, pour le cas $c < a < d$, nous avons pris le carré $36A$ de l'exemple 4 d'où la suite :

$$\{16\,,\,24\,,\,36\,,\,72\,,\,108\,,\,162\,,\,324\,,\,486\,,\,729\}$$

Puis la suite des expressions correspondantes dans (*) :

(%%) $$\left\{ \frac{a^2 c}{d^2}\,,\,\frac{a\,c}{d}\,,\,c\,,\,a\,,\,d\,,\,\frac{d^2}{a}\,,\,\frac{d^2}{c}\,,\,\frac{d^3}{a\,c}\,,\,\frac{d^4}{a^2 c} \right\}$$

Si U et V sont deux expressions consécutives dans (%%), U à gauche de V, alors nous montrons facilement que U < V. La suite est donc strictement croissante d'où les neuf entiers du carré sont différents deux à deux et ce, après avoir utilisé le facteur correcteur.

Nous procédons de la même façon pour les trois autres cas de (%). Quant aux deux cas de (&), ce sont les seuls qui peuvent conduire à des répétitions!!!

ATTENTION!!! Les cas $a < d < c$ *ou* $c < d < a$ sont les seuls qui peuvent conduire à des répétitions.

Nous savons maintenant comment construire avec (*), un carré multiplicatif d'ordre 3, presque normal formé de neuf entiers premiers entre eux.

Voyons une autre structure de carrés multiplicatifs d'ordre 3 qui n'est pas une structure générale (elle ne donne pas tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 à cause du 1 de la case centrale de la première rangée); pour cela, posons dans (*) $a = m\,n^2$, $c = m^2$, $d = m\,n$ d'où le carré multiplicatif suivant qui renferme deux variables libres. Puisque dans (*), les variables a, c *et* d sont non nulles, alors il en sera de même pour les variables m *et* n.

(**)

$m\,n^2$	1	$m^2 n$
m^2	$m\,n$	n^2
n	$m^2 n^2$	m

Le carré (**) est plus facile à utiliser. Si m *et* n sont des entiers, alors il est évident que les neuf nombres du carré sont des entiers. Mais (**) ne génère qu'une partie des carrés multiplicatifs d'ordre 3 puisqu'il renferme le nombre 1 dans l'une de ses cases. Cependant, si nous multiplions (**) par k, le carré deviendra :

(***)

$k\,m\,n^2$	k	$k\,m^2 n$
$k\,m^2$	$k\,m\,n$	$k\,n^2$
$k\,n$	$k\,m^2 n^2$	$k\,m$

Nous allons montrer que (***) est une structure générale équivalente à (*). Tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 avec $P \neq 0$, proviennent de (*) mais aussi, ils proviennent tous de (***). Pour se faire, nous posons dans (*) :

$$a = k\,m\,n^2;\ c = k\,m^2;\ d = k\,m\,n$$

avec $k, m\ et\ n,$ qui ne peuvent prendre que des valeurs non nulles. Nous obtenons alors (***).

Puis en posant dans (***) :

$$m = \frac{a\,c}{d^2}\ ;\ n = \frac{a}{d}\ ;\ k = \frac{d^4}{a^2 c}$$

nous obtenons (*).

Les structures générales (*) et (***) sont donc équivalentes en ce sens qu'elles fournissent chacune, tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 avec $P \neq 0$.

Notons que si un carré issu de (*) renferme que des entiers, alors nous pourrons l'obtenir de (***) avec des valeurs de $m\ et\ n$ qui ne sont pas forcément des entiers, contrairement à k. Par exemple, avec $a = 18,\ c = 36\ et\ d = 54$, (*) nous donne :

18	729	12
36	54	81
243	4	162

Pour obtenir ce carré à partir de (***), il nous faut : $m = \frac{2}{9},\ n = \frac{1}{3}\ et\ k = 729.$

Si dans (***), les trois variables ne prennent que des valeurs entières, alors nous n'obtiendrons pas tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 formés d'entiers.

Il existe des carrés multiplicatifs d'ordre 3 formés d'entiers non nuls qui ne peuvent pas être obtenus de (***) en attribuant des valeurs entières aux variables $k, m\ et\ n.$
Le carré ci-haut en est un exemple.

Comment construire, avec (***), un carré multiplicatif formé d'entiers différents 2 à 2? Nous pouvons procéder comme suit :

a) Donnons des valeurs entières ≥ 1 aux 3 variables dans (***).
b) Prenons $n > 1,\ m > n,\ et\ n^2 > m.$
c) Les neuf entiers de (**) forment alors une suite strictement croissante.
d) D'où les neuf entiers de (***) forment aussi une suite strictement croissante.
e) Les neuf entiers de (***) sont donc différents deux à deux.
f) Voici cette suite strictement croissante de (**) :

$$\left\{1\ ,\ n\ ,\ m\ ,\ n^2\ ,\ nm\ ,\ m^2\ ,\ n^2m\ ,\ nm^2\ ,\ n^2m^2\right\}$$

Nous allons maintenant présenter les trois théorèmes suivants :

Théorème 15.5 :

Il n'existe pas de carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est $p\ ou\ p^2\ ou\ p^3$ avec p, un nombre premier.
Cependant, il existe toujours un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est p^k où k est un entier $\geq 4.$ En voici un :

p	p^{2k}	p^{k-1}
p^{2k-2}	p^k	p^2
p^{k+1}	1	p^{2k-1}

Preuve :

Essayons de construire un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 avec le nombre premier p dans la case centrale.

Dans la structure générale de (*), nous poserons $d = p.$ Puisque nous voulons un carré presque normal, alors il faut que $\frac{d^2}{a}\ et\ \frac{d^2}{c}$ soient des entiers ≥ 1 tout comme $a\ et\ c.$ Ainsi, $a\ et\ c$ sont des diviseurs entiers de $d^2 = p^2.$ Donc, les seules valeurs possibles de a et c sont :

$$a:\ 1,\ p,\ p^2$$
$$c:\ 1,\ p,\ p^2$$

Toujours parce que le carré à construire doit être presque normal, les seuls cas à considérer pour $a\ et\ c$ sont :

$$a = 1\ et\ c = p^2\ \ ou\ \ a = p^2\ \ et\ \ c = 1$$

Ceux-ci sont les seuls cas à pouvoir nous donner des carrés presque normaux. Or ces valeurs mises dans (*) nous donnent deux carrés qui renferment chacun des répétitions. Cela nous indique que si le centre contient le nombre premier p, alors le carré multiplicatif d'ordre 3 ne peut pas être presque normal.

Nous procédons de la même façon avec $p^2\ ou\ \ p^3$ dans la case centrale de (*).

Regardons maintenant ce qui se passe si la case centrale renferme $p^k où\ \ k \geq 4$ est un entier. Le carré illustré dans l'énoncé du théorème est presque normal dès que $k \geq 4$. En effet, voyons la suite des exposants des entiers de ce carré: $0, 1, 2, k-1, k, k+1, 2k-2, 2k-1, 2k$. Nous voyons bien que si k égale $0, 1, 2\, ou\, 3$, alors il y a répétition dans les exposants donc dans les entiers du carré. Mais avec $k \geq 4$, la suite ci-haut des exposants est strictement croissante d'où le carré est presque normal.

Il n'existe donc pas de carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est un des entiers suivants :

$$\{2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ \ 3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ \ 5\ ,\ 25\ ,\ 125\ ,\ \ 7\ ,\ 49\ ,\ 343\ ,...\}$$

Revoici les premiers nombres premiers :

$$\{2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ 13\ ,\ 17\ ,\ 19\ ,\ 23\ ,\ 29\ ,\ 31\ ,\ 37\ ,\ 41\ ,\ 43\ ,\ ...\}$$

Théorème 15.6:

Le plus petit produit pour un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 est $P = 216$. De plus, il existe au moins un carré multiplicatif presque normal dont le produit est 216.

Preuve :

Nous connaissons déjà un carré multiplicatif presque normal de produit $P = 216$ (Voir l'exemple 3 ci-haut). Nous savons que son centre est $\sqrt[3]{P} = \sqrt[3]{216} = 6$.

Essayons de construire avec (*), un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre d est 5, 4, 3, 2 ou 1.

Si $d = 1$, alors il est évident que $a = c = 1$. Le carré ne sera pas presque normal; en fait, il renfermera l'entier 1 dans toutes ses cases.

Si $d = 5, d = 4, d = 3 \; ou \; d = 2$, alors le théorème précédent nous assure qu'il n'existe pas de carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 puisque $2, 3 \; et \; 5$ sont des nombres premiers et 4 est le carré d'un nombre premier.

Cela montre bien que le plus petit produit magique pour un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 est $P = 6^3 = 216$. Le carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 qui a le deuxième plus petit produit a pour centre $d = 10$. Le deuxième plus petit produit est donc $P = 1000$. Les deux suivants sont $P = 1728 \; et \; P = 2744$. (Voir à la fin de 15.2).

Théorème 15.7:

Il existe, aux équivalents près, un seul carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 qui renferme dans sa case centrale, le nombre $pq \; où \; p \; et \; q$ sont des nombres premiers distincts.
Voici un des équivalents :

p	p^2q^2	q
q^2	pq	p^2
p^2q	1	pq^2

Il est facile de vérifier que les neuf entiers du carré sont différents deux à deux; évidemment, ils sont tous ≥ 1. Ce carré et ses équivalents sont donc tous presque normaux.

Preuve :

Nous allons construire un tel carré en posant dans (*), $d = pq$. Les diviseurs entiers de $d^2 = p^2q^2$ sont :

$$1, p, q, p^2, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2$$

Les valeurs possibles de a et c sont : $\begin{array}{ll} a: & 1, p, q, p^2, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2 \\ c: & 1, p, q, p^2, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2 \end{array}$

Pour que notre carré soit presque normal, il faut considérer les seuls cas suivants pour

a et c :

$$a = 1 \; et \; c = p, q, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2$$
$$a = p \; et \; c = 1, q, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2$$
$$etc...$$

Rappelons que deux carrés sont primitifs si l'un n'est pas un équivalent de l'autre.

Nous invitons le lecteur à compléter cette preuve (Voir problème 3 de 15.7). En plaçant toutes les valeurs possibles de a et c dans (*), vous trouverez 56 carrés dont 48 qui ne sont pas presque normaux. Les huit autres carrés seront les seuls susceptibles de donner des carrés presque normaux. De plus, ce sont huit équivalents dont l'un est illustré dans l'énoncé du théorème 15.7. Les neuf entiers du carré sont évidemment ≥ 1. Enfin, puisque p et q sont des nombres premiers différents, cela implique que les neuf entiers du carré sont différents deux à deux. Pour voir cela, considérez sans perte de généralité, $p < q$ et les deux cas : $q < p^2 \; et \; p^2 < q$. Le carré, et ses équivalents, sont donc tous presque normaux.

Nous savons maintenant qu'il n'existe qu'un seul carré multiplicatif, presque normal, primitif, d'ordre 3 dont le centre est 6. De même si le centre est 10 ou 35 ou 77, …

Nous pourrons toujours nous servir du carré illustré dans l'énoncé du théorème ci-haut afin de construire un tel carré.

Voici, en terminant, la liste des douze plus petits produits pour un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3, s'il existe :

$$\{216 ; 1000 ; 1728 ; 2744 ; 3375 ; 4096 ; 5832 ; 8000 ; 9261 ; 10648 ; 13824 ; 17576\}$$

Nous connaissons un carré presque normal qui a pour produit $P = 216$. De même pour $P = 1000$. Comment avons-nous trouvé cette liste de douze produits?

Pour ce faire, nous avons utilisé le théorème 15.5 et avons trouvé les entiers (en rouge) susceptibles d'occuper le centre d'un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$

De cette liste, nous avons éliminé tous les nombres premiers p ainsi que $p^2 et\ p^3$. Nous avons aussi éliminé 1. Nous avons donc éliminé 2, 4 et 8 puis 3 et 9, 5 et 25, …

Le tableau suivant nous indique, pour chaque centre, la façon de construire le carré multiplicatif presque normal en précisant dans la structure générale (*) la valeur attribuée à $a, c\ et\ d$, dans cet ordre :

Le centre d	Le produit $P = d^3$	Les coordonnées (a, c, d)
6	216	(18, 4, 6)
10	1 000	(5, 4, 10)
12	1 728	(24, 2, 12)
14	2 744	(28, 1, 14)
15	3 375	(45, 1, 15)
16	4 096	(32, 1, 16)
18	5 832	(36, 3, 18)
20	8 000	(40, 50, 20)
21	9 261	(63, 1, 21)
22	10 648	(44, 1, 22)
24	13 824	(48, 1, 24)
26	17 576	(52, 1, 26)

Il n'existe qu'un seul carré multiplicatif, presque normal, primitif, d'ordre 3 dont le centre est $d = p\,q$ où $p\,et\,q$ sont des nombres premiers. (Voir les entiers d en rouge).

15.3 Les carrés multiplicatifs d'ordre 4

Nous allons commencer par trouver la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 4. Avec celle-ci, nous pourrons construire tous les carrés multiplicatifs d'ordre 4.

Ensuite, nous allons construire la structure générale des m-Dürer et des m-super-Dürer.

Pour terminer, nous allons voir les carrés multiplicatifs d'Edwards, lesquels possèdent une propriété remarquable.

Construisons la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 4 dont le produit est non nul. Donc si $P \neq 0$, alors les variables seront toutes différentes de zéro.

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	e	f	$\frac{P}{def}$
g	h	m	$\frac{P}{ghm}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{P}{beh}$	$\frac{P}{cfm}$	A

Il est facile de montrer que $A = \frac{abcdefghm}{P^2}$. Pour que la diagonale secondaire soit magique, il faut $\frac{P}{abc} f h \frac{P}{adg} = P$ d'où $h = \frac{a^2bcdg}{fP}$. Enfin, pour que la diagonale principale soit magique, il faut $aemA = P$ d'où $m^2 = \frac{P^4}{(a^2bcdeg)^2}$ ce qui nous donne deux valeurs pour m soit $m = \frac{\pm P^2}{a^2bcdeg}$. Il est facile de vérifier qu'avec ces valeurs pour $A, h\ et\ m$, le carré est multiplicatif.

Et voilà qu'ici, notre structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 4 à produits non nuls, est formée de deux structures puisque nous avons deux valeurs de m.

Voici donc ces deux structures :

(*)

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	e	f	$\frac{P}{def}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$\frac{P^2}{a^2bcdeg}$	$\frac{ef}{g}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP^2}{a^2b^2cdeg}$	$\frac{a^2bdeg}{fP}$	$\frac{abcdg}{P}$

(**)

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	e	f	$\frac{P}{def}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$-\frac{P^2}{a^2bcdeg}$	$-\frac{ef}{g}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP^2}{a^2b^2cdeg}$	$-\frac{a^2bdeg}{fP}$	$-\frac{abcdg}{P}$

Ces deux structures génèrent tous les carrés multiplicatifs d'ordre 4 à produits non nuls.
Ensemble, (*) et (**) forment la structure générale.

Attention!!! (**) ne peut pas générer un carré multiplicatif formé exclusivement de nombres > 0.
Cependant, notre objectif de construire un presque normal est atteint avec (*).

Donc, tout carré multiplicatif d'ordre 4, avec $P \neq 0$, presque normal, est issu de (*).

Par exemple, $a=1, b=105, c=28, d=140, e=12, f=5, g=15, P=176400$, nous avons :

1	105	28	60
140	12	5	21
15	7	420	4
84	20	3	35

M

Ce carré M est multiplicatif avec $P=176400$. Il est presque normal. Nous verrons plus loin pourquoi $P=176400=420^2$. M possède de très belles propriétés.

Le nombre de figures magique de M est 52. Cela signifie que nous pouvons choisir de 52 façons différentes, quatre cases distinctes dont le produit des nombres qui s'y trouvent est $P=176400$.

M est pandiagonal puisque ses diagonales brisées sont magiques.

C'est aussi un m-hyper-magique car :

1) Il est d'ordre pair.
2) Le produit des nombres situés dans les cases de tous les sous-carrés d'ordre 2 est toujours égal à P.
3) Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, le produit des nombres situés dans deux cases séparées par une seule case, est toujours égal à $\sqrt{P}$.

Nous verrons que M est un **m-super-Dürer**.

Nous verrons aussi dans ce chapitre, une définition générale des carrés m-hyper-magiques.

Maintenant, montrons qu'un carré multiplicatif d'ordre 4 issu de (*) a les propriétés suivantes. Comme référence, utilisons le carré multiplicatif qui suit:

(&)

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	M	N
Q	R	T	W

Théorème 15.8:

Dans tout carré multiplicatif d'ordre 4 de produit $P \neq 0$, issu de (*), nous avons :

$$ADQW = FGKM = BCRT = EJHN = P$$

D'où quatre nouvelles figures magiques que possèdent tous les carrés multiplicatifs d'ordre 4 dont le produit est non nul et qui proviennent de (*).

Preuve :

La preuve est immédiate!!! Il suffit de vérifier à partir de la structure (*).

Cependant, si le carré provient de (**), alors le théorème est faux. En effet, dans (**), le produit est P mais le produit des quatre coins donne $-P$. Les quatre coins ne forment donc pas une figure magique.

Autre preuve :

Toujours à partir du carré (&) ci-haut, considérons les figures magiques suivantes de (*) :

$$AEJQ = P$$
$$DHNW = P$$
$$DGKQ = P$$
$$AFMW = P$$

Nous avons donc :

$$(ADQW)\,(ADQW)\,(EFGH)\,(JKMN) = P^4 = (ADQW)^2\,P^2$$
$$d'où \qquad (ADQW)^2 = P^2$$
$$et \qquad ADQW = P$$

Ce qui est conforme avec $ADQW = P$ dans (*).

Nous voyons bien que les quatre coins dans la structure (**) ne forment jamais une figure magique puisque $ADQW = -P$.

En fait, de $(ADQW)^2 = P^2$, nous devons conclure que $ADQW = \pm P$.

Avec la structure (*), nous prenons le signe $+$ et avec la structure (**), nous prenons le signe $-$.

Montrons que $FGKM = P$. Nous avons :

$$AFMW = P$$
$$DGKQ = P$$

D'où $\quad (AFMW)\,(DGKQ) = P^2 = (FGKM)\,(ADQW) = (FGKM)P$

Nous avons donc $FGKM = P$. Nous vous laissons compléter la preuve de ce théorème.

Comment pouvons-nous construire un carré multiplicatif issu de (*) qui soit presque normal?

Commençons par trouver un algorithme qui va nous permettre de construire, à partir de (*), un carré multiplicatif d'ordre 4 formé de seize nombres > 0, différents deux à deux. Nous allons attribuer aux variables libres, les valeurs suivantes > 0 et P sera un nombre > 0 :

$$a = a\ ;\ b = a + m\ ;\ c = a + 2m\ ;\ d = a + 3m\ ;\ e = a + 4m\ ;\ f = a + 5m\ ;\ g = a + 6m$$

où a et m sont des nombres > 0. Ainsi, nous aurons $a < b < c < d < e < f < g$.

Nous allons montrer que les nombres de (*) forment la suite strictement croissante suivante :

$$\frac{a^2bcdg}{fP} < \frac{a^2bdeg}{fP} < \frac{abcdg}{P} < a < b < c < d < \frac{ef}{g} < e < f < \frac{P}{def} < g < \frac{P}{adg} <$$
$$< \frac{P}{abc} < \frac{P^2}{a^2bcdeg} < \frac{fP^2}{a^2b^2cdeg}.$$

Pour que cette suite soit strictement croissante, certaines conditions devront être respectées.

Par exemple, avons-nous (1) $\dfrac{a^2bcdg}{fP} < \dfrac{a^2bdeg}{fP}$? La réponse est oui puisque :

$$\frac{a^2bcdg}{fP} < \frac{a^2bdeg}{fP} \quad \Leftrightarrow \quad c < e$$

Mais nous avons $c < e$, par construction. L'inégalité (1) est donc exacte.

Avons-nous (2) $\frac{a^2bdeg}{fP} < \frac{abcdg}{P}$? La réponse est oui puisque :

$$\frac{a^2bdeg}{fP} < \frac{abcdg}{P} \quad \Leftrightarrow \quad ae < cf$$

Mais l'inégalité de droite est vrai d'où (2) est exacte.

Avons-nous (3) $\frac{abcdg}{P} < a$? Puisque $\frac{abcdg}{P} < a \quad \Leftrightarrow \quad P > bcdg$, alors l'inégalité de droite devient une condition à être respectée. Nous devons donc avoir : $P > bcdg$.

En continuant ainsi, nous avons trouvé les conditions suivantes (incluant celle ci-dessus) :

$$(4) \qquad \begin{aligned} &P > bcdg \\ &dg < ef \\ &P > def^2 \\ &P < defg \\ &P > adg^2 \\ &P > adeg \end{aligned}$$

Dès que les six inégalités de (4) seront vérifiées, alors les seize nombres de (*) seront différents deux à deux car ils formeront une suite strictement croissante.

L'inégalité $dg < ef$ de (4) est toujours vérifiée puisque $ef - dg = 2m^2 > 0$, $(m > 0)$.
Considérons maintenant les membres de droite des cinq inégalités dans lesquelles se trouve P.
Calculons les quatre différences suivantes :

$$\begin{aligned} defg - def^2 &= a^3m + 12a^2m^2 + 47am^3 + 60m^4 \\ def^2 - adg^2 &= 2a^3m + 35a^2m^2 + 187am^3 + 300m^4 \\ def^2 - bcdg &= 5a^3m + 60a^2m^2 + 223am^3 + 264m^4 \\ def^2 - adeg &= 4a^3m + 53a^2m^2 + 223am^3 + 300m^4 \end{aligned}$$

Les quatre membres de droite sont toujours > 0. Cela signifie que nous avons toujours:

$adeg$, $bcdg$ *et* adg^2, strictement plus petits que def^2 et que $def^2 < defg$.

Il est maintenant évident qu'avec $d\,e\,f^2 < P < d\,e\,f\,g$, les six conditions de (4) soient respectées. Enfin, les seize nombres de (*) seront différents deux à deux.

Ce procédé constitue une **condition suffisante** pour avoir seize nombres >0 différents dans le carré issu de (*).

Maintenant, pour avoir un carré multiplicatif presque normal, il suffit de donner des valeurs entières ≥ 1 aux variables a *et* m puis de donner à P une valeur entière ≥ 1 telle que :

$$d\,e\,f^2 < P < d\,e\,f\,g$$

Appelons A, le carré ainsi obtenu qui contient seize nombres différents. Celui-ci peut contenir neuf nombres rationnels. En appliquant le facteur correcteur $\frac{u}{r}$, le carré $\frac{u}{r}A$ sera presque normal. Notons que u est le plus petit commun multiple (p p c m) des dénominateurs des rationnels de (*) soit des entiers suivants :

$$u = (p\,p\,c\,m)\left\{a\,b\,c\ ,\ d\,e\,f\ ,\ g\ ,\ a^2b\,c\,d\,e\,g\ ,\ f\,P\ ,\ P\ ,\ a^2b^2c\,d\,e\,g\ ,\ a\,d\,g\right\}$$

Quant à r, c'est le plus grand commun diviseur (p g c d) des entiers de $u\,A$.

Ce procédé nous assure l'existence d'une infinité de carrés multiplicatifs d'ordre 4 presque normaux.

Exemple 1 :

Si $a = m = 1$, nous trouvons $d\,e\,f^2 = 4\times5\times36 = 720$ *et* $d\,e\,f\,g = 4\times5\times6\times7 = 840$. Avec $720 < P < 840$, nous sommes certains d'obtenir un carré multiplicatif presque normal.

Pour construire un carré multiplicatif presque normal d'ordre 4 avec (*), il suffit de prendre :

1) $a = a$; $b = a + m$; $c = a + 2m$; $d = a + 3m$; $e = a + 4m$; $f = a + 5m$; $g = a + 6m$ où a *et* m sont des entiers ≥ 1.
2) P, un entier tel que : $d\,e\,f^2 < P < d\,e\,f\,g$
3) Nous obtenons ainsi un carré A formé de seize nombres rationnels tous différents.
4) Le carré $u\,A$ sera presque normal.
5) Le carré $\frac{u}{r}A$ sera presque normal avec seize entiers premiers entre eux.

La structure (*) permet donc de construire des carrés multiplicatifs presque normaux!!!

Exemple 2 :

Dans l'exemple 1, prenons $P = 800$. Nous obtenons le carré :

4 200	8 400	12 600	560 000
16 800	21 000	25 200	28 000
29 400	147	3 200 000	18 000
120 000	9 600 000	245	882

M_1

Le premier carré obtenu, formé de rationnels, avait pour produit $P = 800$. Avec le facteur correcteur, ici 4200, nous avons maintenant le carré M_1 ci-haut qui est presque normal dont le produit est :

$$P = 248\ 935\ 680\ 000\ 000\ 000$$

Exemple 3 :

Dans le carré M_1 de l'exemple 2, les quatre cases vertes forment une figure complète ainsi que les quatre cases grises et les quatre cases bleues. Nous divisons par 800, chaque entier dans les cases vertes, par 21, chaque entier dans les cases grises et par 200, chaque entier dans les cases bleues. Le nouveau carré obtenu, M_2, est toujours multiplicatif, presque normal et de produit 800 x 21 x 200 = 3 360 000 fois plus petit.

Voici ce carré :

4 200	400	63	700
21	105	1 200	28 000
1 400	147	4 000	90
600	12 000	245	42

M_2

Le produit du carré M_2 est $74\ 088\ 000\ 000$.

Rappelons que dans un carré d'ordre $n \geq 4$, un groupe de n cases distinctes est appelé **figure complète** si nous retrouvons ces cases, une seule par rangée, par colonne et par grande diagonale.

Le carré M_2 nous montre que tout carré d'ordre 4 se décompose en quatre figures complètes!!!
Voir le problème 39 de 15.7

Le procédé que nous venons de voir pour construire un carré multiplicatif d'ordre 4 presque normal, nous donne seize entiers différents ≥ 1 et tous premiers entre eux. Pour cela, nous avons utilisé le facteur correcteur. Dans l'exemple 2 ci-dessus, nous avons obtenu un produit très grand. Grâce aux figures complètes, nous avons construit à partir de M_1, un nouveau carré M_2 de produit $3\ 360\ 000$ fois plus petit que celui de M_1. Très intéressant!!! Mais attention aux répétitions. Ici, nous avons vérifié qu'en utilisant chacune des trois figures complètes, le carré restait toujours presque normal.

Après avoir utilisé une figure complète afin de réduire le produit magique, assurez-vous que le carré presque normal reste presque normal!!!

Pour construire un carré multiplicatif presque normal, nous pouvons nous servir de la structure (*) avec ses huit variables a, b, c, d, e, f, g et P. Il arrive souvent, en attribuant des valeurs entières ≥ 1 aux huit variables, que nous trouvions déjà seize nombres tous différents. Il restera ensuite à se servir du facteur correcteur afin de trouver un carré presque normal formé d'entiers premiers entre eux. De plus, il peut arriver que le facteur correcteur ne soit pas nécessaire; les seize nombres sont déjà des entiers (pas obligatoirement premiers entre eux).

Exemple 4 :

Posons dans (*) :

$$a = 46\ ,\ b = 39\ ,\ c = 231\ ,\ d = 121\ ,\ e = 21\ ,\ f = 26\ ,\ g = 13\ et\ P = 4\ 558\ 554.$$

Nous trouvons le carré multiplicatif de Ronald Edwards lequel est vraiment exceptionnel et nous y reviendrons plus loin (voir 15.3.3).

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards

64	93	132	11
121	12	62	96
31	352	33	24
36	22	32	341

Son renversé

Ce carré est presque normal et a la propriété suivante : si on renverse l'ordre des chiffres de chaque entier, le nouveau carré obtenu, en vert, est toujours multiplicatif!!! Le produit du carré en vert est $P = 8\ 642\ 304$.

Exemple 5 :

Dans (*), posons; $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5, f = 6, g = 7\ et\ P = 20$. Nous allons voir le carré M obtenu avant l'utilisation du facteur correcteur. Le deuxième carré sera $u\,M$ et le troisième carré sera $(u / r)\,M$.

Puis, nous pourrons utiliser les figures complètes afin de diminuer le produit P.

1	2	3	10/3
4	5	6	1/6
7	7/5	10/21	30/7
5/7	10/7	7/3	42/5

M

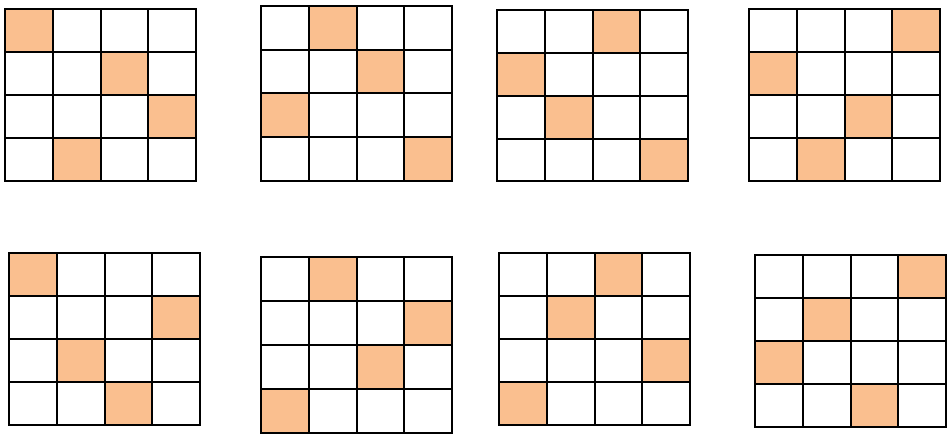
1 680	3 360	5 040	5 600
6 720	8 400	10 080	280
11 760	2 352	800	7 200
1 200	2 400	3 920	14 112

$u\,M$

210	420	630	700
840	1 050	1 260	35
1 470	294	100	900
150	300	490	1 764

$\frac{u}{r}M$

Le carré multiplicatif M renferme seize nombres rationnels différents dont sept sont des entiers. Son produit est 20. Le carré $u\,M$ est presque normal de produit $1680^4 \times 20$. Le carré $\frac{u}{r}M$ est aussi presque normal de produit $210^4 \times 20 = 38\ 896\ 200\ 000$. De plus, ses seize entiers sont premiers entre eux. Enfin, en se servant de figures complètes, nous avons réussi à réduire de beaucoup le produit; celui-ci est passé de $38\ 896\ 200\ 000\ à\ 37\ 800$. Voici les seules figures complètes possibles pour un carré d'ordre 4; ce sont les huit équivalents!!!



Prenons les figures complètes ci-haut et numérotons-les de $1\ à\ 8,$ de gauche à droite et de haut en bas. Nous allons indiquer par quel entier nous avons divisé les quatre entiers de chaque figure complète :

$$1(7)\quad 2(7)\quad 3(7)\quad 4(10)\quad 5(5)\quad 6(5)\quad 7(2)\quad 8(6)$$

Notez que ces figures ont été placées sur le carré $\frac{u}{r}M$. Nous avons divisé les quatre entiers de la figure complète $1\ par\ 7,\ 2\ par\ 7,\ 3\ par\ 7\ ,\ 4\ par\ 10,\ ...$

Voici donc notre carré multiplicatif presque normal de produit $P = 37\ 800$:

5	12	9	70
60	21	30	1
42	6	10	15
3	25	14	36

Nous avons vérifié après l'utilisation de chaque figure complète que le carré obtenu était toujours presque normal. Ce produit de $37\ 800$ est $1\ 029\ 000$ fois plus petit que le produit de $\frac{u}{r}M$. Pouvons-nous faire mieux?

Enfin, nous constatons que les huit figures complètes ci-haut sont les huit équivalents d'une d'entre elles.

Voici, en terminant, le carré multiplicatif publié en 1913 par Harry Sayles. Nous l'obtenons avec (*) en posant : $a = 1$, $b = 15$, $c = 24$, $d = 12$, $e = 28$; $f = 3$, $g = 21$, $P = 5040.$

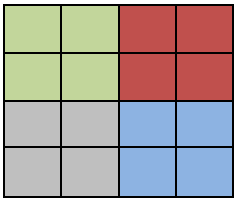
1	15	24	14
12	28	3	5
21	6	10	4
20	2	7	18

H. Sayles $P = 5040$

Nous verrons plus loin que le carré de Sayles est un m-Dürer puisque les quatre entiers dans le sous-carré d'ordre 2 dans le coin haut-gauche est $1 \times 12 \times 15 \times 28 = 5040$, le produit magique.

15.3.1 Les carrés m-Dürer

Ce sont des carrés multiplicatifs d'ordre 4 qui ont comme figure magique le petit sous-carré d'ordre 2 situé dans le coin haut-gauche du grand carré (le carré vert).



Le produit des nombres situés dans les cases vertes est donc P. Il s'ensuit qu'il en est de même pour les quatre cases en rouge, en bleu et en gris. Ce sont trois autres figures magiques qui découlent de la première.

Les m-Dürer sont caractérisés par vingt quatre figures magiques, les mêmes que celles qui caractérisent les Dürer. Nous y reviendrons.

Nous allons maintenant trouver une structure de **m-Dürer avec produits non nuls**. Pour ce faire, nous allons utiliser (*) plutôt que (**) car nous voulons construire des m-Dürer presque normaux. Nous devons donc avoir $abde = P$ $d'où$ $e = \frac{P}{abd}$.

(M D)

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	$\frac{P}{abd}$	f	$\frac{ab}{f}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$\frac{P}{acg}$	$\frac{fP}{abdg}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP}{abcg}$	$\frac{ag}{f}$	$\frac{abcdg}{P}$

Par exemple, cette fois, nous retrouvons le carré de Sayles à l'aide de sept coordonnées au lieu de huit : $a = 1$, $b = 15$, $c = 24$, $d = 12$, $f = 3$, $g = 21$, $P = 5040$. Le carré de Sayles est donc un m-Dürer. Nous trouvons que (M D) possède exactement vingt-quatre figures magiques et il est facile de les trouver. Ce sont précisément les vingt-quatre figures magiques qui caractérisent les Dürer. Celles-ci caractérisent aussi les m-Dürer issus de (MD).

Pour construire un m-Dürer presque normal avec (MD), il suffit d'attribuer aux variables des valeurs entières ≥ 1, d'utiliser le facteur correcteur si nécessaire et de s'assurer d'aucune répétition.

Afin de réduire le produit magique d'un m-Dürer, nous pourrons toujours utiliser les figures complètes car après avoir utilisé une telle figure, le carré qui en résulte est toujours un m-Dürer (Voir les problèmes 9 et 10 de 15.7).

Vous pouvez vérifier que le carré d'Edwards, vu plus haut, est aussi un m-Dürer.

Pour savoir si un carré multiplicatif d'ordre 4 formé uniquement de nombres > 0 est un m-Dürer, alors il suffit de vérifier que le produit des nombres situés dans les cases du sous-carré d'ordre 2 du coin haut-gauche est égal au produit magique P.

En référence avec le carré (&) de 15.3, il s'agit de vérifier que le produit des nombres situés dans les cases A, B, E et F est égal à P.

Dans la structure (MD), posons :

$$a = mn; b = uv; c = xy; d = yr; f = mu; g = us; P = mnuvxyrs$$

Nous obtenons :

(MD*)

mn	uv	xy	rs
ry	sx	mu	nv
su	ny	rv	mx
vx	mr	ns	uy

Cette nouvelle structure (MD*), génère que des m-Dürer. Puisque cette structure provient de (MD), il est clair que le produit doit être non nul et donc les huit variables non nulles.

Maintenant, dans (MD*), posons :

$$u = \frac{abc}{P}\ ;\ y = dg\ ;\ m = \frac{fP}{abc}\ ;\ n = \frac{a^2bc}{fP}\ ;\ v = \frac{P}{ac}\ ;\ x = \frac{c}{dg}\ ;\ r = \frac{1}{g}\ ;\ s = \frac{gP}{abc}$$

Nous obtenons alors la structure (MD)!!!

Notons que dans (MD), toutes les variables sont non nulles. Puisque (MD*) provient de (MD), toutes les variables de (MD*) doivent être non nulles.

Les structures (MD) et (MD*) sont équivalentes lorsque toutes leurs variables sont non nulles.

Mais la structure (MD*) se manipule beaucoup plus facilement. Nous donnons des valeurs entières aux variables et nous sommes certains que le m-Dürer sera formé que d'entiers. (MD*) et (MD) ne sont pas des structures équivalentes si certaines variables peuvent être nulles. (MD*) peut générer un carré multiplicatif de produit nul avec $m = 0$ par exemple, ce que (MD) ne peut pas faire.

Retrouvons le carré de Sayles avec (MD*) en posant :

$$m = 42 \; ; \; n = \frac{1}{42} \; ; \; u = \frac{1}{14} \; ; \; v = 210 \; ; \; x = \frac{2}{21} \; ; \; y = 252 \; ; \; r = \frac{1}{21} \; ; \; s = 294$$

1	15	24	14
12	28	3	5
21	6	10	4
20	2	7	18

Mais nous pourrions obtenir le même carré avec :

$$m = 1 \; ; \; n = 1 \; ; \; u = 3 \; ; \; v = 5 \; ; \; x = 4 \; ; \; y = 6 \; ; \; r = 2 \; ; \; s = 7$$

Nous avons donc deux façons différentes de construire le même carré multiplicatif avec (MD*). Pour comprendre cela, nous vous recommandons fortement le problème 40 de 15.7).

Nous allons terminer en trouvant une condition suffisante pour obtenir de (MD*) un m-Dürer presque normal.

Les seize nombres dans (MD*) peuvent se regrouper ainsi :

$$\begin{array}{cccc} mn & vu & yx & sr \\ mu & vn & yr & sx \\ mx & vr & yn & su \\ mr & vx & yu & sn \end{array}$$

Dans chaque colonne, les nombres de droite sont les mêmes. Aussi, ces quatre colonnes forment chacune une figure complète.

	n	u	x	r
m	mn	mu	mx	mr
v	vn	vu	vx	vr
y	yn	yu	yx	yr
s	sn	su	sx	sr

Nous allons attribuer des valeurs entières ≥ 1 à ces huit variables avec :

$$n < u < x < r$$

Nous allons ensuite attribuer à $v, y \ et \ s$ des valeurs qui vont nous permettre d'avoir :

$$vn > mr$$
$$yn > vr$$
$$sn > yr$$

De cette façon, nous sommes assurés d'avoir seize entiers tous différents dans notre m-Dürer.

Cette condition est **suffisante** pour avoir seize entiers différents mais elle n'est **pas nécessaire**. En effet, avec $m = 1$; $n = 1$; $u = 3$; $v = 5$; $x = 4$; $y = 6$; $r = 2$; $s = 7$, le carré multiplicatif obtenu (celui de Sayles vu plus haut) avec (MD*) renferme 16 entiers différents et nous observons que la condition n'est pas respectée.

Voyons cet exemple :

$$n = 1 \ ; \ u = 2 \ ; \ x = 3 \ ; \ r = 4 \ ; \ m = 1 \ ; \ v = 5 \ ; \ y = 21 \ ; \ s = 85$$

	n	u	x	r
$m = 1$	1	2	3	4
$v = 5$	5	10	15	20
$y = 21$	21	42	63	84
$s = 85$	85	170	255	340

Le carré multiplicatif obtenu est un m-Dürer presque normal avec $P = 214\ 200$.

Puis nous avons utilisé deux figures complètes : $3(3) \ et \ 8(5)$, en référence avec les huit figures complètes vues plus haut. Le produit est devenu quinze fois plus petit pour le nouveau m-Dürer.

1	10	63	340
84	255	2	5
170	21	20	3
15	4	85	42

$P = 214\ 200$

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

$P = 14\ 280$

Ces deux carrés multiplicatifs sont des m-Dürer presque normaux et il est impossible de réduire le produit $P = 14\ 280$ à l'aide d'une figure complète si nous voulons toujours un presque normal (problème 12 de 15.7).

Le procédé que nous venons d'utiliser pour construire un m-Dürer avec (MD*) nous assure qu'il n'y aura aucune répétition. Puis, une figure complète transforme toujours un m-Dürer en un autre m-Dürer.

Maintenant, nous sommes en mesure de construire des m-Dürer presque normaux sans problème!!!

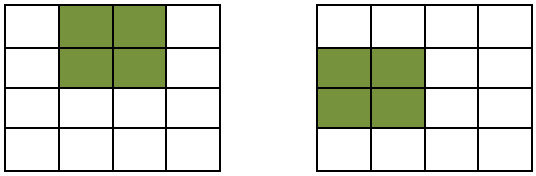
Tous les m-Dürer issus de (MD) ou de (MD*) ont en commun les mêmes vingt-quatre figures magiques qui sont celles qui caractérisent les Dürer. (&)

Si nous établissions une structure de m-Dürer à partir de (**), ceux-ci auraient en commun seulement 16 figures magiques. Ces derniers nous intéressent beaucoup moins puisqu'en plus, ils ne peuvent jamais être formés que de nombres > 0 donc ils ne peuvent jamais être presque normaux.

(&) Démontrez-le en vous servant des structures générales (MD) ou (MD*).

15.3.2 Les carrés m-super-Dürer

Nous allons construire ici de très beaux carrés multiplicatifs à partir de la structure (MD). Un carré multiplicatif **m-super-Dürer** est un m-Dürer issu de (MD) qui possède les deux figures magiques suivantes :



À partir de la structure (MD) dans laquelle toutes les variables sont non nulles, rendons magique la figure du carré de gauche ci-haut. Nous trouvons :

$$\frac{bcfP}{abd} = P \text{ d'où } d = \frac{cf}{a}$$

Le carré devient :

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
$\frac{cf}{a}$	$\frac{P}{bcf}$	f	$\frac{ab}{f}$
g	$\frac{abc^2g}{P}$	$\frac{P}{acg}$	$\frac{P}{bcg}$
$\frac{P}{cfg}$	$\frac{fP}{abcg}$	$\frac{ag}{f}$	$\frac{bc^2fg}{P}$

Dans cette structure, rendons magique la figure du carré de droite ci-haut. Nous trouvons :

$$\frac{cfPgabc^2g}{abcfP} = P \text{ d'où } P = c^2g^2$$

Le carré devient :

(MSD)

a	b	c	$\frac{c\,g^2}{a\,b}$
$\frac{c\,f}{a}$	$\frac{c\,g^2}{b\,f}$	f	$\frac{a\,b}{f}$
g	$\frac{a\,b}{g}$	$\frac{c\,g}{a}$	$\frac{c\,g}{b}$
$\frac{c\,g}{f}$	$\frac{c\,f\,g}{a\,b}$	$\frac{a\,g}{f}$	$\frac{b\,f}{g}$

Voici donc la structure (MSD), issue de (MD), des **m-super-Dürer**. Toutes ses variables sont non nulles. Celle-ci possède de très belles propriétés :

a) Le produit magique est $P = c^2 g^2$. Avec ses variables non nulles, nous avons toujours $P > 0$, peu importe que les variables soient > 0 ou < 0 ou les deux.

b) Elle est m-hyper-magique. Ce qui signifie que tous les sous-carrés d'ordre 2 ont pour produit $\sqrt[4]{P^4} = P = c^2 g^2$. De plus, sur chaque diagonale, grande ou brisée, le produit des nombres situés dans deux cases séparées d'une case, est toujours le même soit $\sqrt[4]{P^2} = c\,g$, lorsque $c > 0$ et $g > 0$. Enfin, le carré est d'ordre pair.

c) Elle est pandiagonale puisque toutes les diagonales, grandes ou brisées, sont des figures magiques.

d) Elle possède cinquante deux figures magiques qui sont les mêmes que celles que possède la structure générale des super-Dürer.

e) Le produit magique est donc indépendant des variables a, b et f.

f) Si les variables c et g sont des entiers non nuls, alors le produit est un carré parfait dans les entiers naturels.

Vous voulez construire un carré multiplicatif pandiagonal d'ordre 4, alors servez-vous de la structure (MSD)!!!

Attention!!! L'utilisation d'une figure complète dans un m-super-Dürer nous assure que le résultat ne sera plus un m-super-Dürer. Mais il restera un m-Dürer. Vérifiez avec un exemple.

En nous servant de la structure (MSD), nous allons construire un groupe formé de cinq carrés m-super-Dürer. Ils sont tous presque normaux, renferment tous les mêmes seize entiers, sont tous primitifs et ont tous comme produit magique $P = 14400$. Le premier carré trouvé est défini par $a = 1$; $b = 24$; $c = 15$; $f = 4$; $g = 8$. Le voici :

1	24	15	40
60	10	4	6
8	3	120	5
30	20	2	12

$P = 14400$

Puis les quatre autres :

1	24	10	60
40	15	4	6
12	2	120	5
30	20	3	8

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

10	60	6	4
24	1	40	15
20	30	12	2
3	8	5	120

1	24	10	60
30	20	3	8
12	2	120	5
40	15	4	6

Nous verrons plus loin qu'il existe encore 43 tels carrés. Le dernier carré, en bas à droite, est celui de Harry Sayles.

Nous voulons savoir si (MSD) peut produire des carrés presque normaux. La réponse est oui et voici comment nous pouvons y arriver avec le facteur correcteur.

Si nous multiplions (MSD) par $a\,b\,f\,g$, alors nous obtenons le m-super-Dürer suivant :

(MSD – 1)

$a^2b\,f\,g$	$ab^2\,f\,g$	$abc\,f\,g$	$c\,f\,g^3$
$bc\,f^2g$	$ac\,g^3$	$ab\,f^2g$	a^2b^2g
$ab\,f\,g^2$	$a^2b^2\,f$	$bc\,f\,g^2$	$ac\,f\,g^2$
$abc\,g^2$	$c\,f^2g^2$	$a^2b\,g^2$	$ab^2\,f^2$

Puisque dans (MSD), nous trouvons seize expressions différentes, alors dans (MSD – 1), nous trouvons aussi seize expressions différentes.

Si les cinq variables prennent des valeurs entières ≥ 1, alors les seize nombres du carré sont tous des entiers ≥ 1. Une condition suffisante pour avoir un carré presque normal est la suivante :

Pour obtenir de (MSD – 1) un carré presque normal, il est suffisant que les cinq variables prennent des valeurs qui sont des nombres premiers tous différents deux à deux.

Par exemple : $a=2; b=3; c=5;\ f=7; g=11$ nous donnent le m-super-Dürer suivant de produit 137 813 981 936 400 :

924	1 386	2 310	46 585
8 085	13 310	3 234	396
5 082	252	12 705	8 470
3 630	29 645	1 452	882

Nous ne cherchions pas ici à trouver un m-super-Dürer avec un très petit produit; nous voulions seulement montrer que nous pouvions construire un presque normal et même une infinité de presque normaux!!!

Nous pouvons donc construire une infinité de m-super-Dürer presque normaux.

Essayons maintenant de construire des m-super-Dürer presque normaux, toujours avec (MSD – 1), sans forcément se servir de nombres premiers. En voici trois :

40	80	120	1500
480	375	160	20
200	16	600	300
150	1200	50	64

48	72	120	20
240	10	96	36
24	144	60	40
30	80	12	288

24	36	60	10
120	5	48	18
12	72	30	20
15	40	6	144

Ceux-ci sont obtenus, de gauche à droite, avec $a=1; b=2; c=3;\ f=4; g=5$ puis $a=2; b=3; c=5;\ f=4; g=1$ pour les deux premiers carrés. Le troisième à droite est le deuxième que nous avons multiplié par ½. Les produits sont respectivement 576 000 000, 8 294 400 et 518 400.

Notez que les deux premiers carrés sont formés à partir des cinq plus petits entiers ≥ 1 mais qu'ils ont des produits très différents, l'un est plus que soixante-neuf fois plus grand que l'autre! Nous

verrons un peu plus bas que le plus petit produit pour un m-super-Dürer presque normal est 14 400. Vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 29, quarante-huit m-super-Dürer primitifs presque normaux de produit 14 400.

Nous en avons illustré cinq un peu plus haut.

Théorème 15.9 :

La structure générale des m-super-Dürer presque normaux (MSD) d'ordre 4 est la même que celle des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 et est la même que celle des carrés multiplicatifs pandiagonaux presque normaux d'ordre 4.

Preuve :

La structure (MSD) est celle des m-super-Dürer presque normaux d'ordre 4. En construisant la structure des carrés multiplicatifs pandiagonaux presque normaux d'ordre 4, nous trouvons

quatre structures dont (MSD) et trois autres. Mais ces trois autres nous donnent que des carrés pandiagonaux qui renferment toujours des nombres négatifs. **Un presque normal doit donc provenir de (MSD).**

Le problème 29 de 15.7 vous demande de compléter la preuve.

Théorème 15.10 :

Si un carré multiplicatif d'ordre 4 est presque normal et pandiagonal, alors son produit est $P \geq 14\ 400.$
De plus, nous en connaissons plusieurs de produit $P = 14\ 400.$

Preuve :

Un tel carré doit provenir de la structure (MSD). De plus, celui-ci est un m-hyper-magique selon le théorème 15.9 d'où son produit $P = (c\,g)^2 = k^2$. Soit $X\ et\ Y$, deux nombres situés dans deux cases d'une diagonale (grande ou brisée), séparées d'une case située sur cette même diagonale. Nous avons donc :

$$X\,Y = c\,g = k$$

Puis, si le carré est presque normal, alors $X\ et\ Y$ sont des diviseurs entiers ≥ 1 de l'entier k. **Il en résulte que tous les entiers du carré sont des diviseurs entiers** ≥ 1 **de** k.

Pour que le carré soit presque normal, il est donc nécessaire que k possède au moins seize diviseurs entiers ≥ 1.

Mais voilà que le nombre de diviseurs entiers ≥ 1 de k ne dépasse pas 12 lorsque k varie de $1\ à\ 119.$ Cela nous montre que pour un presque normal, le plus petit produit possible est :

$$120^2 = 14\,400$$

Notons ici que 120 possède exactement seize diviseurs.

Notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 48 carrés multiplicatifs pandiagonaux presque normaux et primitifs d'ordre 4 dont le produit est 14 400. Nous en avons illustré cinq un peu plus haut. Vous trouverez les 48 dans la Partie 3, annexe 23, programme 29. Ce sont les 48 meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 donc les 48 meilleurs m-super-Dürer presque normaux et enfin les 48 meilleurs m-pandiagonaux presque normaux.

Il est remarquable que ces 48 carrés renferment les mêmes seize entiers (voir problème 31 de 15.7). Le tableau suivant nous indique les produits possibles avec k qui varie de $1 \ à \ 500$:

k	Nombre de diviseurs de k	$P = k^2$	Nombre de carrés	Nombre de primitifs	Nombre de groupes de 48
120	16	14 400	384	48	1
168	16	28 224	384	48	1
180	18	32 400	0	0	0
210	16	44 100	384	48	1
216	16	46 656	384	48	1
240	20	57 600	1920	240	5
252	18	63 504	0	0	0
264	16	69 696	384	48	1
270	16	72 900	384	48	1
280	16	78 400	384	48	1
288	18	82 944	0	0	0
300	18	90 000	0	0	0
312	16	97 344	384	48	1
330	16	108 900	384	48	1
336	20	112 896	1920	240	5
360	24	129 600	3 072	384	8
378	16	142 884	384	48	1
384	16	147 456	384	48	1
390	16	152 100	384	48	1
396	18	156 816	0	0	0
408	16	166 464	384	48	1
420	24	176 400	2 688	336	7
432	20	186 624	1920	240	5
440	16	193 600	384	48	1
450	18	202 500	0	0	0
456	16	207 936	384	48	1
462	16	213 444	384	48	1
468	18	219 024	0	0	0
480	24	230 400	5 760	720	15

Par produit possible, nous entendons un produit k^2 où l'entier k possède au moins seize diviseurs entiers ≥ 1.

La première colonne indique les valeurs de k qui possèdent au moins 16 diviseurs ≥ 1.

La deuxième colonne indique le nombre de diviseurs ≥ 1 de k.

La troisième colonne indique le produit du carré m-hyper-magique presque normal.

La quatrième colonne indique le nombre de carrés m-hyper-magiques presque normaux de produit k^2.

La cinquième colonne indique le nombre de primitifs.

La sixième colonne indique le nombre de groupes de 48 primitifs. Il est remarquable que dans chaque groupe, nous trouvions 48 carrés primitifs lesquels renferment tous les mêmes seize entiers!!!

Par exemple, avec $k = 420$, nous trouvons $2\,688$ m-hyper-magiques presque normaux de produit $P = 420^2 = 176\,400$. Ce qui donne 336 primitifs regroupés en sept groupes de 48 carrés. Dans chaque groupe, les 48 carrés renferment les mêmes entiers. Si A et B sont dans deux groupes différents, alors A et B ne renferment pas les mêmes seize entiers.

Ce que nous venons d'observer concerne les valeurs de k allant de $1\ à\ 500$. Cela laisse croire qu'il en sera **peut-être** toujours ainsi. Allons un peu plus loin et regardons encore dix autres valeurs de k prises aléatoirement.

k	Nombre de diviseurs de k	$P = k^2$	Nombre de carrés	Nombre de primitifs	Nombre de groupes de 48
520	16	270 400	384	48	1
560	20	313 600	1920	240	5
720	30	518 400	11 904	1 488	31
840	32	705 600	12 288	1 536	32
960	28	921 600	13 440	1 680	35
1 200	30	1 440 000	11 904	1 488	31
1 260	36	1 587 600	17 664	2 208	46
4 000	24	16 000 000	6 528	816	17
10 000	25	100 000 000	4 224	528	11
16 000	32	256 000 000	36 480	4 560	95

Toutes ces données nous conduisent à la conjecture suivante :

Conjecture :

Tous les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 donc de produit $P = k^2$, se retrouvent, lorsqu'ils existent, en groupes de quarante-huit carrés. Dans chaque groupe, tous les carrés renferment exactement les mêmes seize entiers, des diviseurs de k.

Nous dirons que deux m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 sont équivalents s'ils renferment les mêmes entiers; les groupes de quarante-huit sont les classes d'équivalence.

Attention!!!

Ne pas confondre ici avec les 8 équivalents d'un carré.

En terminant, voici comment nous pouvons construire une structure de m-hyper-magiques qui nous conduira à de tels carrés formés d'entiers ≥ 1.

Soit le m-hyper-magique presque normal suivant :

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

C'est l'un des cinq vus plus haut de produit 14 400. Ici : a = 60, b = 10, c = 4, f = 15 et g = 30. Le produit s'écrit : $14\,400 = 120^2 = (2^3 \times 3 \times 5)^2$.

Tous les entiers du carré sont des diviseurs de 120. Posons :

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \ et \ a = p^2 q r$$
$$10 = 2 \times 5 \qquad et \ b = p r$$
$$4 = 2^2 \qquad et \ c = p^2$$
$$15 = 3 \times 5 \qquad et \ f = q r$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5 \ et \ g = p q r$$

En plaçant ces valeurs dans (MSD), nous obtenons :

(MSD*)

$p^2 q r$	$p r$	p^2	$p q$
1	$p^3 q$	$q r$	$p^3 r$
$p q r$	$p^2 r$	p	$p^2 q$
p^3	q	$p^3 q r$	r

Il est évident que ce carré renferme que des entiers dès que $p, q \, et \, r$ sont des entiers.

Pour que (MSD*) soit presque normal, il est suffisant d'avoir :
$$1 < p < q < p^2 < r < p q$$
où $p, q \ et \ r$ sont des entiers ≥ 2.

En effet, les seize nombres de (MSD*) forment une suite strictement croissante, ce qui nous assure seize nombres différents. Voici deux carrés déterminés par :

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

p = 2 ; q = 3 ; r = 5

140	14	4	10
1	40	35	56
70	28	2	20
8	5	280	7

p = 2 ; q = 5 ; r = 7

La condition de l'encadré est suffisante, mais non nécessaire. Elle est respectée avec le carré de gauche mais ne l'est pas avec le carré de droite qui est tout de même presque normal!!!

Voici la suite strictement croissante **(SSC)** que forment les seize expressions du carré (MSD*) :

$$1 < p < q < p^2 < r < pq < p^3 < pr < p^2q < qr < p^2r < p^3q < pqr < p^3r < p^2qr < p^3qr$$

Le problème 32 de 15.7 nous demande de montrer que la condition suffisante, en rouge dans la suite **(SSC)**, implique toutes les inégalités qui suivent.

Nous pourrions construire d'autres structures comme (MSD*); c'est l'objet du problème 13 de 15.7. En fait, nous pourrions construire 48 structures primitives qui permettraient d'obtenir un carré presque normal de produit magique 14 400.

La partie en rouge (la condition suffisante), est toujours réalisable; par exemple, en prenant :

$$q = p+1 \; et \; r = p^2+1.$$

Donc, à partir du carré (MSD*), nous sommes assurés qu'avec
$q = p+1 \; et \; r = p^2+1,$
nous obtiendrons un m-hyper-magique presque normal d'ordre 4.

Avec $p = 2, q = p+1 = 3 \; et \; r = p^2+1 = 5$, nous obtenons un carré du plus petit produit soit $14\,400$.

Voici le carré obtenu; nous l'appellerons **«carré polynôme»**

(MSD +)

$p^2+p^3+p^4+p^5$	$p+p^3$	p^2	$p+p^2$
1	p^3+p^4	$1+p+p^2+p^3$	p^3+p^5
$p+p^2+p^3+p^4$	p^2+p^4	p	p^2+p^3
p^3	$1+p$	$p^3+p^4+p^5+p^6$	$1+p^2$

Carré m-hyper-magique presque normal; $p \geq 2$

Son produit est :

$$P = 1\,p^6 + 2\,p^7 + 3\,p^8 + 4\,p^9 + 3\,p^{10} + 2\,p^{11} + 1\,p^{12} = (p^3 + p^4 + p^5 + p^6)^2$$

Avec $p = 2$, nous obtenons le presque normal suivant de produit $P = 14\,400$.

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

Dès que $p \geq 2$ est un entier, alors le carré est un m-hyper-magique presque normal !!! (MSD+) permet de trouver l'un des meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 soit un carré du plus petit produit $P = 14\,400$. Nous trouvons :

$$\begin{array}{ll} p = 2 & P = 14\ 400 \\ p = 3 & P = 1\,166\ 400 \\ p = 4 & P = 29\ 593\ 600 \\ p = 5 & P = 380\ 250\ 000 \end{array}$$

La croissance du produit P est donc très rapide.

15.3.3 Le carré d'Edwards

Ronald Edwards a publié en 1957 un carré multiplicatif d'ordre 4 qui possède une propriété remarquable, sans toutefois nous indiquer sa méthode. Nous allons présenter ici un procédé pour construire un tel carré. Le carré d'Edwards est presque normal de produit $P = 4\ 558\ 554$.

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards

64	93	132	11
121	12	62	96
31	352	33	24
36	22	32	341

Son renversé

Si nous lisons de droite à gauche tous les nombre du carré d'Edwards, alors nous obtenons son renversé soit le carré de droite. Ainsi, 46 devient 64, 253 devient 352, 11 reste 11 et ainsi de suite. Notez ici que le carré d'Edwards et son renversé sont des m-Dürer!!!

Ce qui est extraordinaire ici est que le renversé soit encore un carré multiplicatif, de produit $P = 8\ 642\ 304$!!! En général, cela n'arrive pas. De plus, Edwards a mis une bordure autour de son carré multiplicatif de façon à obtenir un carré magique d'ordre 6 et de somme $S = 438$.

Nous allons présenter une méthode pour construire des carrés comme celui d'Edwards, et nous allons même améliorer celui d'Edwards en diminuant son produit de $4\ 558\ 554\ \grave{a}\ 414\ 414$.

Voici donc cette méthode, peut-être celle employée par Edwards?!? Nous allons nous servir de la structure (MD*) pour construire notre premier carré.

(MD*)

mn	uv	xy	rs
ry	sx	mu	nv
su	ny	rv	mx
vx	mr	ns	uy

Divisons chaque nombre situé dans les cases vertes du carré d'Edwards (figure complète) par 11. Ainsi, le nouveau carré obtenu est toujours un m-Dürer et son produit est 11 fois plus petit soit $414\ 414$.

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards

46	39	231	1
11	21	26	69
13	253	3	42
63	2	23	143

Carré d'Edwards amélioré

Nous allons partir du carré d'Edwards amélioré que nous appelons A. Puisque nous utiliserons la structure (MD*) pour construire un carré d'Edwards, nous allons considérer que les nombres du carré que nous cherchons sont le produit de deux entiers formés chacun de deux chiffres. Nous avons donc :

$$m = 10m_1 + m_2 \ ; \ n = 10n_1 + n_2 \ ; \ u = 10u_1 + u_2 \ ; \ldots$$

Puis le très important résultat que voici avec : $a, b, c \ et \ d,$ des chiffres non nuls:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (10a+b)\ (10c+d) = 100\ ac + 10(ad+bc) + bd \\
(2) & (10b+a)\ (10d+c) = 100\ bd + 10(ad+bc) + ac \\
(3) & (10a+b)d = 10ad + bd \\
(4) & (10b+a)d = 10bd + ad \\
(5) & bd = bd
\end{array}$$

Avec la condition $(*)$ que voici :

$$(*) \qquad 0 \le ac \le 9 \ \ ; \ \ 0 \le ad + bc \le 9 \ \ ; \ \ 0 \le bd \le 9$$

Ce sont les cas que nous allons rencontrer dans la construction de carrés d'Edwards. L'égalité (2) montre que si nous lisons à l'envers les deux entiers formés de deux chiffres de (1), alors le résultat de (2) est le résultat de (1) lu à l'envers.

De même avec l'égalité (4) en observant que le chiffre d, lu à l'envers, est toujours le chiffre d. Si nous lisons à l'envers les chiffres des deux entiers dont l'un est formé de deux chiffres et l'autre, d'un seul chiffre, alors le résultat de (4) est le résultat de (3) lu à l'envers.

Enfin, l'égalité (5) nous indique que même si $b\ et\ d$ sont lus à l'envers, le produit des chiffres $b\ et\ d$ reste inchangé.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
(10a+b)(10c+d) &= (ac)(ad+bc)(bd)\\
(10b+a)(10d+c) &= (bd)(ad+bc)(ac)\\
(10a+b)\times d &= (ad)(bd)\\
(10b+a)\times d &= (bd)(ad)\\
bd &= bd
\end{aligned}$$

où (ac) représente le chiffre des centaines, $(ad+bc)$ représente le chiffre des dizaines et (bd), celui des unités. De même dans les autres égalités.

Nous pouvons maintenant construire le carré A en posant:

$m=2$; $n=23$; $u=13$; $v=3$; $x=21$; $y=11$; $r=s=1$, et ainsi, nous avons :

$$m_1=0\ ;\ m_2=2\ ;\ n_1=2\ ;\ n_2=3\ ;\ u_1=1\ ;\ u_2=3\ ;\ v_1=0\ ;\ v_2=3$$
$$x_1=2\ ;\ x_2=1\ ;\ y_1=1\ ;\ y_2=1\ ;\ r_1=0\ ;\ r_2=1\ ;\ s_1=0\ ;\ s_2=1$$

La condition $(*)$ est respectée pour tous les nombres de (MD*). Par exemple : avec

$m=2\ et\ n=23$, nous avons $ac=0$, $ad+bc=4$, $bd=6$. Puis, avec $n=23\ et\ y=11$, nous avons $ac=2, ad+bc=5, bd=3$, et ainsi de suite.

Pour avoir le carré B, il suffit d'inverser les chiffres de $m\,et\,n$ qui déterminent 46 et ainsi obtenir 64 en faisant 2×32. De même pour tous les autres nombres.

46	39	231	1
11	21	26	69
13	253	3	42
63	2	23	143

Carré A

64	93	132	1
11	12	62	96
31	352	3	24
36	2	32	341

Carré B

Le carré B provient de (MD*) donc c'est un m-Dürer. C'est le renversé de A. Le produit du carré A est $P=414\ 414$ et celui du carré B est $P=785\ 664$.

Nous allons trouver maintenant le carré d'Edwards et son renversé en posant :

$$m = 2\ ;\ n = 23\ ;\ u = 13\ ;\ v = 3\ ;\ x = 21\ ;\ y = 11\ ;\ r = 11\ ;\ s = 1$$

La condition (*) est respectée pour tous les nombres de (MD*). Voici donc le carré d'Edwards et son renversé :

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards (EDW)

64	93	132	11
121	12	62	96
31	352	33	24
36	22	32	341

Son renversé (EDW*)

Voici un troisième exemple de carré d'Edwards déterminé par :

$$m = 3\ ;\ n = 23\ ;\ u = 22\ ;\ v = 2\ ;\ x = 12\ ;\ y = 11\ ;\ r = 3\ ;\ s = 1$$

La condition (*) est respectée pour tous les nombres de (MD*). Voici donc ce carré et son renversé :

69	44	132	3
33	12	66	46
22	253	6	36
24	9	23	242

Carré C

96	44	231	3
33	21	66	64
22	352	6	63
42	9	32	242

Carré D

Le carré D est le renversé de C. Le produit de C est $P = 1\ 202\ 256$ et celui de D est $P = 2\ 927\ 232$.

Terminons avec un quatrième et un cinquième exemple :

69	44	132	3
12	33	46	66
6	36	22	253
242	23	9	24

Carré E

96	44	231	3
21	33	64	66
6	63	22	352
242	32	9	42

Carré F

Le carré E se construit avec :

$$m = 23 \; ; \; n = 3 \; ; \; u = 2 \; ; \; v = 22 \; ; \; x = 11 \; ; \; y = 12 \; ; \; r = 1 \; ; \; s = 3$$

Le produit de E est $P = 1\ 202\ 256$. Le produit de F, le renversé de E, est $P = 2\ 927\ 232$.

26	69	132	2
22	12	6	299
3	143	46	24
276	4	13	33

Carré G

62	96	231	2
22	21	6	992
3	341	64	42
672	4	31	33

Carré H

Le carré G se construit avec :

$$m = 2 \; ; n = 13 \; ; \; u = 3 \; ; \; v = 23 \; ; \; x = 12 \; ; \; y = 11 \; ; \; r = 2 \; ; \; s = 1$$

Le produit de G est $P = 473\ 616$. Le produit de H, le renversé de G, est $P = 2\ 749\ 824$.

Nous venons de construire cinq carrés m-Dürer qui ont la propriété de nous donner le renversé de chacun, renversé qui est toujours un m-Dürer. Nous allons présenter sous forme d'un tableau, les principales caractéristiques de ces cinq carrés ainsi que des cinq renversés. Mais voyons ceci d'abord.

Edwards a placé une bordure autour de son carré afin d'obtenir un carré magique presque normal d'ordre 6.

Voyons comment en établissant d'abord une condition nécessaire pour qu'une bordure existe autour d'un carré d'ordre n. Puis ensuite, nous préciserons cette condition nécessaire dans le cas où nous voudrions un carré magique presque normal d'ordre $n+2$.

m	a_1	a_2	...	...	...	...	...	a_n	W
X	b_1	b_2	...	...	...	...	...	b_n	Y

Dans le carré central, en orangé, la somme des nombres des colonnes de gauche à droite est notée c_1, c_2,..., c_n, la somme pour la grande diagonale principale est notée d_1 tandis que la somme pour la grande diagonale secondaire est notée d_2. Si le carré d'ordre $n+2$ est magique de somme S, alors nous avons :

$$\begin{aligned} W &= S - m - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ Y &= S - m - d_1 \\ X &= S - W - d_2 \\ b_i &= S - a_i - c_i \end{aligned}$$

La dernière rangée nous donne les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} & X + \sum b_i + Y = S \\ & (S - S + m + \sum a_i - d_2) + (nS - \sum a_i - \sum c_i) + (S - m - d_1) = S \\ & nS = d_1 + d_2 + \sum c_i = S^* \end{aligned}$$

La quantité S^* est donc égale à la somme des nombres situés sur les deux grandes diagonales du carré central d'ordre n en orangé plus la somme de tous les nombres situés dans le carré central.

Enfin, si le carré d'ordre $n+2$ est magique, alors **obligatoirement** sa somme doit être $S = \frac{S^*}{n}$.

C'est une condition nécessaire.

Théorème 15.11 :

Soit M, un carré d'ordre $n \geq 3$, formé seulement d'entiers. Nous lui ajoutons une bordure formée d'entiers afin que le nouveau carré d'ordre $n+2$ soit magique. Pour que cette bordure existe, il est nécessaire que $S = \frac{S^*}{n} = entier$.

Dans le théorème 15.11, il n'est pas nécessaire que M soit magique ou multiplicatif; il peut contenir n^2 nombres quelconques.

Pour que le carré d'Edwards possède une bordure formée d'entiers qui rend magique le carré d'ordre 6, il est nécessaire que $S = 438$. Nous présenterons un peu plus bas deux bordures différentes dont l'une est celle d'Edwards.

Pour que le carré d'ordre $n+2$ soit magique et presque normal, il est nécessaire que le carré central d'ordre n soit formé que d'entiers ≥ 1, tous différents. Nous pourrons ensuite trouver S^* et ainsi déterminer l'unique somme magique pour le carré d'ordre $n+2$. La connaissance de cette somme $S = \frac{S^*}{n}$ va nous guider pour le choix des entiers à placer dans la bordure. Il faudra faire attention aux répétitions!!!

Avec le carré A ci-haut, il est impossible de construire une bordure qui donnera un carré magique d'ordre 6 presque normal puisque la somme doit être $\frac{1542}{4} = 385,5$. Pour le carré C, la somme doit être 423,75 d'où l'impossibilité.

98	102	51	64	79	44
58	46	39	231	11	53
95	121	21	26	69	106
50	13	253	33	42	47
96	63	22	23	143	91
41	93	52	61	94	97

Carré d'Edwards et sa bordure. Le carré d'ordre 6 est magique de somme $S = 438$.

70	80	60	50	138	40
44	46	39	231	11	67
90	121	21	26	69	111
66	13	253	33	42	31
123	63	22	23	143	64
45	115	43	75	35	125

Carré d'Edwards avec une nouvelle bordure. La somme est toujours $S = 438$.

Quelle beauté!!! De voir ce carré multiplicatif qui possède une très belle propriété, plongé en plein cœur d'un carré magique!!!

Voici le tableau annoncé :

	P	S^*	S	*bordure*
A	414 414	1542	$385,5$	*non*
B	785 664	2163	$540,75$	*non*
(EDW)	4 558 554	1752	438	*oui*
(EDW^*)	8 642 304	2373	$593,25$	*non*
C	1 202 256	1695	$423,75$	*non*
D	2 927 232	2154	$538,5$	*non*
E	1 202 256	1495	$373,75$	*non*
F	2 927 232	1891	$472,75$	*non*
G	473 616	1654	$413,5$	*non*
H	2 749 824	3823	$955,75$	*non*

Parmi ces dix carrés multiplicatifs, seul celui d'Edwards peut avoir une bordure qui rendra magique et presque normal le carré d'ordre 6 obtenu avec la bordure. La colonne S nous indique la somme magique que devra avoir le carré magique d'ordre $n+2$. Excepté pour le carré d'Edwards, aucun carré de ce tableau, formé d'entiers ne peut avoir une telle somme magique (évident!!!).

D'un autre côté, le carré d'Edward et son renversé sont ceux qui ont les plus grands produits parmi ces dix carrés. Notons que le renversé du carré d'Edwards ne peut pas avoir une bordure qui donnerait un carré formé d'entiers seulement.

Dans la colonne «bordure», le non signifie qu'il n'est pas possible d'avoir une bordure qui ferait que le carré d'ordre 6 obtenu soit formé exclusivement d'entiers.

Par exemple, la seule façon d'ajouter une bordure autour du carré A est de la remplir avec au moins six nombres rationnels non entiers car la somme magique du carré d'ordre 6 que nous voulons construire doit **obligatoirement** avoir comme somme magique $S = 385,5$.

Donnons-nous un carré d'ordre 4 dans lequel il y a seize entiers quelconques tous ≥ 1 avec $\frac{S^*}{4}$, un entier, ce qui est toujours possible. En effet, par exemple, si $S^* = 201$, alors il suffira

d'ajouter 3 à un entier qui n'est pas sur une grande diagonale. Construisez alors une bordure afin d'obtenir un carré magique d'ordre 6.

Théorème 15.12 :

Soit donné un carré M d'ordre $n \geq 3$. Nous voulons construire une bordure autour de M afin d'obtenir un carré magique M' d'ordre $n+2$. M'existe si et seulement si sa somme magique est $S = \frac{S^*}{n}$.

Preuve :

Nous avons vu plus haut que si M'est magique, alors sa somme est $S = \frac{S^*}{n}$. Nous allons montrer que si $S = \frac{S^*}{n}$, alors nous pourrons construire M'en plaçant une bordure autour de M et ce, d'une façon fort simple. Nous verrons, pendant la démonstration, un algorithme pour construire M'.

Dans le carré central, en orangé, la somme des nombres de chaque colonne de gauche à droite est notée c_1, c_2,..., c_n, la somme pour la grande diagonale principale est notée d_1 tandis que la somme pour la grande diagonale secondaire est notée d_2, puis, la somme des nombres de chaque rangée de haut en bas est notée $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

m	a_1	a_2	....	....	....	....	....	a_n	W
h_1									j_1
h_2									j_2
....									....
....									....
....									....
....									....
h_{n-1}									j_{n-1}
R									T
X	b_1	b_2	....	....	....	....	....	b_n	Y

Nous allons attribuer une valeur à $m, a_1, a_2, ..., a_n, h_1, h_2, ..., h_{n-1}$. Connaissant S, les valeurs de $W, X, Y, j_1, j_2, ..., j_{n-1}, b_1, b_2, ..., b_n$ sont aussitôt déterminées de façon unique. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} W &= S - m - \sum a_i \\ Y &= S - m - d_1 \\ X &= m + \sum a_i - d_2 \\ b_i &= S - a_i - c_i \\ j_i &= S - h_i - r_i \end{aligned}$$

Ainsi, les n premières rangées, les n colonnes centrales et les deux grandes diagonales de M'sont magiques.

Montrons que la dernière rangée de M'est magique :

$$(m + \sum a_i - d_2) + (nS - \sum a_i - \sum c_i) + (S - m - d_1) = S + nS - (d_1 + d_2 + \sum c_i) = S + nS - nS = S$$

En effet, puisque $S = \dfrac{S^*}{n}$, nous avons $d_1 + d_2 + \sum c_i = S^* = nS.$

Il reste à compléter l'avant-dernière rangée en trouvant la valeur de R et celle de T à partir de leur colonne respective. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} R &= S - m - \sum h_i - m - \sum a_i + d_2 \\ T &= S - S + m + \sum a_i - nS + \sum h_i + (r_1 + r_2 + ... + r_{n-1}) + m + d_1 \end{aligned}$$

Avec ces valeurs de R *et* T, toutes les colonnes de M' sont maintenant magiques. Enfin, montrons que l'avant-dernière rangée est magique.

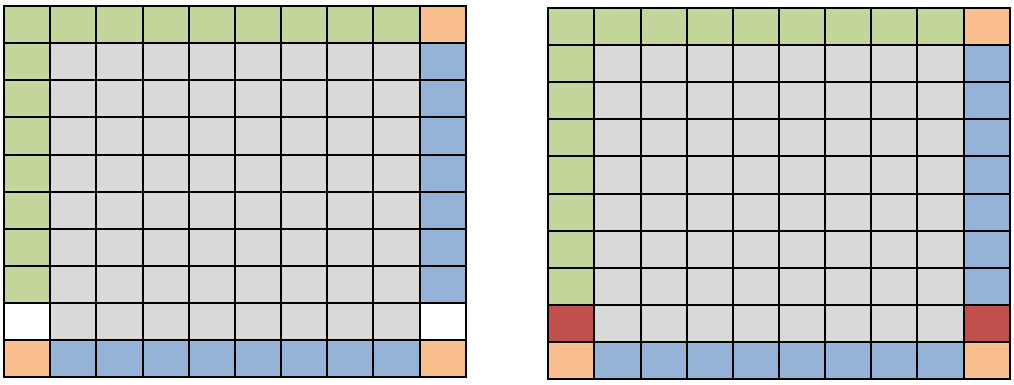
$$R + T + r_n = S - nS + d_1 + d_2 + \sum r_i = S - nS + (d_1 + d_2 + \sum c_i) = S - nS + nS = S$$

Le carré M'est donc magique. Nous aimerions qu'il soit presque normal!!!

Le carré qui suit montre comment construire le carré M'.

1) Trouvez d'abord la somme magique de M' soit $S = \dfrac{S^*}{n}$.
2) Dans le carré de gauche, remplir d'abord les cases vertes et déduire le coin haut droit, en orangé, avec la première rangée. Ensuite, déduire les deux autres coins, en orangé, avec les grandes diagonales.
3) Puis déduire le contenu des cases bleues à partir des cases vertes correspondantes.

4) Toujours dans le carré de gauche, trouvez le contenu des deux cases blanches en utilisant les nombres de leur colonne respective.
5) Le carré de droite est devenu M’, un carré magique!!!



Les cases grises renferment les nombres de M à partir desquels nous calculons $S^{*}\ puis\ S$.

Si nous voulons construire un carré M’ presque normal, alors le carré central, en gris, doit être presque normal. De plus, S doit être un entier. Nous vous suggérons de remplir une case verte à la fois puis sa case correspondante (en bleu) et s’assurer qu’il n’y a pas de répétition. Si c’était le cas, il faudrait changer le nombre de la case verte et toujours surveiller les répétitions. Une fois M donné, il se peut que des entiers négatifs soient nécessaires pour construire M’. Dans ce cas, nous allons quand même compléter M’en évitant les répétitions.

Pour éliminer les entiers négatifs, il suffira d’ajouter un même entier dans toutes les cases de M’. Ce sera **l’entier correcteur**, celui qui fera disparaître les négatifs!!! Et il n’est pas unique. **Mais M ne sera plus contenu dans M’.**

Dans la bordure, nous remplissons les cases vertes avec les nombres que nous voulons, de préférence avec des entiers ≥ 1, tous différents.

La façon de construire la bordure n’est pas unique.

Il est intéressant de voir que seul le carré M détermine l’unique somme que doit avoir M’pour être magique.

Nous venons de trouver une méthode pour construire le carré d'Edwards et quelques-autres semblables. En plus, nous savons comment mettre une bordure autour d'un carré quelconque d'ordre n, (pas nécessairement magique ou multiplicatif) afin d'obtenir un carré magique d'ordre $n+2$.

Nous terminons ici avec cette question :

> Pouvons-nous toujours construire un carré magique M' qui soit presque normal ou même normal, en plaçant une bordure autour de M? La réponse est non si nous exigeons que M soit contenu dans M'.

Disons seulement qu'il arrive que M' soit presque normal mais cela dépend bien entendu de M.

Voyons l'exemple suivant :

	w				
	4	15	14	1	
	5	10	11	8	
	9	6	7	12	
	16	3	2	13	
	z				

M'

M est le carré magique central normal d'ordre 4. Puisque $S^* = 204$, la somme magique de M'est $S = 51$. La plus petite valeur pour w est 17. Le nombre z est donc 0 et M' n'est pas presque normal. Si w est le nombre 18, alors z = -1 et si w = 17 + k avec k, un entier > 0, alors z = -k. Le carré M' ne sera donc jamais presque normal, ni normal. (Voir le problème 18 de 15.7).

15.4 Les carrés multiplicatifs d'ordres ≥ 5 et des m-ultra-magiques d'ordre 5

Nous vous suggérons de revoir les carrés multiplicatifs de Christian Boyer, section 13.3. Nous présentons ici un autre carré multiplicatif d'ordre 5, celui publié par Harry Sayles en 1913.

1	10	21	32	54
28	48	9	2	15
18	3	20	42	8
30	7	16	27	4
24	36	6	5	14

Sayles 1913; P = 362 880

Ce carré multiplicatif est pandiagonal. Cependant, Christian Boyer, en 2005, a construit un carré multiplicatif du plus petit produit possible soit P = 302 400. Mais il n'est pas pandiagonal.

Nous allons maintenant construire une structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 5 à variables non nulles.

Puis une structure générale de carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 5 qui sera la seule (aux structures équivalentes près) à pouvoir nous donner des carrés formés de nombres > 0. Chaque fois que nous rencontrerons la situation $A^2 = B$, nous choisirons $A = \sqrt{B}$.

Enfin, nous terminerons avec la structure générale des carrés m-ultra-magiques d'ordre 5 qui est la seule (aux structures équivalentes près) à fournir des carrés formés de nombres > 0.

Allons-y pour la première structure :

a	b	c	d	
e	f	g	h	
i	j	k	m	
n	q	r	t	
				A

Le produit magique est P et de là, il est facile de remplir les cases vides. Ainsi, nous trouvons $\frac{P}{i\,j\,k\,m}$ sur la troisième rangée. Si nous appelons φ, le produit des seize variables du sous-carré d'ordre 4 ci-haut, alors il est facile de montrer que $A = \frac{\varphi}{P^3}$. Puis nous ferons disparaître la variable q en exigeant que la grande diagonale secondaire soit magique et nous ferons disparaître la variable k en exigeant que la grande diagonale principale soit magique. En continuant ainsi afin de rendre magiques toutes les diagonales brisées, nous trouvons la structure suivante des carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 5 à variables non nulles.

a	b	c	d	$\frac{P}{a\,b\,c\,d}$
e	$\frac{d\,m}{e}$	$\frac{a\,i}{h}$	h	$\frac{P}{a\,d\,i\,m}$
i	$\frac{h\,P}{a\,b\,d\,i\,m}$	$\frac{e\,P}{a\,c\,d\,i\,m}$	m	$\frac{a^2 b\,c\,d^2 i\,m}{e\,h\,P}$
$\frac{P}{a\,c\,d\,i}$	$\frac{a^2 b\,c\,d\,i\,m}{h\,P}$	$\frac{a\,b\,c\,d^2 i\,m}{e\,P}$	$\frac{P}{a\,b\,d\,m}$	$\frac{e\,h\,P}{a\,b\,c\,d\,i\,m}$
$\frac{c\,d}{e}$	$\frac{e\,P}{a\,b\,c\,d\,m}$	$\frac{h\,P}{a\,b\,c\,d\,i}$	$\frac{a\,b}{h}$	$\frac{a\,b\,c\,d\,i\,m}{P}$

Cette structure générale permet de construire **tous** les carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 5 à variables non nulles, qui sont **formés de vingt cinq nombres** > 0.

Allons maintenant vers la structure des m-ultra-magiques donc des carrés multiplicatifs qui sont à la fois pandiagonaux et associatifs.

Un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$ est **associatif** si et seulement si toutes les paires de cases symétriques par rapport au centre du carré ont pour produit des nombres qui s'y trouvent, le nombre $\sqrt[n]{P^2}$.

(Voir problème 19 de 15.7). Nous trouvons alors la structure générale suivante qui génère tous les m-ultra-magiques formés de vingt-cinq nombres > 0.

(UM*)

a	$\frac{P^{\frac{3}{5}}}{a\,e}$	$\frac{e^2}{m}$	d	$\frac{m\,P^{\frac{2}{5}}}{d\,e}$
e	$\frac{d\,m}{e}$	$\frac{a\,e}{d}$	$\frac{P^{\frac{4}{5}}}{a\,e^2}$	$\frac{e\,P^{\frac{1}{5}}}{m}$
$\frac{P^{\frac{4}{5}}}{a\,d\,e}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{m}$	$P^{\frac{1}{5}}$	m	$\frac{a\,d\,e}{P^{\frac{2}{5}}}$
$\frac{m\,P^{\frac{1}{5}}}{e}$	$\frac{a\,e^2}{P^{\frac{2}{5}}}$	$\frac{d\,P^{\frac{2}{5}}}{a\,e}$	$\frac{e\,P^{\frac{2}{5}}}{d\,m}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{e}$
$\frac{d\,e}{m}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{d}$	$\frac{m\,P^{\frac{2}{5}}}{e^2}$	$\frac{a\,e}{P^{\frac{1}{5}}}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{a}$

Structure des m-ultra-magiques d'ordre 5 à variables non nulles

La case centrale de la structure (UM*) montre clairement que le produit P d'un tel carré formé d'entiers >0 doit avoir la forme $P = k^5$ où k est un entier ≥ 1. De plus, les valeurs des variables a, d, e *et* m doivent être des diviseurs entiers de k^2.

Si vous avez un carré m-ultra-magique formé de vingt-cinq nombres > 0, alors celui-ci provient de la structure (UM*) ci-haut. Cette structure renferme cinq variables a, d, e, m *et* P.

Le problème 20 de 15.7 généralise ce résultat.

Le carré suivant, UM*-1, est un premier exemple de carré m-ultra-magique presque normal; son produit est $120^5 = 24\ 883\ 200\ 000$. Il est déterminé en posant dans (UM*) :

$$a = 72\ ;\ d = 480\ ;\ e = 240\ ;\ m = 360\ ;\ P = 24\ 883\ 200\ 000.$$

Le plus petit entier est 20 et le plus grand est 720, tous les deux situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré!!!

Voici ce carré :

72	100	160	480	45
240	720	36	50	80
25	40	120	360	576
180	288	400	20	60
320	30	90	144	200

UM*-1

Pouvons-nous trouver un meilleur m-ultra-magique? Plus précisément, un m-ultra-magique M dont le produit serait le plus petit avec les plus petits entiers dans M?

Par exemple, nous avons un autre m-ultra-magique presque normal d'ordre 5, UM*-2, également de produit $P = 120^5$ mais, son plus grand entier est 14 400 au lieu du 720 dans le carré ci-haut (720 est vingt fois plus petit que 14 400). Ce dernier carré est obtenu de (UM*) avec :

$$a = 20 \text{ ; } d = 12 \text{ ; } e = 60 \text{ ; } m = 40 \text{ ; } P = 24\ 883\ 200\ 000.$$

Nous préférons, évidemment, UM*-1 à UM*-2.

Mais il nous faut le meilleur m-ultra-magique presque normal. Celui-ci aura donc le plus petit produit et contiendra les plus petits entiers.

Nous avons trouvé un meilleur m-ultra-magique presque normal de produit $P = 90^5$ et ce, avec : $a = 9$; $d = 135$; $e = 540$; $m = 108$ et $P = 90^5 = 5\ 904\ 900\ 000.$

Puis, à nouveau, encore un meilleur m-ultra-magique presque normal de produit $P = 60^5$ et ce, avec : $a = 4$; $d = 40$; $e = 360$; $m = 72$ et $P = 60^5 = 777\ 600\ 000.$

Puisque $P > \sqrt[5]{25!} = 109\ 176,49...$, il s'ensuit que $k \geq 11.$ Il reste à regarder les cas où $k = 11, 12, ..., 59.$ De cette liste, il faut enlever tous les entiers qui sont des nombres premiers p

car les seuls diviseurs entiers >0 de p^2 sont $1, p \ et \ p^2$. Puisque nous voulons un presque normal et qu'il nous faut au moins quatre diviseurs de k^2 soit $a, d, e, m,$ alors le presque normal n'est pas possible. Il reste donc à regarder les 36 cas suivants :

$$k = 12;14;15;16;18;20;21;22;24;25;26;27;28;30;32;33;34;35;36;38;39;$$
$$40;42;44;45;46;48;49;50;51;52;54;55;56;57;58$$

Voyons ce que nous obtenons avec $k = 30.$ Notre programme construit avec MAPLE nous indique qu'il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

Puis pour toutes les valeurs de $k < 30,$ nous trouvons aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

Il faut donc regarder maintenant les valeurs de $k > 30.$ Avec $k = 32, 33, 34 \ et \ 35,$ nous trouvons aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

Mais quelle surprise avec $k = 36.$ Nous trouvons 128 m-ultra-magiques presque normaux de produit $P = 36^5 = 60\ 466\ 176.$ Le plus grand entier est 1296 et le plus petit est 1.

Théorème 15.13:

Si A est un carré m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit P, alors $P \geq 36^5 = 60\ 466\ 176.$

De plus, nous en connaissons au moins un de produit $P = 36^5$.

Voici un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 ayant le plus petit produit possible :

1	144	162	12	216
324	24	27	16	18
432	2	36	648	3
72	81	48	54	4
6	108	8	9	1296

$a = 1$; $d = 12$; $e = 324$; $m = 648$; $P = 36^5$

Puis quelques résultats :

1) Avec $1 \leq k \leq 35$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
2) Avec $k = 36$, nous trouvons 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 16 primitifs.
3) Avec $37 \leq k \leq 59$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
4) Avec $k = 60$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 160 primitifs.
5) Avec $61 \leq k \leq 71$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
6) Avec $k = 72$, nous trouvons 1408 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 176 primitifs.
7) Avec $73 \leq k \leq 83$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
8) Avec $k = 84$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 160 primitifs.
9) Avec $85 \leq k \leq 89$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
10) Avec $k = 90$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 160 primitifs.
11) Avec $91 \leq k \leq 95$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
12) Avec $k = 96$, nous trouvons 768 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 96 primitifs.
13) Avec $97 \leq k \leq 99$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
14) Avec $k = 100$, nous trouvons 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 16 primitifs.
15) Avec $101 \leq k \leq 107$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
16) Avec $k = 108$, nous trouvons 1408 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 176 primitifs.
17) Avec $109 \leq k \leq 119$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

$36^5 = 60\ 466\ 176$

$60^5 = 777\ 600\ 000$

$72^5 = 1\ 934\ 917\ 632$

$84^5 = 4\ 182\ 119\ 424$ *Ce sont les neuf plus petits*

$90^5 = 5\ 904\ 900\ 000$ *produits pour des*

$96^5 = 8\ 153\ 726\ 976$ *presque normaux.*

$100^5 = 10\ 000\ 000\ 000$

$108^5 = 14\ 693\ 280\ 768$

$120^5 = 24\ 883\ 200\ 000$

Nous en trouvons respectivement :

$$\begin{array}{cccc} 128 & d'où & 16 & primitifs \\ 1280 & d'où & 160 & primitifs \\ 1408 & d'où & 176 & primitfs \\ 1280 & d'où & 160 & primitifs \\ 1280 & d'où & 160 & primitifs \\ 768 & d'où & 96 & primitifs \\ 128 & d'où & 16 & primitifs \\ 1408 & d'où & 176 & primitifs \\ 17\,664 & d'où & 2208 & primitifs \end{array}$$

Vous trouverez les primitifs dans la Partie 3 avec le programme « Les meilleurs m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 ». Voir 04 de l'annexe 23 : le nouveau nom est MUM-5.

Une grande question!!!
Pourquoi pouvons-nous prévoir qu'avec $k = 150$, nous trouverons 1280 carrés m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et qu'avec $k = 675$, nous en trouverons 1408? Voir le problème 43 de 15.7

En terminant, voici un m-ultra-magique d'ordre 5 de produit $30^5 = 24\ 300\ 000$. Il n'est pas presque normal. Cependant, ses vingt-cinq nombres sont tous des entiers ≥ 1.

12	75	6	10	450
30	50	36	75	6
225	6	30	150	4
150	12	25	18	30
2	90	150	12	75

Parmi ceux-ci, cinq entiers différents apparaissent chacun trois fois et les dix autres, également différents apparaissent chacun une fois. Remarquez qu'avec deux mouvements de cavalier (en référence au jeu d'échecs), nous rencontrons les trois 6. Il en est de même pour les trois 30 et les trois 150. Avec un seul mouvement de cavalier, nous rencontrons deux 12 et deux 75.

Enfin, puisque $k = 36$ nous conduit à des m-ultra-magiques presque normaux, alors il est certain que nous en trouverons avec $k = 36\lambda$ où $\lambda \geq 1$ est un entier.

De même avec $k = 60$; 72 ; 84 ; 90 ; 96 et 100. Nous en avions avec $k = 36$ d'où notre certitude d'en trouver avec $k = 72$, $k = 108, \ldots$ Par contre, nous n'en trouvons pas avec $k = 30$. Mais il se peut que nous en trouvions avec $k = 60$. Ce qui est le cas. Nous en trouvons aussi avec $k = 90$.

Il n'y a que 16 m-ultra-magiques presque normaux primitifs d'ordre 5 et de produit $P = 36^5 = 60\ 466\ 176$.
C'est le plus petit produit possible pour un presque normal.
Ils sont tous formés des mêmes vingt-cinq entiers.
Donc, ils ont tous le même plus petit entier soit 1 et le même plus grand soit 1296.

Ce sont les 16 meilleurs m-ultra-magiques presque normaux primitifs d'ordre 5.

$k\ et\ P = k^5$	Nombre de presque normaux	Nombre de primitifs	Entier minimum (*)	Entier maximum (*)	Nombre de primitifs avec (*)
36 ; 60 466 176	128	16	1	1296	16
60 ; 777 600 000	1280	160	5	720	16
72 ; 72^5	1408	176	4	1296	32
84 ; 84^5	1280	160	7	1008	16
90 ; 90^5	1280	160	4	2025	16
96 ; 96^5	768	96	2	4608	32
100 ; 100^5	128	16	1	10 000	16
108 ; 108^5	1408	176	8	1458	16
120 ; 120^5	17 664	2208	20	720	16

Le tableau précédent présente les neuf plus petits produits pour les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5.

Par exemple, avec $k = 60$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux donc 160 primitifs. Parmi ces primitifs, 16 renferment l'entier minimum 5 en même temps que l'entier maximum 720, qui est le plus petit des maximums pour tous les carrés presque normaux obtenus avec ces neuf produits.

Dans le tableau ci-haut, il est intéressant de regarder de plus près le produit $P = 120^5$. Nous trouvons $17\,664$ m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 2208 primitifs. Ceux-ci se répartissent en 138 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes 25 entiers!!! Les carrés de deux groupes ne renferment pas les mêmes 25 entiers.

Minimum	Maximum	Primitifs	Groupes de 16
20	720	16	1
18	800	16	1
12	1200	48	3
10	1440	80	5
9	1600	48	3
8	1800	96	6
6	2400	144	9
5	2880	144	9
4	3600	336	21
3	4800	256	16
2	7200	496	31
1	14 400	528	33
		2208	138

Ce dernier tableau nous indique le nombre de m-ultra-magiques presque normaux primitifs d'ordre 5 et de produit $P = 120^5$. Par exemple, nous voyons qu'il y en a 336 qui renferment l'entier minimum 4 en même temps que l'entier maximum 3600. Ces 336 forment 21 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes entiers; ce qui n'est pas le cas avec deux groupes différents.

Voici maintenant le meilleur carré m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 trouvé avant l'utilisation d'un programme fait avec MAPLE, lequel trouve tous les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et de produit donné.

5	180	400	120	18
240	72	10	45	100
90	25	60	144	40
36	80	360	50	15
200	30	9	20	720

Ce carré est du deuxième meilleur produit soit $P = 60^5 = 777\ 600\ 000$. Son entier maximum est 720, le plus petit maximum de tous les m-ultra-magiques presque normaux obtenus avec les neuf produits du tableau ci-haut.

Puis, l'utilisation du programme a permis de trouver cent-vingt-huit m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 dont le produit est le plus petit soit :

$$36^5 = 60\ 466\ 176$$

Ces cent-vingt-huit ont tous 1296 comme entier maximum et 1 comme entier minimum. Ceux-ci nous conduisent à seize primitifs qui sont les seize meilleurs m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5. De plus, ils renferment tous les mêmes 25 entiers!!! Pourquoi?

Vous trouverez la réponse dans l'annexe 32.

Voici un de ces seize meilleurs, déjà présenté plus haut. Nous allons voir que celui-ci possède au moins trois très jolies super-figures.

1	144	162	12	216
324	24	27	16	18
432	2	36	648	3
72	81	48	54	4
6	108	8	9	1296

m-ultra-magique presque normal du plus petit produit $P = 36^5$

	144			
324	24	27		
	2	36		3
			54	
		8		1296

La croix, en orangé, est une **super-figure**!!! Cela signifie que peu importe la position de cette croix dans le carré (9 cas possibles), en autant qu'elle couvre parfaitement cinq cases, le produit des nombres situés dans ces cinq cases est $P = 36^5 = 60\ 466\ 176$. Vérifiez que la figure en bleu est aussi une super-figure (9 cas à regarder) ainsi que la figure en rouge (16 cas à regarder). Ces super-figures, et il y en a d'autres, sont aussi des super-figures de la structure générale (UM*). Donc tous les m-ultra-magiques d'ordre 5 issus de (UM*) possèdent ces trois super-figures.

Théorème 15.13.1 (voir le problème 41 de 15.7)

Dans un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit $P = k^5$, chaque entier du carré est un diviseur de k^2.

15.5 Les carrés m-hyper-magiques et des m-hyper-magiques d'ordre 6

Un m-hyper-magique est un carré qui possède les caractéristiques suivantes :

1) Il est d'ordre $n =$ entier pair.
2) Il est multiplicatif.
3) Le produit des nombres dans tout sous-carré d'ordre 2 est toujours $\sqrt[n]{P^4}$.
4) Sur toute diagonale, grande ou brisée, le produit des nombres situés dans deux cases séparées par $\frac{n-2}{2}$ cases est toujours $\sqrt[n]{P^2}$.

La caractéristique 4) implique que tous les m-hyper-magiques sont pandiagonaux.

Nous avons construit la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 6 à variables non nulles. Ensuite, nous avons construit la structure générale des carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 6 à variables non nulles. En fait, nous avons trouvé deux structures suite à une égalité de la forme $A^6 = B^6$. Nous avons choisi $A = B$, ce qui nous a conduit à la structure suivante qui nous permet d'avoir trente-six nombres > 0 dans notre carré. Le choix $A = -B$ nous conduirait à une structure générant des carrés qui renfermeraient obligatoirement au moins un nombre < 0. Nous avons rejeté cette dernière structure.

Enfin, nous avons trouvé la structure générale que voici, qui est m-hyper-magique d'ordre 6, à variables non nulles et qui est la seule (aux structures équivalentes près) à pouvoir générer des m-hyper-magiques formés de trente-six nombres > 0.

Vous voulez un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de trente-six nombres > 0, alors celui-ci ne peut être généré que par la structure générale (HM*) suivante :

$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{t}$	$\frac{n^2t^3wy}{P}$	$\frac{P^{\frac{11}{6}}}{n^3t^4wy^2}$	$\frac{n^2t^3y^2}{P}$	$\frac{P^{\frac{1}{3}}w}{ty}$	$\frac{\sqrt{P}}{nw}$
$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{y}$	$\frac{P}{n^2t^2w}$	$\frac{n^3t^3wy}{P^{\frac{7}{6}}}$	$\frac{P}{n^2t^2y}$	$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{w}$	$\frac{ntwy}{\sqrt{P}}$
$\frac{nt^2y^2}{P^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{nw}{y}$	$\frac{P^{\frac{5}{6}}}{n^2tw}$	n	$\frac{nt^2wy}{P^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{P^{\frac{3}{2}}}{n^2t^3wy^2}$
$\frac{P^{\frac{4}{3}}}{n^2t^3y^2}$	$\frac{ty}{w}$	$\frac{nw}{P^{\frac{1}{6}}}$	t	$\frac{P^{\frac{4}{3}}}{n^2t^3wy}$	$\frac{n^3t^4wy^2}{P^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{n^2t^2y}{P^{\frac{2}{3}}}$	w	$\frac{P^{\frac{5}{6}}}{ntwy}$	y	$\frac{n^2t^2w}{P^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{P^{\frac{3}{2}}}{n^3t^3wy}$
$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{n}$	$\frac{P}{nt^2wy}$	$\frac{n^2t^3wy^2}{P^{\frac{7}{6}}}$	$\frac{P}{nt^2y^2}$	$\frac{P^{\frac{1}{3}}y}{nw}$	$\frac{n^2tw}{\sqrt{P}}$

(HM*) Structure générale des m-hyper-magiques d'ordre 6

Dans (HM*), nous trouvons l'expression $\frac{P^{\frac{5}{6}}}{n^2tw}$ en position $(3;3)$. Pour que le carré soit formé de trente-six entiers > 0, il est nécessaire que $\frac{P^{\frac{5}{6}}}{n^2tw}$ soit un entier > 0 et que les cinq variables prennent également des valeurs entières > 0. Nous aurons $P^{\frac{5}{6}} = E$, un entier > 0. Donc, $P^5 = E^6$ ce qui implique que P est une puissance sixième; plus précisément, $P = k^6$ où k est un entier ≥ 1. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que si P n'est pas une puissance sixième, alors P^5 n'est pas une puissance sixième, ce qui contredit $P^5 = E^6$. (Voir problème 21 de 15.7).

Soit A, un carré m-hyper-magique d'ordre 6 formé exclusivement d'entiers > 0. Alors le produit est $P = k^6$ où $k \geq 1$ est un entier.

Voici la structure générale (HM), obtenue de (HM*) dans laquelle nous avons remplacé P par k^6.

Les quatre cases grises nous montrent que si le carré est formé de trente-six entiers > 0, alors les valeurs que prendront les quatre variables $n, t, w\ et\ y$, devront être parmi les diviseurs entiers > 0 de k^2.

$\frac{k^2}{t}$	$\frac{n^2t^3wy}{k^6}$	$\frac{k^{11}}{n^3t^4wy^2}$	$\frac{n^2t^3y^2}{k^6}$	$\frac{k^2w}{ty}$	$\frac{k^3}{nw}$
$\frac{k^2}{y}$	$\frac{k^6}{n^2t^2w}$	$\frac{n^3t^3wy}{k^7}$	$\frac{k^6}{n^2t^2y}$	$\frac{k^2}{w}$	$\frac{ntwy}{k^3}$
$\frac{nt^2y^2}{k^4}$	$\frac{nw}{y}$	$\frac{k^5}{n^2tw}$	n	$\frac{nt^2wy}{k^4}$	$\frac{k^9}{n^2t^3wy^2}$
$\frac{k^8}{n^2t^3y^2}$	$\frac{ty}{w}$	$\frac{nw}{k}$	t	$\frac{k^8}{n^2t^3wy}$	$\frac{n^3t^4wy^2}{k^9}$
$\frac{n^2t^2y}{k^4}$	w	$\frac{k^5}{ntwy}$	y	$\frac{n^2t^2w}{k^4}$	$\frac{k^9}{n^3t^3wy}$
$\frac{k^2}{n}$	$\frac{k^6}{nt^2wy}$	$\frac{n^2t^3wy^2}{k^7}$	$\frac{k^6}{nt^2y^2}$	$\frac{k^2y}{nw}$	$\frac{n^2tw}{k^3}$

(HM) Structure générale des m-hyper-magiques d'ordre 6 avec $P = k^6$

Nous allons chercher les m-hyper-magiques presque normaux dont le produit sera le plus petit possible et idéalement, tel que le plus grand entier du carré soit le plus petit possible. Nous voulons trouver tous les carrés m-hyper-magiques presque normaux dont le produit est le plus petit.

Voici le m-hyper-magique de Sayles et deux m-hyper-magiques de Christian Boyer :

729	192	9	46656	3	576
32	486	2592	2	7776	162
11664	12	144	2916	48	36
1	15552	81	64	242	5184
23328	6	288	1458	96	18
16	972	1296	4	3888	324

Sayles 1913 ; $P = 216^6$

5	720	160	45	80	1440
4800	12	150	192	300	6
9	400	288	25	144	800
320	180	10	2880	20	90
75	48	2400	3	1200	96
576	100	18	1600	36	50

Christian Boyer 2006 ; $P = 120^6$

14	2100	63	350	84	1575
4410	15	980	90	735	20
50	588	225	98	300	441
126	525	28	3150	21	700
490	60	2205	10	2940	45
450	147	100	882	75	196

Christian Boyer 2006 ; $P = 210^6$

Dans les trois m-hyper-magiques ci-haut, celui de produit $P = 120^6$ est le meilleur car c'est lui qui a le plus petit produit d'entre les trois. De plus, ils sont tous presque normaux.

Nous présentons ici les cinq plus petits produits pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6. Vous trouverez dans un tableau un peu plus loin, les onze plus petits produits.

	Produit	Plus grand entier
$Boyer\ 2006\ ;\ Bégin, St-Hilaire\ 2015$	120^6	4800
$Bégin, St-Hilaire\ 2015$	168^6	9408
$Boyer\ 2006\ ;\ Bégin, St-Hilaire\ 2015$	210^6	4410
$Sayles\ 1913\ ;\ Bégin, St-Hilaire\ 2015$	216^6	46656
$Bégin, St-Hilaire\ 2015$	240^6	4800

Pour chaque produit, nous avons trouvé 36 carrés primitifs qui renferment tous le plus petit entier maximum. De plus, ces 36 carrés contiennent les mêmes 36 entiers!!!

En 2014, Oscar Lanzi à démontré que si A est un carré multiplicatif pandiagonal presque normal d'ordre 6, alors son produit $P \geq 60^6$.
De plus, nous connaissons un tel carré de produit $P = 60^6$.

Pour le moment, cela signifie que le plus petit produit pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 est $P = 60^6$.

Nous allons utiliser un programme (05 de l'annexe 23 : MHM-6) construit avec MAPLE afin de trouver tous les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 et de produit $P = 60^6$. Nous chercherons ensuite le ou les meilleurs parmi ceux-ci (ceux qui renferment le plus petit entier maximum). Puis, nous illustrerons de très belles propriétés des m-hyper-magiques.

Mais voilà que notre programme nous donne aucun m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 dont le produit est 60^6. De la même façon, nous n'obtenons aucun m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 dont le produit est $P = k^6$ où l'entier k vérifie $61 \leq k \leq 119$.

Nous savons qu'il y en a avec $P = 120^6$. Notre programme nous donne tous les presque normaux qui ont ce produit. Il sera très facile de choisir les meilleurs avec ce qui suit!!!

Soit A, un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6. Nous savons maintenant que son produit vérifie $P \geq 120^6$.

De plus, nous connaissons déjà soixante-douze carrés primitifs de produit $P = 120^6$.

Il existe 576 m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 de produit 120^6 soit 72 primitifs que vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 05. L'entier maximum est soit 4800 soit 14 400.

Parmi les 72 primitifs, 36 ont 4800 pour entier maximum et 3 pour entier minimum. Ces 36 carrés renferment les mêmes entiers.

Parmi les 72 primitifs, 36 ont 14400 pour entier maximum et 1 pour entier minimum. Ces 36 carrés renferment les mêmes entiers.

Soit A, un carré m-hyper-magique d'ordre 6 formé exclusivement d'entiers > 0, de produit $P = k^6$. Alors, le produit des neuf nombres situés dans tout sous-carré d'ordre 3 est toujours le même soit $P^{\frac{3}{2}} = k^9$.

Que pouvons-nous espérer avec un produit inférieur à 120^6 ou même inférieur à 60^6 ? La structure générale (HM) nous assure que le carré obtenu avec celle-ci sera toujours un m-hyper-magique donc un carré pandiagonal. Il pourra être formé d'entiers > 0 mais il ne pourra pas être presque normal, donc il contiendra des répétitions. Voyons le carré qui suit de produit $P = 30^6$:

225	4	450	1	900	2
60	15	30	60	15	30
1	900	2	225	4	450
900	1	450	4	225	2
15	60	30	15	60	30
4	225	2	900	1	450

m-hyper-magique de produit 729 000 000.

Ce carré renferme neuf entiers différents > 0, chacun apparaissant quatre fois!!! Ces neuf entiers sont : $4\ \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 15\ ;\ 30\ ;\ 60\ ;\ 225\ ;\ 450\ ;\ 900\}$.

Voici maintenant un autre m-hyper-magique, cette fois de produit $P = 60^6$. Il est formé de dix-huit entiers différents > 0, chacun apparaissant deux fois. Ces entiers sont :
$2\ \{1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ 20\ ;\ 30\ ;\ 36\ ;\ 50\ ;\ 72\ ;\ 100\ ;\ 120\ ;\ 180\ ;\ 300\ ;\ 600\ ;\ 720\ ;\ 1800\ ;\ 3600\}$

600	36	100	6	3600	1
30	20	180	120	5	720
12	1800	2	300	72	50
600	1	3600	6	100	36
30	720	5	120	180	20
12	50	72	300	2	1800

m-hyper-magique de produit $46\ 656\ 000\ 000$

Voici deux des trente-six meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6.

5	720	160	45	80	1440
4800	12	150	192	300	6
9	400	288	25	144	800
320	180	10	2880	20	90
75	48	2400	3	1200	96
576	100	18	1600	36	50

Christian Boyer 2006: $P = 120^6$

3	1600	45	192	25	2880
1200	36	80	300	144	20
96	50	1440	6	800	90
75	576	5	4800	9	320
48	100	720	12	400	180
2400	18	160	150	288	10

Claude Bégin, Claude St-Hilaire: juillet 2015 : $P = 120^6$

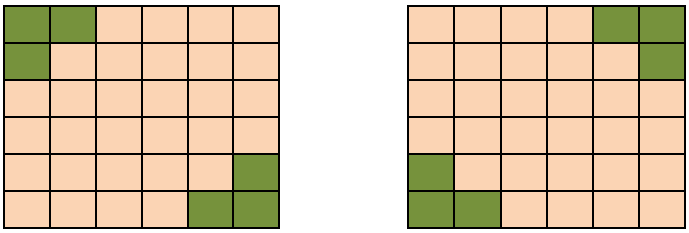
Quelques propriétés des m-hyper-magiques d'ordre 6 :

1) Ils sont tous pandiagonaux.
2) Soit A, un carré m-hyper-magique d'ordre 6 formé exclusivement d'entiers > 0, de produit $P = k^6$.
   a) Alors, le produit des neuf entiers situés dans tout sous-carré d'ordre 3 est toujours le même soit $P^{\frac{3}{2}} = k^9$.

b) Le produit des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 4 est toujours $\sqrt[3]{P^2} = k^4$.

c) Le produit des quatre coins du carré d'ordre 6 est toujours $\sqrt[3]{P^2} = k^4$.

d) A possède les deux figures magiques suivantes et bien d'autres :



e) La structure générale (HM) possède 5052 figures magiques donc tous les m-hyper-magiques formés de trente-six entiers > 0 possèdent au moins 5052 figures magiques!!! Nous en avons trouvé qui avaient 8046 figures magiques!!!

f) C'est le cas des deux derniers carrés ci-haut de produit $P = 120^6$.

g) Les m-hyper-magiques d'ordre 6 possèdent de nombreuses super-figures (voir problème 22 de 15.7).

Tous les carrés du tableau suivant ont un produit de la forme $P = k^6$. La première colonne à gauche indique la valeur de k et sa décomposition en facteurs premiers.

k	Presque normaux	Primitifs	Plus grand entier minimum *	Plus petit entier maximum *	Primitifs avec *	Groupes de 36
$120 = 2^3 \times 3 \times 5$	576	72	3	4800	36	2
$168 = 2^3 \times 3 \times 7$	576	72	3	9408	36	2
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$	3456	432	10	4410	36	12
$216 = 2^3 \times 3^3$	288	36	1	46 656	36	1
$240 = 2^4 \times 3 \times 5$	9216	1152	12	4800	36	32
$264 = 2^3 \times 3 \times 11$	576	72	3	23 232	36	2
$270 = 3^3 \times 2 \times 5$	576	72	2	36 450	36	2
$280 = 2^3 \times 5 \times 7$	576	72	5	15 680	36	2
$312 = 2^3 \times 3 \times 13$	576	72	3	32 448	36	2
$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$	3456	432	10	10 890	36	12
$336 = 2^4 \times 3 \times 7$	9216	1152	14	8064	36	32

Ce tableau indique les onze plus petits produits pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 soient 120^6 , 168^6 , 210^6 , 216^6 , 240^6 , 264^6 , 270^6 , 280^6 , 312^6 , 330^6 , 336^6.

Par exemple, pour le deuxième produit, nous trouvons 576 m-hyper-magiques presque normaux d'où 72 primitifs. Nous constatons que ceux-ci sont regroupés en deux groupes de 36 et que tous les carrés d'un même groupe renferment les mêmes 36 entiers!!! Dans le premier groupe, les carrés renferment donc le même entier minimum 3 et le même entier maximum 9408. Dans le second groupe, tous les carrés renferment donc le même entier maximum $28\,224$.

Pour le troisième produit, nous trouvons 432 primitifs répartis en douze groupes de 36 carrés. Dans chaque groupes, les 36 carrés renferment les mêmes 36 entiers. Puis parmi les douze groupes, nous trouvons un seul groupe tel que tous les carrés dans celui-ci renferment le plus petit entier maximum soit 4410. **Notons que dans ce tableau, le plus grand entier minimum est celui qui se trouve avec le plus petit entier maximum.**

Il est surprenant de constater, pour tous les produits du tableau, que les groupes renferment tous 36 carrés formés des mêmes 36 entiers!!! Deux carrés provenant de deux groupes différents ne renferment pas les mêmes 36 entiers.

Le tableau nous montre que les 36 meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 ont pour produit $P = 120^6$ et renferment tous l'entier minimum 3 et l'entier maximum 4800.
Meilleur signifie ici : le plus petit entier maximum pour le plus petit produit.

Voyons maintenant ces deux m-hyper-magiques presque normaux de produit 168^6 :

576	98	36	3136	18	196
147	96	2352	3	4704	48
448	126	28	4032	14	252
9	1568	144	49	288	784
9408	6	588	192	294	12
7	2016	112	63	224	1008

$$P = 168^6;\ entier\ \min = 3\ ;\ entier\ \max = 9408$$

4032	28	126	448	252	14
1	7056	32	441	16	14112
9408	12	294	192	588	6
63	112	2016	7	1008	224
64	1764	2	28224	4	882
147	48	4704	3	2352	96

$$P = 168^6 \ ; \ entier \min = 1 \ ; \ entier \max = 28\,224$$

Le premier fait partie du groupe de 36 qui ont tous 9408 comme entier maximum et le second fait partie du groupe de 36 qui ont tous 28224 comme entier maximum.

Revenons au tableau ci-haut. Nous trouvons que six valeurs de k nous donnent 576 carrés m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6. La décomposition en facteurs premiers de ces six entiers montre que chaque décomposition à la forme $a^3 b\, c$ où $a, b\, et\, c$ sont des nombres premiers évidemment différents deux à deux.

VOILÀ ce qui explique que nous obtenions les mêmes résultats!!! Pour l'instant, notre approche est purement intuitive. Le programme dans MAPLE traite de la même façon $2^3 \times 5 \times 7$ que $5^3 \times 11 \times 19$.

La prédiction que toute valeur entière de k de la forme $a^3 b\, c$ donnera 576 carrés a toujours été exacte!!!

La décomposition de la forme $a^2 b\, c$ ne nous donne aucun carré pour $k = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Nous prétendons qu'il en sera de même pour $k = 84$, 132 , 140 , 156 , 204 , 228... ce qui a été vérifié.

La décomposition de la forme $a^6 b$ ne nous donne aucun carré pour $k = 192 = 2^6 \times 3$. Nous pensons qu'il en sera de même pour $k = 320 = 2^6 \times 5$, ce qui est exact.

Le tableau suivant nous présente un certain nombre de décompositions qui nous donnent des carrés et un certain nombre de décompositions qui ne nous donnent aucun carré.

Décomposition de la forme	Presque normaux	Primitifs	Carrés avec le plus petit maximum	Groupes de 36 carrés primitifs
a^3bc	576	72	36	2
a^4bc	9216	1152	36	32
$abcd$	3456	432	36	12
a^3b^3	288	36	36	1
a^4b^3	2304	288	72	8
a^2bc	0	0	0	0
a^2b^2c	0	0	0	0
a^4b^2	0	0	0	0
a^5b^2	0	0	0	0
a^6b	0	0	0	0

Par exemple, si $k = a^4bc$, alors **nous prétendons** obtenir 9216 m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 donc 1152 primitifs répartis en 32 groupes de 36 carrés. Dans chaque groupe, les 36 carrés renferment les mêmes 36 entiers et un seul groupe contient 36 carrés ayant le plus petit maximum.

Nous avons des résultats semblables pour les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 et pour les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5.

Pourrions-nous augmenter le tableau ci-haut? Oui avec a^{24}; a^{25}; a^4b^3... , nous trouvons des carrés. Nous ne trouvons aucun carré avec a^7b.

Nous venons de trouver que le douzième meilleur produit pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 est 360^6. Pour y arriver, nous avons utilisé le problème 45 de 15.7.

Remarque :

Pour montrer que le plus petit produit d'un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 est 120^6, nous avons vérifié avec notre programme dans MAPLE que pour $1 \le k \le 59$, nous n'avions aucun m-hyper-magique presque normal de produit k^6. Nous avions aussi vérifié qu'il en était de même pour $60 \le k \le 119$.

Ce résultat est conforme avec celui d'Oscar Lanzi vu un peu plus haut. Un m-hyper-magique est pandiagonal et il n'existe pas de carré multiplicatif pandiagonal presque normal de produit

inférieur à 60^6 selon Lanzi. Donc il n'existe pas de m-hyper-magique presque normal de produit inférieur à 60^6.

Puis le :

Théorème 15.13.2 (voir le problème 42 de 15.7)

Dans un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 donc de produit $P = k^6$, chaque entier du carré est un diviseur de k^2.

Grâce à ce théorème, nous avons maintenant un moyen de trouver seulement les valeurs de k susceptibles de nous donner des carrés m-hyper-magiques presque normaux.

Si le nombre de diviseurs entiers ≥ 1 est inférieur à 36, alors nous ne trouverons aucun m-hyper-magique presque normal d'ordre 6.

Il est facile avec MATHEMATICA ou MAPLE de construire une table qui indique le nombre de diviseurs positifs de k^2. Avec MATHEMATICA, nous avons :

Table[Length[Divisors[k^2]], {k, 1, 120}]

Nous obtenons un nombre de diviseurs positifs supérieur ou égal à 36 pour $k = 60$;84 ; 90 et 120. Nous allons donc utiliser notre programme quatre fois au lieu de 120.

Mais seulement $k = 120$ nous donne des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 d'où $P = 120^6$ est le plus petit produit pour obtenir des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6. Il y en a 576 soit 72 primitifs.

Voir le problème 44 de 15.7.

Enfin, voici les vingt-deux valeurs de $1 \leq k \leq 500$ qui nous conduisent à des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 ; en rouge, celles du tableau ci-haut :

120 ; 168 ; 210 ; 216 ; 240 ; 264 ; 270 ; 280 ; 312 ; 330 ;336 ; 360 ; 378 ;
384 ; 390 ; 408 ; 420 ; 432 ; 440 ; 456 ; 462 ; 480

Pour toutes les autres valeurs de $k \leq 500$, aucune nous permet de trouver des presque normaux. Les valeurs suivantes de $k > 500$, prises aléatoirement, nous conduisent à des presque normaux :

520 ; 560 ; 720 ; 840 ; 960 ; 1000 ; 1200 ; 1260 ; 4000 ; 10 000 ; 16 000

15.6 Relation entre les carrés magiques et les carrés multiplicatifs

Nous avons observé que plusieurs figures magiques dans des carrés magiques étaient aussi des figures magiques dans des carrés multiplicatifs!!! Pourquoi?

Nous allons établir quelques très beaux résultats. Mais d'abord, un rappel :

Considérons la fonction exponentielle $y = a^x$ avec $0 < a < 1 \; ou \; a > 1$. Nous avons alors

$$a^{\log_a y} = y$$

Soit maintenant E_n, l'ensemble des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels et F_n, l'ensemble des carrés multiplicatifs d'ordre n, formés de nombres réels > 0. Nous allons montrer que chaque carré de F_n est obtenu par exponentiation d'un carré de E_n et que chaque carré de E_n est obtenu en logarithmant un carré de F_n. Voyons d'abord ces définitions :

L'exponentiation en base a d'un carré A signifie que nous allons remplacer chaque nombre x_i de A par a^{x_i}. Ce nouveau carré B est appelé **l'associé** de A.

Logarithmer en base a un carré A signifie que nous allons remplacer chaque nombre x_i de A par $\log_a x_i$. Ce nouveau carré B est aussi appelé **l'associé** de A.

Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. Nous dirons que M et N sont **associés** si et seulement si : N est obtenu de M par exponentiation en base a de M ou M est obtenu de N en logarithmant N en base a .

N est obtenu de M par exponentiation en base a de M

$\Leftrightarrow$

M est obtenu de N en logarithmant N en base a

Théorème 15.14 :

Chaque carré multiplicatif dans F_n est obtenu par exponentiation en base a d'un carré magique de E_n.

Preuve :

Soit N, un carré multiplicatif de F_n dont le produit magique est P. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les nombres situés dans une rangée, colonne ou grande diagonale. En logarithmant en base a le carré N, nous obtenons le carré M qui renfermera dans les cases correspondantes les nombres $\log_a x_1, \log_a x_2, \ldots, \log_a x_n$.

Dans le carré multiplicatif N, nous avons : $x_1 x_2 \ldots x_n = P$.

Dans M, nous avons : $\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n = \log_a x_1 x_2 \ldots x_n = \log_a P$.

Puisqu'il en sera ainsi pour toutes les rangées, colonnes et grandes diagonales, nous concluons que M est un carré magique de E_n dont la somme magique est $S = \log_a P$. Il est clair que N est obtenu de M par exponentiation en base a de M. En effet, $a^{\log_a x_i} = x_i$.

Théorème 15.15:

Chaque carré magique de E_n est obtenu en logarithmant en base a un carré multiplicatif de F_n..

Preuve :

Soit M, un carré magique de E_n de somme magique S. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les nombres situés dans une rangée, colonne ou grande diagonale. Par exponentiation en base a du carré M, nous obtenons le carré N qui renfermera dans les cases correspondantes les nombres $a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_n}$.

Dans le carré magique M, nous avons : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$.

Dans N, nous avons $a^{x_1}a^{x_2}...a^{x_n} = a^{x_1+x_2+...+x_n} = a^S$.

Puisqu'il en sera ainsi pour toutes les rangées, colonnes et grandes diagonales, nous concluons que N est un carré multiplicatif de F_n dont le produit magique est $P = a^S$. Il est clair que M est obtenu de N en le logarithmant en base a. En effet, $\log_a a^{x_i} = x_i$.

La bijection entre E_n *et* F_n est donc évidente. Par exponentiation des carrés de E_n, nous obtenons tous les carrés de F_n (la surjection) et si A et B sont deux carrés différents de E_n, alors par exponentiation, nous obtenons deux carrés différents de F_n (l'injection).

Ainsi, nous obtenons tous les couples d'associés (A ; B) où A est dans E_n et B dans F_n.

Théorème 15.16:

Soient M et N, deux carrés associés respectivement de E_n et de F_n. Alors nous avons :

$$P = a^S$$

Preuve :

Soient $x_1, x_2, ..., x_n$, les nombres de la première rangée de M d'où les nombres de la première rangée de N sont $a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_n}$. Nous avons :

$$a^{x_1}a^{x_2}...a^{x_n} = a^{x_1+x_2+...+x_n} = a^S.$$

Puisque nous avons le même résultat pour chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale de N, alors nous pouvons poser :

$$P = a^S$$

De façon semblable, nous pourrions montrer que $S = \log_a P$.

Théorème 15.17:

Deux carrés associés ont les mêmes propriétés.

Preuve :

Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. Pour montrer que N a les mêmes propriétés que M, montrons ceci :

Prenons k cases dans M qui renferment les nombres $x_1, x_2, ..., x_k$. Par exponentiation de M, nous trouvons dans les cases correspondantes de N, les nombres $a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_k}$.

Si $x_1 + x_2 + ... + x_k = u = \lambda S$, alors dans N, nous trouvons :

$$a^{x_1} a^{x_2} ... a^{x_k} = a^{\lambda S} = (a^S)^\lambda = P^\lambda.$$

Ainsi, pour tout groupe de k cases dans M dont la somme est λS, nous trouvons avec les cases correspondantes de N, que le produit des k nombres est P^λ.

Donc avec $k = n \ et \ \lambda = 1$, nous montrons qu'une figure qui est magique dans M est une figure de N qui est magique.

Réciproquement, nous pouvons montrer que M a les mêmes propriétés que N. Pour cela, montrons ceci :

Prenons k cases dans N qui renferment les nombres $y_1, y_2, ..., y_k$. En logarithmant N, nous trouvons dans les cases correspondantes de M, les nombres $\log_a y_1, \log_a y_2, ..., \log_a y_k$. Si $y_1 y_2 ... y_k = v = \varphi P$, alors dans M, nous trouvons :

$$\log_a y_1 + \log_a y_2 + ... + \log_a y_k = \log_a \varphi P = \log_a \varphi + \log_a P = S + \log_a \varphi.$$

Ainsi, pour tout groupe de k cases dans N dont le produit est φP, nous trouvons avec les cases correspondantes de M, que la somme des k nombres est $S + \log_a \varphi$.

Donc avec $k = n \ et \ \varphi = 1$, nous montrons qu'une figure de N qui est magique est une figure de M qui est magique.

Exemple 1 :

Nous savons que les quatre coins de tout carré magique d'ordre 4 et de somme S forment une figure magique. Ainsi, le produit des quatre coins de tout carré multiplicatif d'ordre 4 et de produit P est aussi une figure magique.

Les quatre coins du carré multiplicatif N renferment les nombres $w, x, y \, et \, z.$ Nous voulons montrer que le produit $w\,x\,y\,z = P.$ Puisqu'il existe un carré magique M, l'associé de N, qui contient dans ses quatre coins, les nombres $\log_a w,\ \log_a x,\ \log_a y \ et \ \log_a z,$ alors nous avons :

$$S = \log_a w + \log_a x + \log_a y + \log_a z = \log_a w\,x\,y\,z \ d'où \ w\,x\,y\,z = a^S = P$$

M est un carré de E_n de somme S et N est un carré de F_n de produit P. Les carrés M et N sont-ils obligatoirement associés relativement à une base a?

La réponse est non!!!

4	9	2
3	5	7
8	1	6

M

18	1	12
4	6	9
3	36	2

N

Ces deux carrés ne peuvent pas être associés puisque $a^9 = 1$ implique $a = 1$ et $1^4 = 1 \neq 18.$

Exemple 2 :

Soit donné N, un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de nombres > 0. Montrons que son associé est un hyper-magique. Voir problème 33 de 15.7.

Exemple 3 :

Dans un m-hyper-magique N d'ordre 6 formé de nombres > 0, le produit des neuf nombres de tout sous-carré d'ordre 3 est toujours $P^{\frac{3}{2}}$. Que se passe-t-il dans tout sous-carré d'ordre 3 d'un hyper-magique d'ordre 6?

D'abord en trouvant M, son associé, nous trouvons un hyper-magique (exemple 2). Dans tout sous-carré d'ordre 3, la somme des neuf nombres est :

$$\sum_{i=1}^{9} \log_a x_i = \log_a P^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right) \log_a P = \left(\frac{3}{2}\right) S$$

où les x_i sont les neuf nombres d'un sous-carré d'ordre 3 de N.

Exemple 4 :

Nous pouvons obtenir le carré B à l'aide de plusieurs exponentiations.

Par exponentiation en base $a = 2$, vous construisez un carré multiplicatif B à partir d'un carré magique A :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

B

En prenant le logarithme de B en base $a = 3$, nous obtenons le carré magique C :

$\log_3 2^4$	$\log_3 2^9$	$\log_3 2^2$
$\log_3 2^3$	$\log_3 2^5$	$\log_3 2^7$
$\log_3 2^8$	$\log_3 2^1$	$\log_3 2^6$

C

Celui-ci peut être mis sous la forme suivante :

$(\log_3 2)$

4	9	2
3	5	7
8	1	6

C

Maintenant, par exponentiation en base $a = 3$ du carré C, nous obtenons le carré multiplicatif B. Ainsi, par exemple, nous trouvons :

$$3^{\log_3 2^8} = 2^8$$

Exemple 5 :

Soit la fonction définie par $f(x) = a^x \; et \; M$, un carré magique de E_n. Nous définissons $f(M)$ comme étant le carré obtenu en remplaçant chaque nombre x de M par a^x. Puis la fonction $g(x) = \log_a x \; et \; N$, un carré multiplicatif de F_n. Nous définissons $g(N)$ comme étant le carré obtenu en remplaçant chaque nombre x de N par $\log_a x$.

Nous allons représenter par $f(E_n)$, l'ensemble des carrés multiplicatifs obtenus par exponentiation en base a de tous les carrés magiques de E_n. Puis, par $g(F_n)$, l'ensemble des carrés magiques obtenus en logarithmant en base a tous les carrés multiplicatifs de F_n. Alors, nous avons :

$$f(E_n) = F_n$$

$$g(F_n) = E_n$$

Exemple 6 :

Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. De plus, M et N sont associés. Alors, le carré M est un Dürer si et seulement si le carré N est un m-Dürer. De plus, par exponentiation de tous les Dürer, nous obtenons tous les m-Dürer de F_n. Voir problème 34 de 15.7.

Exemple 7 :

Nous allons appliquer l'exponentiation en base a à la structure générale des Dürer. Qu'allons obtenir?

Nous allons obtenir une structure générale des m-Dürer à variables non nulles. Voir problème 35 de 15.7.

E_n et F_n sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Ils sont isomorphes!!!

Voir le problème 36 de 15.7.

Nous avons dans MATHEMATICA, EXCEL et MAPLE, des fichiers qui vous permettent de construire des carrés arithmétiques d'ordres $3 \leq n \leq 24$ avec MATHEMATICA et un peu plus avec EXCEL et MAPLE. Dans tous les cas, nous avons besoin que de trois variables.

Nous allons terminer ici en montrant comment nous pouvons construire une structure de carrés multiplicatifs d'ordre $n \geq 3$ également à l'aide de trois variables seulement.

Par exemple, prenons la structure de carrés arithmétiques d'ordre 4 (fichier «Ordre 4») :

a	$a+3r+2t$	$a+3r+t$	$a+3t$
$a+2r+3t$	$a+r+t$	$a+r+2t$	$a+2r$
$a+r+3t$	$a+2r+t$	$a+2r+2t$	$a+r$
$a+3r$	$a+2t$	$a+t$	$a+3r+3t$

La somme de ce carré est $S = 4a + 6r + 6t$.

Par exponentiation en base 2, par exemple, nous trouvons pour les cases de la première rangée, les nombres suivants :

$$2^a;\ 2^{a+3r+2t};\ 2^{a+3r+t};\ 2^{a+3t}$$

soit

$$2^a;\ 2^a 2^{3r} 2^{2t};\ 2^a 2^{3r} 2^t;\ 2^a 2^{3t}$$

Puis en posant : $u = 2^a, v = 2^r, w = 2^t$, nous trouvons dans les quatre cases de la première rangée, les nombres suivants :

$$u\ ,\ u\,v^3 w^2,\ u\,v^3 w,\ u\,w^3$$

En procédant de la même façon avec les trois autres rangées, nous obtenons le carré multiplicatif suivant de produit $P = u^4 v^6 w^6 = (u^2 v^3 w^3)^2$:

u	$u\,v^3 w^2$	$u\,v^3 w$	$u\,w^3$
$u\,v^2 w^3$	$u\,v\,w$	$u\,v\,w^2$	$u\,v^2$
$u\,v\,w^3$	$u\,v^2 w$	$u\,v^2 w^2$	$u\,v$
$u\,v^3$	$u\,w^2$	$u\,w$	$u\,v^3 w^3$

Il est clair que les valeurs permises pour les variables u, v, w sont les nombres réels > 0. En effet, voir quelques lignes plus haut, la définition de celles-ci. Pour construire un tel carré multiplicatif presque normal, il suffira d'attribuer des valeurs entières ≥ 1 pour u et des valeurs entières ≥ 2 pour v *et* w, puis pour éviter les répétitions, de prendre $w > v^{n-1}$ *ou* $v > w^{n-1}$, condition suffisante pour avoir un presque normal.

Cette structure nous permet de construire une infinité de carrés multiplicatifs presque normaux. Nous pourrions les appeler **«carrés géométriques»** puisque les seize nombres du carré forment un **tableau géométrique** :

$$
\text{(TG)} \qquad \begin{matrix} u & u\,v & u\,v^2 & u\,v^3 \\ u\,w & u\,v\,w & u\,v^2 w & u\,v^3 w \\ u\,w^2 & u\,v\,w^2 & u\,v^2 w^2 & u\,v^3 w^2 \\ u\,w^3 & u\,v\,w^3 & u\,v^2 w^3 & u\,v^3 w^3 \end{matrix}
$$

Vous pouvez voir les quatre suites géométriques horizontales de raison v et les quatre suites géométriques verticales de raison w.

Le procédé employé ici consiste à partir d'une structure de carrés arithmétiques et de traduire celle-ci en une structure de carrés géométriques, comme nous venons de le faire pour l'ordre $n = 4$. En général, cette structure de carrés géométriques ne nous donne pas, **avec des valeurs entières des variables**, les carrés du plus petit produit.

Pour $n = 3$, le produit est $P = (u\,v\,w)^3$. Avec $u = 1, v = 2, w = 3$, nous obtenons un carré multiplicatif presque normal du plus petit produit $P = 6^3 = 216$.

Pour $n = 4$, le produit est $P = (u^2 v^3\, w^3)^2$. Avec $u = 1, v = 2, w = 3$, nous obtenons un carré multiplicatif presque normal de produit $P = 46\,656$. Mais nous en connaissons un de produit $P = 5040$, voir 15.3, le carré de Sayles. Il a été démontré par Borkovitz et Hwang, en 1983, que le plus petit produit pour un multiplicatif presque normal d'ordre 4 est $P = 5040$.

Ici notre produit ne peut pas donner 5040 puisque nous aurions $u^2 v^3\, w^3 = \sqrt{5040}$, un nombre irrationnel. Or, puisque nous voulons un carré presque normal, les trois variables doivent être des nombres rationnels d'où le rationnel $u^2 v^3\, w^3$ et la contradiction qui suit. Donc, 5040 ne peut pas avoir la forme $P = (u^2 v^3\, w^3)^2$.

1	72	24	27
108	6	18	4
54	12	36	2
8	9	3	216

Carré géométrique $P = 46\,656$

Ce carré multiplicatif de produit $P = 46\,656$ est un carré géométrique presque normal.

La structure précédente est un carré m-Dürer associatif donc un m-A-Dürer. C'est aussi un carré géométrique. Il en est donc de même du carré précédent.

Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous pouvons construire une infinité de carrés géométriques presque normaux à l'aide de trois variables seulement!!!

Notre aventure avec les carrés multiplicatifs se termine ici. Nous retenons surtout ce lien insupçonné avec les carrés magiques. Cette étude des carrés multiplicatifs (les m-carrés), pourrait se poursuivre encore sur plusieurs années!!! Il nous reste beaucoup de questions et beaucoup de problèmes à résoudre.

Par exemple, pourquoi les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 et de produit P se retrouvent-ils par groupes de trente-six carrés qui renferment les mêmes trente-six entiers???

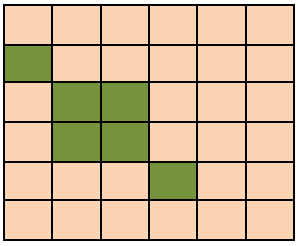
Il faudrait regarder de plus près les espaces vectoriels de carrés multiplicatifs (voir annexe 26).

15.7 Problèmes

1) Montrez qu'un carré multiplicatif d'ordre 2 prend obligatoirement l'une des deux formes de 15.1.
2) Soient A et B, deux carrés magiques différents d'ordre $n \geq 3$. Montrez que les deux carrés multiplicatifs obtenus par exponentiation de base $a > 1$, sont différents.

3) Complétez la preuve du théorème 15.7de 15.2. N'oubliez pas de vérifier que les neuf entiers du carré sont différents deux à deux.
4) Dans la structure générale (*) de 15.2, posez $c = p^3$, $a = p^4$ *et* $d = p^5$ où p est un nombre > 0. Pouviez-vous construire autrement ce carré?
5) Trouvez cinq carrés multiplicatifs presque normaux d'ordre 3 dont la case centrale renferme le nombre 270.
6) Il existe seulement huit carrés multiplicatifs d'ordre 3 qui sont presque normaux et qui ont comme centre l'entier 21. Vrai ou faux? Expliquez.
7) Trouvez un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est l'entier 81.
8) Démontrez que nous pouvons toujours construire un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$ et de produit nul, qui contiendra exactement n zéros.
9) Montrez que dans un carré d'ordre 4, chaque sous-carré d'ordre 2 situé dans un coin contient toujours une seule case de toute figure complète.
10) Montrez que si nous utilisons une figure complète dans un m-Dürer, alors le carré qui en résulte est toujours un m-Dürer.
11) À la fin de 15.3, retrouvez les huit figures complètes puis montrez que ce sont les seules possibles pour un carré d'ordre 4.
12) À la fin de 15.3.1, retrouvez le carré de produit P = 14 280 et montrez que nous ne pouvons plus réduire le produit à l'aide d'une figure complète si nous voulons que notre carré reste presque normal.
13) En vous référant aux cinq carrés multiplicatifs pandiagonaux de produit $P = 14\,400$, vus plus haut, trouvez :
    a) Deux autres structures de carrés multiplicatifs pandiagonaux comme (MSD*). Vous aurez alors trois structures.
    b) La condition qui rendra chacune de ces trois structures presque normale.
14) Construisez un carré multiplicatif d'ordre 4 qui contient autant d'entiers > 0 que d'entiers < 0.
15) Soit donné un carré M d'ordre n, formé exclusivement d'entiers. Nous voulons construire une bordure autour de M afin d'obtenir un carré magique M'd'ordre $n+2$, lui aussi formé que d'entiers. Puis, de nouveau avec M, et avec une autre bordure, nous voudrions construire un autre carré magique M'', aussi formé que d'entiers et d'ordre $n+2$. Les carrés M' et M'' peuvent-ils avoir des sommes magiques différentes?

16) Soit donné un carré magique M d'ordre $n \geq 3$ et de somme S_1. Quelle est la somme magique S de M'obtenu à l'aide d'une bordure autour de M?
17) Soit M, un carré magique normal d'ordre $n \geq 3$. Montrez qu'à l'aide d'une bordure autour de M, nous pourrons toujours obtenir M' magique formé exclusivement d'entiers.
18) En référence avec le problème 17 précédent, montrez que M' ne pourra jamais être normal.
19) Pourquoi, dans un carré multiplicatif associatif d'ordre $n \geq 3$, le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré, doit être $\sqrt[n]{P^2}$?
20) Montrez qu'un m-ultra-magique d'ordre impair $n \geq 3$, formé de n^2 entiers > 0, doit avoir un produit magique $P = k^n$ où k est un entier ≥ 1.
21) Montrez que si $P^5 = E^6$ où P *et* E sont des entiers > 0, alors $P = k^6$ où $k \geq 1$ est un entier.
22) Le carré suivant est un m-hyper-magique d'ordre 6. Montrez que la figure illustrée en vert est une super-figure.



23) Soit A, un carré multiplicatif non trivial, d'ordre $n \geq 3$, qui est associatif et formé de nombres > 0. Montrez que le plus petit nombre du carré et le plus grand, sont situés dans des cases symétriques par rapport au centre du carré.

24) Nous voulons trouver un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5. Nous savons qu'alors, le produit est k^5. Est-il possible d'en trouver un si :
    a) $k = 144$?
    b) $k = 240$?
    c) $k = 127$?

25) Dans le tableau de 15.4, le dernier produit est 120^5. Quel est le prochain produit que nous pourrions ajouter au tableau.
26) Soient M et N, deux carrés multiplicatifs d'ordre $n \geq 3$. En général, M + N n'est pas multiplicatif.
    a) Donnez un exemple où M + N n'est pas multiplicatif.
    b) Donnez un exemple où M + N est multiplicatif.
27) Trouvez une condition suffisante pour que $A_1 + A_2 + ... + A_m$ soit un carré multiplicatif, les A_i étant tous multiplicatifs.
28) Montrez qu'un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 ne peut pas être pandiagonal. Il ne peut donc pas être m-ultra-magique.
29) Complétez la preuve du théorème 15.9 de 15.3.2.
30) Montrez que (MSD), voir 15.3.2, est un m-hyper-magique.
31) Pourquoi les 48 carrés m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 et de produit $P = 14\,400$, renferment-ils les mêmes seize entiers?
32) Dans 15.3.2, montrez que la condition suffisante pour que (MSD*) soit presque normal implique toutes les inégalités dans la suite strictement croissante (SSC).
33) Soit donné N, un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de nombres > 0. Montrez que son associé est un hyper-magique.
34) Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. De plus, M et N sont associés. Alors, le carré M est un Dürer si et seulement si le carré N est un m-Dürer. Puis par exponentiation de tous les Dürer, nous obtenons tous les m-Dürer de F_n. Montrez-le.
35) Nous allons appliquer l'exponentiation de base a à la structure générale des Dürer. Montrez que nous allons obtenir une structure générale des m-Dürer à variables non nulles.
36) Nous savons que l'ensemble E_n des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n(n-2)$. Que pouvons-nous dire au sujet de F_n, l'ensemble des carrés multiplicatifs d'ordre n, formés de nombres réels > 0? Avons-nous là un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? La réponse est oui et voyons cela de plus près en considérant d'abord M et N, deux carrés multiplicatifs de F_n.
    Puis nous allons définir l'opération de groupe, notée $*$, comme suit :
    M $*$ N = W est le carré multiplicatif obtenu en multipliant terme à terme les nombres des cases correspondantes de M et N. Ainsi, $m_{i,j}\, n_{i,j} = w_{i,j}$.
    Pour la multiplication par un scalaire, t $\circ$ M = Z est le carré multiplicatif obtenu en affectant tous les nombres de M de l'exposant t. Ainsi, pour $n = 3$, nous aurions :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA & bB & cC \\ dD & eE & fF \\ gG & hH & kK \end{pmatrix}$$

$$t \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t & b^t & c^t \\ d^t & e^t & f^t \\ g^t & h^t & k^t \end{pmatrix}$$

a) Montrez que F_n est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

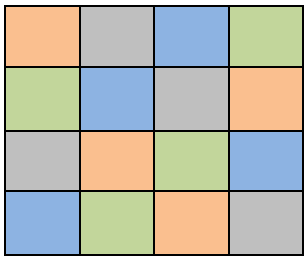
b) Montrez qu'il existe un isomorphisme entre E_n *et* F_n.

c) Montrez que la dimension de F_n est $n(n-2)$.

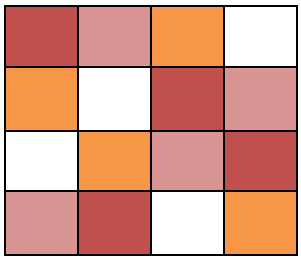
37) Trouvez un carré magique A tel que par exponentiation en base 2, vous obteniez le carré multiplicatif B. Pouvez-vous trouver un autre carré magique C, différent de A, tel que par exponentiation, vous retrouviez B?

38) Dans 15.3.2, nous avons énoncé dans un encadré vert : «Pour obtenir de (MSD – 1) un carré presque normal, il est suffisant que les cinq variables prennent des valeurs qui sont des nombres premiers tous différents.» Démontrez.

39) Nous vous présentons deux carrés d'ordre 4 qui renferment, ensemble, les huit figures complètes des 4x4. Vérifiez que c'est bien le cas avec les deux carrés suivants :



Carré réducteur 1



Carré réducteur 2

a) Les quatre cases de chaque figure complète sont de même couleur.

b) Avec chaque figure complète, vous pouvez diminuer le produit de votre carré multiplicatif, si possible.

c) Après avoir utilisé une figure complète, assurez-vous que le carré est toujours presque normal si bien entendu le carré original était presque normal.

d) Vous avez là, huit façons de diminuer le produit du carré.

e) Les deux carrés ci-haut sont appelés carrés réducteurs (1 et 2).

40) Dans 15.3.1, nous avons présenté les structures (MD) et (MD*) qui permettent la construction des carrés m-Dürer à produits non nuls.
   a) Cependant, avec (MD*), nous pouvons construire des m-Dürer à produits nuls. Pourquoi l'ensemble de tous les carrés issus de (MD*) n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
   b) Que pouvons-nous dire si les nombres dans (MD) et dans (MD*) sont toujours > 0?
   c) Considérons tous les carrés issus de (MD*) qui sont formés exclusivement de nombres réels > 0. Montrez que l'ensemble de ces carrés forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 7.
   d) La structure (MD*) renferme huit variables et elle s'obtient comme combinaison linéaire de huit carrés linéairement dépendants. Montrez-le.
   e) Expliquez pourquoi le carré de Sayles peut s'obtenir de deux façons différentes.
41) Démontrez le théorème 15.13.1.
42) Démontrez le théorème 15.13.2.
43) **Nous vous proposons ici un projet de recherche**. Vous voulez construire tous les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et de produit $P = k^5$ où $k = a^2\, b\, c$, sa décomposition en facteurs premiers.
   a) En vous servant du programme dans MAPLE pour construire des m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5, trouvez tous les presque normaux lorsque k = 60, k = 84 et k = 90. Dans chaque cas, vous trouvez 1280. Savez-vous pourquoi? Suggestion : décomposez en facteurs 60, 84 et 90.
   b) Combien en auriez-vous avec k = 350? Avec k = 7007? Vérifiez vos réponses.
   c) Combien en auriez-vous avec k = 150? Avec k = 675? Vérifiez vos réponses.
   d) Aurons-nous toujours des groupes de 16 primitifs qui renferment les mêmes 25 entiers dans chaque groupe?
44) Pouvez-vous prévoir combien nous aurons de m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 dont le produit est 456533^6 ? Notre prédiction s'est avérée exacte!!!
45) Soit M, un m-hyper-magique d'ordre n.
   a) Montrez que r M est toujours un m-hyper-magique avec r > 0, un nombre réel.
   b) Montrez qu'il en est de même si M est un m-ultra-magique.
46) Pouvons-nous construire des carrés multiplicatifs de tous les ordres $n \geq 3$ à l'aide de seulement trois variables? À l'aide de seulement deux variables. (Voir annexe 30).
47) Soit M, un carré multiplicatif presque normal et associatif dont l'ordre est impair ≥ 5. Montrez que la case centrale est $P^{\frac{1}{n}}$. En déduire que $P = k^n$ avec $k \geq 1$, un entier.

Solutions des problèmes de la Partie 2

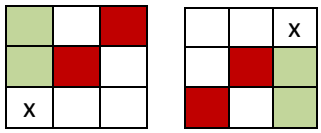
Introduction

En général, les solutions sont complètes. Dans certains cas, nous vous donnons le matériel nécessaire afin que vous complétiez vous-même la preuve.

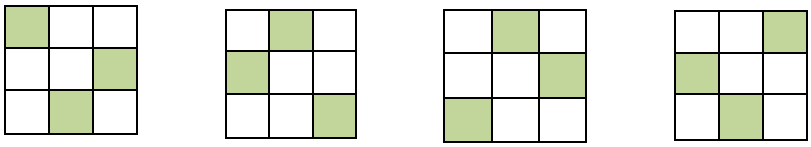
Solutions des problèmes de la Partie 2

4.3.8 Chapitres 1-2-3-4

1) Dans les deux cas, nous avons : somme des 2 cases vertes = S – x et somme des deux cases rouges = S – x.



2) $B+D=2S-A-E-G-H=(S-A-E)+(S-G-H)=K+K=2K.$ Même procédé pour les 3 autres.
3) Donc la somme magique S = 3x80 = 240. La somme des 9 cases est 3x240 = 720 d'où la somme des 8 cases est 720 – 80 = 640. (Voir problème 4 de la Partie 1, page 66).
4)



Ce sont les seules dispositions possibles et aucune n'est une figure complète.

5) La somme des cases bleues = 2S – 2E. La somme des cases vertes = 2S – 2E. La somme des cases vertes est donc 2S – 2S/3 = 4S/3.
6) Un carré magique d'ordre 2 est toujours trivial d'où :
La somme magique est donc S = 38.

19	19
19	19

7) Nous pouvons constater que 2 cases symétriques par rapport au centre du carré forment avec la case centrale soit une diagonale, soit une rangée, soit une colonne. Donc, la somme de 2 cases symétriques est S – centre = S – S/3 = 2S/3. De plus, puisque la case centrale et sa case symétrique sont les mêmes, nous avons S/3 + S/3 = 2S/3.
8) Voir le problème 4 de la Partie 1, page 66. Puis, pour les 2 autres propriétés,

A	B	C
D	E	F
G	H	K

Selon le problème 7), nous avons (A + K) + (C + G) = 2S/3 + 2S/3 = 4S/3. De la même façon, (B + H) + (D + F) = 2S/3 + 2S/3 = 4S/3.

9) Puisque 3 + 17 = 20 = 2S/3, alors S = 30 et le centre est 10. Le nombre Y est 30 – 12 = 18 et non 19. Le carré M est donc :

3	18	9
16	10	4
11	2	17

10) Prenons un carré normal d'ordre 3. Multiplions tous ses entiers par 2 puis ajoutons 1 dans toutes les cases. Les 9 entiers sont donc impairs. Terminons en multipliant tous les nombres du carré par 7.

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 18 & 4 \\ 6 & 10 & 14 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 19 & 5 \\ 7 & 11 & 15 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 63 & 133 & 35 \\ 49 & 77 & 105 \\ 119 & 21 & 91 \end{pmatrix}$$

Le dernier carré est magique presque normal et contient 9 entiers tous divisibles par 7.

11) La réponse est non. En effet, le centre du carré sera un nombre premier $p \geq 2$ et la somme magique sera $3p$. Il est clair que $3p$ n'est jamais un nombre premier :

$$3\times 2\ ;\ 3\times 3\ ;\ 3\times 5\ ;\ 3\times 7\ ;\ 3\times 11\ ;\ \ldots$$

12) Consultez les pages 15 et 16 de la Partie 2.
   a) Notez les variables de la même façon : $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1$ pour la première rangée…
   b) Trouvez les b_i et les c_i en utilisant la nouvelle variable S, la somme magique.
   c) Trouvez $A et\, d$.
   d) Posez les équations (**).
   e) Trouvez les équations (***) et exprimez les variables $a_{12} et\, a_{23}$ en fonctions des 15 autres variables $(S\, et\, les\ 14 a_{ij}\ puisque\, a_{12}\ et\, a_{23}\, n'y\, sont\ plus)$.
   f) Avec l'ordinateur et un bon logiciel de mathématiques, vous pourrez vous simplifier la tâche.

13) Puisque c est un multiple de 7, alors S = 3c est un multiple de 7. La somme et la différence de multiples de 7 sont toujours des multiples de 7. En complétant le carré, vous trouverez que des entiers multiples de 7.

a	b	x
	c	

14) La somme magique d'un presque normal d'ordre 3 est toujours ≥ 15. De plus, c'est le carré normal qui a 15 pour somme. Le centre d'un presque normal est donc toujours un

entier ≥ 5. Avec 5, 6, 7, 8, …comme centre, il est clair que les sommes sont $3\times$centre donc 15, 18, 21, 24, … . Toutes ces sommes sont atteintes car nous connaissons un normal de somme 15. Pour avoir une somme de 18, il suffit d'ajouter 1 dans toutes les cases. Le carré normal devient presque normal si nous ajoutons l'entier $k \geq 1$ dans toutes les cases du normal. La somme magique du presque normal sera $15+3k$.

15) Soit donné un carré magique normal d'ordre 3. Son centre est donc 5 et S = 15. Montrons qu'une case en coin ne peut pas contenir un entier impair. Supposons un impair i dans un coin, ici dans la case (1 ; 1). En rouge : nos déductions. Nous avons deux possibilités (impair i ou pair p) pour la case (3 ; 1) comme indiquées dans les carrés suivants :

$$\begin{pmatrix} i & & \\ & 5 & \\ i & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & & i \\ & 5 & \\ i & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & i & i \\ i & 5 & i \\ i & i & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & & \\ & 5 & \\ p & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & & p \\ & 5 & \\ p & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & p & p \\ p & 5 & p \\ p & p & i \end{pmatrix}$$

Nous voyons que dans le premier cas, il nous faut 9 impairs (nous n'en avons que 5) et dans le second, il nous faut 6 pairs (nous n'en avons que 4). La case (1 ; 1) ne peut donc pas contenir un impair. De même pour les 3 autres cas.

16) Prenons M, un carré magique normal d'ordre 3.Le carré 2M + 1 est presque normal et renferme 9 entiers impairs. Nous avons donc des impairs dans les 4 coins. Rappelons que le carré 2M + 1 est obtenu en multipliant tous les entiers de M par 2 puis en ajoutant 1 dans toutes les cases du carré 2M.

17) M est magique presque normal d'ordre $n \geq 3$. Sa somme magique est S. M' est obtenu de M en multipliant tous ses entiers par $2k$ puis en ajoutant h dans toutes les cases du carré $2kM$.

a) Le résultat est un carré magique presque normal (voir pages 7 et 8).
b) M' renferme que des entiers impairs car ceux-ci ont tous la forme $2km+h$ où h est un entier impair ≥ 1 et m, un entier ≥ 1 de M.
c) La somme magique du carré $2kM$ est $2kS$ et celle du carré M' est $2kS+nh$.
d) La somme magique de M' est impaire si n est impair; elle est pair si n est pair.

e) Avec les conditions énoncées ci-haut, M' contient que des impairs. Pour que M' contienne que des entiers pairs, il nous faut modifier les conditions. Par exemple, accepter que $h = 0$ ou que h soit pair.

18) Il est évident que tous les nombres du carré (voir page 23) sont des entiers dès que A, r et t le sont. Si tous les nombres du carré sont des entiers, alors il est évident que A est un entier. A + r est un entier d'où r est entier. De même, A + t est entier d'où t est entier.
Avec la structure générale (1) de la page 20, un carré renferme que des entiers si et seulement si $a \, et \, b$ sont des entiers et $S/3$, un entier.

19)

a) Le carré A est toujours magique presque normal et tous ses entiers se terminent par les mêmes k chiffres, les k chiffres de r.

b) La somme magique du carré M est S et celle du carré A est le nombre $10^k S + nr$.

20) Construisez un carré magique normal M d'ordre 6 avec ALG-3 ou encore avec le fichier «Ordre 6» de MATHEMATICA ou d'EXCEL. Sa somme magique est $S = 111$. Le carré $10^5 M + 11111$ est le carré cherché dont la somme magique est :
$10^5 \times 111 + 66\,666 = 11\,166\,666$.

21) Considérons les structures générales (1) et (1.1) :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

$$(1.1) \qquad \begin{pmatrix} A+t+2r & A & A+2t+r \\ A+2t & A+t+r & A+2r \\ A+r & A+2t+2r & A+t \end{pmatrix}$$

Dans (1.1), posons $A = b$; $r = a - \frac{S}{3}$; $t = \frac{2S}{3} - a - b$. Nous obtenons (1).

Dans (1), posons $b = A$; $a = A + 2r + t$; $S = 3A + 3r + 3t$. Nous obtenons (1.1).

Les structures (1) et (1.1) sont donc équivalentes. Tout carré généré par (1) est généré par (1.1) et réciproquement.

Montrons maintenant que la structure générale (1.1) est équivalente à la structure générale du fichier «Ordre 3» que nous noterons ici (1*) :

$$(1^*) \qquad \begin{pmatrix} a+2R+T & a+2T & a+R \\ a & a+R+T & a+2R+2T \\ a+R+2T & a+2R & a+T \end{pmatrix}$$

Dans (1.1), posons $A = a+2T$; $r = R$; $t = -T$. Nous obtenons (1*).
Dans (1*), posons $a = A+2t$; $R = r$; $T = -t$. Nous obtenons (1.1).
Les structures (1*) et (1.1) sont donc équivalentes. Tout carré généré par (1*) est généré par (1.1) et réciproquement.
Les structures générales des carrés magiques d'ordre 3, (1), (1.1) et (1*) sont donc équivalentes 2 à 2.

22) Nous allons nous servir du résultat du problème 15. Dans un carré magique normal d'ordre 3, un impair ne peut pas se trouver dans une case en coin. Nous aurons donc un entier pair dans toutes les cases en coin. Il n'y a que 4 pairs de 1 à 9.

$$\begin{pmatrix} 2 & & 6 \\ & 5 & \\ 4 & & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & 4 \\ & 5 & \\ 6 & & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & & 8 \\ & 5 & \\ 2 & & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & & 2 \\ & 5 & \\ 8 & & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & 8 \\ & 5 & \\ 2 & & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & 2 \\ & 5 & \\ 8 & & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & & 6 \\ & 5 & \\ 4 & & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & & 4 \\ & 5 & \\ 6 & & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces 8 carrés sont les seuls possibles. Ils sont tous les équivalents du carré situé entre les deux flèches $\rightarrow$ $\leftarrow$ lequel sera notre primitif.

23) Revoici la première structure générale des carrés magiques d'ordre 3 :

6	1	8
7	5	3
2	9	4

A

a	b	S – a – b
4S/3 – 2a – b	S/3	2a + b – 2S/3
a + b – S/3	2S/3 – b	2S/3 – a

B

Le tableau arithmétique (voir chapitre 11) du carré A est :

1 2 3
4 5 6 A = 1; r = 2 – 1 = 1; t = 4 – 1 = 3
7 8 9

Dans B,
A = b
r = a + b – S/3 – b = a – S/3
t = 2S/3 – a – b

5.18 Chapitre 5

1) Les cases de la figure magique sont notées A, B, C et D et celles-ci contiennent les nombres A, B, C et D respectivement. Nous avons donc A + B + C + D = S. Notons A', la case symétrique de la case A par rapport au centre du carré, laquelle contient le nombre A' d'où A + A' = S/2 puisque nous avons un A-Dürer. Il s'ensuit que :
A + A' + B + B' + C + C' + D + D' = S/2 + S/2 + S/2 + S/2 = 2S d'où A' + B' + C' + D' = S puisque A + B + C + D = S.
2) Le nombre de figures dans un carré d'ordre n est :
$$C_n^{n^2} = \frac{\left(n^2\right)!}{n!\,(n^2-n)!} = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)...(n^2-(n-1))}{n(n-1)(n-2)...3.2.1} = n(n+1)\frac{(n^2-2)...(n^2-(n-1))}{(n-2)....3.2.1}$$
$$= n\,(n+1)\,m.$$
Il reste à montrer que m est un entier et alors $C_n^{n^2}$ sera un entier pair. Le nombre m a la forme $\dfrac{produit\ de\,(n-2)\,entiers\,consécutifs}{(n-2)!}$. Ce qui suit nous montre que m est toujours un entier. En effet :
$$C_n^{k+n} = \frac{(k+n)!}{n!k!} = \frac{1.2.3....k(k+1)....(k+n)}{k!n!} = \frac{(k+1)...(k+n)}{n!}$$ qui est un entier puisque C_n^{k+n} est évidemment un entier.
3) La réponse est non puisque les nombres d'un diabolique aussi bien qu'un diabolique-alpha forment toujours une suite arithmétique. Il est clair que 1, 2 et 5 ne font pas partie d'une suite arithmétique. Dans un diabolique non trivial, il n'y a jamais de répétition. Il en est de même pour un diabolique-alpha.
4) Oui s'il est trivial. Non s'il n'est pas trivial. Les nombres 3, 5 et 5 ne font pas partie d'une suite arithmétique et le carré ne peut pas être un diabolique.
5)
$$\begin{pmatrix} 17 & 72 & 67 & 2 \\ 22 & 47 & 52 & 37 \\ 42 & 27 & 32 & 57 \\ 77 & 12 & 7 & 62 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 62 & 7 & 12 & 77 \\ 57 & 32 & 27 & 42 \\ 37 & 52 & 47 & 22 \\ 2 & 67 & 72 & 17 \end{pmatrix}$$
Les deux diaboliques

$$\begin{pmatrix} 77 & 12 & 7 & 62 \\ 22 & 47 & 52 & 37 \\ 42 & 27 & 32 & 57 \\ 17 & 72 & 67 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 67 & 72 & 17 \\ 57 & 32 & 27 & 42 \\ 37 & 52 & 47 & 22 \\ 62 & 7 & 12 & 77 \end{pmatrix}$$
Les deux diaboliques – alpha

6) Voici un A-Dürer et un cerf-volant vertical (a, b, c, d). Nous avons :
a + b + c + d + m + n + r + s = 2S. Puisque a + b + c + d = S, alors
m + n + r + s = S. Nous avons donc le cerf-volant bleu.

	b	n	
a	m	c	r
	d	s	

Remarque : dire qu'un carré magique possède un cerf-volant sous-entend que le cerf-volant est une figure magique.

	b	x	
a		c	
m	u	r	w
	d	v	

Montrons maintenant que (m, d, r, b) est une figure magique. La structure générale (2.8) des A-Dürer nous montre que <u>a + c = m + r</u> d'où m + r + b + d = a + c + b + d = S. Enfin, le cerf-volant blanc est aussi une figure magique puisque nous avons : m + u + r + w + b + x + d + v = 2S = (m + d + r + b) + (u + v + w + x). Nous concluons que u + v + w + x = S puisque (m + d + r + b) = S. Nous venons de montrer que si le carré possède un cerf-volant vertical, alors il en possède quatre. De même si le A-Dürer possède un cerf-volant horizontal, alors il en possède quatre.

7) Voici un Dürer qui possède le cerf-volant (a, b, c, d). La fusée, en bleu, est une figure magique. Une des propriétés des Dürer est que la somme des 4 coins de tous les sous-carrés d'ordre 3 est une figure magique.
Nous avons donc : (a + c + s + t) + (b + m + r + d) = (m + r + s + t) + (a + b + c + d) = 2S.
Nous concluons que m + r + s + t = S puisque a + b + c + d = S.

	b		
a	m	c	
	r		
s	d	t	

8) Cette disposition n'est pas possible. Puisque le carré est normal, sa somme magique est 34 donc paire. La seule façon de compléter le carré nous conduit au carré :

i	i	i	i
i	p	p	i
p	i	i	p
p	p	p	p

Les 8 impairs totalisent 64. Puisque nous supposons que le carré soit magique, les 4 impairs de la première rangée totalisent 34. La somme des 4 autres est donc 30. Selon le théorème 5.32, la somme des 2 impairs de la deuxième rangée est égale à la somme des 2 impairs de la troisième rangée. Nous voyons alors que la somme des 2 impairs de la deuxième rangée est 15 d'où la contradiction. Un carré magique normal d'ordre 4 ne peut donc pas avoir cette disposition.

9) a. Prenez M, un carré normal d'ordre 4. Le carré 2M + 1 sera presque normal et contiendra 16 impairs.
b. 2M fera l'affaire.
c. Prenez M, 3M, 5M, …
d. 3M fera l'affaire.
e. Prenez un carré magique normal M d'ordre 4 et enlevez 1 dans chaque case. Multipliez le carré M'ainsi obtenu par R, la raison non nulle de la suite arithmétique. Enfin, ajoutez dans toutes les cases le nombre A, le premier terme de la suite A, A + R, A + 2R, A + 3R, …, A + 15R. La somme magique est S = 2 (2A + 15R). Pour qu'elle soit nulle, nous pourrions prendre, par exemple, R = 2 et A = -15. Le carré obtenu possède l'antisymétrie centrale et tout comme M, c'est un diabolique.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}}_{M} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 13 & 11 & -15 \\ -7 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & 7 \\ 15 & -11 & -13 & 9 \end{pmatrix}$$

10) Consultez la section 14.14 du chapitre 14.

1	6	7	4
4	7	6	1
8	3	2	5
5	2	3	8

4	1	5	8
7	6	2	3
6	7	3	2
1	4	8	5

Le carré de gauche, appelé M, est un Dürer de somme S = 18. Il renferme les entiers de 1 à 8, chacun apparaissant deux fois. Le carré de droite, appelé N, est la rotation de 90° de M; c'est aussi un Dürer de somme S = 18. Nous allons construire 10M + N et 10N + M. Ces carrés sont des permutés de même somme puisque M et N sont de même somme. De plus, ils sont des Dürer presque normaux.

14	61	75	48
47	76	62	13
86	37	23	52
51	24	38	85

10M + N ; S = 198

41	16	57	84
74	67	26	31
68	73	32	25
15	42	83	58

10N + M ; S = 198

Tous les entiers de ces deux carrés sont formés avec les chiffres de 1 à 8. Pour avoir des entiers formés avec les chiffres de 2 à 9, il suffit d'ajouter 1 dans toutes les cases de M et de reprendre la même démarche.

11) Le carré M du numéro précédent est aussi un A-Dürer. Il en résulte que les deux permutés sont aussi des A-Dürer de somme S = 198.
Pour avoir des permutés de sommes différentes, nous prendrons N de somme différente de celle de M. Pour cela, ajoutons 1 dans toutes les cases de N du numéro précédent.

1	6	7	4
4	7	6	1
8	3	2	5
5	2	3	8

M

5	2	6	9
8	7	3	4
7	8	4	3
2	5	9	6

N --> N'

Trouvons maintenant les permutés 10M + N' et 10N' + M. Les sommes sont différentes, ici 202 et 238, mais les deux permutés sont toujours des A-Dürer.

15	62	76	49
48	77	63	14
87	38	24	53
52	25	39	86

10M + N ; S = 202

51	26	67	94
84	77	36	41
78	83	42	35
25	52	93	68

10N + M ; S = 238

12) Nous avons un carré magique non trivial M, d'ordre $n \geq 3$. Puisque celui-ci est non trivial, alors il existe au moins deux nombres différents. Nous savons qu'alors il existe un plus petit nombre (pas nécessairement unique) et un plus grand nombre (pas nécessairement unique). Appelons ces deux nombres u et v avec u < v.
Ordonnons les n^2 nombres du carré magique du plus petit au plus grand, de gauche à droite et appelons s, la somme de ceux-ci. De plus, nous avons $S = \frac{s}{n}$.
Considérons maintenant la somme des n plus petits nombres notée a et la somme des n plus grand nombres notée b.

_____u_____u'_____v'_____v_____

a b

a est donc la somme des nombres de u à u' et b, la somme des nombres de v' à v.
Nous devons montrer que $a < b$. N'oublions pas que la suite des n^2 nombres du carré forme une suite croissante.
Si u' < v', alors il est clair que $a < b$.
Si u' = v', alors tous les nombres de u' à v' sont égaux à u', y compris v'. D'où entre u' = v' et v, nous trouvons au moins un nombre > u' si u = u'. Nous trouvons au moins un nombre < u' entre u et u' si v = u'. Si u et v sont différents de u', alors il existe au moins un nombre > u' entre u' et v et au moins un nombre < u' entre u et u'. Dans tous les cas, il est clair que $a < b$.
Maintenant, nous avons :

(*) $$s > na \text{ et } s < nb \Rightarrow \frac{s}{n} > a \text{ et } \frac{s}{n} < b \Rightarrow S > a \text{ et } S < b.$$

Finalement, $$a < S < b$$

Si le carré magique est presque normal, alors le résultat est presque évident. En effet, la suite sera strictement croissante d'où $a < b$ de façon évidente et avec (*), nous trouvons $a < S < b$.

13) Nous voulons ici trois super-Dürer pythagoriciens. Nous avons choisi M, un super-Dürer normal. Nos trois carrés super-Dürer sont : 3M, 4M et 5M.

3	42	12	45
24	33	15	30
39	6	48	9
36	21	27	18

3M

4	56	16	60
32	44	20	40
52	8	64	12
48	28	36	24

4M

5	70	20	75
40	55	25	50
65	10	80	15
60	35	45	30

5M

$$48^2 + 64^2 = 80^2 \quad 42^2 + 56^2 = 70^2$$

14) Pour construire ce sous-espace, partez de la structure générale des carrés magiques d'ordre 4. Puis imposez les deux figures EBCH et BEJQ (voir (*) de 5.1). Vous perdrez alors deux variables et le sous-espace sera de dimension 6. Avec MATHEMATICA, vous pourrez trouver la fréquence du sous-espace en utilisant le fichier «Le compte». Avec MAPLE, vous pourrez aussi trouver la fréquence de la structure générale ainsi que les figures magiques de celle-ci en utilisant le programme «Total-combin». Parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4, 384 sont dans le sous-espace. Avec la liste des 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4, vous pourriez trouver les 384 du sous-espace ou encore, vous faire un programme pour les trouver.

15) Nous devons compléter le carré magique suivant dont la somme est 40 (somme des 4 nombres centraux). Les 4 cases centrales forment toujours une figure magique pour l'ordre 4.

5	b	4	31-b
a	8	7	25-a
3	16	9	12
32-a	16-b	20	18

Pour que ce carré soit magique, il faut 86 – a – b = 40, équation que nous retrouvons 3 fois d'où a + b = 46 et b = 46 – a. Ce qui donne :

5	46-a	4	a-15
a	8	7	25-a
3	16	9	12
32-a	a-30	20	18

a) Puisque nous avons la variable a, nous pouvons trouver une infinité de carrés magiques.
b) Il suffit de donner à a trois valeurs entières différentes.
c) Il est facile de vérifier avec un tableau des valeurs que le carré contient 1, 2 ou 3 entiers négatifs pour chaque valeur entière de a.
d) La seule façon d'avoir un zéro est de donner à a les valeurs 0, 15, 25, 30, 32 et 46. Nous aurons 1 seul entier négatif a = 15, 25, 30, 32, 31 et de 16 à 24. Nous aurons 2 entiers négatifs pour a = 0, 46, de 1 à 14, de 26 à 29, de 33 à 45.Enfin, 3 entiers négatifs pour a de -1 à $-\infty$ et pour a de 47 à ∞.
e) Ce carré ne peut pas être un Dürer car le sous-carré 2x2 dans le coin bas-droite doit être une figure magique ce qui n'est pas le cas ici puisque la somme est 59 alors que la somme magique est 40. Ce n'est pas non plus un super-Dürer-alpha car ce dernier est avant tout un Dürer.

16) Évident selon les théorèmes 5.19 et 5.21. Si le diabolique est trivial, alors il possède 1820 soit C_4^{16} figures magiques d'où une quatre-vingt-septième.
17) Tous les nombres premiers sont impairs excepté 2. Si 2 était dans le carré, la somme de la rangée qui contient 2 aurait une parité différente d'une autre rangée. Si le carré est magique, alors il ne peut pas contenir 2.
18) Nous aurons une somme magique paire > 2 qui n'est donc pas un nombre premier.
19) La structure générale (2.8) des A-Dürer nous montre clairement que la somme magique doit être paire si nous voulons que des entiers dans le carré.
20) Nous devons ici préciser que si nous avons une suite arithmétique de raison non nulle, alors elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Dans les deux cas, nous avons un plus petit nombre (unique) et un plus grand nombre (unique). Nous affirmons qu'avec les mêmes k nombres, nous ne pouvons pas construire une troisième suite arithmétique qui devra être soit strictement croissante, soit strictement décroissante et nous avons déjà ces deux suites!!
21) Soit donné un diabolique. Oui, comme tous les carrés magiques, une rangée est une super-figure. Nous pourrions les appeler des super-figures triviales. De même pour les colonnes. S'il est trivial, alors toutes ses figures sont des super-figures.

22) Regardons la section 5.14. Tout carré magique normal d'ordre 4 appartient à un des 24 groupes. Pour chaque figure qui caractérise les carrés magiques d'ordre 4, nous allons voir dans chacun des 24 groupes ce que nous trouvons.
Prenons **les 4 rangées** et **les 4 colonnes** dans chaque groupe. Nous trouvons toujours 2 pairs et 2 impairs dans chacune.
Prenons **les 4 coins**. Dans tous les groupes, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs.
Prenons **les 4 cases centrales**. Nous trouvons 2 pairs et 2 impairs dans tous les groupes.
Prenons **les 2 cases centrales de la première rangée et les 2 cases centrales de la quatrième rangée**. Dans les 24 groupes, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs.
Prenons **les 2 cases centrales de la première colonne et les 2 cases centrales de la quatrième colonne**. Dans les 24 groupes, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs.
Quant aux 2 grandes diagonales, certaines renferment 2 pairs et 2 impairs, d'autres renferment 4 pairs et les autres renferment 4 impairs.

23) Nous venons de voir que dans tous les carrés magiques normaux d'ordre 4, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs dans 12 des 14 figures magiques qui caractérisent les carrés magiques d'ordre 4. Dans tous les groupes notés de 9 à 24, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs dans chacune des grandes diagonales. Le tableau juste en dessous des 24 groupes indique le nombre de carrés dans chaque groupe. Le total pour les groupes de 9 à 24 est 5696. Nous avons donc environ 80,909% des carrés magiques normaux d'ordre 4 qui possèdent 2 pairs et 2 impairs dans les 14 figures magiques qui les caractérisent soit 5696/7040.

24) Les carrés magiques d'ordre 2 sont tous triviaux. Nous pouvons donc avoir un tel carré qui contient 4 pairs aussi bien que 4 impairs. Pour $n \geq 3$, nous pouvons toujours construire un carré magique normal M. Le carré 2M renferme que des entiers pairs tandis que 2M + 1 renferme que des entiers impairs.

25) Oui. Les carrés magiques normaux d'ordres pairs par exemple.

26) Il est évident que parmi tous les carrés magiques presque normaux, le carré normal ait la plus petite somme soit $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

27) Tous les entiers s'écrivent $4k \; ou \; 4k+1 \; ou \; 4k+2 \; ou \; 4k+3$ avec k qui parcourt $\mathbb{Z}$.
Nous allons trouver $\frac{n^3+n}{2}$ lorsque $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ respectivement.
D'où :
$$32k^3+2k \quad PAIR$$
$$32k^3+24k^2+8k+1 \quad IMPAIR$$
$$32k^3+48k^2+26k+5 \quad IMPAIR$$
$$32k^3+72k^2+56k+15 \quad IMPAIR$$

28) La réponse est non. En effet, si M est normal, alors 2M est presque normal et renferme que des entiers pairs.

29) Voir les problèmes 22 et 23 ci-haut.

30) Soit A un carré magique avec f(A) = k. Si nous multiplions A par b, une figure magique dans A reste magique dans b A et une figure non magique dans A reste non magique dans b A. De même si nous additionnons un même nombre dans toutes les cases de A. Il s'ensuit que f(M) = k et f(N) = k.
31) Le problème 30 nous permet de conclure que tous les diaboliques ont la même fréquence c'est-à-dire le même nombre de figures magiques. En effet, tout diabolique non trivial D s'écrit D = u X + r Y où X est trivial, Y un diabolique non trivial et r non nul (voir 5.10). De même, tous les diaboliques-alpha (voir 5.11) ont la même fréquence et tous les super-Dürer-bêta (voir 5.7) ont la même fréquence.
32) La réponse est oui. Si les deux carrés A et B renferment les même nombres, alors la somme de ceux-ci est la même, disons s. Les deux sommes magiques sont S = s/n, donc les mêmes. Si F est une figure magique dans A, alors les nombres de cette figure, qui se retrouvent dans B, vont constituer une figure magique dans B laquelle n'aura probablement pas la même forme que F. De même si F est une figure magique dans B.
33) La réponse est oui. Enlevons 1 dans toutes les cases de A. Selon le problème 30, nous avons f(A) = f(A – 1). A renferme tous les entiers de 1 à n^2 et A – 1 renferme tous les entiers de 0 à $n^2 - 1$. Considérons maintenant la suite arithmétique :

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+(n^2-1)\,r$$

qui forme le carré B. Nous pouvons écrire B comme suit :

$$B = a + r\begin{pmatrix} carré\ magique \\ avec\ les\ entiers\ de \\ 0\ à\ n^2-1 \end{pmatrix} = a + r\,M$$

Selon le problème 32, nous avons f(M) = f(A – 1) d'où f(B) = f(A).
34) Selon le théorème 9.6, le produit (matriciel) AB est un trivial de somme 60×80. Nous trouvons donc dans chaque case de AB le nombre 4800/4 = 1200.
35) Selon le théorème 9.5, le produit AB est un trivial de somme k n T. Le carré AB renferme donc le nombre kT dans chacune de ses cases.
36) Selon le théorème 9.7, A^{2018} est un trivial de somme S^{2018}. Nous trouvons donc dans chaque case de A^{2018}, le nombre $\frac{S^{2018}}{4}$.
37) Dans la section 5.6, vous verrez qu'il n'existe que 8 super-Dürer-alpha normaux. Choisissez M, un des huit puis trouvez 7M. Ce dernier carré contiendra 16 multiples de 7 dont 8 pairs et 8 impairs.
38) Il suffit de prendre un Dürer normal M. Il en existe 3456 et vous en trouverez un dans 5.4. Trouvez ensuite A = M + 1 et B = M + 4. Le carré cherché est A + Bi.

39) Ce carré est magique de somme 6 modulo 7. C'est un Dürer car le total des nombres dans le carré vert est 6 modulo 7. Ce n'est pas un super-Dürer puisque le carré d'ordre 2 formé des 2 cases centrales des première et deuxième rangées n'est pas une figure magique (la somme est 2 modulo 7).

2	3	4	4
5	3	6	6
4	1	3	5
2	6	0	5

40) $S = \dfrac{n^3 + n}{2} = \dfrac{10^{3k} + 10^k}{2} = \dfrac{(1000^k + 10^k)5}{10}$. Évaluons d'abord la parenthèse.

$1000^k = 10000...000 = 1000...0000000...000$ où il y a $2k-1$ zéros rouges entre le 1 et le 0 noir et k zéros rouges après le 0 noir. En tout, $3k$ zéros après le 1.

$10^k = 1000...000$ où il y a k zéros après le 1.

$1000^k + 10^k = 1000...0001000...000$ où il y a $2k-1$ zéros entre les 1 et k zéros après le second 1.

Il reste à multiplier la parenthèse par 1/2 donc par 5/10 ce qui donne :

$$S = 5000...0005000...000$$

avec $2k-1$ zéros entre les deux 5 et $k-1$ zéros après de second 5.

Pour un carré magique normal d'ordre 10, la somme est 505 puisque $k=1$.

Pour l'ordre 100, la somme est 500050 puisque $k=2$.

Pour l'ordre 1000, la somme est 500000500 puisque $k=3$.

Pour l'ordre 1 000 000, la somme est $5\ 000\ 000\ 000\ 00500\ 000$ puisque $k=6$.

41) Il faut montrer qu'un carré magique associatif est un Dürer.

a	e		
g	c		
		d	h
		f	b

Supposons que le carré magique soit associatif. Nous avons alors :

a + b = S/2 ; c + d = S/2 ; e + f = S/2 ; g + h = S/2. Nous savons donc que la somme a + b + c + d + e + f + g + h = 2S puis que a + c + e + g = b + d + f + h. En effet, a + c + e + g = 2S – la somme des 4 cases rouges. Également, b + d + f + h = 2S – la somme des 4 cases rouges. Il s'ensuit que a + c + e + g = S et que le carré associatif est un Dürer.

42) C'est une conséquence immédiate du problème 41.
Carré magique M associatif $\Rightarrow$ Dürer $\Rightarrow$ A-Dürer puisque par définition, un A-Dürer est un Dürer associatif.
Carré magique M est un A-Dürer $\Rightarrow$ associatif par définition.

43) Soit M, un carré magique d'ordre 4 qui est pandiagonal. C'est donc un super-Dürer selon le théorème 5.9. Nous voulons montrer que A + D = B + C = S/2.

A		B	
	M		
C		D	
			N

Puisque M est un Dürer, alors nous avons A + B + C + D = S. (1)
De plus, nous avons A + M + D + N = S (2)
Et B + M + C + N = S (3) puisque M est pandiagonal.
Additionnons (2) avec (3). Nous trouvons A + B + 2M + C + D + 2N = 2S ou encore A + B + C + D + 2(M + N) = 2S d'où 2(M + N) = S, M + N = S/2 et finalement A + D = S/2 et B + C = S/2.
Il en est de même pour les 3 autres carrés 3x3.

44) M est un Dürer.

(*)

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	M	N
P	Q	R	T

Nous avons donc (A + B + E + F) + (M + N + R + T) = (A + F + M + T) + (B + E + N + R) = S + (B + E + N + R) = 2S d'où B + E + N + R = S.
De la même façon pour C + H + J + Q = S.

45) Notre carré magique d'ordre 4 possède la figure magique A + C + I + K = S.

A	B	C	D
E	F		
I		K	
N			T

Nous avons 3S = (A + B + C + D) + (A + E + I + N) + (A + F + K + T) =
= (A + B + E + F) + (A + C + I + K) + (A + D + N + T) = (A + B + E + F) + S + S d'où
A + B + E + F = S et le carré est un Dürer.

46) Notre carré magique renferme la figure magique A + B + C + D = S.

r	A		
B	t		
		u	C
		D	v

Nous avons 2S = (A + B + C + D) + (r + t + u + v) = (A + B + r + t) + (C + D + u + v) où A + B + r + t = C + D + u + v (voir le problème 41). Il s'ensuit que A + B + r + t = S et le carré est un Dürer.

47) Pour trouver cet algorithme, observons d'abord la structure générale (2.1) des Dürer (voir 5.4).

a) Nous constatons qu'il faut que a, b, c, d et f soient des entiers impairs positifs et que g et S soient des entiers pairs positifs.

b) Il faudra obtenir 16 entiers différents.

c) S'il y a un 0 ou des négatifs, alors nous les ferons disparaître en ajoutant un certain entier positif dans toutes les cases du carré.

25	55	5	7
11	1	19	61
6	16	56	14
50	20	12	10

17	31	3	39
13	29	27	21
54	18	16	2
6	12	44	28

Si nous ajoutons l'entier positif k dans toutes les cases du carré M, alors les rangées formées d'impairs seront formées de pairs et les rangées formées de pairs seront formées d'impairs si k est impair.

48) Dans la liste des 880 carrés magiques normaux primitifs (voir partie 3 du livre, appelée aussi le CD), nous en avons trouvé un qui possède une figure complète idéale et qui est un Dürer.

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

La figure complète est idéale car elle contient les 4 plus grands entiers. Dans chaque case de la figure complète, ajoutez l'entier $k \geq 0$. Vous obtiendrez alors un nouveau carré magique Dürer presque normal de somme magique $S = 34 + k$.

49) Soit donné un carré magique M d'ordre 4.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	P	Q

(A)

D	B	C	A
H	F	G	E
L	J	K	I
Q	N	P	M

(B)

Q	N	P	M
H	F	G	E
L	J	K	I
D	B	C	A

(C)

Il est très facile de vérifier que le carré (C) est magique. Maintenant supposons que le carré (A) soit presque normal. Alors, observons les 3 cases blanches de (A) et les 3 cases blanches de (C). Nous voyons que (C) n'est pas un équivalent de (A). Les carrés (A) et (C) sont donc primitifs. **Observez aussi que (A) Dürer implique (C) Dürer.**

50) Nous allons utiliser la structure générale (2.8) des A-Dürer que voici. Tous les A-Dürer sont issus de (2.8).

a)

$$(2.8) \quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ S-a-c-f & -b+c+f & f & a+b-f \\ \frac{S}{2}-a-b+f & \frac{S}{2}-f & \frac{S}{2}+b-c-f & -\frac{S}{2}+a+c+f \\ -\frac{S}{2}+a+b+c & \frac{S}{2}-c & \frac{S}{2}-b & \frac{S}{2}-a \end{pmatrix}$$

Nous voulons que $\frac{S}{2}-c=15\ et\ \frac{S}{2}-b=14$ d'où $c=2\ et\ b=3$ puisque $S=34$.

Ainsi, (2.8) devient :

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 2 & 29-a \\ 32-a-f & f-1 & f & 3+a-f \\ 14-a+f & 17-f & 18-f & f+a-15 \\ a-12 & 15 & 14 & 17-a \end{pmatrix}$$

Puisque nous voulons un A-Dürer normal, alors nous devons avoir $a-12\geq 1$ d'où l'entier $a=13 ou 16$ puisque $14 et 15$ sont déjà dans le carré.

Avec $a=13$, nous trouvons dans le carré, les nombres $1,2,3,4,13,14,15,16$. Il s'ensuit que les valeurs permises pour f sont les entiers de $5 à 12$. Les deux seuls carrés magiques normaux sont obtenus avec $a=13\ et\ f=7$ puis avec $a=13\ et\ f=11$.

Avec $a=16$, nous trouvons les mêmes entiers dans le carré et les valeurs permises pour f sont les mêmes. Les deux seuls carrés magiques normaux sont obtenus avec $a=16\ et\ f=7$ puis avec $a=16\ et\ f=11$. La structure générale (2.8) peut donc générer seulement 4 A-Dürer normaux avec $15\ 14$ dans les cases centrales de la quatrième rangée. Les voici :

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$a=13\ ;\ f=7$ $\qquad$ $a=13\ ;\ f=11$ $\qquad$ $a=16\ ;\ f=7$ $\qquad$ $a=16\ ;\ f=11$

Il est intéressant de voir que si nous permutons les deux rangées centrales d'un A-Dürer, alors nous obtenons un nouveau A-Dürer. Vous pouvez le vérifier avec la structure générale (2.8) ou encore, utiliser une figure magique des A-Dürer.

b) Parmi les quatre A-Dürer ci-haut, il n'y a qu'un seul diabolique-alpha normal soit le dernier à droite (a = 16 et f = 11); c'est celui d'Albert Dürer. Les trois autres ne sont ni des diaboliques, ni des diaboliques-alpha.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 16 \\ 14 & 8 & 9 & 3 \\ 15 & 5 & 12 & 2 \\ 4 & 10 & 7 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 7 & 12 & 9 & 6 \\ 10 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons trouvé le Dürer de gauche dans la liste des 880 carrés normaux d'ordre 4. C'est un Dürer non associatif (13 + 1 = 14 au lieu de 17). Celui de droite est un équivalent de celui de gauche, donc toujours un Dürer non associatif.

d) Dans la même liste, nous avons trouvé celui de gauche qui n'est pas un Dürer et qui n'est pas associatif.

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 5 & 11 & 8 & 10 \\ 12 & 6 & 9 & 7 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 7 & 9 & 6 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 5 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Celui de droite est la rotation de 180° de celui de gauche donc toujours non Dürer et non associatif.

e) Il nous faut montrer qu'aucun super-Dürer normal ne peut contenir $15 \;\; 14$ dans les cases centrales de la quatrième rangée. Voyons la structure générale (2.2) des super-Dürer :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

Nous devons avoir : $\frac{S}{2}-b-c+d=15 \; et \; \frac{S}{2}-d=14$

Puisque nous voulons un super-Dürer normal, alors $S=34$. Nous trouvons :

$$d=3 \; et \; b+c=5$$

Notre structure générale devient :

$$\begin{pmatrix} a & b & 5-b & 29-a \\ 3 & 31-a-b & a+b-2 & 2 \\ b+12 & a-12 & 17-a & 17-b \\ 19-a-b & 15 & 14 & a+b-14 \end{pmatrix}$$

Puisque $a-12 \geq 1$, alors $a = 13$ ou $a = 16$. De plus, $5-b \geq 1$ d'où $b \leq 4$.
Puisque nous avons déjà 2 et 3 dans le carré, il s'ensuit que $b = 1$ ou $b = 4$.
Voyons si une de ces 4 possibilités peut nous conduire à un super-Dürer normal.
Dans les quatre cas, le carré obtenu n'est pas normal. Donc aucun super-Dürer normal renferme 15 14 dans les deux cases centrales de la dernière rangée.

51) Prenez un carré magique normal d'ordre 4 et multipliez-le par 100.

a)

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

400	1500	1400	100
500	1000	1100	800
900	600	700	1200
1600	300	200	1300

Les deux carrés sont magiques et le carré vert renferme les poids des 16 lingots.

Une rangée nous indique quels sont les 4 lingots qu'un enfant peut recevoir.

Les 4 rangées nous donnent une façon d'effectuer le partage. Le carré vert étant magique, la somme des 4 lingots d'une rangée donne toujours le même total.

b) La façon de faire n'est pas unique. Nous pourrions prendre les colonnes. Aussi, observez que le carré est un Dürer d'où une troisième façon de faire le partage soit en prenant les 4 carrés 2x2 de chaque coin. **Trouvez-en une autre.**

c) Chacun recevra 3400 grammes d'or soit la somme magique.

52) Un ultra-magique presque normal d'ordre 4 n'existe pas. En effet, le théorème 5.9 de la section 5.5 du chapitre 5 nous dit qu'un carré magique d'ordre 4 est pandiagonal si et seulement s'il est super-Dürer. Nous allons prendre la structure générale (2.2) des super-Dürer et exiger que le carré soit associatif.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

Pour que ce carré soit associatif, il faut $b+\frac{S}{2}-d=\frac{S}{2}$ d'où $b=d$. Nous voyons aussitôt que le carré ne peut pas être presque normal. Nous concluons alors que si un carré magique d'ordre 4 est presque normal, alors il ne peut être ultra-magique.

Une impression : c'est demander beaucoup à un carré magique d'ordre 4 d'être à la fois presque normal, associatif et super-Dürer (pour l'ordre 4, super-Dürer = hyper-magique). L'ordre est trop petit pour être aussi exigeant!!!

53) Un diabolique ou un diabolique-alpha feront l'affaire.
54) Ces vérifications sont faciles à faire. Le but de ce problème est de vous présenter des propriétés remarquables des diaboliques-alpha.
55) Idem.
56) Idem
57) Idem
58) Les deux carrés sont des super-Dürer-alpha sont identiques.

	b		
a	e	c	
	f		
g	d	h	

	b	n	
a	m	c	r
	d	s	

		n	
	m	w	r
		x	
	y	s	z

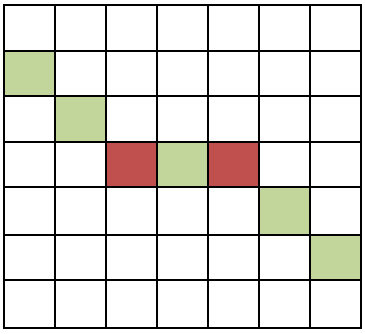
Puisque le carré est Dürer, nous avons (a + c + g + h) + (b + e + f + d) = S + S = 2S = (a + b + c + d) + (e + f + g + h) = S + (e + f + g + h) d'où **(e + f + g + h) = S.**
Dans le carré de droite, puisque le carré est magique d'ordre 4, nous avons (b + n + d + s) + (a + m + c + r) = S + S = 2S = (a + b + c + d) + (m + n + r + s) = S + (m + n + r + s) d'où **(m + n + r + s) = S**.
De façon semblable, nous montrons que **(w + x + y + z) = S.**

Ce résultat est vrai pour tous les Dürer car nous n'avons utilisé que les propriétés des Dürer.

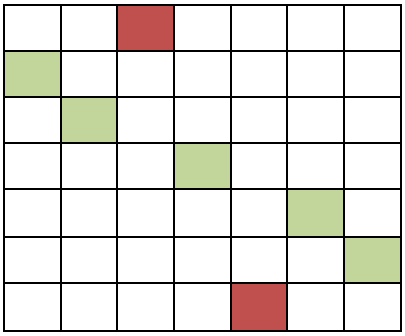
59) Tous les carrés d'ordre $n \geq 4$ possèdent au moins une figure complète.

a) Le problème 4 dans 4.3.8 nous montre qu'un carré **d'ordre 3** ne possède jamais de figure complète.

b) **Pour les ordres impairs** $n \geq 5$, l'algorithme suivant s'applique toujours.



Étape 1

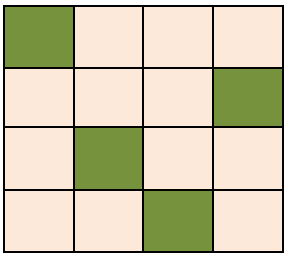


Étape 2

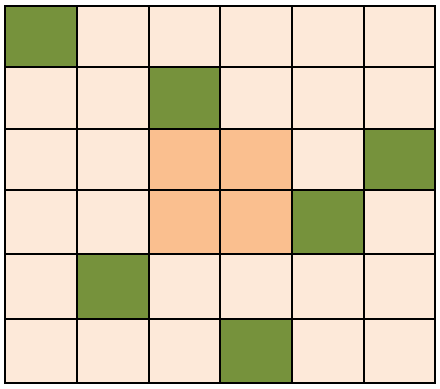
Pour l'étape 1, nous choisissons les cases de la diagonale juste en dessous de la diagonale principale et ce, jusqu'à ce que nous arrivions à la case située sur la rangée centrale (la case rouge). À partir de la seconde case rouge située à la droite de la case centrale, nous choisissons les cases de la diagonale juste au dessus de la diagonale principale.

Pour l'étape 2, celle-ci est clairement décrite par le carré de droite.

c) **Pour les ordres pairs,** nous allons trouver un carré d'ordre 4 et une figure complète. De même pour le carré d'ordre 6. **Les figures complètes sont en vert**.

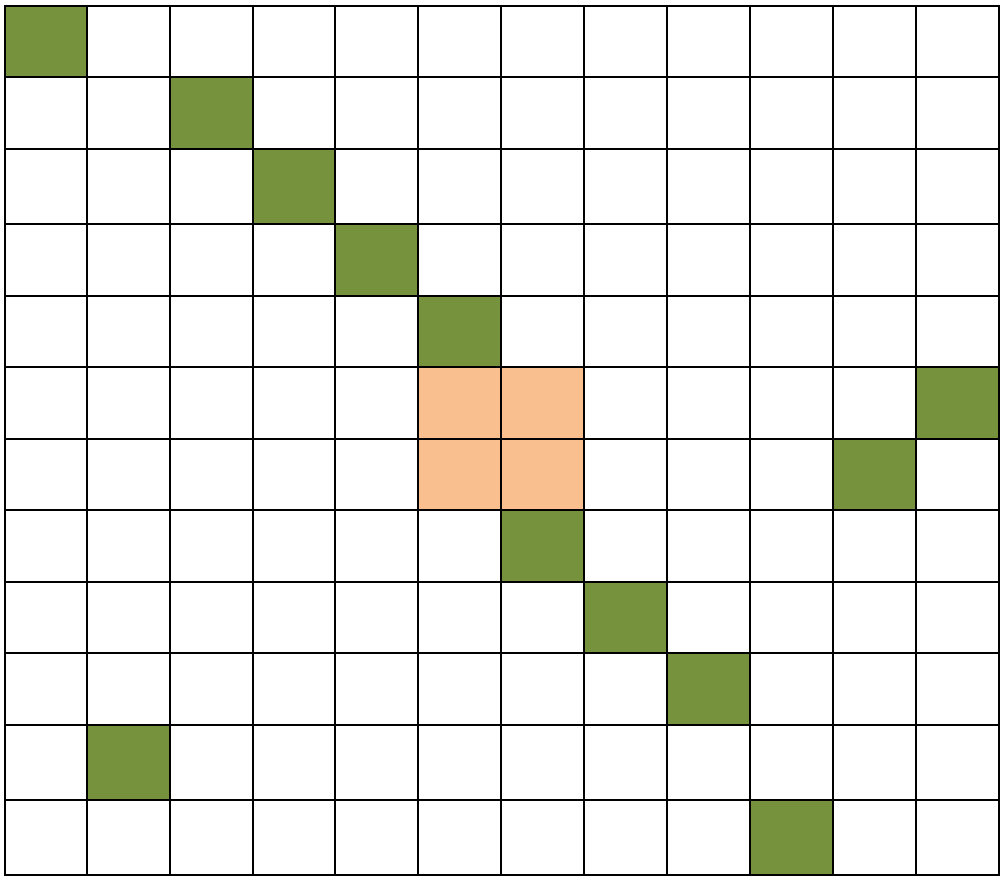


Ordre 4



Ordre 6

Le carré d'ordre pair suivant illustre bien le procédé pour les carrés d'ordres pairs $n \geq 8$. Le petit carré orangé est central.



Ordres pairs $n \geq 8$

Soit une figure complète d'un carré d'ordre $n \geq 4$. En général, celle-ci n'est pas unique.

60) Si $A et B$ sont deux carrés magiques presque normaux, alors $A+B$ n'est pas forcément presque normal. Voyons l'exemple suivant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 10 & 11 & 40 & 21 \\ 37 & 24 & 7 & 14 \\ 1 & 20 & 31 & 30 \\ 34 & 27 & 4 & 17 \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} 31 & 4 & 40 & 7 \\ 30 & 17 & 21 & 14 \\ 1 & 34 & 10 & 37 \\ 20 & 27 & 11 & 24 \end{pmatrix}} = \underset{A+B}{\begin{pmatrix} 41 & 15 & 80 & 28 \\ 67 & 41 & 28 & 28 \\ 2 & 54 & 41 & 67 \\ 54 & 54 & 15 & 41 \end{pmatrix}}$$

Pour cause de répétitions, nous voyons que $A+B$ n'est pas presque normal.

Le carré magique A est presque normal et k est un nombre réel. Que dire de $k\,A$?

a) Il est évident que si notre carré magique A est presque normal, alors $k\,A$ est presque normal si k est un entier ≥ 1.

b) Si k est un nombre réel ≤ 0, alors $k\,A$ n'est pas presque normal.

c) Si k est irrationnel, alors $k\,A$ n'est pas presque normal.

d) Si $k > 0$ est rationnel non entier, alors $k\,A$ est presque normal ou pas.

Prenons, par exemple, $k = \frac{2}{3}$. Si dans A, un entier n'est pas un multiple de 3, alors $k\,A$ n'est pas presque normal. Si dans A, tous les entiers sont des multiples de 3, alors $k\,A$ est presque normal.

61) Pour montrer que les structures (2.3) et (2.4) sont équivalentes, il suffit de montrer que si un carré provient de (2.3), alors (2.4) peut le générer et réciproquement.
Pour y arriver, si nous posons dans (2.3) : a = A + 3r ; b = A + t ; S = 4A + 6r + 6t, alors nous obtenons (2.4).
Si nous posons dans (2.4) : A = (2a + 6b – S)/4 ; r = (2a – 6b + S)/12 ;
t = (S – 2a – 2b)/4, alors nous trouvons (2.3).

62) Même façon de procéder. Si nous posons dans (2.6) : S = 4a + 6r, alors nous obtenons (2.7).
Si dans (2.7), nous posons r = (S – 4a)/6, alors nous trouvons (2.6).

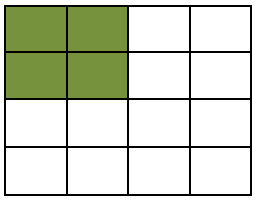
63) Même façon de procéder. Si nous posons dans (2.9) : a = u + 3r et S = 4u + 30r, alors nous obtenons (2.10).
Si dans (2.10), nous posons u = (10a – S)/6 et r = (S – 4a)/18, alors nous trouvons (2.9).
Ajoutons ici les structures générales (2.11) et (2.12) des diaboliques-alpha. Posons dans (2.11) : S = 4a + 30r. Nous obtenons (2.12).
Posons dans (2.12) : r = (S – 4a)/30. Nous trouvons (2.11).

64) Le nombre de figures magiques de M est le même que le nombre de figures magiques d'un carré normal d'ordre 4 (voir le problème 33). Donc ici, f(M) = 86.

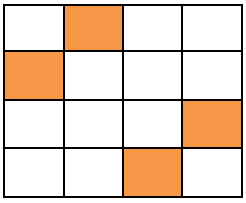
65) Pour les ordres 5, 6 et 7, nous trouvons respectivement f(M) = 1394, f(M) = 32 134 et f(M) = 957 332 (voir section 2.3 de la partie 1).

66) Oui car tous les super-Dürer sont pandiagonaux (théorème 5.9 du chapitre 5). Donc tous les super-Dürer-alpha et tous les super-Dürer-bêta sont pandiagonaux.

67) Critère 1 : le petit carré 2x2 dans le coin haut gauche est une figure magique. C'est la définition du carré Dürer. Nous avons alors les 24 figures magiques qui caractérisent les Dürer.

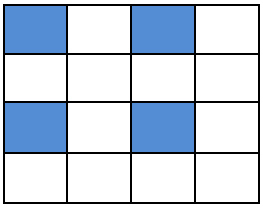


Critère 2 : La figure suivante fait partie des 24 figures magiques qui caractérisent les Dürer :



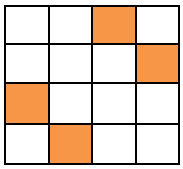
Le problème 46) nous montre que si cette figure est magique alors le carré 2x2 dans le coin haut gauche est une figure magique d'où le carré est un Dürer.

Critère 3 : La figure suivante fait partie des 24 figures magiques qui caractérisent les Dürer :

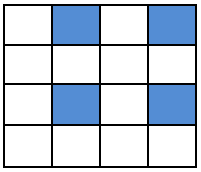


Le problème 45) nous montre que si cette figure est magique alors le carré 2x2 dans le coin haut gauche est une figure magique d'où le carré est un Dürer.

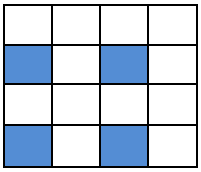
Remarque : avons-nous le critère 2a suivant?



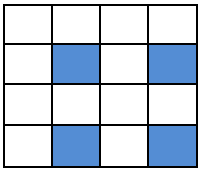
Avons-nous les critères 3a, 3b et 3c suivants :



3a



3b



3c

68) Nous allons utiliser deux figures complètes. La première en bleu et la seconde en gris. Ces deux figures complètes renferment ensemble tous les entiers de 9 à 16. Nous pouvons maintenant enlever 8 dans les huit cases de ces deux figures complètes. Le carré qui en résulte est toujours magique et sa somme est S = 18. De plus, le carré contient les entiers de 1 à 8, chacun apparaissant deux fois.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

4	7	6	1
5	2	3	8
1	6	7	4
8	3	2	5

69) Nous allons procéder de la même façon avec le carré magique suivant :

5	1	12	16
10	14	3	7
8	4	13	9
11	15	6	2

5	1	4	8
2	6	3	7
8	4	5	1
3	7	6	2

70) Notre programme nous indique que 8 carrés magiques normaux d'ordre 4 possèdent 8 cerfs-volants. Nous connaissons deux diaboliques normaux A et B qui possèdent ces 8 cerfs-volants où B est obtenu par la rotation de A de 180°. De plus, les 8 équivalents de A (A, B et les 6 autres) renferment chacun les 8 cerfs-volants. Ce sont les 8 carrés cherchés. Nous choisirons pour le carré A, le premier diabolique normal que nous rencontrons dans 5.10.

71) Voici un A-Dürer M et le carré M'obtenu de M en permutant ses deux rangées centrales. Nous voulons montrer que M'est un A-Dürer.

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	L	N
P	R	U	V

M

A	B	C	D
J	K	L	N
E	F	G	H
P	R	U	V

M'

Le carré M'est toujours magique puisque G + K = F + L et qu'alors les deux grandes diagonales restent magiques. En effet, A + (K + G) + V = A + (F + L) + V = S. De même pour l'autre diagonale.

Le carré M'est toujours un Dürer. Ceci est dû au fait que dans M, nous ayons A + B + J + K = S (voir les figures magiques des A-Dürer dans 5.9). De plus, nous avons dans M, A + B + E + F = S puisque M est un Dürer. D'où : J + K = E + F. M'est donc un Dürer puisque A + B + J + K = S.
Enfin, selon le théorème 5.16, M'est un A-Dürer puisque A + V = B + U = S/2 dans M et évidemment dans M'.

72) Ce carré ne peut pas être magique de somme S. En effet, la somme des quatre coins est obligatoirement 12 + A + 7 + S – A – 11 = S + 8. Rappelons que si un carré d'ordre 4 est magique, alors les quatre coins forment une figure magique. La somme des quatre coins doit donner S et non S + 8.

6.5 Chapitre 6

1) Nous allons montrer que peu importe là où se trouve le carré bleu d'ordre 5, celui-ci sera magique et pandiagonal. De plus, sa somme magique sera la même que celle de M.

Pour y arriver, il suffit de déplacer le carré M horizontalement d'une colonne et de constater que le nouveau carré M'soit magique, pandiagonal et de même somme.

Ensuite, il suffit de déplacer le carré M verticalement d'une rangée et de constater que le nouveau carré M'soit magique, pandiagonal et de même somme.

Observation : Dès que le carré se déplace horizontalement d'une colonne, il gagne une colonne à droite mais il perd **la même colonne** à gauche. De même verticalement. Dans les deux cas, le carré M'renferme les mêmes nombres que le carré M donc s'il est magique, il aura la même somme magique que M.

A	B	C	D	E	A
F	G	H	J	K	F
M	N	O	P	Q	M
R	S	T	U	V	R
W	X	Y	Z	L	W

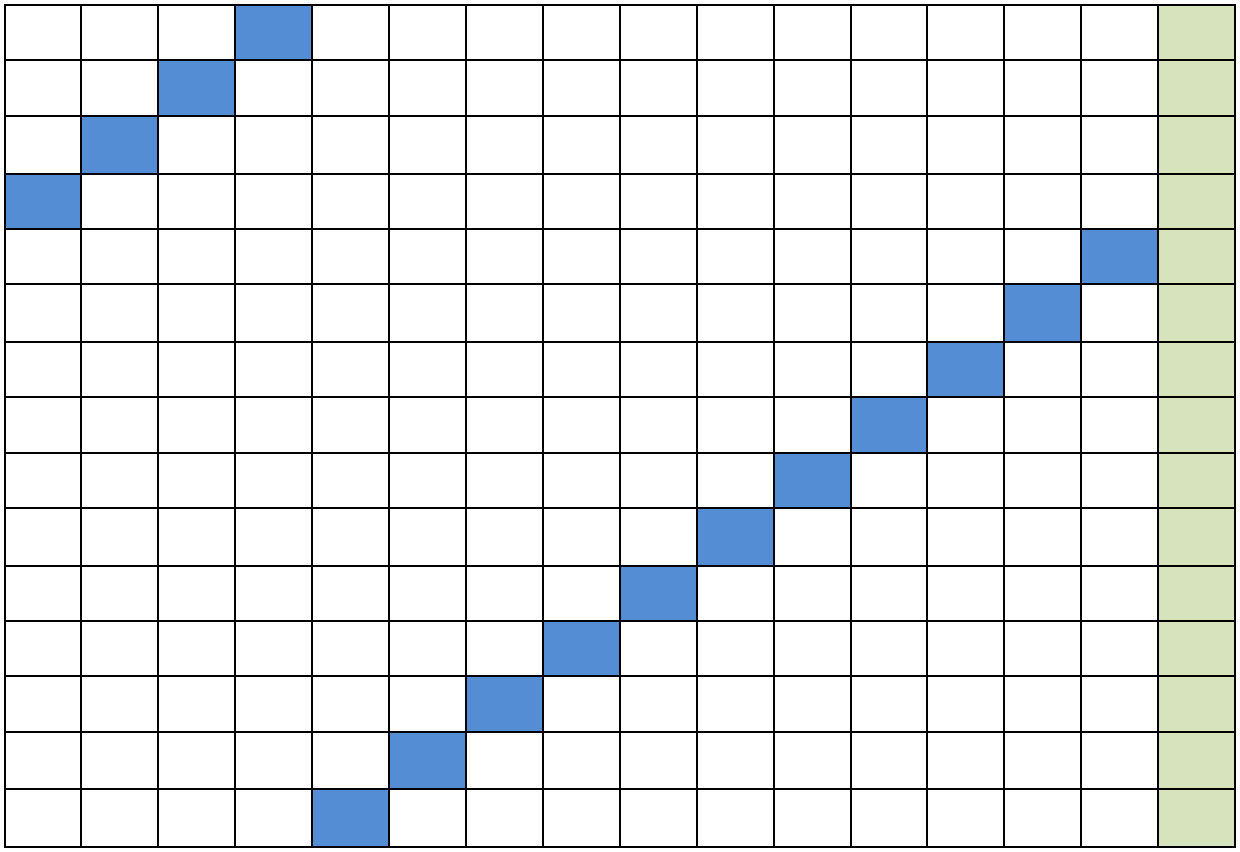
Il faut maintenant s'assurer que le nouveau carré M'soit magique et pandiagonal. Les colonnes restent évidemment magiques. De même pour les rangées puisque, par exemple, dans la première rangée, nous perdons A à gauche mais nous le récupérons à droite. Il reste à vérifier toutes les diagonales.

Par exemple : Prenons dans M', la diagonale C G M V Z. Celle-ci est la diagonale M G C Z V de M laquelle est magique d'où la diagonale C G M V Z de M'est magique. Regardez ainsi toutes les diagonales de M'et vous pourrez les retrouver toutes dans M, lesquelles sont toutes magiques dans M puisque M est pandiagonal.

Maintenant, peu importe la position du carré bleu, celui-ci est arrivé à sa position par une succession de déplacements horizontaux et verticaux et à chaque position intermédiaire, le carré est toujours magique, pandiagonal et de même somme magique que M.

2) 3) 4) Pour ces trois problèmes, nous pourrions procéder de la même façon que pour le problème 1). Il est très facile de savoir si toutes les diagonales de M impliquent que celles de M' soient magiques. Mais nous vous laissons le soin de faire cette vérification. Cependant, nous allons résoudre le problème général 5).

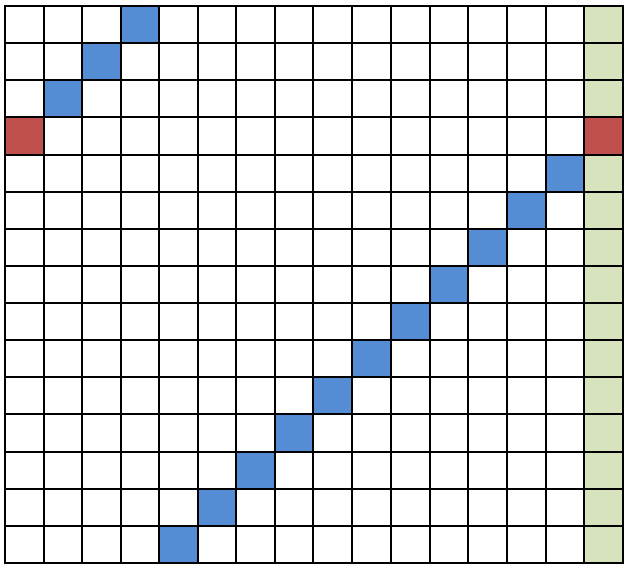
5) Supposons que le carré M soit magique et pandiagonal d'ordre n où n est un entier ≥ 3.



Les cases blanches et bleues forment le carré M et M'est le carré obtenu en supprimant la colonne de gauche. Notons cette diagonale secondaire de M par (u ; v) pour indiquer que nous trouvons u cases sur la branche au-dessus de la grande diagonale secondaire et que nous trouvons v cases sur l'autre branche avec u + v = n. Nous avons illustré dans M, la diagonale secondaire (4 ; 11).

Nous voyons que la diagonale de M devient, dans M', la diagonale secondaire (u – 1 ; v + 1).

Dans M, la somme des cases bleues est S mais dans M', voir le carré qui suit, la somme des cases de la diagonale brisée est toujours S car nous avons perdu la première case de la petite branche (case rouge de gauche) mais la grande branche l'a récupérée (la case rouge de droite) et celle-ci est devenue la dernière case de la grande branche.



Notons ce qui se passe avec les diagonales secondaires. Dans le tableau ci-dessous, la colonne de gauche nous indique les diagonales secondaires dans M et ce qu'elles deviennent dans M'se trouve dans la colonne de droite. Retrouvez ce tableau.

M		M'
$(1\,;\,n-1)$	$\rightarrow$	$(0\,;\,n)$
$(2\,;\,n-2)$	$\rightarrow$	$(1\,;\,n-1)$
$(3\,;\,n-3)$	$\rightarrow$	$(2\,;\,n-2)$
$(4\,;\,n-4)$	$\rightarrow$	$(3\,;\,n-3)$
...		
$(n-1\,;\,1)$	$\rightarrow$	$(n-2\,;\,2)$
$(n\,;\,0)$	$\rightarrow$	$(n-1\,;\,1)$

Il en est de même avec les diagonales principales.

Ainsi nous voyons qu'un déplacement horizontal d'une colonne nous donne un nouveau carré magique pandiagonal de même somme.

Il en est de même avec un déplacement vertical d'une rangée.

Maintenant, peu importe la position du carré bleu, celui-ci est arrivé à sa position par une succession de déplacements horizontaux et verticaux et à chaque position intermédiaire, le carré est toujours magique, pandiagonal et de même somme magique que M.

Nous avons supposé que M soit un carré magique pandiagonal. Nous savons qu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial, ce qui n'est pas intéressant pour notre pavé!!! Cependant, nous connaissons, par exemple, des carrés pandiagonaux presque normaux pour les ordres n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. De là notre pavé avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 5.

6) Un carré magique d'ordre 3 ne peut pas être pandiagonal s'il est non trivial (voir problème 8 de 7.4). Si M est trivial d'ordre 3, alors nous aurons un pavé avec le même nombre dans toutes ses cases. M' sera évidemment trivial.

Prenons M, le carré normal qui suit formé des 3 colonnes de gauche. Nous voyons que M' n'est plus magique à cause de ses deux diagonales (1 + 7 + 4 = 12 et 9 + 7 + 8 = 24 mais S = 15).

4	9	2	4
3	5	7	3
8	1	6	8

7) Appelons A et B, les deux carrés magiques d'ordre n. Dans le centre de A, nous trouvons le nombre m et dans le centre de B, nous trouvons le nombre w, différent de m. Dans la case centrale de tous les équivalents de A, nous trouvons le nombre m. Dans la case centrale de tous les équivalents de B, nous trouvons le nombre w. Donc A n'est pas un équivalent de B et B n'est pas un équivalents de A. Les carrés A et B sont donc primitifs.

8) Nous allons d'abord montrer qu'il y a autant de carrés magiques normaux d'ordre 5 et de centre 1 qu'il y en a de centre 25. Considérons tous les carrés magiques normaux d'ordre 5.

Il y en a 275 305 224 x 8 = 2 202 441 792. Puis, prenons tous ceux qui ont 1 comme centre et tous ceux qui ont 25 comme centre. Soit maintenant A, un carré magique normal d'ordre 5 qui renferme 1 dans sa case centrale. Nous allons construire A' comme suit : si m est l'entier de A situé dans la case (i ; j), alors nous placerons dans la case (i ; j) de A' l'entier 26 – m. Il s'ensuit que A' sera toujours magique, normal et que son centre sera 25.

De plus, si A et B sont deux carrés différents avec 1 comme centre, alors A' et B' sont magiques, normaux et différents avec 25 comme centre. Si nous prenons un carré A' de centre 25, alors ce carré sera obtenu à partir d'un carré A de centre 1. En effet, appliquons 26 – m sur A'; nous obtiendrons un carré magique normal de centre 1 appelé A. Appliquons 26 – m sur A et nous aurons A'.

Ceci nous permet d'affirmer qu'il y a une bijection entre les carrés de centre 1 et ceux de centre 25. Il y en a donc autant d'où il y a autant de primitifs de centre 1 que de primitifs de centre 25.

Le procédé est le même si le centre contient k, un entier allant de 1 à 12.

9) Un ultra-magique est à la fois pandiagonal et associatif par définition.

a				
	c			
		e		
			d	
				b

Puisque le carré est associatif, alors a + b = c + d = 2S/5 et a + b + c + d + e = S. Nous voyons bien que e = S – (a + b) – (c + d) = S – 2S/5 – 2S/5 = S/5. Si notre carré magique est associatif d'ordre impair n, alors le centre sera S/n. Ce résultat exige que le carré magique d'ordre impair soit associatif.

10) a) Nous avons 10 + 26 = 36 = 2S/5 d'où S = 90.

b) La case centrale contient 90/5 = 18.

c) 12 + m = 36 d'où m = 24.

d) Puisque M est presque normal, le plus petit entier pourrait être 1 donc le plus grand possible est 35.

Terminons avec un ultra-magique presque normal M qui vérifie a), b), c) et d). Ici, le plus grand entier est 34.

10	24	6	19	31
20	33	11	22	4
23	2	18	34	13
32	14	25	3	16
5	17	30	12	26

Ultra-magique S = 90

11) C'est en appliquant ce procédé que nous avons trouvé les 25 carrés magiques pandiagonaux de centres allant de 1 à 25.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}} \quad \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 11 & 13 & 15 & 12 & 14 \\ 21 & 23 & 25 & 22 & 24 \\ 6 & 8 & 10 & 7 & 9 \\ 16 & 18 & 20 & 17 & 19 \end{pmatrix}}$$

Les entiers dans le carré magique pandiagonal A servent à numéroter les 25 cases. Il reste à vérifier que le carré C soit magique et pandiagonal. Par exemple, dans le carré A, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = S signifie que l'addition des contenus des cases numérotées de 1 à 5 est S. Dans le carré C, nous voyons clairement que 1 + 3 + 5 + 2 + 4 = S. Les rangées et colonnes de C restent des figures magiques. Il en est de même des 10 diagonales. Par exemple, dans A, 3 + 7 + 11 + 20 + 24 = S et dans C, nous trouvons 3 + 11 + 24 + 7 + 20 = S. Nous vous laissons compléter la vérification.

Il est très intéressant de voir que le contenu de la case 25 (en position (5 ; 5)) se retrouve en position (3 ; 3) soit au centre du carré. Celui de la case 19 (en position (4 ; 4)) se retrouve en position (5 ; 5). **Voir le site de Harvey Heinz «Pandiagonal 5x5».**

12) Il faut trouver un carré magique normal d'ordre 5 qui possède une figure complète idéale.

M =

25	11	2	8	19
3	9	20	21	12
16	22	13	4	10
14	5	6	17	23
7	18	24	15	1

Les cinq cases vertes forment une figure complète idéale puisque celles-ci contiennent les entiers 21, 22, 23, 24, 25. Ajoutons l'entier k dans les cinq cases vertes. Le carré qui en résulte est magique, presque normal et de somme magique $65+k$ où k est un entier ≥ 0. Nous aurons alors toutes les sommes magiques 65, 66, 67, … .

13) Le théorème 6.1 de la section 6.2 nous indique qu'un tel carré n'existe pas; la réponse est donc non. La plus petite somme pour un Ariane presque normal est S = 123.

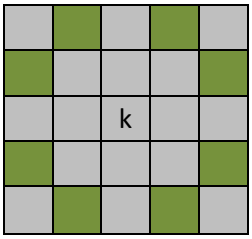
14) Il faut prendre, par exemple, le carré magique normal M du problème 12) et obtenir 100 M. Les rangées de 100 M nous donnent une première solution et les colonnes, une seconde

solution. Voir le problème 51) de 5.18. La façon de faire n'est donc pas unique. De plus, puisque M est ultra-magique, alors les cinq diagonales principales donnent une troisième solution et les cinq diagonales secondaires donnent une quatrième solution.

De toute façon, chacun recevra 6500 grammes de platine.

15) La structure générale des Ariane (voir section 6.2) nous montre clairement que si a et S ont la même parité, alors nous aurons 25 entiers ce qui n'est pas le cas si a et S n'ont pas la même parité.

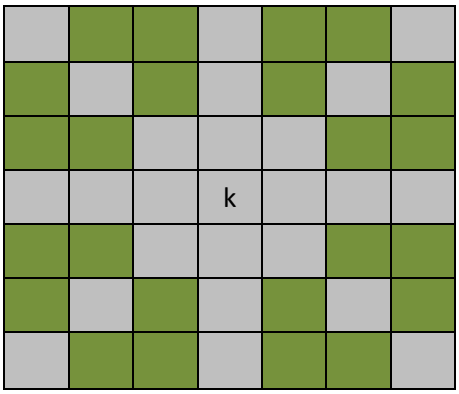
16) Le carré est magique de somme S et de centre k.



La somme des cases grises est S + (S – k) + (S – k) + (S – k) = 4S – 3k. La somme des 25 cases est 5S et celle des 8 cases vertes est x.

Nous avons donc 4S – 3k + x = 5S d'où x = **S + 3k**.

17) La solution est très semblable.



Nous trouvons 4S – 3k + x = 7S d'où la somme des cases vertes = x = **3S + 3k**.

D'une façon générale, prenons un carré magique d'ordre impair 2n + 1. Si nous excluons la rangée centrale, la colonne centrale et les deux grandes diagonales, alors la figure formée des cases restantes (les cases vertes) a pour somme **(2n – 3) S + 3k**.

18) Le procédé 1-3-5-7-2-4-6 s'applique aussi au carré magique pandiagonal d'ordre 7. Procédons de la même façon qu'avec le problème 11) ci-haut. Le procédé 1-4-7-3-6-2-5 s'applique aussi au carré magique pandiagonal d'ordre 7. Voyons 1-3-5-7-2-4-6 :

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

A

1	2	3	4	5	6	7
15	16	17	18	19	20	21
29	30	31	32	33	34	35
43	44	45	46	47	48	49
8	9	10	11	12	13	14
22	23	24	25	26	27	28
36	37	38	39	40	41	42

B

1	3	5	7	2	4	6
15	17	19	21	16	18	20
29	31	33	35	30	32	34
43	45	47	49	44	46	48
8	10	12	14	9	11	13
22	24	26	28	23	25	27
36	38	40	42	37	39	41

C

Si A est magique pandiagonal, alors C est magique pandiagonal. Nous vous laissons le soin de vérifier. La case 49 en position (7 ; 7) se retrouve en position (4 ; 4) soit au centre du carré. **Voir le site de Harvey Heinz «Pandiagonal 5x5».**

Nous avons construit à l'aide du procédé 1-3-5-7-2-4-6, 49 carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 dont les centres varient de 1 à 49. Vous les trouverez dans l'annexe 31.

19) Le procédé 1-3-5-7-9-2-4-6-8 s'applique aussi au carré magique pandiagonal d'ordre 9. Même façon de procéder qu'au problème précédent.

20) Aucun des sept équivalents d'un Ariane n'est un Ariane. Deux Ariane différents sont donc toujours primitifs.

7.4 Chapitre 7

1) Ici n = 2k et sur toute diagonale, grande ou brisée, deux cases séparées par (n – 2)/2 cases soit k – 1 cases totalisent toujours 2S/n = S/k.

Nous voyons une diagonale (grande où brisée) formée de 2k cases soit la case rouge à gauche plus k – 1 cases vertes et la case rouge à droite plus k – 1 cases grises. La somme des deux cases rouges est donc 2S/n = S/k. Ainsi, la somme des 2k cases est k x S/k = S et la diagonale est magique. Toutes les diagonales, grandes ou brisées, sont donc magiques et le carré magique est pandiagonal.

La propriété du théorème 7.2 implique à elle seule la pandiagonalité!!!

2) Dans la deuxième colonne de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6, nous trouvons l'expression a – b – c + d + S/6. Si le carré renferme que des entiers, alors il est clair que a, b, c et d sont des entiers d'où S/6 est entier. Enfin, S/6 = entier d'où S = 6 x entier.

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante car dans la sixième colonne, la dernière expression 3a/2 – b – c/2 + d n'est pas un entier si c est pair alors que a est impair.

3) En effet, le carré magique normal d'ordre 6 a pour somme magique S = 111. Tout carré magique d'ordre 6 presque normal a obligatoirement une somme > 111.

Le carré hyper-magique presque normal M, donc pandiagonal, ne peut pas être normal. En effet, supposons que M soit normal. Selon le théorème 7.4 et son corollaire 7.5, k S = 3 x 111 est impair d'où la contradiction car k S doit être pair selon le théorème. M n'est donc pas normal.

La somme magique ne pourra pas être 111. Nous avons donc **S > 111**. Si un carré magique d'ordre 6 est presque normal de somme 111, alors le carré est normal.

4) Il suffit de montrer que k et S sont impairs. Ici, n = 4m + 2 = 2 (2m + 1) = 2 k. Nous voyons bien que k est impair. Si le carré est normal, alors $S = (2m+1)(16m^2+16m+5)$. S est le produit de deux impairs donc un impair. Nous avons k S impair d'où la contradiction et le carré ne peut pas être normal. Nous avons alors $S > (2m+1)(16m^2+16m+5)$.

5) Nous avons

$$a_i + a_{i+1} + b_i + b_{i+1} + \frac{4S}{n}(k-1) = 2S \ \ d'où \ \ a_i + a_{i+1} + b_i + b_{i+1} = 2S - \frac{4S}{2k}(k-1) = \frac{2S}{k} = \frac{4S}{2k} = \frac{4S}{n}.$$

Même façon de faire avec les colonnes.

6) Le carré magique n'est pas un hyper-magique car il ne peut pas être pandiagonal puisque ici, k S est impair. Il ne peut donc pas être hyper-magique puisque tous les hyper-magiques sont pandiagonaux.

7) Notre carré est un candidat à la pandiagonalité puisque S est pair d'où k S est pair. Nous connaissons des carrés magiques presque normaux d'ordre 6 avec k S pair qui ne sont pas pandiagonaux. Nous connaissons des carrés magiques presque normaux d'ordre 6 avec k S pair qui sont pandiagonaux (voir 7.2).

8) Dans 4.3.2, prenons la structure générale (1.1) des carrés magiques d'ordre 3. Prenons deux diagonales brisées, une principale et une secondaire. En égalant chacune à S = 3A + 3r + 3t, nous trouvons r = 0 et t = 0 d'où un carré trivial formé du nombre A. Il est évident qu'un carré trivial est pandiagonal.

9) Reprenons la structure (1.1). Il est facile de vérifier que deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours 2S/3 = 2A + 2r + 2t. De plus, la case centrale est A + r + t soit S/3.

10) Considérons une grande diagonale de notre carré magique associatif d'ordre impair. La case centrale est la case bleue. Posons n = 2k + 1.

A				C				B

Puisque deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent 2S/n, alors A + B = 2S/n. De plus, nous avons k x 2S/n + C = S d'où C = S – 2kS/n = S (n-2k)/n = S/n.

11) Prenons d'abord la figure verte. Elle est formée de cinq petits carrés 2x2 qui totalisent 5 x 4S/20 = S. La figure est donc magique et de plus, quelle que soit sa position, nous aurons toujours cinq petits carrés 2x2, chaque ayant une somme 4S/20. Cette figure est une super-figure.

L'autre figure est formée d'un petit carré 2x2 (9, 10, 13, 14) de somme 4S/20 (voir les théorèmes 7.1 et 7.2). Puis 4 cases (6, 7, 11, 12) sont les sommets d'un 6x6 de somme 4S/20. Toutes les autres cases numérotées se regroupent par deux (1 ; 15), (2 ; 18), (3 ; 19), (4 ; 16), (5 ; 17) et (8 ; 20). Dans chaque couple, les deux cases sont sur une même diagonale, grande ou brisée, séparées par 9 cases ((n – 2)/2) et dont la somme est 2S/20. La somme des 20 cases est S donc ces 20 cases forment une figure magique. Quelle que soit la position de cette figure, elle reste magique, ce qui en fait une super-figure. En effet, par exemple, 2 cases situées sur une diagonale et séparées de 9 cases, resteront sur une diagonale et séparées de 9 cases avec la même somme 2S/20 et ce, quelle que soit la façon de placer la figure et peu importe où, en autant que 20 cases soient parfaitement couvertes par celle-ci.

12) Selon le théorème 7.6, il suffit de prendre un carré pandiagonal d'ordre pair. Ici un 8x8 normal donc de somme S = 260. C'est le carré 28 de la Partie 1.Chacun des 4 groupes de 16 nombres aura pour somme : 8 x260/4 = 520.

Le carré de la première page de 7.3 nous indique comment fabriquer les 4 groupes.

13) 960 x 10/4 = 2400 est la somme des cases vertes puisque le carré est pandiagonal.

14) Ce carré magique d'ordre 18 nous donne k = 9 et avec S = 935, nous trouvons k S impair. Puisque le carré renferme 324 = 18 x 18 entiers, alors celui-ci ne peut pas être pandiagonal donc ne peut pas être hyper-magique.

15) Revoyons le théorème 7.1. Ce carré d'ordre n = 2k, nous montre que la somme des 4 coins du carré 2k x 2k est 4S/n et ce quel que soit l'entier $k \geq 2$. Dans un sous-carré 2h x 2h, avec h < k, les sous-carrés d'ordre 2 ont toujours la même somme soit 4S/n, S étant la somme magique du 2k x 2k. Les 4 coins du 2h x 2h totalisent toujours 4S/n, la preuve étant la même que pour les 4 coins du 2k x 2k.

16) Nous partons de la structure générale des carrés magiques d'ordre 6.

a) Nous vous suggérons de prendre la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 de 7.2.

b)

$$-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-\mathrm{a21}-2\mathrm{a22}-\mathrm{a23}-\mathrm{a27}-\mathrm{a28}-\mathrm{a29}+\frac{11S}{6}$$
$$\mathrm{a15}+\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a20}+\mathrm{a21}+\mathrm{a22}+\mathrm{a23}+\mathrm{a27}+\mathrm{a5}-\mathrm{a8}-\frac{7S}{6}$$
$$\mathrm{a10}+\mathrm{a15}+2\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a20}+2\mathrm{a21}+3\mathrm{a22}+2\mathrm{a23}+\mathrm{a27}+2\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a8}-\frac{13S}{6}$$
$$\mathrm{a15}+\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a21}+\mathrm{a22}+\mathrm{a23}+\mathrm{a27}+\mathrm{a28}+\mathrm{a29}-\mathrm{a4}-\frac{7S}{6}$$
$$-\mathrm{a10}-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-\mathrm{a20}-\mathrm{a21}-\mathrm{a22}-\mathrm{a23}-\mathrm{a27}-\mathrm{a28}-\mathrm{a5}+\mathrm{a8}+\frac{11S}{6}$$
$$-\mathrm{a15}-2\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-\mathrm{a20}-2\mathrm{a21}-2\mathrm{a22}-2\mathrm{a23}-\mathrm{a27}-\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+\mathrm{a8}+\frac{11S}{6}$$

Colonne 1

$$-\mathrm{a20}-\mathrm{a23}-\mathrm{a5}+\frac{2S}{3}$$
$$\mathrm{a8}$$
$$\mathrm{a14}$$
$$\mathrm{a20}$$
$$-\mathrm{a14}-2\mathrm{a15}-2\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-2\mathrm{a20}-3\mathrm{a21}-3\mathrm{a22}-2\mathrm{a23}-2\mathrm{a27}-2\mathrm{a28}-\mathrm{a29}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+\frac{10S}{3}$$
$$2\mathrm{a15}+2\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+2\mathrm{a20}+3\mathrm{a21}+3\mathrm{a22}+3\mathrm{a23}+2\mathrm{a27}+2\mathrm{a28}+\mathrm{a29}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\mathrm{a8}-3S$$

Colonne 2

$$\mathrm{a3}$$
$$-\mathrm{a10}-\mathrm{a14}-2\mathrm{a15}-2\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-\mathrm{a20}-2\mathrm{a21}-2\mathrm{a22}-\mathrm{a23}-\mathrm{a27}-\mathrm{a28}+\frac{8S}{3}$$
$$\mathrm{a15}$$
$$\mathrm{a21}$$
$$\mathrm{a27}$$
$$\mathrm{a10}+\mathrm{a14}+\mathrm{a15}+2\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a20}+\mathrm{a21}+2\mathrm{a22}+\mathrm{a23}+\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\frac{5S}{3}$$

Colonne 3

$$\mathrm{a4}$$
$$\mathrm{a10}$$
$$\mathrm{a16}$$
$$\mathrm{a22}$$
$$\mathrm{a28}$$
$$-\mathrm{a10}-\mathrm{a16}-\mathrm{a22}-\mathrm{a28}-\mathrm{a4}+S$$

Colonne 4

$$\mathrm{a5}$$
$$\mathrm{a14}+2\mathrm{a15}+2\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+2\mathrm{a20}+3\mathrm{a21}+3\mathrm{a22}+2\mathrm{a23}+2\mathrm{a27}+2\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-\mathrm{a8}-\frac{8S}{3}$$
$$\mathrm{a17}$$
$$\mathrm{a23}$$
$$\mathrm{a29}$$
$$-\mathrm{a14}-2\mathrm{a15}-2\mathrm{a16}-2\mathrm{a17}-2\mathrm{a20}-3\mathrm{a21}-3\mathrm{a22}-3\mathrm{a23}-2\mathrm{a27}-2\mathrm{a28}-\mathrm{a29}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\mathrm{a8}+\frac{11S}{3}$$

Colonne 5

$$\mathrm{a15}+\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a20}+\mathrm{a21}+2\mathrm{a22}+2\mathrm{a23}+\mathrm{a27}+\mathrm{a28}+\mathrm{a29}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-\frac{3S}{2}$$
$$-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-2\mathrm{a20}-2\mathrm{a21}-2\mathrm{a22}-2\mathrm{a23}-2\mathrm{a27}-\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\mathrm{a8}+\frac{13S}{6}$$
$$-\mathrm{a10}-\mathrm{a14}-2\mathrm{a15}-3\mathrm{a16}-2\mathrm{a17}-\mathrm{a20}-2\mathrm{a21}-3\mathrm{a22}-2\mathrm{a23}-\mathrm{a27}-2\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a8}+\frac{19S}{6}$$
$$-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-\mathrm{a20}-2\mathrm{a21}-2\mathrm{a22}-2\mathrm{a23}-\mathrm{a27}-\mathrm{a28}-\mathrm{a29}+\mathrm{a4}+\frac{13S}{6}$$
$$\mathrm{a10}+\mathrm{a14}+3\mathrm{a15}+3\mathrm{a16}+2\mathrm{a17}+3\mathrm{a20}+4\mathrm{a21}+4\mathrm{a22}+3\mathrm{a23}+2\mathrm{a27}+2\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\mathrm{a8}-\frac{25S}{6}$$
$$\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a21}+\mathrm{a22}+\mathrm{a23}+\mathrm{a27}+\mathrm{a28}-\mathrm{a8}-\frac{5S}{6}$$

Colonne 6

Ce sont les 6 colonnes de la structure générale MP des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6. Les colonnes de 1 à 6 vont de gauche à droite dans la structure.

C'est un sous-espace de dimension 17.

Un carré issu de cette structure renferme 36 entiers si et seulement si les 17 variables prennent une valeur entière et S est divisible par 6.

c)

$2a3 + 3a4 + 2a5 - S$	$-2a3 - 2a4 - a5 + S$	$a3$
$-a4 - a5 - a8 + \frac{2S}{3}$	$a8$	$a3 + 2a4 + a5 - a8 - \frac{S}{3}$
$-a3 + a8 + \frac{S}{6}$	$a3 + a4 + a5 - a8 - \frac{S}{6}$	$-2a3 - 3a4 - 2a5 + a8 + \frac{7S}{6}$
$\frac{1}{3}(-3a4 + S)$	$\frac{1}{3}(-3a5 + S)$	$a3 + 2(a4 + a5) - \frac{2S}{3}$
$2a3 + 3a4 + a5 - a8 - \frac{2S}{3}$	$-2a3 - 2a4 + a8 + \frac{2S}{3}$	$a3 + \frac{1}{3}(-3(a5 + a8) + S)$
$-3a3 - 4a4 - 2a5 + a8 + \frac{3S}{2}$	$3a3 + 3a4 + a5 - a8 - \frac{5S}{6}$	$-2a3 - a4 + a8 + \frac{S}{2}$

Colonnes 1, 2, 3

$a4$	$a5$	$-a3 - 2(a4 + a5) + S$
$-2a3 - 3a4 - a5 + a8 + S$	$2a3 + 2a4 - a8 - \frac{S}{3}$	$-a3 + a5 + a8$
$3a3 + 4a4 + 2a5 - a8 - \frac{7S}{6}$	$-3a3 - 3a4 - a5 + a8 + \frac{7S}{6}$	$2a3 + a4 - a8 - \frac{S}{6}$
$-2a3 - 3a4 - 2a5 + \frac{4S}{3}$	$2a3 + 2a4 + a5 - \frac{2S}{3}$	$\frac{1}{3}(-3a3 + S)$
$a4 + a5 + a8 - \frac{S}{3}$	$\frac{1}{3}(-3a8 + S)$	$-a3 - 2a4 - a5 + a8 + \frac{2S}{3}$
$a3 - a8 + \frac{S}{6}$	$-a3 - a4 - a5 + a8 + \frac{S}{2}$	$2a3 + 3a4 + 2a5 - a8 - \frac{5S}{6}$

Colonnes 4, 5, 6

Voilà une structure HM de carrés hyper-magiques d'ordre 6 obtenue de la structure MP des carrés magiques pandiagonaux. Les variables sont a3, a4, a5, a8 et S.

Tous les hyper-magiques issus de HM sont pandiagonaux car également issus de MP. Nous allons maintenant montrer que la structure HM est équivalente à celle de 7.2. En effet, en posant dans la structure de 7.2 : a = 2a3 + 3a4 + 2a5 – S; b = a3; c = a4; d = – a4 – a5 – a8 + 2S/3, nous obtenons HM.

Maintenant, posons dans HM : a8 = (– 3a + 6b + 3c – 6d + S)/6; a3 = b; a4 = c;
a5 = (a – 2b – 3c + S)/2, nous obtenons la structure de 7.2.

Les deux structures sont donc équivalentes.

d) Ainsi, la structure HM génère tous les hyper-magiques d'ordre 6 et ceux-ci se trouvent tous dans le sous-espace des pandiagonaux. Tous les hyper-magiques d'ordre 6 sont donc pandiagonaux.
e) Évidemment, HM est un sous-espace de dimension 5 de l'espace vectoriel des pandiagonaux d'ordre 6, de dimension 17.

17) Un carré magique pandiagonal M d'ordre 6 ne peut pas contenir 36 entiers consécutifs. En effet, nous pourrions ajouter dans M un même entier dans toutes les cases afin que M devienne normal. Ce nouveau carré M'est toujours pandiagonal et sa somme est 111. Nous avons là une contradiction car k S est impair (3x111) or, pandiagonal formé d'entiers implique k S pair.

18) Nous aurions k = 2m + 1 donc impair. Le problème 4 de 7.4 nous montre que la somme d'un carré normal d'ordre 4m + 2 est impaire d'où k S impair. Si le carré est pandiagonal, alors k S doit être pair et la contradiction s'ensuit.

19) Puisque le carré est non trivial, alors il contient au moins deux nombres différents et par conséquent, un plus petit nombre a et un plus grand nombre différent de a. Puisque le carré est associatif, la case centrale renferme le nombre S/n.

D'abord, montrons que a ne peut pas se situer dans la case centrale lorsque l'ordre du carré est impair. Si a est dans la case centrale, alors $a = S/n \ d'où \ S = na$. La somme S' des n^2 nombres du carré est $S' = nS = n^2a$. Cependant, nous savons que $S' > n^2a$ puisque dans notre carré, nous avons au moins un nombre $> a$. Il y a donc contradiction et a ne peut pas occuper la case centrale.

De la même façon, la case centrale ne peut pas contenir le plus grand nombre g. En effet, si g est dans la case centrale, alors $g = S/n \ d'où \ S = ng$. Puis $S' = nS = n^2g$. Cependant, nous savons que $S' < n^2g$ puisque notre carré contient au moins un nombre $< g$. Il y a donc contradiction et g ne peut pas être dans la case centrale.

Enfin, si a occupe une autre case que la case centrale, alors sa case symétrique par rapport au centre du carré ne peut pas contenir a. En effet, si les deux cases renferment le nombre a, alors $2a = 2S/n \ d'où \ S/n = a$, ce qui est impossible. De même, si les deux cases renferment g.

Maintenant, considérons deux cases distinctes symétriques par rapport au centre du carré qui renferment les nombres $a \ et \ b$ avec $a + b = 2S/n$ et a, le plus petit nombre, b différent de a, donc $b > a$. Nous voulons montrer que b est le plus grand nombre du carré.

Supposons que b ne soit pas le plus grand nombre du carré et soit g, ce plus grand nombre. Nous avons donc : $g = b + k$ où $k > 0$. La case symétrique de la case qui contient g renferme un nombre $d \geq a$ puisque a est le plus petit. Le nombre d s'écrit : $d = a + m \ où \ m \geq 0$. Enfin,

$g+d=(b+k)+(a+m)=(a+b)+(k+m)=2S/n+(k+m)$ avec $(k+m)>0.$ Nous avons là une contradiction car $g+d=2S/n.$ Finalement, b est le plus grand nombre du carré.

20) Prenons la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 de 7.2. Nous allons prendre chacun des 16 sous-carrés d'ordre 3 et additionner les 9 nombres qui s'y trouvent. Nous trouverons 16 fois le nombre 3S/2.

21) Pour ce faire, nous allons prendre la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 de la section 7.2. En position (2 ; 3), nous avons a – b + d et en position (5 ; 4), nous avons –d + S/3. Ces deux cases sont symétriques par rapport au centre du carré. Si celui-ci est associatif, alors nous avons : a – b + d + (– d + S/3) = 2S/n = 2S/6 = S/3 d'où a = b. Ce qui contredit que le carré soit presque normal. L'hyper-magique presque normal ne peut donc pas être associatif.

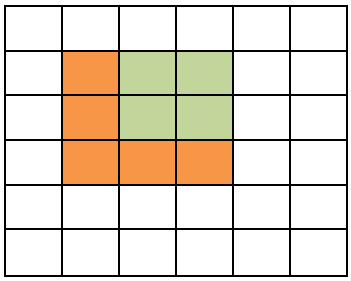
22) Tout carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé de 36 entiers impairs a une somme magique de la forme 6 m où m est un entier impair. D'abord, la structure générale des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6 (dans MATHEMATICA, **«pandiagonaux ordre 6»**) nous montre clairement que si un carré magique pandiagonal renferme 36 entiers, alors S est divisible par 6 donc **S = 6 m où m est un entier**.

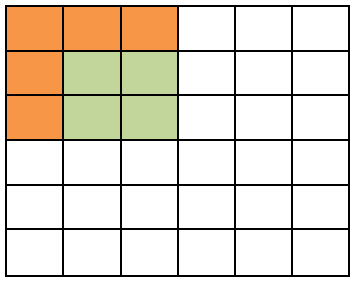
a) Si maintenant, les 36 entiers sont impairs, alors dans la structure générale, en position (6 ; 3), nous trouvons l'expression : (–b – d + g + i + k – m – u + w) + S/6. Les 8 variables libres de la parenthèse prennent des valeurs entières impaires puisque le carré renferme 36 impairs et la somme dans la parenthèse est donc un entier pair. Il s'ensuit que S/6 est un entier impair puisque la somme totale de l'expression en position (6 ; 3) est impaire. Nous avons alors:

$$\frac{S}{6}=impair\ \ d'où\ \ S=6\times impair$$

b) Nous voyons que si les 36 entiers sont pairs, alors S/6 est pair et $S=6\times pair.$
c) Si la somme est S = 156 = 6 x 26, alors le carré doit contenir au moins un nombre pair car s'il contenait que des entiers impairs, il aurait la forme 6 x impair ce qui n'est pas le cas ici.
d) Si la somme est S = 150 = 6 x 25, alors le carré doit contenir au moins un nombre impair car s'il contenait que des entiers pairs, il aurait la forme 6 x pair ce qui n'est pas le cas ici.
e) Si nous trouvons au moins un pair et au moins un impair dans le carré, alors la somme magique est S = 6 m où m est un entier. Nous ne pouvons pas affirmer que m soit pair ou impair. Nous connaissons un pandiagonal d'ordre 6 de somme S = 6 x 25 (voir le carré Hy-150 de 7.2) et un pandiagonal d'ordre 6 de somme S = 288 = 6 x 48 (voir les deux carrés de 8.4). Ces carrés renferment tous au moins un pair et au moins un impair.

24) Le carré suivant est un hyper-magique d'ordre 6.





Selon le problème 20 ci-haut, nous savons que la somme des 9 cases du carré formé de 4 cases vertes et de 5 cases orangés a pour somme 3S/2. Le grand carré étant un hyper-magique nous assure que le petit carré formé des 4 cases vertes a pour somme 2S/3. Il s'ensuit que la somme des 5 cases de l'équerre est 3S/2 – 2S/3 = 5S/6. Peu importe la position de l'équerre, celle-ci fera toujours partie d'un sous-carré d'ordre 3 dans lequel il y a un sous-carré d'ordre 2.

La vérification nous montre que la somme des cases de toute équerre dans Hy-150 est bien 125.

25) Le carré magique est pandiagonal d'où le partage en 4 groupes se fera à partir du carré de 7.3. La somme des cases blanches = la somme des cases rouges = la somme des cases vertes = la somme des cases jaunes.
La somme dans chaque groupe est 225 x 10 = 2250
26) Le but de ce problème est de vous présenter une conjecture sur les hyper-magiques.
27) L'équerre, peu importe sa position, forme toujours, avec 4 petits carrés d'ordre 2, un carré d'ordre 5. Il en est de même de la croix, du T et du Z. Appelons m, la somme des 9 cases de l'équerre ou de la croix ou du T ou du Z. Nous aurons, dans les 4 cas,

$$\frac{5S}{2} = m + 4\frac{4S}{10} \quad d'où \quad m = \frac{9S}{10}.$$

28) La structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 nous montre que le carré renferme 36 entiers si et seulement si S est un entier divisible par 6 avec a et c, des entiers de même parité et bien entendu b et d, des entiers.

8.6 Chapitre 8

1) Le tableau G1 de 8.2 nous indique qu'il n'y a pas de Gauss de somme S = 400. De même si S = 392.

2) Le carré hyper-magique-alpha suivant est normal donc de somme S = 260. La somme des 4 cases des sous-carrés 2x2 est toujours 4S/8 = S/2 = 130.

16	33	48	1	62	19	30	51
61	20	29	52	15	34	47	2
12	37	44	5	58	23	26	55
57	24	25	56	11	38	43	6
3	46	35	14	49	32	17	64
50	31	18	63	4	45	36	13
7	42	39	10	53	28	21	60
54	27	22	59	8	41	40	9

3) Le carré est un Gauss de somme S = 556. Il y a 12 entiers dans ce Gauss. Pour compléter ce carré, il faut se servir des propriétés des Gauss (voir 8.2), par exemple, la somme des 4 coins des 4x4 qui donne toujours 278; nous avons aussi utilisé la figure magique nommée «avion» pour trouver l'entier 138. Aussi, la demi-figure verte dans le carré de droite de la deuxième page de 8.2. Le carré complété est le carré qui précède le tableau G1 de 8.2 lequel est défini avec a1 = 49, a3 =75 et S = 556. Oui, le carré est presque normal.

4) Voyons la structure générale des hyper-magiques-alpha de 8.3. Le nombre en position (5 ; 6) est (a1 + a3)/2. Il est clair que les nombres a1 et a3 doivent être des entiers de même parité. De plus, en position (5 ; 5), le nombre – a1 + S/4 doit être un entier d'où S/4 doit être un entier et finalement, S doit être un entier divisible par 4. C'est une condition nécessaire mais non suffisante.

En effet, en position (8 ; 1), le nombre est (– 5 a1 + 3a3 + S)/6. Avec a1 = 9, a3 = 7 et S = 400, nous avons la condition nécessaire mais le nombre obtenu 62, 666… n'est pas un entier.

5) Voyons dans la section 8.2, la structure générale des Gauss. Il est clair que les nombres a1 et a3 doivent être des entiers ainsi que S si le carré renferme 64 entiers. En position (2 ; 1), nous avons 3a1 – S/4 qui est entier d'où S/4 est entier et S est un entier divisible par 4. De plus, les 64 entiers du carré ont tous la forme (entier + k S/2 ou k S/4) et S doit être un entier divisible par 4 puisque (2 ; k) = 1 et (4 ; k) = 1. En fait, k est relativement premier avec 2 aussi bien qu'avec 4.

Si a1 et a3 sont des entiers et S est un entier divisible par 4, alors il est évident que le carré renferme 64 entiers.

6) Dans 8.5, le résultat (*) de l'encadré vert nous dit qu'un carré magique d'ordre pair n = 2k associatif et formé que d'entiers implique k S pair. Or ici, n = 10 = 2x5 et S = 245 donc k S = 5 x 245 est impair. Le carré M renferme que des entiers d'où il ne peut pas être associatif.

7) a) La réponse est oui car nous pouvons construire, pour tous les ordres impairs ≥ 3, un carré magique arithmétique qui sera associatif lorsque construit avec l'algorithme ALG-1 (Voir le théorème 11.3, chapitre 11).

k

Pour n = 1, le carré renferme le nombre k et S = k. Le carré est associatif car k + k = 2k = 2k/1 = 2S/n.

b) La réponse est oui car avec l'algorithme ALG-2, tous les carrés magiques construits sont arithmétiques et associatifs (Voir le théorème 11.4 du chapitre 11).
c) Dans ces deux cas, nous pouvons toujours trouver un carré normal et une infinité de presque normaux.

8) La réponse est non. Ici, k = 3 et S = 265 donc k S est impair. (Voir le problème 6) ci-haut). Le carré est associatif donc il ne peut pas contenir que des entiers.

9) Prenons la figure orangée du bas. Celle-ci est magique car de somme S = 260. Si nous la déplaçons parallèlement à elle-même d'une rangée (figure bleue), elle reste magique.

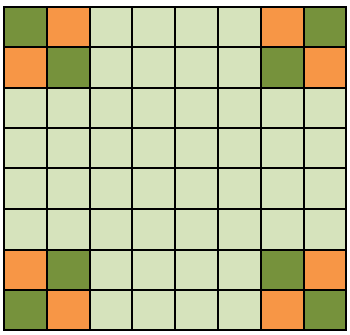
64	2	62	4	53	11	55	9
49	15	51	13	60	6	58	8
48	18	46	20	37	27	39	25
33	31	35	29	44	22	42	24
12	54	10	56	1	63	3	61
5	59	7	57	16	50	14	52
28	38	26	40	17	47	19	45
21	43	23	41	32	34	30	36

Les deux figures (orangée et bleue) totalisent 4xS/2 = 2S car le carré est hyper-magique. Puisque la figure orangée est de somme S, il s'ensuit que la figure bleue est aussi de somme S. De même si nous montons la figure bleue d'une rangée et ainsi de suite.

La figure verte du haut (rotation de 180° de la figure orangée) est aussi magique. Si nous la descendons d'une rangée, elle reste magique pour la même raison.

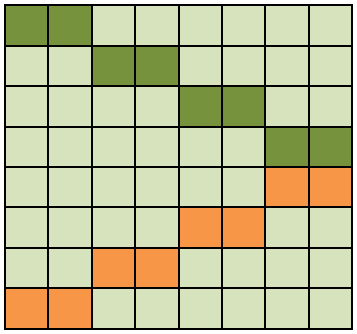
Cependant, cette figure n'est pas une super-figure car si nous la tournons de 90°, celle-ci n'est plus magique : 64 + 49 + 18 + 31 + 54 + 59 + 28 + 21 = 324.

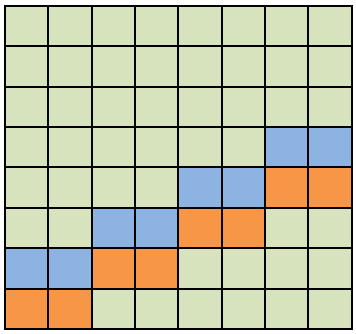
10) Nous allons d'abord montrer que la figure verte est une super-figure. Nous pourrons ensuite déduire que la figure en orangé est aussi une super-figure.



a) Montrons que la figure en vert est magique. Celle-ci se compose des 4 coins d'un 6x6 et des 4 coins du 8x8 d'où la somme des 8 cases est S/2 + S/2 = S (voir les propriétés des Gauss). Nous n'avons qu'une seule façon de placer cette figure dans le carré ce qui en fait automatiquement une super-figure.
b) Les 8 cases de la figure en orangé se trouvent dans les 4 carrés 2x2 situés dans les 4 coins du 8x8. La somme de ces 4 carrés 2x2 est 4 x S/2 = 2S. La somme des 8 cases vertes est S donc la somme des 8 cases en orangé est S. Nous n'avons qu'une seule façon de placer cette figure dans le carré ce qui en fait automatiquement une super-figure.

11) La façon de faire est la même qu'au problème 9) ci-haut.

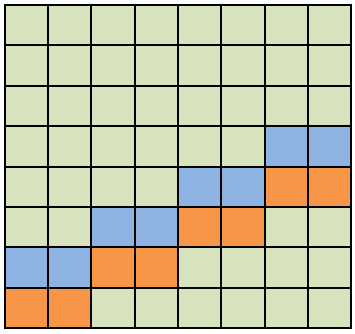




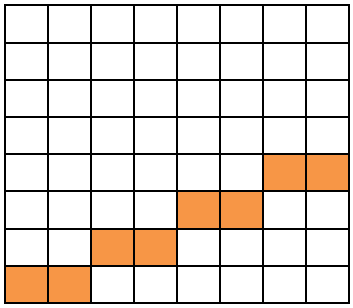
D'abord, montrons, avec la structure générale des Gauss, que la figure en orangé est magique. En additionnant les 8 expressions de la figure, nous trouvons S. Mais ce n'est pas nécessaire de faire cette addition puisque l'escalier en orangé est une figure magique imposée à la structure générale. Pour construire cette structure, nous avons exigé l'escalier. Placez l'escalier verticalement et vous verrez que la figure n'est plus magique.

12) La façon de faire est la même. Cependant, pour l'escalier en vert, il faudra faire l'addition des 8 cases dans la structure générale des Gauss. Nous trouvons bien S. Placez l'escalier verticalement et vous verrez que la figure n'est plus magique.

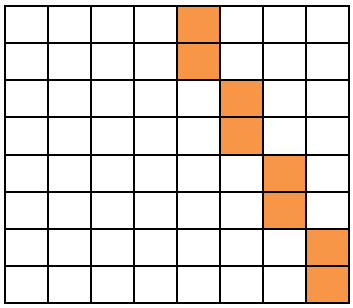
13) Mais cet escalier est une super-figure pour les hyper-magiques-alpha. Allons dans la structure générale.



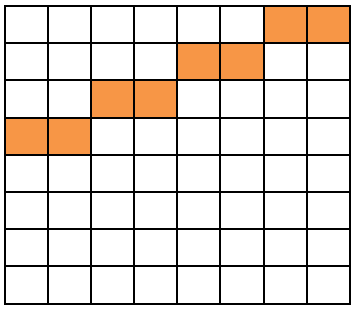
0



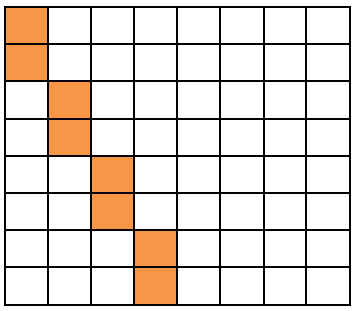
1



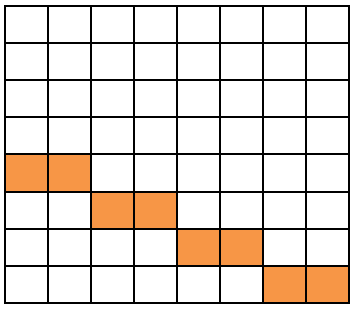
2



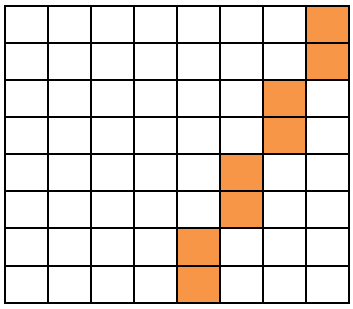
3



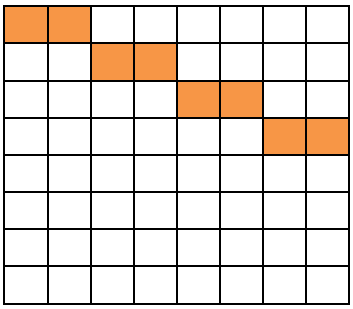
4



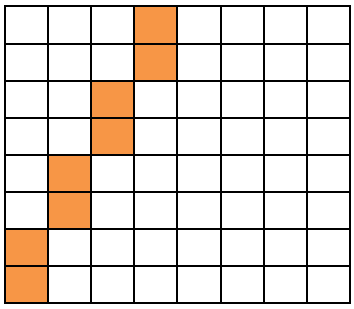
5



6



7



8

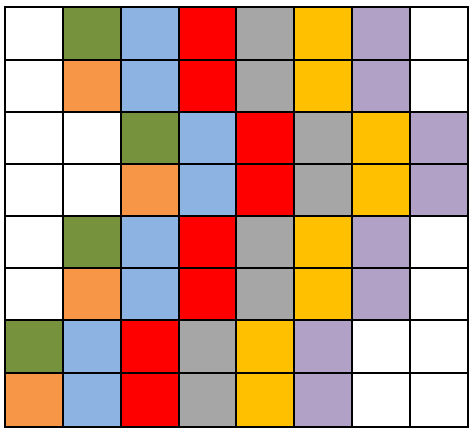
Les escaliers dans les carrés de 1 à 8 sont des figures magiques de la structure générale des hyper-magiques-alpha. En effet, en additionnant les 8 expressions, nous avons toujours trouvé S comme total. Si nous déplaçons chaque escalier parallèlement à lui-même, alors celui-ci reste toujours magique (voir l'idée dans le carré 0 et le problème 9)). Nous pouvons constater qu'en déplaçant l'escalier parallèlement à lui-même dans 1 ou dans 3, nous obtenons les mêmes figures magiques. De même dans 2 ou 4, dans 5 ou 7 et dans 6 ou 8.

Pour trouver toutes les façons de placer l'escalier dans le carré hyper-magique-alpha, il suffit de conserver les carrés 1, 2, 5 et 6. L'escalier est donc une super-figure.

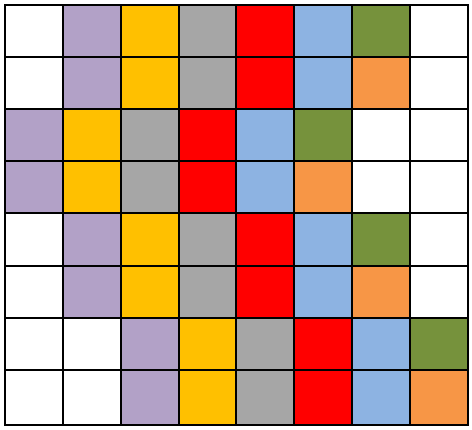
14) a) Notre carré est un hyper-magique-alpha. Nous avons vérifié que la somme des 4 cases vertes de gauche = la somme des 4 cases en orangé de gauche = la somme des 4 cases en orangé de droite = la somme des 4 cases vertes de droite = S/2. Les deux figures sont donc magiques.

b) Appelons A, le groupe des 4 cases vertes de gauche et B, le groupe des 4 cases en orangé de gauche. Puis C est le groupe des 4 cases vertes de droite et D, le groupe des 4 cases en orangé de droite. Voici 4 nouvelles figures magiques :

(%) $A \cup C$; $A \cup D$; $B \cup C$; $B \cup D$



En ajoutant la figure bleue, celle-ci devient une nouvelle figure magique puisque 4 x S/2 – S = S. Il en est de même avec la figure rouge qui devient elle aussi magique. En incluant la figure de gauche et en la déplaçant vers la droite, nous trouvons 6 nouvelles figures magiques. De même avec la figure de droite que nous déplacerons vers la gauche.



Nous venons de trouver 6 + 6 + 4 = 16 nouvelles figures magiques dans la structure générale des hyper-magiques-alpha. Ceux-ci auront tous ces 16 figures magiques.

15)

a) n = 1 : k + k = 2S/n = 2k/1 = 2k

k

b) n = 2 : k + k = 2S/n = 4k/2 = 2k

k	k
k	k

c)

n > 2 : k + k = 2S/n = 2nk/n = 2k.

16) Oui, un carré magique d'ordre 2, donc trivial, est toujours associatif. Voir le problème 15). Un carré magique d'ordre 2 n'est jamais normal, ni presque normal puisqu'il est trivial.

17) Prenons la structure générale de carrés magiques associatifs d'ordre 6. Pour avoir que des entiers, il est nécessaire et suffisant que la somme magique S soit un entier divisible par 6 et que les 13 variables prennent des valeurs entières.

$\mathrm{a1}$	$\mathrm{a11}-\mathrm{a14}+\mathrm{a17}+\mathrm{a5}-\mathrm{a8}$
$\mathrm{a7}$	$\mathrm{a8}$
$\mathrm{a13}$	$\mathrm{a14}$
$\mathrm{a13}+\mathrm{a14}+\mathrm{a15}+\mathrm{a16}+\mathrm{a17}-\frac{2S}{3}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a17}+S)$
$-2\mathrm{a1}-\mathrm{a11}-2\mathrm{a13}-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-2\mathrm{a17}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}-\mathrm{a7}+\mathrm{a8}+\frac{7S}{3}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a11}+S)$
$\mathrm{a1}+\mathrm{a11}-\mathrm{a14}+\mathrm{a17}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\mathrm{a8}-\frac{2S}{3}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a5}+S)$

De gauche à droite : Colonnes 1 et 2

$\mathrm{a3}$	$\mathrm{a4}$
$-\mathrm{a1}-\mathrm{a11}-\mathrm{a13}-\mathrm{a15}-\mathrm{a17}-\mathrm{a3}-\mathrm{a5}-\mathrm{a7}+\frac{3S}{2}$	$-\mathrm{a1}-\mathrm{a11}-\mathrm{a13}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}-\mathrm{a7}+\frac{3S}{2}$
$\mathrm{a15}$	$\mathrm{a16}$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a16}+S)$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+S)$
$\mathrm{a1}+\mathrm{a11}+\mathrm{a13}+\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}+\mathrm{a7}-\frac{7S}{6}$	$\mathrm{a1}+\mathrm{a11}+\mathrm{a13}+\mathrm{a15}+\mathrm{a17}+\mathrm{a3}+\mathrm{a5}+\mathrm{a7}-\frac{7S}{6}$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a4}+S)$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a3}+S)$

Colonnes 3 et 4

$\mathrm{a5}$	$-\mathrm{a1}-\mathrm{a11}+\mathrm{a14}-\mathrm{a17}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\mathrm{a8}+S$
$\mathrm{a11}$	$2\mathrm{a1}+\mathrm{a11}+2\mathrm{a13}+\mathrm{a15}+\mathrm{a16}+2\mathrm{a17}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}+\mathrm{a7}-\mathrm{a8}-2S$
$\mathrm{a17}$	$-\mathrm{a13}-\mathrm{a14}-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}+S$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a14}+S)$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a13}+S)$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a8}+S)$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a7}+S)$
$-\mathrm{a11}+\mathrm{a14}-\mathrm{a17}-\mathrm{a5}+\mathrm{a8}+\frac{S}{3}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a1}+S)$

Colonnes 5 et 6

Effectivement, nous rencontrons des termes comme S/3, 3S/2, 7S/6 qui sont des entiers dès que S est un entier divisible par 6.

Nous avons vu que si n = 2k, alors «associatif + formé que d'entiers» implique k S pair (voir problème 6 ci-haut). Nous voulons ici vous montrer qu'avec k S impair, il est impossible d'obtenir un carré formé exclusivement d'entiers puisque le carré est associatif par construction (il provient de la structure ci-haut). Avec S impair, il y aura exactement 20 fractions rationnelles et 16 entiers. (voir S = 125) plus bas.

Si S est impair et divisible par 3, alors nous aurons 4 fractions rationnelles et 32 entiers. Les 4 fractions sont les sommets d'un sous-rectangle formé des cases (2 ; 3), (2 ; 4), (5 ; 3), (5 ; 4). Ce rectangle est centré!!! (voir S = 123).

Nous allons construire deux carrés associatifs respectivement de sommes S = 123 et S = 125.

$$\mathrm{a1} = 6; \mathrm{a3} = 19; \mathrm{a4} = 22; \mathrm{a5} = 16; \mathrm{a7} = 38; \mathrm{a8} = 24; \mathrm{a11} = 29; \mathrm{a13} = 31; \mathrm{a14} = 17; \mathrm{a15} = 7; \mathrm{a16} = 12; \mathrm{a17} = 44; S = 123;$$

$$\begin{array}{cccccc}
6 & 48 & 19 & 22 & 16 & 12 \\
38 & 24 & -\frac{11}{2} & -\frac{27}{2} & 29 & 51 \\
31 & 17 & 7 & 12 & 44 & 12 \\
29 & -3 & 29 & 34 & 24 & 10 \\
-10 & 12 & \frac{109}{2} & \frac{93}{2} & 17 & 3 \\
29 & 25 & 19 & 22 & -7 & 35
\end{array}$$

S = 123

$$\mathrm{a1} = 6; \mathrm{a3} = 19; \mathrm{a4} = 22; \mathrm{a5} = 16; \mathrm{a7} = 38; \mathrm{a8} = 24; \mathrm{a11} = 29; \mathrm{a13} = 31; \mathrm{a14} = 17; \mathrm{a15} = 7; \mathrm{a16} = 12; \mathrm{a17} = 44; S = 125;$$

$$\begin{array}{cccccc}
6 & 48 & 19 & 22 & 16 & 14 \\
38 & 24 & -\frac{5}{2} & -\frac{21}{2} & 29 & 47 \\
31 & 17 & 7 & 12 & 44 & 14 \\
\frac{83}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{89}{3} & \frac{104}{3} & \frac{74}{3} & \frac{32}{3} \\
-\frac{16}{3} & \frac{38}{3} & \frac{313}{6} & \frac{265}{6} & \frac{53}{3} & \frac{11}{3} \\
\frac{83}{3} & \frac{77}{3} & \frac{59}{3} & \frac{68}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{107}{3}
\end{array}$$

S = 125

Remarque : Nous n'avons pas cherché à construire des carrés sans répétition.

18) La réponse est non. Un ultra-magique est un carré magique à la fois pandiagonal et associatif. Le problème 8 de 7.4 nous montre qu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial. Donc un ultra-magique d'ordre 3 est forcément trivial d'où il ne peut pas être normal, presque normal ou contenir au moins deux nombres différents.

19) La réponse est non. Voyez le dernier encadré vert de 8.5 et le paragraphe juste au-dessus.

20) La réponse est non. Un hyper-magique est toujours pandiagonal. Non pandiagonal implique non hyper-magique.

21) Avec MATHEMATICA, utilisez le fichier «Le compte». Celui-ci donne le nombre de figures magiques que possède le carré magique. Nous trouvons f(288) = 13 136, f(252) = 13 736 et f(310) = 432.

Avec MAPLE, utilisez le programme «Le compte-aff». Celui-ci donne aussi le nombre de figures magiques mais en plus, il les affiche.

22) Le carré magique M est formé seulement d'entiers et sa somme magique est impaire car elle se termine par 5. Puisque l'ordre du carré est n = 18 = 2x9, et que S est impair, alors k S est impair. Si M est associatif, alors k S est pair car le carré renferme seulement des entiers. Nous avons là une contradiction. M ne peut donc pas être associatif.

23) Nous avons donc k S impair.

a) Ultra-magique = associatif + pandiagonal or (pandiagonal + formé que d'entiers) implique k S pair. Ici, k S est impair et M est formé que d'entiers donc M ne peut pas être pandiagonal d'où M ne peut pas être ultra-magique.

b) M ne peut pas être hyper-magique car tous les hyper-magiques sont pandiagonaux. Or M n'est pas pandiagonal.

c) Une condition nécessaire est que k S soit pair.

24) Dans la recherche de la structure générale des Gauss, section 8.2, nous avons, à partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 8, obtenu un carré M tel que ses 49 petits carrés 2x2 donnaient S/2 pour somme.

Puis nous avons voulu ajouter la pandiagonalité à M avec la surprise suivante : M est déjà pandiagonal!!! Était-ce par hasard?

Je ne crois pas à un tel hasard!!! Pour moi, le problème demeure. Pourquoi avons-nous eu la pandiagonalité?

La deuxième propriété qui définit un hyper-magique soit : «sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées par (n – 2)/2 cases, totalisent toujours 2S/n » entraine à elle seule la pandiagonalité.

25) M est un carré magique d'ordre 6 et de somme S = 480. De plus, il est presque normal et associatif. Prenons deux cases symétriques par rapport au centre du carré, l'une contenant l'entier a et l'autre, l'entier b. Nous avons donc a + b = 2S/n = 2S/6 = S/3 = 480/3 = 160. Il est clair que nous ne pouvons pas avoir a = 80 puisqu'alors, nous aurions b = 80, ce qui n'est pas possible puisque M est presque normal. L'entier 80 ne peut pas se trouver dans M.

9.6 Chapitre 9

1) Nous allons regarder les différentes puissances du carré diabolique suivant :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Le carré D^2 est un carré semi-magique avec la grande diagonale secondaire magique.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 233 & 297 & 321 & 305 \\ 297 & 265 & 273 & 321 \\ 321 & 273 & 265 & 297 \\ 305 & 321 & 297 & 233 \end{pmatrix}$$

Le carré D^3 est de nouveau un diabolique!!! Tous ses nombres se terminent par le chiffre 6.

$$D^3 = \begin{pmatrix} 10186 & 9306 & 9386 & 10426 \\ 10106 & 9706 & 9626 & 9866 \\ 9786 & 10026 & 9946 & 9546 \\ 9226 & 10266 & 10346 & 9466 \end{pmatrix}$$

Il en est de même des puissances entières D^k où $k \geq 3$ est un entier impair. Voyons ce qui se passe pour $D^5 = D^3 D^2$.

Précisons d'abord que si nous multiplions deux entiers A et B qui ont respectivement a et b pour chiffres des unités, alors le chiffre des unités du produit AB sera le même que le chiffre des unités du produit ab. Par exemple, le produit 367 x 1259 se termine à droite par le chiffre des unités de 7 x 9 = 63 donc par 3. Effectivement, 367 x 1259 = 462 053. Revenons à $D^3 D^2$. Les deux carrés suivants indiquent le dernier chiffre de chaque entier de D^3 et de D^2.

$$\underset{D^3}{\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}} \qquad \underset{D^2}{\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}}$$

Nous allons voir quel est le chiffre des unités de l'entier en position (1 ; 1) dans D^5. N'oublions pas qu'il s'agit ici du produit matriciel.

Le chiffre des unités est obtenu ainsi : $\begin{array}{l} 6\times 3=18\ ;\ 6\times 7=42\ ;\ 6\times 1=6\ ;\ 6\times 5=30 \\ 8+2+6+0=16 \end{array}$

Le dernier chiffre de l'entier en position (1 ; 1) est donc 6.

Remarquez que dans les quatre colonnes de D^2, nous retrouvons les mêmes quatre chiffres; alors nous aurons toujours à additionner les mêmes quatre chiffres $8, 2, 6, 0$ dans des ordres différents d'où la somme qui sera toujours 16 et 6 qui sera toujours le dernier chiffre de chaque entier de D^5.

La démarche est exactement la même avec $D^5 D^2 = D^7$ et ainsi de suite.

Donc, toutes les puissances impaires positives de D sont des diaboliques formés de 16 entiers ayant tous 6 comme dernier chiffre!!! Le carré suivant est le diabolique D^9.

15179063871616	15179514431616	15179473471616	15178940991616
15179104831616	15179309631616	15179350591616	15179227711616
15179268671616	15179145791616	15179186751616	15179391551616
15179555391616	15179022911616	15178981951616	15179432511616

Regardez les 4 derniers chiffres de chaque entier de D^9. Mais encore plus surprenant, les 4 premiers chiffres de chaque entier!!!

Voyons maintenant les puissances paires de D^k où $k \geq 4$ est un entier pair.

Le carré suivant est D^4 et tous ses entiers se terminent par 4. Ce carré est semi-magique avec sa grande diagonale secondaire magique.

338564	333444	331524	332804
333444	336004	335364	331524
331524	335364	336004	333444
332804	331524	333444	338564

D^4

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

D^4 $\qquad$ D^2

Nous allons voir quel est le chiffre des unités de l'entier en position (1 ; 1) dans D^6. N'oublions pas qu'il s'agit ici du produit matriciel.

Le chiffre des unités est obtenu ainsi : $\begin{array}{l} 4\times 3=12\ ;\ 4\times 7=28\ ;\ 4\times 1=4\ ;\ 4\times 5=20 \\ 2+8+4+0=14 \end{array}$

et le dernier chiffre de chaque entier de D^6 sera toujours 4.

Le carré suivant est D^8.

446477148224	446444380224	446432092224	446440284224
446444380224	446460764224	446456668224	446432092224
446432092224	446456668224	446460764224	446444380224
446440284224	446432092224	446444380224	446477148224

Observez les 3 derniers chiffres et les 4 premiers chiffres de chaque entier de D^8.

2) Selon le théorème 9.4, le diabolique A affecté de l'exposant 111 222 333 444 555 reste un carré magique, toujours diabolique et de somme magique $S^{111222333444555}$. C'est le cas de toutes les puissances entières impaires ≥ 1 d'un diabolique A. Le résultat est évident si le diabolique est trivial.

3) Ce n'est pas le cas pour les puissances entières paires d'un diabolique non trivial. Il suffit de regarder D^2 au problème 1). Le carré D^2 n'est plus magique. Cependant, il est semi-magique avec une seule diagonale magique. Il en est de même de D^4.

4) Nous avons construit deux Dürer $A et B$ respectivement de sommes 75 et 56. Le carré AB^2 est semi-magique de somme 235 200. Les deux grandes diagonales ne sont pas magiques. Donc, il serait faux de dire que AB^2 est encore un Dürer.

5) $BA=\left(\frac{TS}{n^2}\right)C^2=\left(\frac{TS}{n^2}\right)nC=\left(\frac{TS}{n}\right)C$ d'où $BA=AB$ puisque $TS=ST$.

6) L'encadré vert de 9.3 nous affirme que si $A et B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors AB^2 est un ultra-magique. De plus, $AB^2=B^2A$ quels que soient les ultra-magiques d'ordre 5. Nous avons donc l'ultra-magique A^2B.

$$A^2B=\begin{array}{ccccc} 57182 & 59790 & 60873 & 59671 & 58234 \\ 60478 & 59276 & 57989 & 58462 & 59545 \\ 59269 & 58217 & 59150 & 60083 & 59031 \\ 58755 & 59838 & 60311 & 59024 & 57822 \\ 60066 & 58629 & 57427 & 58510 & 61118 \end{array}$$

C'est un ultra-magique de somme 65 x 65 x 70 = 295 750. Vous pouvez vérifier qu'il est associatif et pandiagonal.

$$AB^2 = \begin{matrix} 61732 & 64340 & 65423 & 64221 & 62784 \\ 65028 & 63826 & 62539 & 63012 & 64095 \\ 63819 & 62767 & 63700 & 64633 & 63581 \\ 63305 & 64388 & 64861 & 63574 & 62372 \\ 64616 & 63179 & 61977 & 63060 & 65668 \end{matrix}$$

C'est un ultra-magique de somme 65 x 70 x 70 = 318 500. Vous pouvez vérifier qu'il est associatif et pandiagonal.

Voici $AB \, et \, B^2$:

$$AB = \begin{matrix} 1036 & 859 & 859 & 911 & 885 \\ 859 & 984 & 911 & 885 & 911 \\ 859 & 911 & 1010 & 911 & 859 \\ 911 & 885 & 911 & 984 & 859 \\ 885 & 911 & 859 & 859 & 1036 \end{matrix}$$

Ce carré est semi-magique avec sa diagonale secondaire magique. De plus, il est symétrique car il est égal à sa transposée. Il n'est ni pandiagonal ni associatif.

$$B^2 = \begin{matrix} 1106 & 929 & 929 & 981 & 955 \\ 929 & 1054 & 981 & 955 & 981 \\ 929 & 981 & 1080 & 981 & 929 \\ 981 & 955 & 981 & 1054 & 929 \\ 955 & 981 & 929 & 929 & 1106 \end{matrix}$$

Ce carré est semi-magique avec sa diagonale secondaire magique. De plus, il est symétrique car il est égal à sa transposée. Il n'est ni pandiagonal ni associatif.

Les carrés $AB \, et \, B^2$ ne sont plus des ultra-magiques; cependant, $(AB)B \, et \, A(B^2)$ sont des ultra-magiques : $(AB)\,B = A(B^2) = AB^2$ lequel est ultra-magique.

7) $A^3B^8 = A^3(B^3)^2 B^2 = C\,B^2$ est ultra-magique. $A^7B^{30} = A^7(B^{15})^2$ est un ultra-magique. Pour y arriver, nous utilisons, lorsque $A \, et \, B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, le fait que $AB^2 \, et \, B^2 A$ soient le même ultra-magique et que toutes les puissances entières impaires ≥ 1 de A et de B soient des ultra-magiques. (Voir les encadrés de 9.3).

Si $A \, et \, B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors le carré $A^k(B^m)^2$ est un ultra-magique si $k \, et \, m$ sont des entiers impairs ≥ 1. Le carré $A^{27}B^{50} = A^{27}(B^{25})^2$ est ultra-magique.

8) Un carré magique M d'ordre 2 est toujours trivial. Si nous cherchons un carré magique M' tel que $MM' = M'M = I$ où I est la matrice unité standard : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors nous aurons :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}} \underset{M'}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \underset{M'}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{M}{\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cette égalité n'est pas possible selon le théorème 9.5 car les membres de gauche doivent être des triviaux ce qui n'est pas le cas du membre de droite.

Il en est de même si M' est semi-magique. Donc un carré magique d'ordre 2 n'est pas inversible ni en tant que carré magique ni en tant que carré semi-magique. (Voir l'encadré vert qui précède le théorème 9.8).

Passons maintenant au carré semi-magique M d'ordre 2. Un tel carré a obligatoirement la structure suivante : $M = \begin{pmatrix} a & S-a \\ S-a & a \end{pmatrix}$. Soit M', son inverse s'il existe. Nous aurions donc :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} a & S-a \\ S-a & a \end{pmatrix}} \underset{M'}{\begin{pmatrix} b & T-b \\ T-b & b \end{pmatrix}} = \underset{MM'}{\begin{pmatrix} 2ab-bS-aT+ST & -2ab+bS+aT \\ -2ab+bS+aT & 2ab-bS-aT+ST \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le produit de deux semi-magiques donne un semi-magique et I est semi-magique. L'existence de M' semble possible. Pour que M' existe, il faut $Det(M) \neq 0$ soit $S \neq 0 \, et \, S \neq 2a.$ La résolution d'un système de deux équations à deux inconnues $b \, et \, T$ nous donne :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} a & S-a \\ S-a & a \end{pmatrix}} \underset{M'}{\begin{pmatrix} \dfrac{a}{(2a-S)S} & \dfrac{a-S}{(2a-S)S} \\ \dfrac{a-S}{(2a-S)S} & \dfrac{a}{(2a-S)S} \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Un carré semi-magique d'ordre 2 est donc inversible en tant que carré semi-magique.

9) Un carré magique M d'ordre 1 est inversible si et seulement si le nombre que contient M est différent de 0. En fait, l'ensemble des carrés magiques d'ordre 1 est isomorphe avec $\mathbb{R}$.

10) Le théorème 9.8 nous assure que l'inverse de M existe bien et soit M^{-1} cet inverse dont la somme est $\frac{1}{S}$. Puisque M est formé d'entiers, alors S est un entier.

Le point crucial ici est que si M soit formé qu'avec des entiers, alors M^{-1} renferme que des entiers puisque $Det(M) = \pm 1$. En effet, $M^{-1} = \frac{Adj(M)}{Det(M)} = \pm Adj(M)$ et l'adjointe de M renferme que des entiers. (Voir la construction de l'adjointe).

Donc $\frac{1}{S}$ est un entier. Il s'ensuit que $S = \pm 1$ et que $\frac{1}{S} = \pm 1$. Ici, $S \neq 0$ car $Det(M) \neq 0$.

11) M est un carré magique d'ordre 3 formé de 9 entiers avec $Det(M) \neq 0$. Donc S est entier. Le théorème 9.8 nous indique que si $Det(M) \neq 0$, alors $S \neq 0$. Nous voulons montrer que $Det(M) \neq \pm 1$.

Supposons que $Det(M) = \pm 1$. L'inverse M^{-1} est un carré magique selon le théorème 9.8. Selon le problème 10), l'inverse est formé que d'entiers. Puis la somme de M^{-1} est $\frac{1}{S}$ et le nombre central de M^{-1} est $\frac{1}{3S}$. Or ce nombre ne sera jamais un entier. Il s'ensuit que $Det(M) \neq 0$.

12) M est un A-Dürer (Dürer associatif) de somme S = 64. Selon le théorème 9.4, M^{35} est toujours un A-Dürer. Sa somme magique est $S = 64^{35}$, un nombre de 64 chiffres.

13) Le carré M^{24} est un carré semi-magique (voir théorème 9.1) de somme $S = 64^{24}$.

14) Avec MATHEMATICA, nous avons pris deux fois la structure générale des super-Dürer-bêta :

$$A = \begin{matrix} a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \\ b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \end{matrix}$$

Puis nous avons constaté que $AB^2 - B^2A = 0$ de même que $AB - BA = 0$, où 0 représente ici le carré trivial d'ordre 5 formé de zéros. D'où $AB^2 = B^2A \; et \; AB = BA$.

15) $A et B$ sont des ultra-magiques quelconques d'ordre 5.Voyons si les figures de 6.3 sont des super-figures et ultra-figures dans AB^2.

Nous avons vu dans 9.3 que AB^2 est un ultra-magique donc provient de la structure générale de 6.3.

Le fichier «ultra-magique ordre 5» dans MATHEMATICA nous montre que les 16 figures (17 figures moins celle en rouge) sont des super-figures (les 14 premières) et ultra-figures (les 2 dernières) de la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5. Nous les retrouvons donc dans AB^2.

De plus, dans le fichier «ultramagique ABB» dans MATHEMATICA, nous montrons que ces 14 figures sont des super-figures de AB^2 ainsi que les 2 dernières sont des ultra-figures de AB^2.

16) Comparons les procédés AB^2 et A^2B avec M et N.

$$M = \begin{matrix} 20 & 17 & 21 & 44 \\ 16 & 49 & 15 & 22 \\ 30 & 7 & 31 & 34 \\ 36 & 29 & 35 & 2 \end{matrix} \qquad N = \begin{matrix} 21 & 18 & 22 & 59 \\ 27 & 54 & 26 & 13 \\ 38 & 1 & 39 & 42 \\ 34 & 47 & 33 & 6 \end{matrix}$$

Le procédé AB^2 nous permet de trouver les super-Dürer $MN^2 et\ NM^2$. Le procédé A^2B nous permet de trouver les super-Dürer N^2M et M^2N. Ces 4 carrés sont différents deux à deux :

$$MN^2 = \begin{matrix} 363954 & 361794 & 364366 & 378686 \\ 361326 & 381726 & 360914 & 364834 \\ 370034 & 355714 & 370446 & 372606 \\ 373486 & 369566 & 373074 & 352674 \end{matrix}$$

$$N^2M = \begin{matrix} 352786 & 373102 & 353394 & 389518 \\ 361694 & 381218 & 361086 & 364802 \\ 381006 & 344882 & 381614 & 361298 \\ 373314 & 369598 & 372706 & 353182 \end{matrix}$$

$$M^2N = \begin{matrix} 309510 & 291630 & 310610 & 336730 \\ 308550 & 338790 & 307450 & 293690 \\ 313630 & 287510 & 314730 & 332610 \\ 316790 & 330550 & 315690 & 285450 \end{matrix}$$

$$NM^2 = \begin{matrix} 301940 & 299060 & 303600 & 343880 \\ 309100 & 338380 & 307440 & 293560 \\ 320640 & 280360 & 322300 & 325180 \\ 316800 & 330680 & 315140 & 285860 \end{matrix}$$

Le procédé A^2B ne nous permet pas de construire les carrés obtenus avec AB^2. Ces deux procédés sont donc différents et cela est dû au fait que, pour les super-Dürer, $AB^2 \neq B^2A$.

Enfin, $M^5 = \begin{matrix} 2753547008 & 2749917008 & 2754757008 & 2782587008 \\ 2748707008 & 2788637008 & 2747497008 & 2755967008 \\ 2765647008 & 2737817008 & 2766857008 & 2770487008 \\ 2772907008 & 2764437008 & 2771697008 & 2731767008 \end{matrix}$

C'est un super-Dürer presque normal. Les 16 entiers commencent tous par 27 et se terminent tous par 7008. La somme magique de M est 102 et celle de M^5 est $102^5 = 11\ 040\ 808\ 032$.

10.6 Chapitre 10

1) Ce carré ne peut pas contenir le nombre 2. Supposons qu'il le contienne. Les autres nombres premiers sont tous impairs. Dans une rangée, nous aurions n nombres premiers impairs et dans une autre rangée, nous aurions $(n-1)$ nombres premiers impairs et le nombre 2. Or cela est impossible car nous aurions deux rangées de parités différentes et le carré ne serait pas magique.

Cas 1 : n est pair

Rangée avec n entiers impairs $\Rightarrow$ somme paire.

Rangée avec le 2 $\Rightarrow$ somme impaire et le carré ne peut pas être magique.

Cas 2 : n est impair

Rangée avec n entiers impairs $\Rightarrow$ somme impaire.

Rangée avec le 2 $\Rightarrow$ somme paire et le carré ne peut pas être magique.

2) Dans 4.3.2, prenons la structure générale (1.1) des carrés magiques d'ordre 3. Posons 3a + 3r + 3t = p, un nombre premier et remplaçons t par p/3 – a – r dans la structure générale. Nous trouvons :

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{3}(p+3r) & \frac{1}{3}(-3a+2p-6r) & a+r \\ a & \frac{p}{3} & \frac{1}{3}(-3a+2p) \\ \frac{1}{3}(-3a+2p-3r) & a+2r & \frac{1}{3}(p-3r) \end{array}$$

Ainsi, vous pouvez construire une infinité de carrés magiques d'ordre 3 de sommes magiques p. Par exemple, avec a = 2, r = 3 et p = 23, nous trouvons :

$$\begin{array}{ccc} \frac{32}{3} & \frac{22}{3} & 5 \\ 2 & \frac{23}{3} & \frac{40}{3} \\ \frac{31}{3} & 8 & \frac{14}{3} \end{array}$$

3) Vous trouverez une liste de carrés premiers formés de n^2 nombres premiers consécutifs (carrés premiers parfaits). Pour les ordres 5, 7, 9, 11, 57, 59 et 63, vous trouverez un carré premier parfait qui sera super-premier car sa somme magique sera un nombre premier.

(Ordre ; somme magique) : (5 ; 313) ; (7 ; 797) ; (9 ; 2311) ; (11 ; 4507) ; (57 ; 863 609) ; (59 ; 932 257) ; (63 ; 1 137 781).

Nous vous invitons à vérifier que pour les autres ordres < 63, aucune somme n'est un nombre premier. C'est évident pour les ordres pairs!!!

4) Il ne peut pas être super-premier car sa somme magique sera toujours un entier pair > 2. (La somme d'un nombre pair d'impairs est paire).

5) Le corollaire 10.9 : Il existe un carré premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$. En fait, ce corollaire nous dit qu'il existe un carré hyper-magique (ses n^2 nombres premiers forment une suite arithmétique de raison non nulle) pour tous les ordres $n \geq 3$. Évidemment, la façon de construire un carré premier n'est pas unique.

Ici, nous avons un carré premier parfait pour tous les ordres de 3 à 63. Donc, pour ces ordres, il existe un carré premier presque normal comme le dit le corollaire. Ce résultat est bien conforme avec le corollaire 10.9.

6) Soit donnée une suite de 16 nombres premiers différents deux à deux. Il est clair que la somme des 15 premiers nombres premiers ≥ 3 est celle des 15 plus petits impairs soit 379.

Donc, une somme de 15 nombres premiers différents deux à deux est ≥ 379. Pour avoir une somme de 480, il suffit que le seizième nombre premier soit 101 (379 + 101 = 480). Si nous prenons 103 ou plus, la somme dépassera 480.

Ainsi, nous voyons que pour obtenir un carré premier d'ordre 4 de la plus petite somme 120, nous devons choisir nos 16 nombres premiers parmi les nombres premiers allant de 3 à 101.

7) Dans chaque carré, les cinq cases en rouge appartiennent à une figure complète.

a)

$$\begin{pmatrix} 17 & 73 & 59 & 13 & 151 \\ 79 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 83 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 7 \\ 23 & 11 & 89 & 149 & 41 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 17 & 73 & 59 & 13 & 151 \\ 79 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 83 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 7 \\ 23 & 11 & 89 & 149 & 41 \end{pmatrix}$$

$$S = 313 \qquad\qquad S = 313$$

Pour diminuer la somme magique, nous allons enlever, par exemple, l'entier 1 dans chaque case de la figure complète. Il en résultera un nouveau carré magique presque normal de somme S = 312, formé de 20 nombres premiers et 5 entiers pairs différents de 2. Voilà les 2 premiers carrés que le problème 7) vous demande de trouver.

Si nous enlevons l'entier 3, alors nous allons obtenir 2 nouveaux carrés qui répondent aux conditions du problème.

Mais si nous enlevons 5 dans le carré de gauche, alors le carré renfermera 21 nombres premiers car 7 deviendra 2. Parmi les 5 entiers pairs, nous trouverons l'entier 2, un nombre premier.

Enfin, si nous enlevons un entier pair, 2 par exemple, alors nous aurons toujours 25 entiers impairs dont 20 sont certainement premiers mais parmi les 5 autres, il y en aura peut-être un

qui sera toujours premier et nous aurons alors au moins 21 nombres premiers au lieu de 20, comme l'exige le problème 7. Il faudra être vigilent!!!

Nous enlevons un entier pair m, alors il faut regarder ce que deviennent les 5 entiers de la figure complète. Dès que l'un d'eux est premier, nous devons rejeter l'entier m.

Pour le carré de gauche : nous gardons les entiers 1 et 3 et nous rejetons les entiers 2, 4, 5, 6. Il est clair que l'entier que nous enlevons dans la figure complète du carré de gauche, doit être < 7.

Pour le carré de droite : l'entier que nous enlevons dans sa figure complète doit être < 19. Nous gardons les entiers 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Nous rejetons tous les autres de 2 à 18.

Les carrés magiques cherchés sont donc au nombre de 10.

b)

Pour trouver ces 10 carrés magiques presque normaux de sommes < 313 qui renferment exactement 20 nombres premiers, il suffit de prendre les entiers ci-haut que nous conservons. Ainsi, avec le carré de gauche et l'entier 1, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 17 & 72 & 59 & 13 & 151 \\ 78 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 82 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 6 \\ 23 & 11 & 89 & 148 & 41 \end{pmatrix}$$

$$S = 312$$

c)

Il suffit d'ajouter le nombre 17 dans toutes les cases de la figure complète du carré de gauche ou du carré de droite.

8) Il suffit de prendre une figure complète (celle-ci existe pour tous les carrés d'ordres $n \geq 4$) puis d'ajouter l'entier impair m > 0 dans toutes les cases de celle-ci.

9) Pour construire un tel carré magique, partez d'un carré normal d'ordre 5 et ajoutez-lui le **nombre premier 1123** dans toutes ses cases. Le nouveau carré sera magique et contiendra un seul nombre premier soit 1129 (voir annexe 11, page 1, colonne ordre 5).

Le seul nombre premier 1129 prendra la place du 6 dans le carré normal (6 + 1123 = 1129).

Pour avoir 1129 en position (3 ; 3), il suffit de trouver, dans 6.1, le carré qui contient 6 en position (3 ; 3) soit celui de centre 6. En ajoutant 1123 dans toutes les cases du carré normal de

centre 6, vous obtiendrez un carré magique presque normal qui contiendra son seul nombre premier en position (3 ; 3).

Pour la position (4 ; 4), prenez le carré de centre 15.

Pour la position (2 ; 3), prenez le carré de centre 25.

Pour la position (2 ; 4), prenez le carré de centre 15 et effectuez une rotation de +90°. Le 6 sera alors en position (2 ; 4).

Enfin, le nombre 1129 peut occuper la case que vous voulez. Avec les 25 carrés de 6.1, vous avez déjà 18 positions pour le 6. Les 7 autres positions s'obtiennent avec les équivalents des 25 carrés. Voyez le tableau suivant; la colonne de gauche indique les 7 positions manquantes, la colonne centrale indique le centre du carré à prendre et enfin, la colonne de droite indique les rotations à effectuer.

Position pour le 6	Prendre le carré de centre	Rotation à effectuer
(4 ; 1)	1	+90°
(4 ; 5)	8	+90°
(1 ; 4)	8	180°
(5 ; 3)	2	180°
(3 ; 2)	12	+270°
(2 ; 4)	15	+90°
(2 ; 2)	15	180°

10) Si les 16 nombres premiers forment une suite magique (nous pouvons construire un carré magique avec ces 16 nombres premiers), alors la somme S*de ceux-ci est S*= 4S où S est la somme magique. Mais la somme magique S est paire car somme de 4 impairs donc S = 2k où k est un entier positif. Finalement, S* = 4S = 4(2k) = 8k d'où S* est divisible par 8.

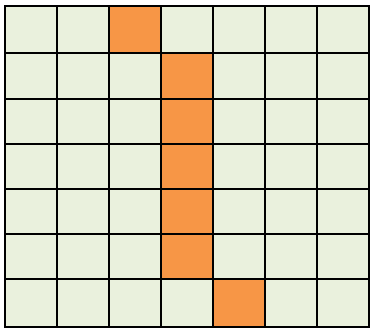
11) Simplement parce que les carrés sont magiques et que la somme dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, doit être la même. Par exemple, dans le carré 1, la rangée 3 contiendrait les 6 plus petits et la rangée 4, les 6 plus grands donc deux sommes différentes pour deux rangées ce qui n'est pas possible dans un carré magique.

En d'autres mots, dans les carrés 1, 2, 3, les 12 nombres premiers sont situés dans deux figures magiques. Nous ne pouvons pas placer les plus petits dans l'une et les plus grands dans l'autre.

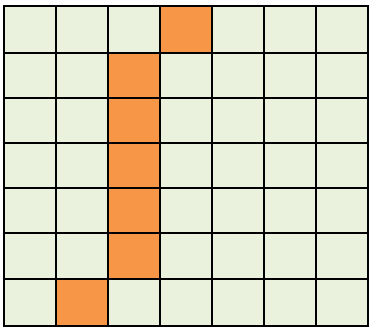
Pour les 5 autres carrés, les figures ne sont pas obligatoirement magiques.

12) Pour la suite 1, c'est certain qu'il sera impossible de construire un carré magique à cause du nombre 2 (voir problème 1 ci-haut). Pour les suites 2, 4, 5, 6, 7, 9, la somme des 16 nombres premiers consécutifs n'est pas divisible par 8. Le carré magique n'est donc pas possible car la divisibilité par 8 est une condition nécessaire à son existence.

13)



Colonne tordue gauche-droite



Colonne tordue droite-gauche

La définition d'une colonne tordue gauche-droite : la première case en haut se situe dans la colonne i, les $n-2$ suivantes se situent dans la colonne $i+1$ et la dernière en bas se situe dans la colonne $i+2$.

La définition d'une colonne tordue droite-gauche : la première case en haut se situe dans la colonne i, les $n-2$ suivantes se situent dans la colonne $i-1$ et la dernière en bas se situe dans la colonne $i-2$.

14) Voici les carrés magiques (2) et (3) de l'annexe 18 :

(2)

1 850 590 111	1 850 590 117	1 850 590 069
1 850 590 057	1 850 590 099	1 850 590 141
1 850 590 129	1 850 590 081	1 850 590 087

(3)

5 196 186 001	5 196 186 007	5 196 185 959
5 196 185 947	5 196 185 989	5 196 186 031
5 196 186 019	5 196 185 971	5 196 185 977

Ces carrés magiques sont formés de 9 nombres premiers consécutifs.

Si nous ajoutons l'entier 3 345 595 890 dans toutes les cases du carré (2), alors nous obtenons le carré (3).

15) Prenons 13 et 17, deux nombres premiers consécutifs et ajoutons 6 à chacun. Nous obtenons 19 et 23, deux nombres premiers consécutifs.

Prenons les deux nombres premiers consécutifs 113 et 127 puis ajoutons à chacun l'entier 2346. Nous obtenons 2459 et 2473, deux nombres premiers qui ne sont pas consécutifs car 2467 est un nombre premier situé entre 2459 et 2473.

16) Le carré (3) – (2) est un carré trivial forme du nombre 3 345 595 890. Cela signifie que nous avons une suite de 9 nombres premiers consécutifs (ceux du carré (2)) puis en ajoutant le même entier 3 345 595 890 à chacun, nous obtenons une nouvelle suite de 9 nombres premiers consécutifs!!! Ceci est exceptionnel!!! Consultez le tableau 5 de l'annexe 18, page 14 et le problème suivant.

17) Bon succès dans votre recherche. Nous croyons que pour les ordres 4, 5, …, cela ne sera pas possible mais notre intuition peut nous jouer un vilain tour en tout temps!!!

Que se passe-t-il si nous donnons à m des valeurs allant jusqu'à 900 000 000 000 000 000 000?

11.4 Chapitre 11

1) Dans 11.3, deuxième cas, ALG-2, prenez les carrés A et B où B est la rotation de – 90° de A. Superposez les deux carrés et formez les couples (u ; v) où u est dans une case de A et v est dans la case correspondante de B. Les nombres u et v prennent les valeurs de 0 à 4k – 1. Il suffit maintenant de vérifier que vous obtenez n^2 couples différents deux à deux.

Suggestion : imprimez 2 fois le carré A puis placez A et B l'un à côté de l'autre.

2) Les carrés A, B et C sont linéairement indépendants. En effet, dans la case (1 ; 1) de A et de B, nous trouvons 0 et dans la case (1 ; 1) de C, nous trouvons 1. Donc C n'est pas une combinaison linéaire de A et B.

Dans la case (2 ; 1) de B, nous trouvons 1 et dans la case (2 ; 1) de A, nous trouvons 0. Donc B n'est pas une combinaison linéaire de A.

Ainsi, les carrés A, B et C sont linéairement indépendants.

3) Dans 11.3, troisième cas, ALG-3, prenez les carrés A et B où B est la rotation de – 90° de A. Superposez les deux carrés et formez les couples (u ; v) où u est dans une case de A et v est dans la case correspondante de B. Les nombres u et v prennent les valeurs de 0 à 4k – 1. Il suffit maintenant de vérifier que vous obtenez n^2 couples différents deux à deux.

4) Les carrés A, B et C sont linéairement indépendants. En effet, dans la case (1 ; 1) de A et de B, nous trouvons 0 et dans la case (1 ; 1) de C, nous trouvons 1. Donc C n'est pas une combinaison linéaire de A et B.

Dans la case (2 ; n) de B, nous trouvons 4k et dans la case (2 ; n) de A, nous trouvons 0. Donc B n'est pas une combinaison linéaire de A.

Ainsi, les carrés A, B et C sont linéairement indépendants.

5) Ici, n = 4k + 2 d'où 4k = n – 2 et 4k + 1 = n – 1. De plus, $n \geq 6$. Voyons ce que nous trouvons dans le coin haut- gauche de chaque carré.

$t=1\ ;\ r=n\ ;\ a=1$		$t=n\ ;\ r=1\ ;\ a=1$	
1	$n-1$	1	n^2-2n+1
n^2-n		n^2-1	

Les cases des coins haut- gauche sont (1 ; 1), (1 ; 2) et (2 ; 1). Les deux carrés $A+nB+C\ et\ nA+B+C$ sont donc primitifs. En effet, si l'un était un équivalent de l'autre, alors dans chaque carré, le 1 serait associé avec les deux mêmes nombres, ce qui n'est pas le cas ici.

Signalons que pour les deux carrés, les 4 coins sont les mêmes soient 1 ; n ; n^2 et n^2-n+1.
Une condition nécessaire pour que les deux carrés soient primitifs est qu'ils possèdent les mêmes 4 coins ce qui est le cas ici. Mais cette condition n'est pas suffisante!!!

6) Une structure générale est un carré arithmétique si ses n^2 expressions sont toutes différentes et ont la forme :

$$\begin{array}{ccccc}
a & a+r & a+2r & \dots & a+(n-1)r \\
a+t & a+t+r & a+t+2r & \dots & a+t+(n-1)r \\
a+2t & a+2t+r & a+2t+2r & \dots & a+2t+(n-1)r \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a+(n-1)t & a+(n-1)t+r & a+(n-1)t+2r & \dots & a+(n-1)t+(n-1)r
\end{array}$$

Alors, il est toujours possible de construire un carré magique presque normal en attribuant une valeur entière > 0 aux variables $a, r\, et\, t$ et en exigeant que $r>(n-1)t\ ou\ t>(n-1)r$.

Si dans la structure générale, nous trouvons deux expressions identiques, alors chaque carré issu de la structure générale contiendra assurément une répétition. Nous ne pourrons jamais construire un presque normal.

La structure n'est donc pas arithmétique.

D'avoir deux expressions identiques peut se produire si le carré A n'a pas été convenablement choisi (voir la remarque 1 à la fin de 11.3). Les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3 ont été construits en choisissant convenablement le carré A. Ce qui n'a pas été fait dans la remarque 1.

7) Si le carré M est arithmétique, alors selon le théorème11.1, la somme doit être divisible par 19. Or ici, 3449 n'est pas divisible par 19. Votre erreur est d'affirmer, si la somme est bien 3449, que votre carré est arithmétique. Si celui-ci est bien arithmétique, alors votre erreur se trouve dans le calcul de la somme qui n'est pas 3449.

8) Regardez les propriétés juste au-dessus du théorème 11.3. Vous aurez alors a = 4, r = 3 et t = 45. Le plus grand entier est 676 = a + (n – 1) r + (n – 1) t; il se trouve juste à droite de la case centrale tandis que juste à gauche de la case centrale, se trouve le plus petit entier 4.

La somme magique (voir juste au-dessus du théorème 11.1) est S = 5100. La case centrale contient le nombre S/n = 5100/15 = 340.

Le carré qui suit est le carré cherché, trouvé avec le fichier «Ordre 15» de MATHEMATICA ou d'EXCEL. Vérifiez les résultats déjà trouvés à travers le carré ci-dessous :

361	652	313	604	265	556	217	508	169	460	121	412	73	364	25
22	358	649	310	601	262	553	214	505	166	457	118	409	70	406
403	19	355	646	307	598	259	550	211	502	163	454	115	451	67
64	400	16	352	643	304	595	256	547	208	499	160	496	112	448
445	61	397	13	349	640	301	592	253	544	205	541	157	493	109
106	442	58	394	10	346	637	298	589	250	586	202	538	154	490
487	103	439	55	391	7	343	634	295	631	247	583	199	535	151
148	484	100	436	52	388	4	340	676	292	628	244	580	196	532
529	145	481	97	433	49	385	46	337	673	289	625	241	577	193
190	526	142	478	94	430	91	382	43	334	670	286	622	238	574
571	187	523	139	475	136	427	88	379	40	331	667	283	619	235
232	568	184	520	181	472	133	424	85	376	37	328	664	280	616
613	229	565	226	517	178	469	130	421	82	373	34	325	661	277
274	610	271	562	223	514	175	466	127	418	79	370	31	322	658
655	316	607	268	559	220	511	172	463	124	415	76	367	28	319

9) Utilisez respectivement ALG-1, ALG-3 et ALG-2 pour les ordres 9, 10 et 12. Dans chaque cas, prenez a = 5 puis de façon arbitraire, r = 2 et:

Ordre 9 : t = 17.

Ordre 10 : t = 19.

Ordre 12 : t = 23.

Vous trouverez trois carrés arithmétiques presque normaux puisque t > (n – 1) r. Vérifiez ensuite que votre carré est bien celui obtenu avec «Ordre 9», «Ordre 10» et «Ordre 12».

10) Tous les carrés construits avec ALG-1 et ALG-2 sont associatifs donc la somme des cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\frac{2S}{n}$. Nous avons alors :

$$\frac{2S}{n} = 2a + (n-1)r + (n-1)t$$

11) $\frac{2S}{n} = \frac{2 \times 385}{7} = 110.$

12) Si ce carré magique est associatif, alors nous devons avoir : $\frac{2S}{n} = \frac{2 \times 870}{12} = 145.$

La somme des extrémités de la grande diagonale secondaire (ce sont des cases symétriques par rapport au centre du carré) est $10 + 140 = 150.$ Le carré ne peut donc pas être associatif puisque 150 est différent de 2S/n = 145.

13) Avec ALG-3, construisez un carré normal M d'ordre 6. Le problème 27 de 11.4 nous dit que si M est arithmétique, alors k M + m est arithmétique.

a) 2M + 1 est arithmétique et il est formé que d'entiers impairs.

b) Nous prendrons 2M.

c) Nous prendrons 3M.

d) Nous prendrons 3M + 2.

e) Nous prendrons 3M. En effet, M est normal donc renferme 18 entiers pairs et 18 entiers impairs. Nous savons que impair x 3 est impair et que pair x 3 est pair.

f) Prenons 21M. Il est vrai que les 18 impairs sont divisibles par 7 et que les 18 pairs sont divisibles par 3.

14) La réponse est oui. Nous pouvons toujours construire un carré magique d'ordre $n \geq 3$ à partir d'un tableau arithmétique, ce que nous montrent les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3. Chaque algorithme nous conduit à une structure générale qui renferme les n^2 expressions d'un tableau arithmétique.

Nous pouvons défaire la structure générale pour former le tableau arithmétique. Inversement, nous pouvons remettre toutes les expressions du tableau arithmétique à leur place dans le carré magique.

15) Utilisez «Ordre 5» avec a = 5, r = 3 et t = 15. La somme magique est S = 205.

47	68	29	50	11
8	44	65	26	62
59	5	41	77	23
20	56	17	38	74
71	32	53	14	35

16)

a) Tous les carrés issus de cette structure générale sont des A-Dürer car la structure est elle-même un A-Dürer. En effet, la somme des 4 cases du sous-carré 2x2 dans le coin haut gauche donne la somme magique S = 4a + 6r + 6t. De plus, la somme des cases (1 ; 1) et (4 ; 4) puis (1 ; 2) et (4 ; 3) donne 2a + 3r + 3t = S/2 d'où le carré est associatif. C'est un A-Dürer.

b) Nous avons 3 variables libres d'où le sous-espace de dimensions 3 (voir le problème 17 qui suit). C'est un sous-espace de l'espace des A-Dürer qui lui est de dimension 5 (voir 5.9). Les carrés A, B et C qui conduisent à la structure générale forment une base.

c) Avec le fichier «Le compte» dans MATHEMATICA, nous trouvons bien f(S) = 68. C'est le nombre de figures magiques que possède la structure générale.

17) Dans une structure générale de carré arithmétique, chaque expression a la forme suivante : $a + r\,k_1 + t\,k_2$ où $k_1\, et\, k_2$ prennent toutes les valeurs de $0\ à\ n-1$. Dans une case donnée (i ; j) du carré, $k_1\, et\, k_2$ sont fixes, $a, r,\ t$ sont des variables. Soient A et B, deux carrés issus de cette structure. Dans la case (i ; j) de A et B, nous trouvons respectivement :

$$a + r\,k_1 + t\,k_2\ \ et\ \ a' + r'k_1 + t'k_2.$$

Dans la case (i ; j) de A + B, nous trouvons $(a + a') + (r + r')k_1 + (t + t')k_2$

Dans la case (i ; j) de k A, nous trouvons $k\,a + (k\,r)k_1 + (k\,t)k_2$. Nous voyons que A + B et k A proviennent de la même structure générale que A et B.

A	B	$A+B$	$k\,A$
a	a'	$a+a'$	$k\,a$
r	r'	$r+r'$	$k\,r$
t	t'	$t+t'$	$k\,t$

Les coordonnées de A sont (a, r, t), celles de B (a', r', t'), celles de A + B sont (a + a', r + r', t + t') et celles de k A sont (k a, k r, k t).

18) Nous savons que cette structure générale a été obtenue avec ALG-1 donc elle est associative. La somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est 2S/5. La case centrale renferme S/5. La somme magique est 5a + 10 r + 10 t.

Numérotons de 1 à 16, les 16 figures de gauche à droite et de haut en bas; elles sont toutes magiques puisque de somme 5a + 10 r + 10 t.

Les figures 1, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 et 16 sont des super-figures.

19) Effectivement, le fichier «Le compte» de MATHEMATICA donne bien 934 figures magiques; de même avec «Illustration-figures» de MAPLE. (Voir le dernier exemple dans 5.2, chapitre 5).

20) En effet, avec ALG-1, nous obtenons la structure générale de «Ordre 3» qui est équivalente aux structures (1) de 4.3 et (1.1) de 4.3.2, ces deux dernières étant équivalentes (elles génèrent les mêmes carrés magiques d'ordre 3 et les génèrent tous). Les structures (1) et (1.1) sont associatives et ainsi, tous les 3x3 générés avec «Ordre 3» sont associatifs.

21) En effet, tous les carrés magiques fabriqués avec ALG-1 et ALG-2 sont associatifs. Mais il y a de nombreux carrés magiques d'ordre 5, par exemple, qui ne sont pas associatifs (les carrés normaux qui n'ont pas 13 dans la case centrale).

Prenons la structure générale (2) des carrés magiques d'ordre 4 du chapitre 5. Nous observons que f et g sont des variables libres situées dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré. En prenant f différent de S/2 – g, le carré ne pourra pas être associatif.

Prenons maintenant la structure générale des carrés magiques d'ordres supérieurs à 4 (voir chapitre 3, le cas $n \geq 5$). Les variables a_{22} *et* $a_{(n-1)\,(n-1)}$ sont des variables libres situées dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré. Il suffit de prendre $a_{(n-1)(n-1)} \neq \frac{2S}{n} - a_{22}$ si nous voulons un carré magique non associatif d'ordre impair ou d'ordre pair multiple de 4.

Il reste le cas pair non multiple de 4 soit $n = 4k + 2$.

ALG-3 nous conduit à des carrés qui présentent plusieurs paires de cases symétriques par rapport au centre du carré dont la somme est $2S / n$.. Par exemple, sur la grande diagonale principale, le nombre en position (2 ; 2) + le nombre en position (n – 1; n – 1) donne $2S / n$. Puis, nous pouvons prendre la structure générale des carrés magiques d'ordres supérieurs à 4 (voir chapitre 3, le cas $n \geq 5$) et construire un carré magique tel que $a_{(n-1)(n-1)} \neq \frac{2S}{n} - a_{22}$. Ainsi, le carré obtenu ne proviendra pas de ALG-3.

22) Prenons le tableau arithmétique de 11.2. Si nous avons r = (n – 1) t, alors nous aurons une première répétition soit 2 fois a + (n – 1) t. En effet, a + r devient a + (n – 1) t. De même si t = (n – 1) r car a + t deviendra a + (n – 1) r. Le carré ne sera donc pas presque normal.

23) Nous avons posé les conditions nécessaires pour avoir des répétitions. Notre carré M provient de l'algorithme ALG-1 ou de l'algorithme ALG-2 donc, il est associatif.

Si nous prenons une case blanche, cela implique que le nombre qui s'y trouve est unique dans le carré M. Par contre, si la case est rouge, alors le nombre qui s'y trouve n'est pas unique dan M.

Deux cases blanches renferment deux nombres différents sans quoi elles seraient rouges. Par contre, deux cases rouges peuvent contenir soit deux nombres égaux, soit deux nombres différents.

Prenons la case blanche A qui contient le nombre a. Celui-ci est donc unique dans M. Sa case B symétrique par rapport au centre du carré contient le nombre b. Nous avons $a \neq b$. Nous allons montrer que B est une case blanche donc que b est unique dans M. Supposons que C contienne le nombre b. Alors D, la case symétrique par rapport au centre du carré de C, contient le nombre a. Cela contredit l'unicité de a. Donc b est unique et la case B est blanche.

Nous venons de montrer que A est une case blanche si et seulement si B, sa case symétrique par rapport au centre du carré, est blanche. Enfin, la figure formée des cases blanches est symétrique par rapport au centre du carré.

Terminons avec les cases rouges. Si A est une case rouge, alors sa case symétrique par rapport au centre du carré doit être une case rouge car si elle était blanche, selon le résultat précédent, A serait une case blanche.

L'ensemble des cases rouges est une figure symétrique par rapport au centre du carré.

24) Les quatre carrés arithmétiques normaux primitifs sont définis par :

a = 1, r = 1, t = 6 ; a = 31, r = – 6, t = 1 ; a = 31, r = 1, t = – 6 ; a = 1, r = 6, t = 1

Pour vous convaincre que ces quatre carrés sont primitifs, regardez les coins où se trouve le 1.

1 25	25	30 1	1 5
35	1 5	35	30

25) Observez le tableau arithmétique de 11.2. Pour éviter les répétitions, il est nécessaire que nous ayons $r \neq 0 \ et \ t \neq 0.$ Cette condition n'est évidemment pas suffisante.

26) Pour chaque ordre $n \geq 2$, nous pouvons trouver une infinité de carrés magiques qui ont pour somme des 4 coins, le nombre $\frac{4S}{n}$.

a) Pour $n = 2$, $4a = 4S / n = 4S / 2 = 2S = 4a.$

a	a
a	a

Pour $n = 3$, avec la structure (1.1) nous trouvons que la somme des 4 coins est

$4a + 4r + 4t = 4S / 3.$

Pour $n = 4$, le théorème 5.1 nous dit que la somme des 4 coins est toujours $S = 4S / 4.$

b) Pour $n \geq 2$, la somme des 4 coins est la somme des extrémités des deux grandes diagonales. Puisque le carré est associatif, la somme des 4 coins est $\frac{2S}{n} + \frac{2S}{n} = \frac{4S}{n}$.

c) Avec ALG-1 et ALG-2, les carrés obtenus sont tous associatifs et la somme des 4 coins est $\frac{4S}{n}$. Avec ALG-3, en utilisant les carrés A, B et C, nous trouvons que la somme des 4 coins est : $4a + 2(n-1)r + 2(n-1)t = \frac{4S}{n} = \frac{4}{n}\left(na + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n(n-1)}{2}t\right)$ où la parenthèse est la somme magique de tout carré arithmétique.

d) Ainsi, nous voyons que pour tous les ordres $n \geq 2$, il existe une infinité de carrés magiques ayant $\frac{4S}{n}$ pour somme des 4 coins.

27)

Le carré M est arithmétique et tous ses nombres seront multipliés par k. Tous les nombres du tableau arithmétique correspondant seront multipliés par k puis nous ajouterons m à chacun.

Dans M, le terme général est : $a + k_1 r + k_2 t$ où les paramètres k_1 *et* k_2 varient de 0 *à* $n-1$.

Dans $k M + m$, le terme général est : $(k a + m) + k_1(k r) + k_2(k t)$. Tous les nombres forment un nouveau tableau arithmétique et le nouveau carré est arithmétique.

28)

Prenons M, un carré magique normal d'ordre $n \geq 3$. Le carré $10^k M$ est presque normal et renferme n^2 entiers, chacun se terminant par k zéros. Puis ajoutons l'entier $a_1 a_2 ... a_k$ lequel est formé de k chiffres. Nous obtiendrons alors un carré presque normal formé d'entiers se terminant tous par $???...?? a_1 a_2 ... a_k$.

Nous pouvons en fabriquer une infinité en prenant M parmi l'infinité de presque normaux.

29)

Ces carrés sont donc associatifs. Les 4 sommets du rectangle sont les extrémités des deux diagonales du rectangle. Nous avons a *et* c, deux nombres en positions symétriques par rapport au centre du carré d'où $a + c = 2S / n$. De même, $b + d = 2S / n$. Finalement :

$$a + b + c + d = 2S / n + 2S / n = 4S / n$$

30) a) Les carrés de S_n sont définis avec les variables a, r *et* t. En posant, par exemple, $t = n r$, nous obtenons une structure générale G de carrés formés de n^2 nombres qui forment une suite arithmétique. La structure G renferme 2 variables libres. Il est facile de montrer que W est un sous-espace de dimension 2 de S_n. La dimension est 2 car nous avons 2 variables libres; nous pouvons aussi trouver une base de W laquelle contiendra 2 carrés linéairement indépendants.

Nous pourrions aussi poser $r = n t$.

b)

$$(1.1) \quad \begin{pmatrix} A+t+2r & A & A+2t+r \\ A+2t & A+t+r & A+2r \\ A+r & A+2t+2r & A+t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+5r & A & A+7r \\ A+6r & A+4r & A+2r \\ A+r & A+8r & A+3r \end{pmatrix}$$

Après avoir posé $t = 3r$.

$$\begin{pmatrix} A+5r & A & A+7r \\ A+6r & A+4r & A+2r \\ A+r & A+8r & A+3r \end{pmatrix} = A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}}_{Q}$$

La base $(P\ ;\ Q)$ de W est formée de deux carrés magiques linéairement indépendants.

Voici la structure trouvée dans «Ordre 4» :

$$\begin{matrix} a & a+3r+2t & a+3r+t & a+3t \\ a+2r+3t & a+r+t & a+r+2t & a+2r \\ a+r+3t & a+2r+t & a+2r+2t & a+r \\ a+3r & a+2t & a+t & a+3r+3t \end{matrix}$$

Posons $t = 4r$. Nous obtenons :

$$\begin{matrix} a & a+11r & a+7r & a+12r \\ a+14r & a+5r & a+9r & a+2r \\ a+13r & a+6r & a+10r & a+r \\ a+3r & a+8r & a+4r & a+15r \end{matrix}$$

Complétez en trouvant la base $(P\ ;\ Q)$ de W.

31) Si $a, r\ et\ t$ sont des entiers, alors il est évident que le carré renferme que des entiers. Inversement, si le carré renferme que des entiers, alors a est un entier, a + r est un entier donc r est entier et a + t est un entier donc t est entier.

32) La réponse est non. Le carré trivial d'ordre 2 qui renferme le nombre 5, par exemple, est un carré arithmétique défini avec a = 5 et r = t = 0.

Le carré arithmétique normal suivant d'ordre 6 est défini par a = 36, r = – 1 et t = – 6.

$$\begin{matrix} 36 & 12 & 19 & 13 & 25 & 6 \\ 2 & 29 & 14 & 23 & 11 & 32 \\ 3 & 27 & 22 & 16 & 9 & 34 \\ 4 & 10 & 21 & 15 & 28 & 33 \\ 35 & 26 & 17 & 20 & 8 & 5 \\ 31 & 7 & 18 & 24 & 30 & 1 \end{matrix}$$

33)

a) Chaque carré est arithmétique car nous avons pour chacun, son tableau arithmétique défini par a = 0, r = 1 et t = 0.

b) Nous voulons montrer que A + B n'est pas un carré arithmétique. Cela n'est pas toujours simple!!!

Si le carré magique est formé seulement d'entiers, alors, selon le théorème 11.1, nous avons là une condition nécessaire pour que le carré soit arithmétique. Ici, notre carré A + B est formé d'entiers et il est d'ordre pair. Sa somme magique est 30 et elle est un multiple entier de 3 soit (6/2). Nous ne pouvons rien dire. Si la somme avait été 28, nous aurions pu affirmer que le carré A + B n'est pas arithmétique.

Il faut pousser l'étude plus loin si nous voulons montrer que A + B n'est pas arithmétique. Nous allons ici montrer qu'aucun tableau arithmétique ne peut nous donner A + B.

D'abord, observons ce qu'il y a dans A + B. Ce sont 36 entiers qui vont de 0 à 10.

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 3 & 9 & 5 \\ 9 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Nous allons indiquer, en rouge, le nombre de fois que chaque entier apparait dans le carré:

$$(0\,;1)\ (1\,;2)\ (2\,;1)\ (3\,;6)\ (4\,;5)\ (5\,;6)\ (6\,;5)\ (7\,;6)\ (8\,;1)\ (9\,;2)\ (10\,;1)$$

Nous allons nous servir des expressions $a+5r\ et\ a+5t$, lesquelles ne peuvent prendre que des valeurs entières allant de 0 à 10. Elles sont dans le tableau arithmétique d'ordre 6 suivant :

$$(*)\quad \begin{array}{cccccc} a & a+r & a+2r & a+3r & a+4r & a+5r \\ a+t & a+t+r & a+t+2r & a+t+3r & a+t+4r & a+t+5r \\ a+2t & a+2t+r & a+2t+2r & a+2t+3r & a+2t+4r & a+2t+5r \\ a+3t & a+3t+r & a+3t+2r & a+3t+3r & a+3t+4r & a+3t+5r \\ a+4t & a+4t+r & a+4t+2r & a+4t+3r & a+4t+4r & a+4t+5r \\ a+5t & a+5t+r & a+5t+2r & a+5t+3r & a+5t+4r & a+5t+5r \end{array}$$

Nous allons attribuer à la variable a, les valeurs de 0 à 10. À l'aide des deux expressions choisies, nous allons trouver les valeurs possibles pour $r\ et\ t$. Puisque le carré $A+B$ est formé que d'entiers, nous devons donner à $r\ et\ t$ que des valeurs entières. Nous allons regarder 2 cas parmi les 11. Vous aurez alors qu'à compléter les autres cas de la même façon.

Cas 1 : $a=0$

Nous voulons :
$$0 \le 5r \le 10$$
$$0 \le r \le 2$$

Les seuls entiers possibles sont : $r=0,\ r=1,\ r=2.$ De la même façon, nous trouvons que les seuls entiers possibles pour t sont $t=0,\ t=1,\ t=2.$ D'où 9 cas à regarder.

Voyons, par exemple, ce que devient le tableau (*) avec $a=0,\ r=1,\ t=1$:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Celui-ci est à rejeter car il ne correspond pas aux nombres dans A + B. En effet, le tableau contient trois 2 alors que A + B n'en contient qu'un seul 2.De même pour les 8.

Avec $a=0,\ r=1,\ t=2$, le tableau contient des nombres supérieurs à 10 lesquels ne sont pas dans A + B. Donc, un autre cas à rejeter.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}$$

Il reste 7 cas à regarder sur les 9.

Cas 7 : $a=6$

Nous voulons :

$$0 \le 6+5r \le 10$$
$$-6 \le 5r \le 4$$
$$-6/5 \le r \le 4/5$$

Les seuls entiers possibles sont : $r=-1,\ r=0.$ De la même façon, nous trouvons que les seuls entiers possibles pour t sont $t=-1,\ t=0.$ D'où 4 cas à regarder. Que devient le tableau (*) avec : $a=6,\ r=0,\ t=-1$:

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

À rejeter puisque nous avons six 2 alors que A + B n'en contient qu'un seul.

Les onze cas (a = 0 jusqu'à 10) nous indiquent que le tableau (*) ne pourra jamais conduire à A + B. Tous les cas seront à rejeter!!!

Le carré magique A + B n'est donc pas arithmétique. Tous les calculs ont été faits avec MATHEMATICA, donc très rapidement.

34) En général, la réponse est non. Si G est la structure générale des carrés magiques d'ordre 5, par exemple, alors tous les équivalents proviennent de cette structure.

Si G est la structure générale des diaboliques (voir 5.10), alors seulement deux équivalents sur huit sont des diaboliques donc six équivalents ne proviennent pas de G.

35) A, B et C sont des carrés magiques associatifs d'ordre n, respectivement de sommes S, T et V. Nous voulons montrer que x A + y B + z C est un carré magique associatif.

Prenons les mêmes deux cases symétriques par rapport au centre de chaque carré A, B et C. La somme de ces deux cases est 2xS/n pour A, 2yT/n pour B et 2zV/n pour C. La somme de ces deux cases dans x A + y B + z C est donc (2xS + 2yT + 2zV)/n = 2 (xS + yT + zV)/n = 2W/n où W est la somme magique de x A + y B + z C. La combinaison linéaire des trois carrés associatifs est donc un carré magique associatif.

36) Les sommes sont : $s_1 = \frac{[a+a+(n-1)r]n}{2}$ et $s_2 = \frac{[a+(n^2-n)r+a+(n^2-1)r]n}{2}$

La somme $S = \frac{(2a+n^2r-r)n}{2}$ puis $\frac{s_1+s_2}{2} = \frac{(2a+n^2r-r)n}{2}$.

Finalement, $S = \frac{s_1+s_2}{2}$. Nous avions ici $n \geq 3$.

Pour $n = 2$, le carré est trivial. Nous pouvons respecter $a > 0$ mais nous aurons $r = 0$. Nous avons $s_1 = s_2 = 2a\, et\, S = 2a$.

Finalement $S = \frac{s_1+s_2}{2}$.

37) Nous prendrons le carré de la page 8 qui sera le carré A puis sa rotation de -90°, le carré B.

Propriété 2)

Les nombres de la grande diagonale principale sont, de bas en haut :

$$t\frac{n-1}{2} + r\times 0 + a;\ t\frac{n-1}{2} + r\times 1 + a;\ t\frac{n-1}{2} + r\times 2 + a;\ \ldots;\ t\frac{n-1}{2} + r\times(n-1) + a$$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison r.

Propriété 3)

Les nombres de la grande diagonale secondaire sont, de haut en bas :

$t\times 0 + r\frac{n-1}{2} + a$; $t\times 1 + r\frac{n-1}{2} + a$; $t\times 2 + r\frac{n-1}{2} + a$;...; $t\times(n-1) + r\frac{n-1}{2} + a$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison t.

Propriété 4)

À gauche de la case centrale, nous trouvons : $t\times 0 + r\times 0 + a = a$.

À droite de la case centrale, nous trouvons : $t(n-1) + r(n-1) + a$.

Lorsque r et t sont positifs, alors il est clair que a et $a+(n-1)r+(n-1)t$ sont respectivement le plus petit et le plus grand nombre du carré. (Voir le tableau arithmétique (*), page 1).

38)

1) Le carré A de la page 15 est associatif car la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\frac{2S}{n}$. En effet, $S = 4k(4k-1)/2 = 8k^2 - 2k$ et avec $n = 4k$, $\frac{2S}{n} = \frac{16k^2-4k}{4k} = 4k-1$. Effectivement, si nous observons bien la structure du carré A, il est facile de se constater que la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $4k-1$. La somme t A + r B + a C sera donc un carré associatif.

2) Les nombres de la grande diagonale principale sont, de haut en bas :

$t\times 0 + r\times 0 + a$; $t\times 1 + r\times 1 + a$; $t\times 2 + r\times 2 + a$; ...; $t\times(4k-1) + r\times(4k-1) + a$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison $r+t$.

3) Les nombres de la grande diagonale secondaire, de haut en bas, ont la forme :

$((4k-1)-u)t + ur + a$ où u varie de 0 à $4k-1$.

Nous avons : $((4k-1)-u)t + ur + a = (4k-1)t + a + u(r-t)$

Les nombres forment donc une suite arithmétique de raison $r-t$. Le nombre en bleu est constant.

4) Dans chaque colonne du carré A (page 15), de haut en bas, nous trouvons $\frac{n}{4}$ entiers identiques, $\frac{n}{2}$ entiers identiques puis de nouveau $\frac{n}{4}$ entiers identiques. Dans les colonnes du carré B qui est la rotation de -90° de A, nous trouvons de haut en bas, une suite arithmétique de

$\frac{n}{4}$ entiers, une suite arithmétique de $\frac{n}{2}$ entiers puis une suite arithmétique de $\frac{n}{4}$ entiers. Ces suites sont de raisons 1 ou – 1. Il s'ensuit, dans le carré $tA + rB + aC$, les propriétés énoncées et les raisons sont $\pm r, \mp r, \pm r$.

5) De la même façon, sur les rangées, les trois suites arithmétiques sont de raisons $\pm t, \mp t, \pm t$.

6) Observez que la grande diagonale principale de A renferme de haut en bas, les entiers consécutifs allant de 0 à 4k – 1. Il en est de même de la grande diagonale principale de B. Si a, r et t sont positifs, alors le plus petit nombre est t x 0 + r x 0 + a = a situé dans la case du haut de la grande diagonale principale.

Le plus grand nombre est t (4k – 1) + r (4k – 1) + a situé dans la case du bas de la grande diagonale principale. (Voir le tableau arithmétique (*), page 1).

39)

1) En observant bien la structure du carré A de la page 21, nous voyons que les entiers vont de 0 à 4k + 1 = n – 1 puisque n = 4k + 2.

2) Les nombres de la grande diagonale principale sont, de haut en bas :

$$t \times 0 + r \times 0 + a;\ t \times 1 + r \times 1 + a;\ t \times 2 + r \times 2 + a;\ \ldots;\ t \times (4k-1) + r \times (4k-1) + a$$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison $r + t$.

Les nombres de la grande diagonale secondaire, de haut en bas, ont la forme :

$$((4k+1)-u)t + ur + a \text{ où } u \text{ varie de } 0 \text{ à } 4k+1.$$

Nous avons : $((4k+1)-u)t + ur + a = (4k+1)t + a + u(r-t)$

Les nombres forment donc une suite arithmétique de raison $r - t$. Le nombre en bleu est constant.

3) Observez que la grande diagonale principale de A renferme de haut en bas, les entiers consécutifs allant de 0 à 4k + 1. Il en est de même de la grande diagonale principale de B. Si a, r et t sont positifs, alors le plus petit nombre est t x 0 + r x 0 + a = a situé dans la case du haut de la grande diagonale principale.

Le plus grand nombre est t (4k – 1) + r (4k – 1) + a situé dans la case du bas de la grande diagonale principale. (Voir le tableau arithmétique (*), page 1).

4) Pour montrer que les deux carrés sont primitifs, regardons les 3 nombres dans le coin haut gauche; plus précisément, les nombres situés dans les cases (1 ; 1), (1 ; 2) et (2 ; 1).

Avec a = 1, r = 1, t = n, nous trouvons le coin du carré U :

1 $\qquad$ 1 + 4 k n

1 + 4k + n (4k + 1)

Avec a = 1, r = n, t = 1, nous trouvons le coin du carré V :

1 $\qquad$ 1 + 4k

2 + 4k + 4 k n

Excepté 1, aucun nombre du coin de U ne peut égaler un nombre du coin de V. En effet, puisque n est un entier $\geq$ 6 d'où k $\geq$ 1, nous avons :

1 + 4k = 1 + 4 k n qui implique n = 1, ce qui est impossible.

1 + 4k = 1 + 4k + n (4k + 1) implique n = 0 ou k = -1/4 ce qui est impossible.

2 + 4k + 4 k n = 1 + 4 k n implique 1 + 4k = 0 ce qui est impossible.

2 + 4k + 4 k n = 1 + 4 k + n (4k + 1) implique n = 1, ce qui est impossible.

Donc, les deux carrés sont primitifs car aucun équivalent de U ne peut égaler V et réciproquement, bien entendu. De plus, nous savons déjà que U et V sont normaux.

12.5 Chapitre 12

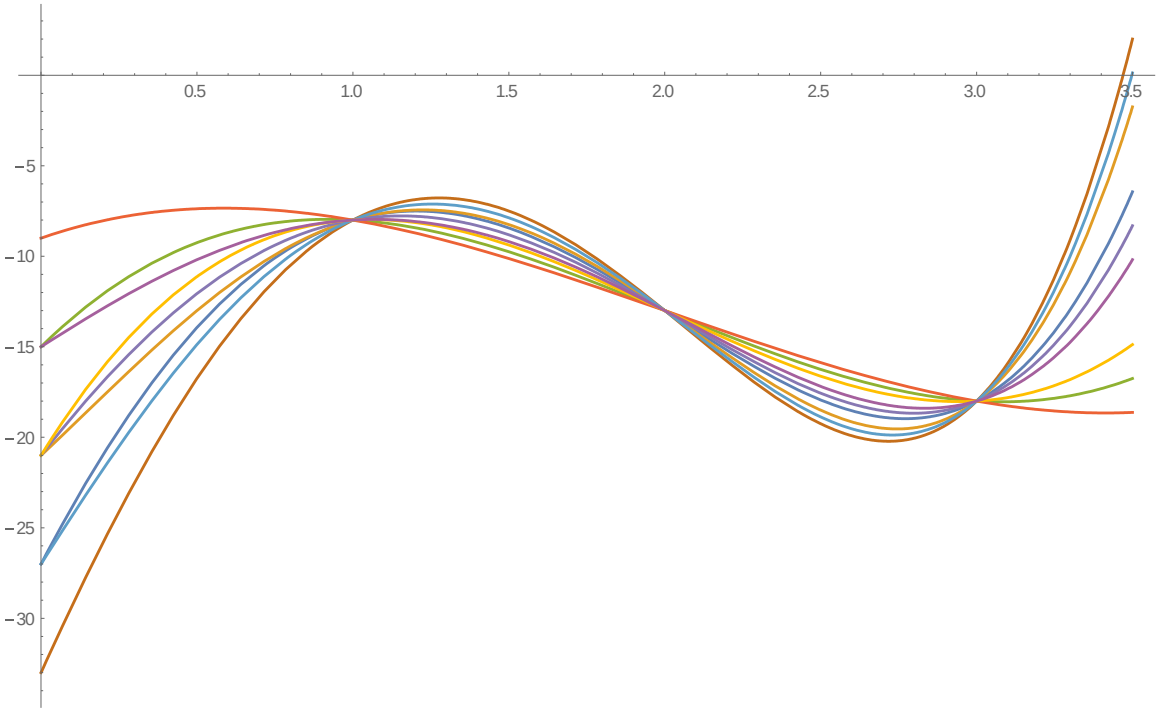
1) Reprenons la structure générale des carrés magiques d'ordre 3 :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{pmatrix}$$

Posons dans (*) :

$$a=\alpha(x)=x^3-6x^2+6x-9\ ;\ r=r(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ ;\ t=t(x)=(x^2-1)(x-2)(x-3).$$

Les neuf courbes sont les suivantes où $\alpha(x)$ est la courbe qui rencontre l'axe vertical au point le plus haut (la courbe orangée) :



À $x=1, x=2, x=3,\ r(x)=t(x)=0$ et les points d'intersection sont :

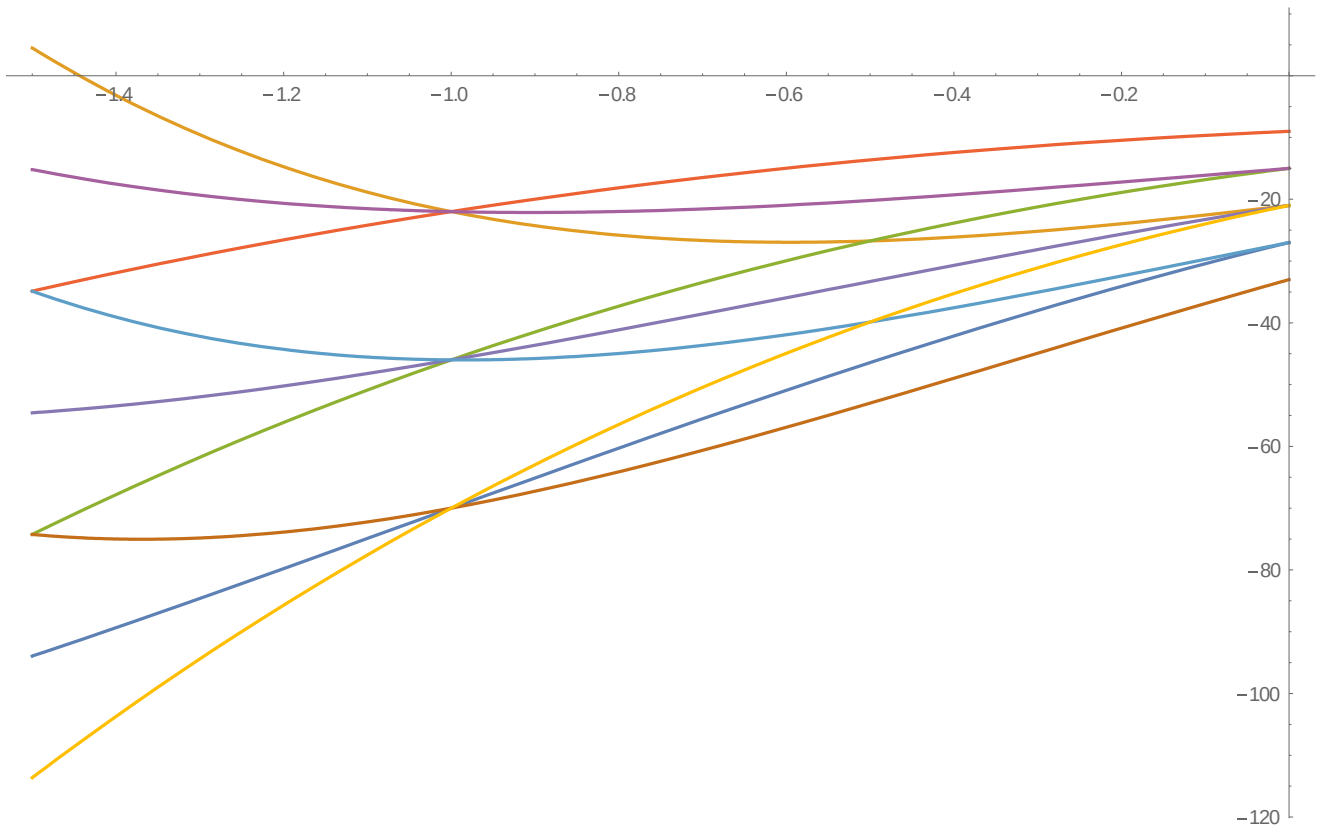
$$(1\ ;\ \alpha(1)), (2\ ;\ \alpha(2))\ \ et\ \ (3\ ;\ \alpha(3)).$$

Ces trois points sont donc sur la courbe de $\alpha(x)=f(x)$. Ce sont les trois nœuds. Notez que le choix de $r(x)\ et\ t(x)$ est arbitraire, en autant que $r(1)=t(1)=r(2)=t(2)=r(3)=t(3)=0$.

Que se passe-t-il à $x=-1$? $t(-1)=0$ mais $r(-1)\neq 0$. Notre carré devient :

$$\begin{pmatrix} \alpha(-1)+2r(-1) & \alpha(-1) & \alpha(-1)+r(-1) \\ \alpha(-1) & \alpha(-1)+r(-1) & \alpha(-1)+2r(-1) \\ \alpha(-1)+r(-1) & \alpha(-1)+2r(-1) & \alpha(-1) \end{pmatrix}$$

Cela explique les intersections à x = -1!!!



2) Prenons la seconde structure générale (2.4) des super-Dürer-alpha (voir chapitre 5.6). Nous voyons que la somme magique est 4A + 6r + 6t. Ici, nous avons :

$$A=-1769+\frac{121409x}{28}-\frac{161307x^2}{40}+\frac{56981x^3}{30}-\frac{3981x^4}{8}+\frac{881x^5}{12}-\frac{57x^6}{10}+\frac{19x^7}{105}$$

$$r=723-\frac{745261x}{420}+\frac{66171x^2}{40}-\frac{140533x^3}{180}+\frac{1639x^4}{8}-\frac{2723x^5}{90}+\frac{47x^6}{20}-\frac{47x^7}{630}$$

$$t=462-\frac{468829x}{420}+\frac{41367x^2}{40}-\frac{87391x^3}{180}+\frac{1015x^4}{8}-\frac{841x^5}{45}+\frac{29x^6}{20}-\frac{29x^7}{630}$$

Avec MATHEMATICA, nous avons trouvé 4A + 6r + 6t = 34. La somme magique est donc 34 quelle que soit la valeur de la variable x.

3) Voir l'annexe 15, exemple 3 où p(x) est notre polynôme $A(x)$. Le procédé est le même pour $r(x)\, et\, t(x)$.
Voyons pour $r(x)$ que nous nommons temporairement puisque $x = 2520\, r + k$.
Donc, nous posons $x = 2520\, r + k$ dans $q(x)$. Avec MATHEMATICA, nous obtenons $q(2520\, r + k) = q(k) + E\ où\ E$ est un entier. Puisque est un entier pour $k = 0, 1, 2, \ldots, 2519$, alors est un entier quel que soit l'entier x.

Il en est de même pour $t(x)$. Donc, tous les polynômes du carré prennent une valeur entière dès que entier. En effet, c'est le cas de $A(x), r(x)\, et\, t(x)$ ainsi que de tous les autres polynômes qui sont des expressions linéaires à coefficients entiers de $A(x), r(x)\, et\, t(x)$.

4) Les neuf courbes possèdent un seul nœud. Les nœuds sont obtenus en résolvant le système d'équations : $\begin{cases} r(x) = 0 \\ t(x) = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x^3 \sin(2x) = 0 \\ x \cos(2x) = 0 \end{cases}$

Il est clair que le système possède une solution à $x = 0$. D'où le nœud à $x = 0$. Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres, il suffit de prendre toutes les valeurs de qui annulent $r(x)$ et de montrer que celles-ci n'annulent pas $t(x)$.

Les valeurs qui annulent $\sin(2x)$ sont $k\pi\ et\ \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}$. Mais aucune de ces valeur annule $\cos(2x)$. Le nœud est donc unique.

5) Il faut montrer que le système : $\begin{cases} x^3 \sin(2x) = 0 \\ x\ \cos(3x) = 0 \end{cases}$ possèdent une infinité de solutions.

Les valeurs de qui annulent $\sin(2x)$ sont $k\pi\, et\, \frac{\pi}{2} + k\pi$. Nous voyons que $\cos(3k\pi) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Puis $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\right) = 0$ pout tout $k \in \mathbb{Z}$.

Les nœuds sont donc situés à $x = 0\ et\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}$.

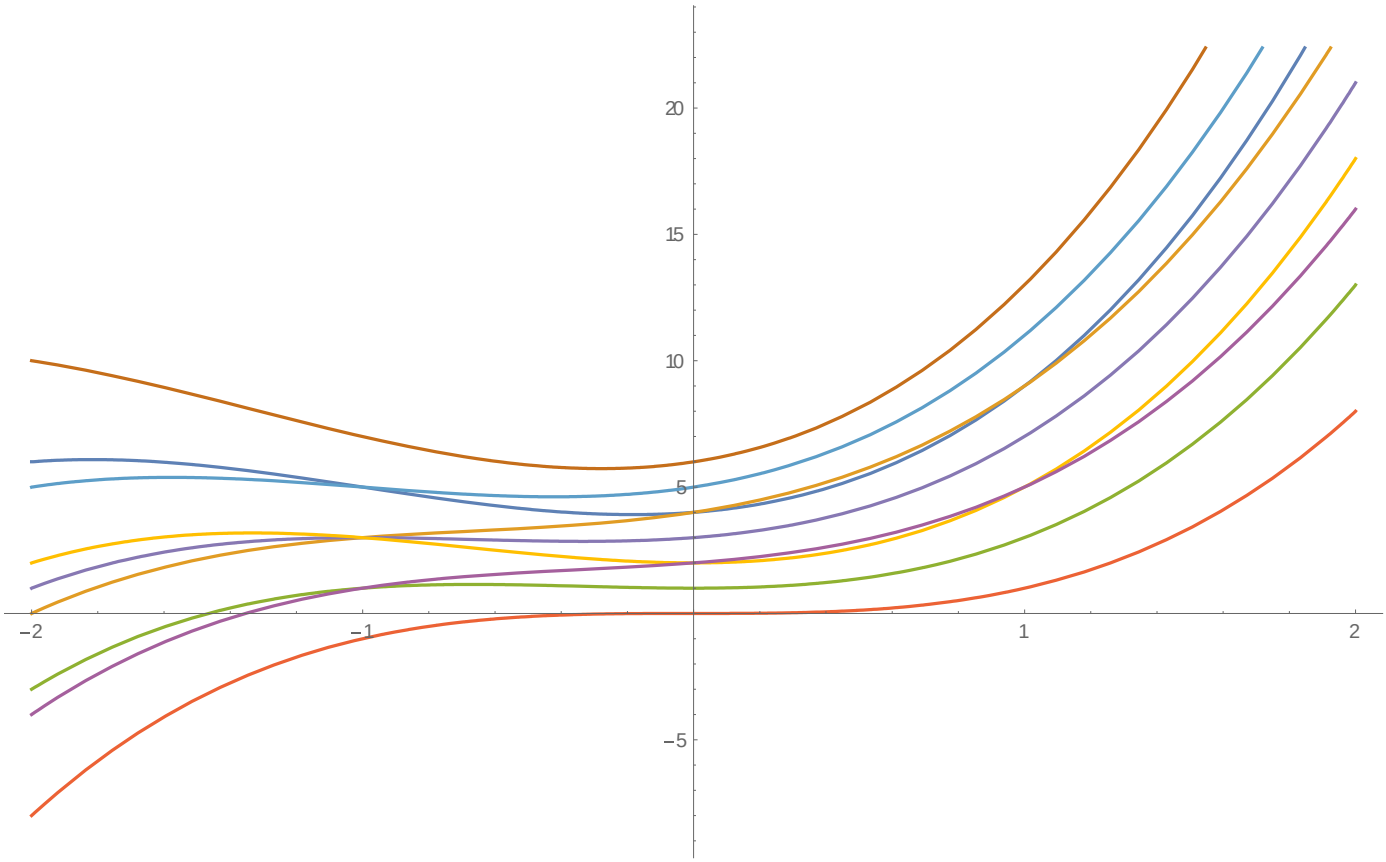
6) Voir l'exemple 3 de 12.4. L'intervalle des rencontres est l'intervalle fermé [– 1 ; 1]. Nous trouvons cinq intersections à x = – 1, deux intersections à x = 0 et deux intersections à x = 1. Ce sont les seules intersections entre ces neuf courbes. En dehors de l'intervalle [– 1 ; 1], il n'y a aucune intersection.

La démarche à suivre est expliquée dans l'exemple 3 et nous avons noté les 9 polynômes de la structure générale (1.1) comme suit :

$$\begin{pmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ (7) & (8) & (9) \end{pmatrix}$$

Ainsi, en résolvant l'équation (4) = (7), par exemple, nous trouverons les abscisses des points d'intersection entre les deux courbes qui correspondent aux polynômes (4) et (7).

7) Voici les 9 courbes représentatives des 9 polynômes de l'exemple 3 de 12.4.



Nous allons identifier les 9 courbes à partir de la verticale x = 3/2. De bas vers le haut, nous rencontrons les courbes qui correspondent aux polynômes :

(2) ; (7) ; (9) ; (6) ; (5) ; (4) ; (1) ; (3) ; (8)

Nous notons chaque courbe avec le même nombre que pour son polynôme. Ainsi, la courbe (2) est celle du polynôme (2).

La courbe (2) ne rencontre aucune des autres courbes.

La (7) et la (9) se rencontrent à x = – 1.

La (9) et la (6) se rencontrent à x = 0 et à x = 1.

La (6) et la (5) se rencontrent à x = – 1.

La (6) et la (4) se rencontrent à x = – 1.

La (5) et la (4) se rencontrent à x = – 1.

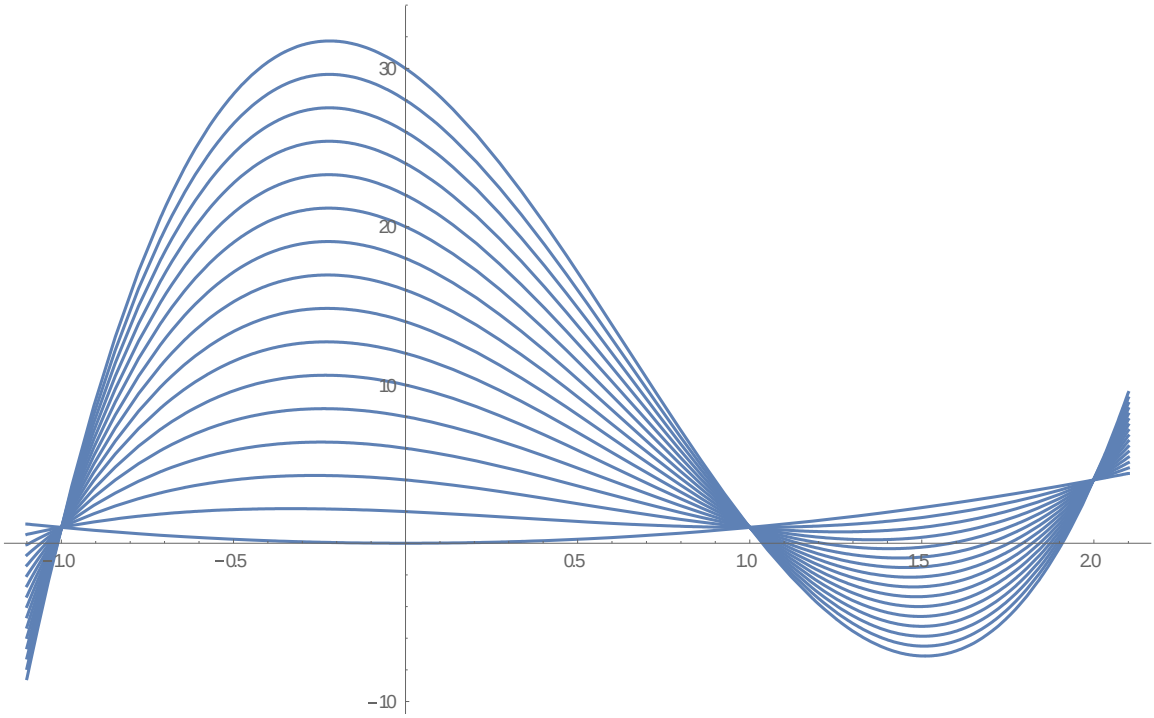
La (4) et la (1) se rencontrent à x = 0 et à x = 1.

La (1) et la (3) se rencontrent à x = – 1.

La (8) ne rencontre aucune des autres courbes.

8) Prenons la structure générale (2.12) des diaboliques-alpha (voir 5.11). Puis posons :

$$a(x) = x^2 \ \ et \ \ r(x) = (x^2 - 1)(x - 2).$$



Nous avons un nœud à $x = -1,\ x = 1,\ x = 2$ et aucune autre intersection. En effet, pour les autres valeurs de $x,\ r(x) \neq 0$ et les 16 polynômes forment une suite arithmétique de raison non nulle d'où 16 valeurs différentes. Il ne peut donc pas y avoir d'autres intersections.

9) Simplement parce qu'à $x = 1,$ nous avons $r(1) = 0\, et\, t(1) = 3.$ (Voir le type 2 du tableau en vert dans l'exemple 11 de 12.4). Le carré plus bas renferme les valeurs des 16 polynômes à

$x = 1$. Nous voyons que quatre polynômes prennent la valeur 2, quatre autres la valeur 5, quatre autres la valeur 8 et quatre autres la valeur 11.

2	5	11	8
11	8	2	5
2	5	11	8
11	8	2	5

Voilà pourquoi les 16 courbes se rencontrent par groupe de 4 courbes. Il en sera toujours ainsi si le carré magique est arithmétique et si $r(x_0) = 0$ mais $t(x_0) \neq 0$ ou l'inverse. Pour voir ce qui se passe, prenez le tableau arithmétique dans lequel vous poserez $r = 0$.

Enfin, pour voir que les 16 polynômes sont différents, il suffit de les évaluer à $x = 5$. Vous trouverez 16 valeurs différentes donc les 16 polynômes sont différents.

10) Ici, $r(x)\, et\, t(x)$ sont $\sin(x)\, et \cos(x)$. Puisque $\sin(x_0) = 0 \Rightarrow \cos(x_0) \neq 0$ et que $\cos(x_0) = 0 \Rightarrow \sin(x_0) \neq 0$, alors nous ne pouvons pas avoir de nœud. Par contre nous avons le type 2 à $x = k_1\, \pi$ et $x = \pi / 2 + k_2 \pi$ où $k_1\, et\, k_2$ parcourent $\mathbb{Z}$. Cela revient à prendre $x = k\pi / 2$ où k parcourt $\mathbb{Z}$.

11) Nous utilisons ici une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 5 (voir le fichier «Ordre 5» dans MATHEMATICA ou EXCEL).

Nous avons : $a(x) = 15$; $r(x) = \sin(x)$; $t(x) = \sin(2x)$.

Pour les nœuds : $\begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \sin(2x) = 0 \end{cases}$ nous donne $x = k\,\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}$.

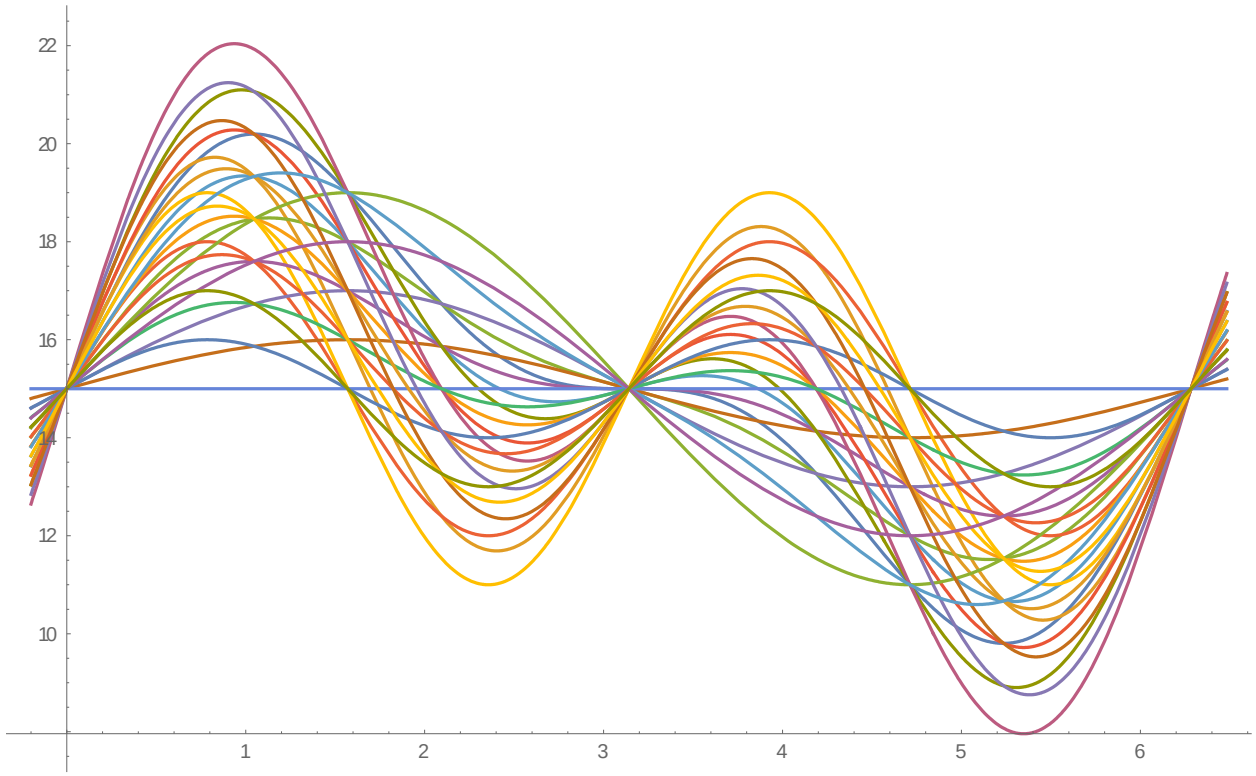
Pour le type 2 : $\begin{cases} \sin(2x) = 0 \\ \sin(x) \neq 0 \end{cases}$ nous donne $x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}$.

Notez ici que $\sin(x) = 0\ et\ \sin(2x) \neq 0$ n'est pas possible!!!

Pour le type 3 : Il faut $2\sin(x)\cos(x) = \pm\sin(x) \neq 0$ d'où $\cos(x) = \pm\dfrac{1}{2}$. Enfin, nous trouvons :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \text{ parcourt } \mathbb{Z}.$$

Vous pouvez vérifier ces intersections dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, voir le graphique ci-dessous.



Nous avons trois nœuds, deux types 2 et quatre types 3.

12) La solution est placée après le problème 15 plus bas.

13) Pour le type 3 : Il faut $2\sin(x)\cos(x) = \pm\sin(x) \neq 0$ d'où $\cos(x) = \pm\frac{1}{2}$. Enfin, nous trouvons :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \text{ parcourt } \mathbb{Z}.$$

14) Dans la solution du problème 11 ci-haut, nous avons traité le type 3. Celui-ci a lieu à $x = -\frac{\pi}{3}$ puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et que $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq 0.$

15) $a(x) = x$; $r(x) = \sin(2x)$; $t(x) = \sin(4x)$.

Pour les nœuds : $\begin{matrix} \sin(2x) = 0 \\ \sin(4x) = 0 \end{matrix}$ soit $\begin{matrix} 2\sin(x)\cos(x) = 0 \\ 4\sin(x)\cos(x)\cos(2x) = 0 \end{matrix}$

d'où $x = k_1\pi \ et \ x = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$ avec $k_1 \ et \ k_2$ qui parcourent $\mathbb{Z}$. Les nœuds se trouvent donc sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical.

Notons que $\cos(x) = 0 \ \Rightarrow \ \cos(2x) = -1.$

Pour le type 2 : $\begin{matrix} 4\sin(x)\cos(x)\cos(2x) = 0 \\ 2\sin(x)\cos(x) \neq 0 \end{matrix}$ d'où $\cos(2x) = 0 \ et \ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \ k \text{ parcourt } \mathbb{Z}.$$

Le type 2 se produit aux multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$. Il est facile de montrer que les nœuds se produisent aux multiples pairs de $\frac{\pi}{4}$.

12) Oui, nous pouvons les prévoir. En coordonnées polaires, la valeur de la variable est la mesure en radians d'un angle.

Les nœuds se trouvent à $x = k\pi$ donc se trouvent sur l'axe horizontal.

Les rencontres de type 2 sont à $x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ donc se trouvent sur l'axe vertical. Ce que vous pouvez observer dans l'exemple 11 de 12.4. N'oubliez pas que k parcourt $\mathbb{Z}$.

16) Dans les quatre cases du carré d'ordre 2, plaçons les polynômes suivants :

Ce choix est arbitraire :

$$\begin{aligned} a(x) &= (x-1)(x-2)+k \\ b(x) &= (x-1)(x-2)(x+1)+k \\ c(x) &= (x-1)(x-2)(x+2)+k \\ d(x) &= (x-1)(x-2)(x+3)+k \end{aligned}$$

Ceux-ci prennent la même valeur k pour seulement $x = 1\ et\ x = 2.$

17) Les valeurs entières de u, v, s, w varient de $0\ à\ 3.$ Il est facile de constater que $s-u$ prendra des valeurs entières allant de $-3\ à\ 3.$ De même pour $v-w.$ La fraction a donc la forme :

$$\frac{s-u}{v-w} = \frac{-3,-2,-1,0,1,2,3}{-3,-2,-1,1,2,3} \text{ puisque } v \neq w.$$

Il est aussi facile de constater que les 42 quotients sont tous compris dans l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

Finalement, $-3 \leq \frac{s-u}{v-w} \leq 3.$

18) Nous voulons seize courbes avec trois types 3 consécutifs. Avec «Ordre 4», nous posons :

$$a(x) = x^2\ ;\ r(x) = x^2+1\ ;\ t(x) = x^4+1$$

Pour les types 3, il faut : $x^4+1 = \pm(x^2+1) \neq 0.$

Nous trouvons un type 3 à $x = -1, x = 0\, et\ x = 1.$

Le graphique plus bas montre que les trois types 3 sont consécutifs. Pour être certain, il faut chercher les intersections dans l'intervalle fermé $[-1\ ;\ 1]$. Mais nous allons chercher l'intervalle des rencontres, lequel est : $\left[-\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\ ;\ \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right] \simeq [-1{,}8872077\ ;\ 1{,}8872077]$. En dehors de cet intervalle, il n'y a aucune autre intersection. Nous allons voir ça de plus près.

Nous avons cherché tous les points d'intersection en résolvant 120 équations. Nous avons trouvé 14 intersections à $x = -1$, 14 intersections à $x = 0$ et 14 intersections à $x = 1$. Ce sont trois

types 3 consécutifs. Dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, il n'y a aucune autre intersection. En effet, les autres intersections se situent à :

$$x = \pm\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2} = \pm 1{,}334457\ldots \qquad 4-10\ ;\ 7-13$$

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} = \pm 1{,}553773\ldots \qquad 2-6\ ;\ 4-9\ ;\ 5-10\ ;\ 7-12\ ;\ 8-13\ ;\ 11-15$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} = \pm 1{,}887207\ldots \qquad 2-10\ ;\ 4-13\ ;\ 7-15$$

Nous trouvons à droite, les paires de courbes qui se rencontrent. Par exemple, la paire 4-10 nous indique que les courbes 4 et 10 se rencontrent à x = 1,334457… et à x = – 1,334457…

Voici comment les 16 courbes ont été numérotées.

$$\begin{array}{cccc}
x^2 & 5+4x^2+2x^4 & 4+4x^2+x^4 & 3+x^2+3x^4 \\
5+3x^2+3x^4 & 2+2x^2+x^4 & 3+2x^2+2x^4 & 2+3x^2 \\
4+2x^2+3x^4 & 3+3x^2+x^4 & 4+3x^2+2x^4 & 1+2x^2 \\
3+4x^2 & 2+x^2+2x^4 & 1+x^2+x^4 & 6+4x^2+3x^4
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 15 & 13 & 7 \\
14 & 5 & 8 & 6 \\
11 & 9 & 12 & 3 \\
10 & 4 & 2 & 16
\end{pmatrix}$$

En terminant, voici le comportement des 16 courbes dans les 7 graphiques suivants :

Graphique 1 : nous voyons les trois types 3 à x = –1, 0 et 1. Aucune autre intersection.

Graphique 2 : de x = 1 à x = 1,4, nous voyons seulement deux intersections à x = 1,334457….

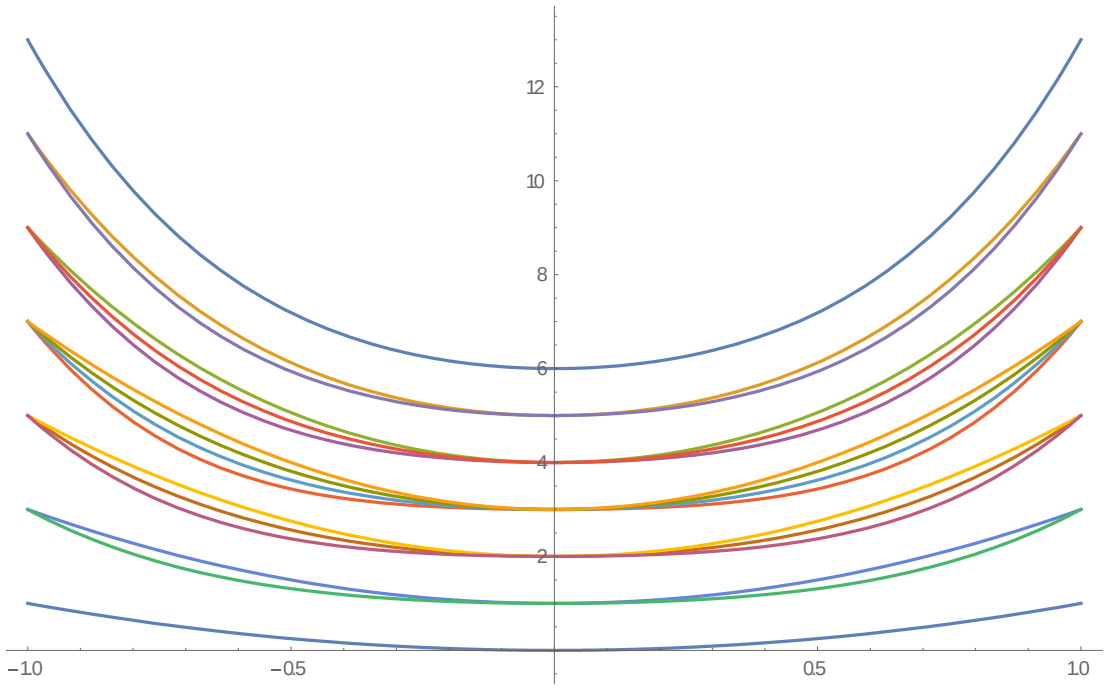
Graphique 3 : de x = 1,4 à x = 1,6, nous voyons le type (11 222 222 11) à x = 1,553773….Aucune autre intersection.

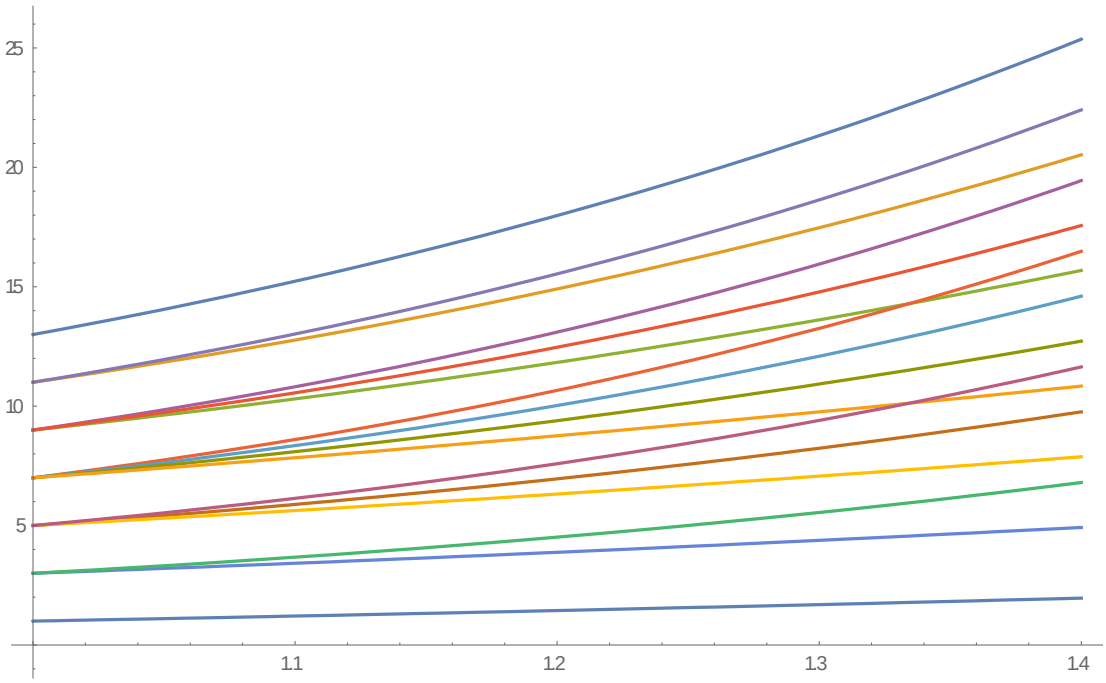
Graphique 4 : de 1,6 à 1,95, nous voyons le type (111 2 11 2 11 2 111) à x = 1,887207…. Aucune autre intersection.

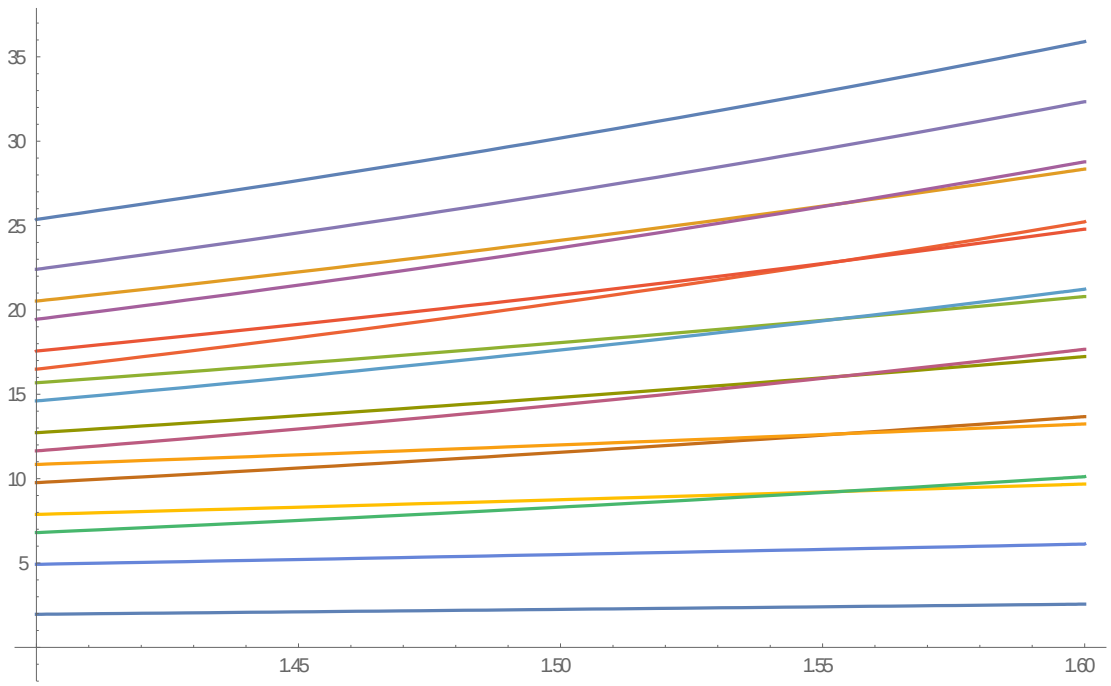
Graphique 5 : de 1,95 à 2, il n'y a plus d'intersection et nous voyons comment les courbes commencent à se regrouper par groupes de quatre.

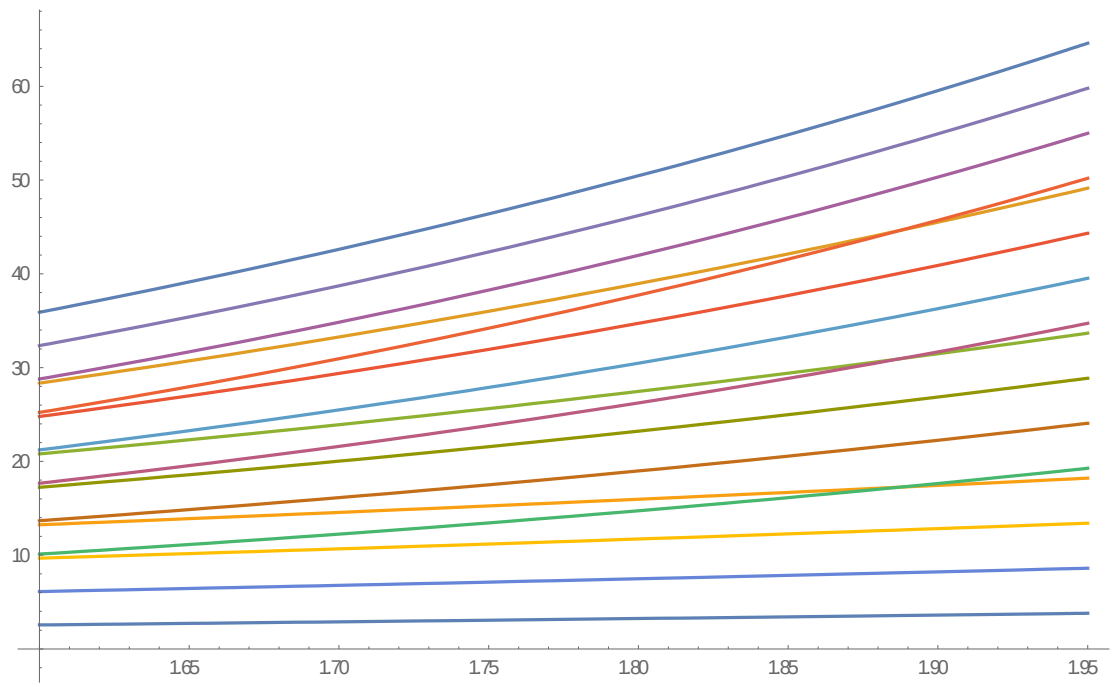
Graphique 6 et 7 : depuis x = 2, nous voyons très bien les quatre groupes de 4 courbes qui ne se rencontreront plus jamais; de même pour les 4 courbes de chaque groupe!!!

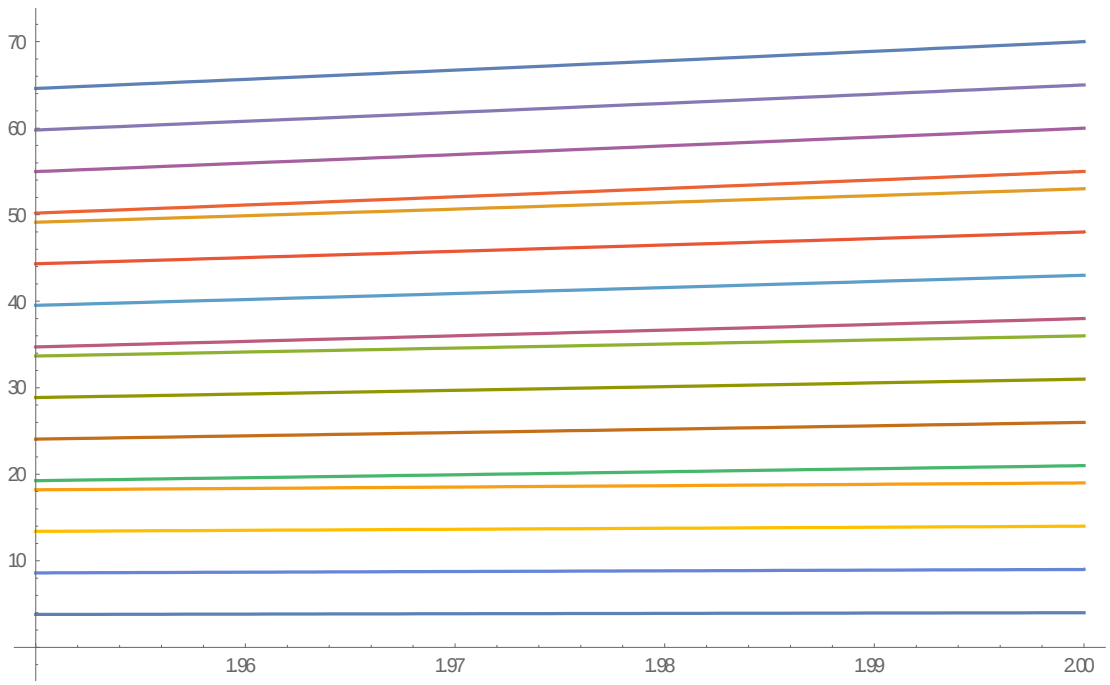
Il en est de même quand x varie de –1 à – l'infini. En effet, chaque courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical : f (–x) = f(x) pour tout x réel.

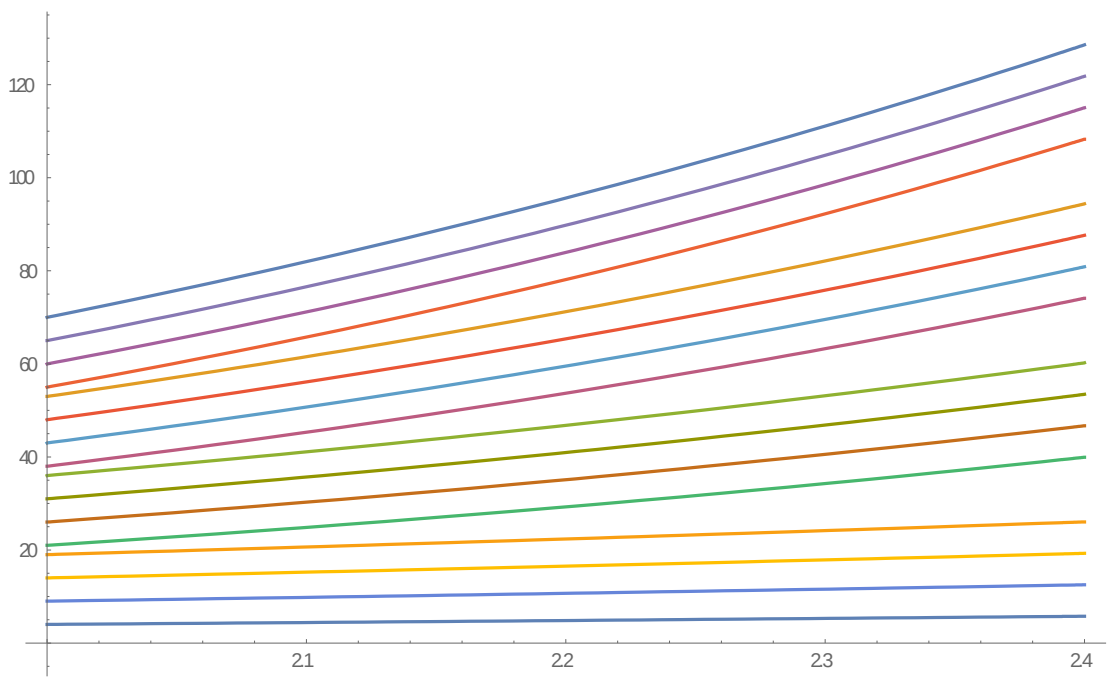

12
10
8
6
4
2
−1.0
−0.5
0.5
1.0

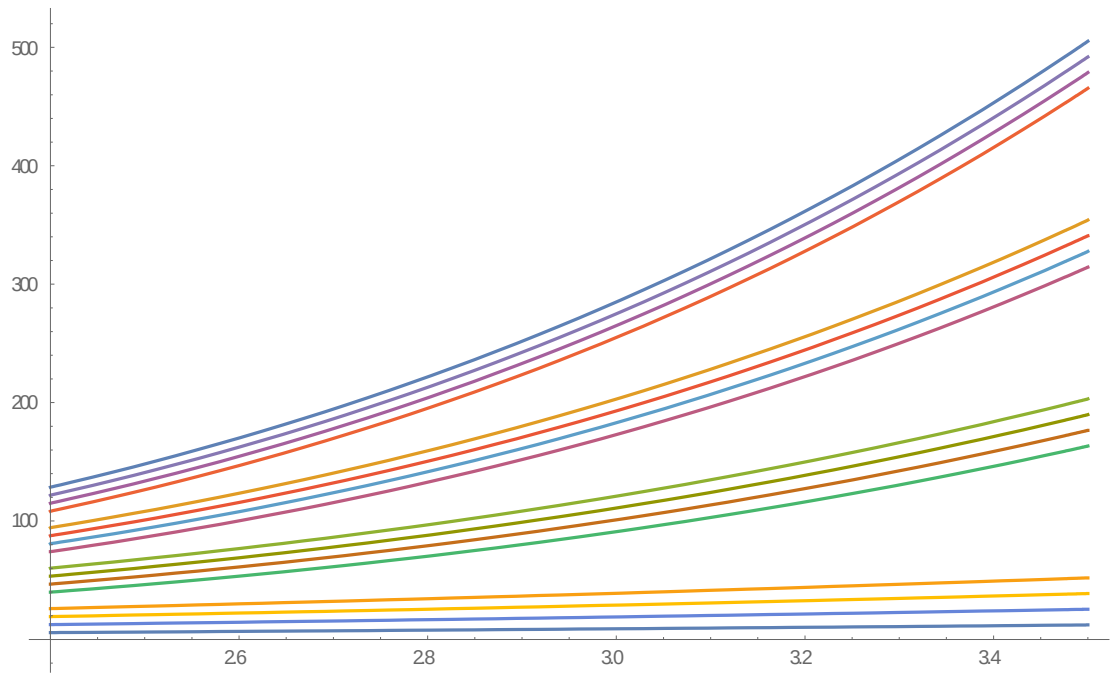

25
20
15
10
5
1.1
1.2
1.3
1.4


35
30
25
20
15
10
5
1.45
1.50
1.55
1.60


60
50
40
30
20
10
1.65
1.70
1.75
1.80
1.85
1.90
1.95


70
60
50
40
30
20
10
1.96
1.97
1.98
1.99
2.00


120
100
80
60
40
20
2.1
2.2
2.3
2.4


500
400
300
200
100
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4

13.7 Chapitre 13

1) Nous pouvons utiliser l'exponentiation. Prenons un carré normal d'ordre 4 :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{B}{\begin{pmatrix} 2^4 & 2^{15} & 2^{14} & 2^1 \\ 2^5 & 2^{10} & 2^{11} & 2^8 \\ 2^9 & 2^6 & 2^7 & 2^{12} \\ 2^{16} & 2^3 & 2^2 & 2^{13} \end{pmatrix}}$$

Le carré A est magique de somme 34 d'où le carré B est multiplicatif de produit

$$2^{34} = 17\ 179\ 869\ 184$$

2) Un cube magique parfait presque normal d'ordre 3 n'existe pas. En effet, chaque face est un carré magique d'ordre 3 et de somme S; elle doit donc contenir dans sa case centrale le nombre S/3, ce qui nous fait au moins six fois le nombre S/3 dans le cube. Celui-ci n'est donc pas presque normal.

3) Soit le carré multiplicatif : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix}$ de produit magique $P \neq 0$.

Nous avons : $AEK = P$; $BEH = P$; $CEG = P$ d'où $(ABC)\,E^3(KHG) = P^3$ et de $PE^3P = P^3$, nous trouvons $E^3 = P$ soit $E = \sqrt[3]{P}$.

Qu'arrive-t-il si $P = 0$? Il se peut que la case centrale soit non nulle!!! Le carré multiplicatif de produit nul $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ renferme un nombre différent de $\sqrt[3]{P}$.

4) Un cube magique parfait presque normal d'ordre 4 n'existe pas. Supposons qu'un cube magique parfait presque normal d'ordre 4 existe. Alors, nous allons trouver une contradiction.

Les huit cases qui forment les huit coins du cube renferment les nombres différents A, B, C, D, E, F, G, H. Le carré de gauche est la face du devant du cube, celui du centre, la face du dessus du cube, celui de droite, la face du dessous du cube.

Je vous invite à dessiner un beau cube et à bien identifier les sommets en vous servant des trois carrés suivants (la case qui contient A se nomme aussi A, …).

A			B
C			D

devant

G			E
A			B

dessus

H			F
C			D

dessous

La preuve est basée sur une propriété que possèdent tous les carrés magiques d'ordre 4 : «la somme des 4 coins est toujours une figure magique» donc la somme des 4 nombres dans les 4 cases en coin est toujours la somme magique S (voir théorème 5.1, section 5.3 du chapitre 5). Aussi, nous allons nous servir du fait que le cube magique est parfait.

Rappelons que «presque normal» signifie que le cube magique est formé d'entiers >1 tous différents deux à deux. Nous avons :

B + D + E + F = S puis G + H + E + F = S d'où B + D = G + H.

Puisque G + H + B + D = S (le cube magique est parfait), alors **G + H = S/2.**

Ensuite nous avons : A + B + E + G = S et C + D + E + G = S d'où A + B + C + D + 2(E + G) = 2S,

S + 2(E + G) = 2S et **E + G = S/2**.

Enfin, G + H = S/2 et E + G = S/2 d'où H = S/2 – G = E et **E = H.** C'est la contradiction. Le cube magique parfait presque normal n'existe donc pas.

5) Le nombre d'alignements NA est $3n^2+6n+4$. Avec $n=4$, NA = 76. Rappelons qu'un alignement est formé de n petits cubes dont les centres sont situés sur une même droite.

Le cube magique de Fermat n'est pas parfait. Seulement 64 alignements sont magiques. Donc 12 alignements ne le sont pas.

Il faut donc regarder 32 rangées et colonnes horizontales, 16 colonnes verticales, 24 diagonales planaires et 4 grandes diagonales spatiales. La somme magique est S = 130.

Nous pouvons voir que les 4 grandes diagonales spatiales ne sont pas magiques.

Considérons la face de devant qui a pour sommets les nombres 49, 52, 61, 64.

Les 2 diagonales dans chacun des 4 carrés parallèles à la face de devant ne sont pas magiques.

Voilà donc les 12 alignements non magiques. Nous vous laissons le soin de vérifier que les 64 autres alignements sont bien magiques.

6) La somme magique est $\frac{n(n^3+1)}{2} = \frac{12(12^3+1)}{2} = 10374.$

7) Avec le fichier «Le compte» dans MATHEMATICA ou le programme «Illustration-figures» construit avec MAPLE (voir 3) de l'annexe 23), nous trouvons 85 figures magiques.

8) Nous trouvons 6786 figures magiques!!!

9) Évidemment, les calculs sont faits avec MATHEMATICA et la commande suivante:

$$\sum_{i=1}^{16\,777\,216} \frac{i^k}{4096}.$$

34359740416

384307202562021376

4835703854919286182117376

649037204030922865808328040468 48

90741980738178745795449310891816360 3456

13049124484142159396460294355134910123554236416

10) Pour le 4-multi-magique : $\sum_{i=1}^{262\,144} \frac{i^k}{512}$

67109120

11728191138560

2305860601433292800

483574939543598221299968

Pour le 5-multi-magique : $\sum_{i=1}^{1\,048\,576} \frac{i^k}{1024}$

536871424 375300505818624 295148468129574682624

247588598153261713654424064 216346321409462707054206961844224

Pour un autre 4-multi-magique : $\sum_{i=1}^{65\,536} \frac{i^k}{256}$

8388736

366512264576

18014948269490176

944509325737451882624

11) Pour obtenir un carré magique à partir d'un carré multiplicatif M, il suffit de logarithmer M en base 2, par exemple.

$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ est un carré multiplicatif de produit P. En logarithmant en base 2, nous obtenons : $log_2 M = \begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b & \log_2 c \\ \log_2 d & \log_2 e & \log_2 f \\ \log_2 g & \log_2 h & \log_2 k \end{pmatrix}$ lequel est magique de somme $\log_2 P$. Par exemple, $\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2(abc) = \log_2 P$.

Le carré magique obtenu peut être normal. Par exemple,

$$M = \begin{pmatrix} 2^4 & 2^9 & 2^2 \\ 2^3 & 2^5 & 2^7 \\ 2^8 & 2^1 & 2^6 \end{pmatrix}$$

est un carré multiplicatif de produit $P = 2^{15}$. En logarithmant en base 2, nous obtenons le carré magique normal : $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

12) Pour construire un carré magique formé de nombres irrationnels seulement, nous pourrions prendre la structure générale des 3x3 dans «Ordre 3» (MATHEMATICA ou EXCEL).

Posons alors $a=\sqrt{2}$; $r=2\sqrt{2}$; $t=5\sqrt{3}$.

Nous obtenons le carré : $\begin{matrix} 5\sqrt{2}+5\sqrt{3} & \sqrt{2}+10\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2}+5\sqrt{3} & 5\sqrt{2}+10\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2}+10\sqrt{3} & 5\sqrt{2} & \sqrt{2}+5\sqrt{3} \end{matrix}$

Il faut maintenant s'assurer que chaque nombre du carré est bien irrationnel. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, il est facile de montrer que $3\sqrt{2}\, et\, 5\sqrt{2}$ le sont aussi.

Pour montrer que le nombre $\sqrt{2}+10\sqrt{3}$ est irrationnel, posons $x=\sqrt{2}+10\sqrt{3}$. Par des élévations au carré, nous trouvons une équation polynomiale à coefficients entiers qui admet $\sqrt{2}+10\sqrt{3}$ comme racine puis nous appliquons le théorème des racines rationnelles. Nous voyons alors que l'équation n'admet aucune racine rationnelle. Donc, $\sqrt{2}+10\sqrt{3}$ est irrationnel.

L'équation est $x^4-604x^2+88804=0$. Les racines rationnelles possibles sont :

$$\{1,2,4,149,298,596,22201,44402,88804\}$$

Elles sont obtenues avec la commande : Divisors [88 804] de MATHEMATICA. Quant aux racines négatives, elles sont inutiles ici car (est une racine ssi $-x$ est une racine).

Autre solution : basée sur le théorème 2.11, page 24 de «Irrational numbers», Ivan Niven, quatrième impression 1997 publié chez MAA.

«Pour tout nombre rationnel positif r, $\log_{10} r$ est irrationnel si $r \neq 10^n$ où n est un entier».

Soit M, un carré multiplicatif de produit $P=32\ 768$.

$$M=\begin{pmatrix} 16 & 512 & 4 \\ 8 & 32 & 128 \\ 256 & 2 & 64 \end{pmatrix}$$

Nous allons le logarithmer en base 10, ce qui donnera un carré magique de somme $S=\log_{10} 32768$, formé de neuf irrationnels puisqu'aucun des nombres de M n'est une puissance entière de 10. Le carré magique cherché est :

$$\begin{pmatrix} \log_{10} 16 & \log_{10} 512 & \log_{10} 4 \\ \log_{10} 8 & \log_{10} 32 & \log_{10} 128 \\ \log_{10} 256 & \log_{10} 2 & \log_{10} 64 \end{pmatrix}$$

13) et14) Problèmes presqu'identiques. 14) est une généralisation de 13). Prenons la structure générale G des carrés magiques d'ordre 3 qui se trouve dans «Ordre 3».

$$G = \begin{matrix} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{matrix}$$

Si $A \neq B$, alors nous trouvons $a+2t \neq a+r+2t$ d'où $r \neq 0$.

Si $A \neq C$, alors nous trouvons $a+2t \neq a+t$ d'où $t \neq 0$.

Donc, $A \neq B$ et $A \neq C$ implique $rt \neq 0$.

Si maintenant notre carré est bi-magique, alors nous trouverons une contradiction. Mettons au carré chaque nombre des deux premières rangées de G puis faisons la somme de chacune :

Première rangée : $3a^2 + 6ar + 5r^2 + 6at + 4rt + 5t^2$

Seconde rangée : $3a^2 + 6ar + 5r^2 + 6at + 10rt + 5t^2$

Pour que le carré G soit bi-magique, il faut que les sommes soient égales d'où $rt = 0$. C'est la contradiction!!! G ne peut donc pas être bi-magique.

Si G est presque normal, alors nous avons $A \neq B et A \neq C$ et G ne peut pas être bi-magique.

Enfin, G bi-magique et presque normal n'existe pas. Donc si G est bi-magique alors il y aura des répétitions dans G.

Il est facile de montrer que seul un carré trivial d'ordre 3 peut être bi-magique.

15) La réponse est oui. Il suffit d'effectuer l'exponentiation dans différentes bases.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2^4 & 2^9 & 2^2 \\ 2^3 & 2^5 & 2^7 \\ 2^8 & 2^1 & 2^6 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3^4 & 3^9 & 3^2 \\ 3^3 & 3^5 & 3^7 \\ 3^8 & 3^1 & 3^6 \end{pmatrix}$$

Et ainsi de suite. Avec M, nous pouvons construire une infinité non dénombrable de carrés multiplicatifs en utilisant une base réelle a quelconque dans $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;\infty[$.

16) Soit M, un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$. Tous les nombres sont différents deux à deux.

Le produit magique ne peut pas être nul car si c'était le cas, nous devrions avoir un zéro par rangée ce qui contredirait le fait que tous les nombres soient différents. Le produit est donc non nul.

14.18 Chapitre 14

1) W devient la matrice identité et $A = BW$ nous donne $B = A$.

2) W devient un carré trivial non nul. Or, il n'est pas toujours possible de trouver B tel que $A = BW$. En effet, BW est toujours un trivial quel que soit le carré magique B (voir le théorème 9.5 de la section 9.4). Si A n'est pas un trivial, alors l'égalité ne peut pas avoir lieu. Donc W n'est pas un diviseur universel.

3) Rappelons d'abord que $W = \begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}$ avec $X \geq 0, Y \geq 0 \, et \; X \neq Y$; cela implique que $X - Y \neq 0 \; et \; X + 2Y \neq 0$. Nous cherchons comment A peut prendre la structure :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$$

Prenons A, un carré magique d'ordre 3 quelconque (voir «Ordre 3».

$$\begin{matrix} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{matrix}$$

Celui-ci aura la structure (*) si et seulement si $t = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+2r \\ a+r & a+2r & a \end{pmatrix}$$

Nous allons montrer que si $A = BW$, alors B sera un carré magique et aura la structure (*).

De $A = BW$, nous trouvons $B = AW^{-1}$. Vous trouverez W^{-1} dans l'annexe 10 où

$S = (X + 2Y)$:

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

$$B = AW^{-1} = \begin{pmatrix} a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+2r \\ a+r & a+2r & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{aX+2rX-aY+rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{aX-aY-3rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{a+r}{X+2Y} \\ \frac{aX-aY-3rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{a+r}{X+2Y} & \frac{aX+2rX-aY+rY}{(X-Y)(X+2Y)} \\ \frac{a+r}{X+2Y} & \frac{aX+2rX-aY+rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{aX-aY-3rY}{(X-Y)(X+2Y)} \end{pmatrix}$$

Le carré B est magique et possède la structure (*). Notez qu'également que W^{-1} a la même structure que W.

4) Dans 14.1, prenons le carré magique M formé de 6 entiers carrés parfaits :

19^2	35^2	17^2
553	25^2	697
31^2	5^2	889

Les 9 entiers de M sont impairs. Nous voulons construire un carré magique formé de 6 entiers carrés parfaits tel que celui-ci soit formé de 9 entiers pairs.

Il suffit de construire le carré 4M ou 16M …. Le carré 4M est donc :

$$\begin{pmatrix} 38^2 & 70^2 & 34^2 \\ 2212 & 50^2 & 2788 \\ 62^2 & 10^2 & 3556 \end{pmatrix}$$

5) Évidemment, dans un carré magique presque normal d'ordre n, la suite des n^2 entiers consécutifs allant de 1 à n^2 est celle qui a la plus petite somme S*. Si nous ne prenons pas cette

suite, alors la nouvelle suite renfermera peut-être certains entiers $\leq n^2$ et a moins un entier $> n^2$. Sa somme S vérifie alors S > S*. Il s'ensuit que la somme magique du carré normal est la plus petite puisque S/n > S*/n.

6) 7) et 8) Le carré suivant est magique et renferme 9 entiers carrés parfaits. Les nombres a, b, c, d, e, f, g, h et k sont des entiers ≥ 0.

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	k^2

a) Si e^2 est un multiple de 7, alors tous les nombres du carré sont des multiples de 7. Nous avons donc $e^2 = 7m$ où m est un entier ≥ 0. Il s'ensuit que la somme magique $S = 3e^2$ est un multiple de 7. Puisque $a^2 + e^2 + k^2 = S$, la somme $a^2 + k^2$ est un multiple de 7. Pour que cela arrive, il faut obligatoirement que $a\, et\, k$ soient des multiples de 7. En effet, voyons ce qui se produit si $a\, et\, k$ ne sont pas des multiples de 7. Tout entier peut s'écrire sous la forme $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+3, 7m+4, 7m+5\, ou\, 7m+6$.

a	k	a^2	k^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	2	2
4	4	2	2
5	5	4	4
6	6	1	1

Par exemple, la sixième ligne nous indique que $a = 7m_1 + 5; k = 7m_2 + 5; a^2 = 7m_3 + 4; k^2 = 7m_4 + 4$. Maintenant, si nous faisons toutes les sommes possibles dans les deux dernières colonnes, nous n'obtiendrons jamais un multiple de 7 sauf $0 + 0$. Donc la seule façon pour que $a^2 + k^2$ soit un multiple de 7 est que $a^2\, et\, k^2$ soient des multiples de 7. La suite se fait de la même façon et tous les nombres du carré sont des multiples de 7. Par exemple, $b^2 + e^2 + h^2 = S$...

b) e^2 est un multiple de 11. C'est la même démarche. Passons au tableau :

a	k	a^2	k^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	9	9
4	4	5	5
5	5	3	3
6	6	3	3
7	7	5	5
8	8	9	9
9	9	4	4
10	10	1	1

Maintenant, si nous faisons toutes les sommes possibles dans les deux dernières colonnes, nous n'obtiendrons jamais un multiple de 11 sauf $0+0$. Tous les nombres du carré sont des multiples de 11.

c) e^2 est un multiple de 5. Même démarche. Voyons le tableau :

a	k	a^2	k^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	4	4
4	4	1	1

Si nous faisons toutes les sommes possibles dans les deux dernières colonnes, nous trouvons au moins un multiple de 5. Nous ne pouvons donc pas affirmer que si a^2+k^2 est un multiple de 5, alors a^2 *et* k^2 le sont.

9) Si un carré magique possède l'antisymétrie centrale, alors sa somme magique est nulle. En effet, une matrice qui possède l'antisymétrie centrale a une grande diagonale principale formée exclusivement de zéros d'où S = 0.

10) Aucun n'est associatif sauf, **peut-être**, le carré de centre 13. En effet, tous ces carrés magiques sont normaux donc de somme S = 65. Si un carré magique d'ordre impair n est associatif, alors son centre est S/n soit ici 65/5 = 13. Tous ceux dont le centre n'est pas 13 ne peuvent pas être associatifs.

11) Le seul qui pourrait être associatif est celui de centre u = 13. Il est facile de vérifier qu'effectivement ce carré de centre 13 est bien associatif (deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent 2S/5 = 26). De plus, toutes les diagonales, grandes et brisées sont des figures magiques; le carré de centre 13 est donc un ultra-magique.

12) Un exemple suffit pour nous convaincre :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A

40	90	20
30	50	70
80	10	60

B

47	97	27
37	57	77
87	17	67

C

Nous prendrons B = 10A et C = B + 7. D'une façon générale, A est un carré magique normal d'ordre n (ou presque normal), B = 10A ou 100A ou 1000A …et C = B + k où k varie de 0 à 9.

Tous ces carrés sont horizontaux et verticaux (voir 14.13 pour les définitions ou le glossaire 2).

13) Nous allons faire : M' = 10M + 7.

1	47	6	43	5	48
35	17	30	21	31	16
36	12	41	8	40	13
7	45	2	49	3	44
29	19	34	15	33	20
42	10	37	14	38	9

M

17	477	67	437	57	487
357	177	307	217	317	167
367	127	417	87	407	137
77	457	27	497	37	447
297	197	347	157	337	207
427	107	377	147	387	97

M'

14) C'est le théorème 14.15 et sa démonstration est dans l'annexe 13.

15) Voyez la démonstration du théorème 14.14 dans l'annexe 13.

16) Consultez l'annexe 13, premier encadré vert. Supposons que nous voulions n^2+2 entiers consécutifs dans un intervalle $[p\ ;\ q]$ tel que celui-ci ne contienne que deux nombres premiers $p\,et\,q$. Nous savons que cela est toujours possible. Nous prendrons ici $n \geq 3$.

Maintenant, nous savons qu'avec n^2 entiers consécutifs, nous pouvons toujours construire un carré magique.

Pour le carré d'ordre n, nous prendrons p et les $n^2 - 1$ entiers qui suivent le nombre premier p. Ce carré magique contiendra un seul nombre premier soit p.

Pour le carré d'ordre $n-1$, nous prendrons p et les $(n-1)^2 - 1$ entiers qui suivent p.

Et ainsi de suite jusqu'au carré d'ordre 3.

Tous ces carrés magiques contiendront un seul nombre premier, le même pour tous $(ici\ p)$. Ils seront évidemment presque normaux car formés d'entiers consécutifs.

Dans ces carrés, p sera toujours le plus petit entier. Notez que nous aurions pu prendre le nombre premier q au lieu de p.

17) Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous savons qu'il existe un carré magique normal et une infinité de presque normaux (chapitre 11). Soit M, un tel carré magique. Le carré 4M est un carré composé presque normal. Il y en a une infinité pour chaque ordre.

18) Consultez l'annexe 11, page 1, le tableau «ordre 5». Prenez un carré magique normal M d'ordre 5 puis ajoutez dans toutes ses cases le nombre premier 71 ou 31 ou 11 ou 3 ou 2 pour avoir respectivement un carré magique qui contiendra 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 nombres premiers. Dans tous les cas, le carré sera formé de 25 entiers consécutifs.

$$M + 2 = 8$$
$$M + 3 = 7$$
$$M + 11 = 6$$
$$M + 31 = 5$$
$$M + 71 = 4$$

19) Les deux nombres premiers sont 359 et 367. Ajoutons 5 dans toutes les cases et nous trouverons un seul nombre premier soit 362 + 5 = 367. Pour avoir trois nombres premiers, il suffit d'ajouter le nombre 97 dans toutes les cases du carré.

20) Le carré doit avoir 27 dans sa case centrale. Si M est normal, alors M + 22 contiendra 27 dans sa case centrale et il n'y aura que 3 nombres premiers dans M + 22 soient 23, 29 et 31.

21) Ces trois carrés sont dans 14.13. Nous avons construit M_{13} avec «Ordre 5» dans MATHEMATICA donc avec l'algorithme ALG-1 (vous verrez a = 199, r = 1 et t = 5 juste au-dessus de M_{13}). C'est pourquoi M_{13} est associatif. Les carrés $M_{11}\ et\ M_{12}$ sont-ils produits avec ALG-1? Comment proviennent-ils des fichiers «Ordre 3» et «Ordre 5»?

Oui, ils proviennent de l'algorithme ALG-1. Pour M_{11}, a = 89, r = 1 et t = 3. Pour M_{12}, a = 1669, r = 1 et t = 5. Les trois carrés sont associatifs car ils sont fabriqués avec ALG-1.

22) Un carré magique d'ordre 2 est trivial :

m	m
m	m

Avons-nous 2m = 2S/n = 4m/2 ? OUI.

Tous les carrés magiques d'ordre 2 sont donc associatifs.

23) Prenons un carré magique normal d'ordre 5 avec 24 comme centre (voir 6.1). Ce carré ne peut pas être associatif car son centre est différent de S/5 = 65/5 = 13.

12	9	60	23	16
80	18	11	7	4
6	2	24	75	13
19	70	8	1	22
3	21	17	14	65

Les cases vertes forment une figure complète. Nous voulons que le centre soit S/5 = 24 donc que S = 120. Nous allons ajouter 55 dans les cases de la figure complète et la somme magique S du nouveau carré sera 65 + 55 = 120.

Ainsi, nous avons un carré magique presque normal de somme S = 120, son centre est S/5 = 120/5 = 24 et ce carré n'est clairement pas associatif.

24) Il est très facile de constater qu'avec la structure générale (1) des carrés magiques d'ordre 3, la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours 2S/3.

Avec la structure (1.1), nous trouvons toujours 2S/3 = 2A + 2r + 2t.

25) Construisez un carré normal M avec «Ordre 10» puis utilisez l'annexe 11, page 4, Ordre 10.

Le carré M + 1 contient exactement 26 nombres premiers.

26) Consultez l'annexe 11.

a) $g_9(A) = 0$ pour $A = M + 155921$ où M est un carré normal d'ordre 9 fait avec le fichier «Ordre 9», par exemple.

b) $g_3(A) = 3$ pour $A = M + 3$ où M est un carré normal d'ordre 3 fait avec le fichier «Ordre 3», par exemple.

c) $g_{13}(A) = 13$ pour $A = M + 6373$ où M est un carré normal d'ordre 13 fait avec le fichier «Ordre 13», par exemple.

d) $g_{13}(A) = 20$ pour $A = M + 1103$ où M est un carré normal d'ordre 13 fait avec le fichier «Ordre 13», par exemple.

27) La réponse est oui!!! L'annexe 11 nous montre que $g_5(M + 109) = 3$ où M est un carré magique normal quelconque d'ordre 5.

Nous avons 275 305 224 carrés magiques normaux primitifs d'ordre 5. Chacun peut prendre la place de M et nous aurons alors 275 305 224 carrés magiques presque normaux primitifs qui renferment exactement 3 nombres premiers.

28) Consultez l'annexe 7.

g) Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un seul triplet jumeau.

Triplet de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 4) = triplet jumeau

Nous connaissons le triplet $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$ et c'est le seul!!! Nous l'appelons **triplet jumeau.** Lorsque $2 \le p \le 11$, nous trouvons 1 seul triplet jumeau: $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$. Soit maintenant $p \ge 13$, un nombre premier. Tous les entiers ≥ 12 ont la forme $3k\ ou\ 3k+1\ ou\ 3k+2$ avec k, un entier ≥ 4. Donc, un nombre premier ≥ 12 aura la forme $3k+1\ ou\ 3k+2$.

Avec $p = 3k+1$, le triplet devient $(3k+1\ ;\ 3k+3\ ;\ 3k+5)$ et $3k+3 = 3(k+1)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+1 \ge 5$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

Avec $p = 3k+2$, le triplet devient $(3k+2\ ;\ 3(k+1)+1\ ;\ 3k+6)$. Nous voyons que $3k+6 = 3(k+2)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+2 \ge 6$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

h) Un quadruplet jumeau est un quadruplet de la forme :

$$(p\ ;\ p+2\ ;\ p+4\ ;\ p+6).$$

Un tel quadruplet ne peut pas exister car si c'était le cas, nous aurions deux triplets jumeaux ce qui contredit g). Mais puisqu'il existe un seul triplet jumeau, pouvons-nous avoir un seul quadruplet jumeau? La réponse est évidemment non car nous aurions (3 ; 5 ; 7 ; 9).

i) De même pour les n-uplets jumeaux : (p ; p + 2 ; p + 4 ; p + 6 ; p + 8 ; …).

j) Un quadruplet jumeau voisin a la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$. Le premier est $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13)$. C'est le seul qui ne respecte pas la règle 1-3-7-9. Si $p > 7$, alors dans tout quadruplet jumeau voisin, les quatre entiers se terminent toujours par 1, 3, 7, 9, dans cet ordre. En effet, puisque ce sont des nombres premiers > 7, ceux-ci doivent se terminer par 1, 3, 7 ou 9. Il reste à montrer que c'est bien dans cet ordre.
Si p se termine par 3, alors les quatre entiers du quadruplet se terminent par 3, 5, 9, 1 et nous n'avons pas quatre nombres premiers à cause du 5.

Si p se termine par 7, alors de même : 7, 9, 3, 5.

Si p se termine par 9, alors de même : 9, 1, 5, 7.

Il ne reste donc que 1, 3, 7, 9, dans cet ordre.

k) Avec «Ordre 3», posons a = 101, r = 2 et t = 6 puis a = 11, r = 2 et t = 6. Nous trouvons :

111	113	103
101	109	117
115	105	107

21	23	13
11	19	27
25	15	17

Le carré de gauche contient un seul quadruplet jumeau voisin : $(101\,;103\,;107\,;109)$.

Le carré de droite contient un seul quadruplet jumeau voisin : $(11\,;13\,;17\,;19)$.

Nous voyons également que tout quadruplet jumeau voisin peut se retrouver dans un carré magique d'ordre 3.

$p+10$	$p+12$	$p+2$
p	$p+8$	$p+16$
$p+14$	$p+4$	$p+6$

$S=3p+24$

Il existe toujours un carré magique d'ordre 3 qui contient les quatre nombres premiers de tout quadruplet jumeau voisin $(p\,;\ p+2\,;\ p+6\,;\ p+8)$ **!!!**

l) Avec «Ordre 3», posons a = 5, r = 2 et t = 6. Nous trouvons :

15	17	7
5	13	21
19	9	11

Le carré contient $(5\,;\ 7\,;11\,;13)$ et $(11\,;13\,;17\,;19)$. Il contient aussi le seul 6-uplet jumeau voisin soit $(5\,;\ 7\,;11\,;13\,;17\,;19)$.

m) Avec «Ordre 11», construisons un carré magique normal. Nous y trouverons les trois premiers quadruplets jumeaux voisins :

$$(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13),\ (11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19),(101\ ;\ 103\ ;\ 107\ ;\ 109).$$

n) Nous allons construire un carré magique normal dont l'ordre est à déterminer. Puis avec «Quadruplets jumeaux voisins» dans MAPLE, nous allons prendre les neuf premiers quadruplets et constater que le neuvième se termine par 3259. Il nous faut construire un carré normal d'ordre 58 car $\sqrt{3259} = 57,087....$ Nous y trouverons les neuf premiers quadruplets.

o) Le quinzième quadruplet se termine par 15739 et $\sqrt{15739} = 125,455....$ Nous construirons un carré normal d'ordre 126 qui contiendra les quinze premiers quadruplets.

29) Pour la solution, voir le théorème 4 de l'annexe 7.

30) Puisqu'un 6-uplet jumeau voisin renferme un quadruplet jumeau voisin, alors le 6-uplet jumeau voisin a obligatoirement la forme suivante lorsque $p \geq 11\ soit\ (p > 7)$:

$$(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23\ ;\ 30k+25)\ ;\ k \text{ entier} \geq 0.$$

Il est clair que ce 6-uplet ne contient pas 6 nombres premiers. Le seul 6-uplet jumeau voisin est donc : $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19)$.

31) La seule solution est m = 2 et n = 83. En effet, tous les autres nombres premiers sont impairs et impair + 81 est toujours pair.

32) Voici un Dürer presque normal de somme S = 60. Il contient un quadruplet jumeau voisin.

11	13	17	19
20	16	18	6
8	2	24	26
21	29	1	9

33) Il existe une infinité de quadruplets jumeaux voisins. **C'est une conjecture** basée sur les 180 619 quadruplets que nous avons trouvés (voir 14) de l'annexe 7).

34) Le problème 59 de 5.18 nous montre qu'il existe une figure complète pour tous les carrés d'ordres $n \geq 4$. Nous partirons d'un carré magique presque normal M d'ordre n > 3 et de somme S puis nous y placerons une figure complète. Nous ajouterons l'entier positif k dans toutes les cases de la figure complète de façon à obtenir aucune

répétition (le carré sera toujours magique et presque normal). Enfin, nous ajouterons dans toutes les cases de la figure complète de M + k, respectivement les entiers 1, 2, 3, 4, 5, …. Nous obtiendrons alors une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de S + k. (Voir 14.17 du chapitre 14).

35) Puisque la somme magique S d'un carré magique d'ordre 3 est toujours 3c où c est l'entier de la case centrale, alors les sommes ne peuvent pas être consécutives. En effet, si le centre renferme l'entier c + 1, alors la somme devient S + 3.

36) Voici notre carré magique presque normal avant les permutations :

$A =$

a	b	i						e	f
c	d	j						g	h
			λ						
α	β								
m	p							w	x
r	s							y	z

Le carré suivant après les permutations :

$f_4^n(A) =$

d	c	j						h	g
b	a	i						f	e
			λ						
β	α								
s	r							z	y
p	m							x	w

Ce dernier carré est toujours magique et presque normal.

Démontrons maintenant le théorème :

1) $f_4^n(A+B) = f_4^n(A) + f_4^n(B)$. Regardons ce qui se passe dans le 2x2 du coin haut gauche :

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow f_4^n(A) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \rightarrow f_4^n(B) \begin{pmatrix} d' & c' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

$$A+B \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \rightarrow f_4^n(A+B) \begin{pmatrix} d+d' & c+c' \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix}$$

Regardez comment la fonction f_4^n agit sur les cases blanches et les cases vertes.

Vous pourrez alors déduire que $f_4^n(A+B) = f_4^n(A) + f_4^n(B)$.

2) $$M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow f_4^n(M) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow k\, f_4^n(M) \begin{pmatrix} kd & kc \\ kb & ka \end{pmatrix}$$

$$k\,M \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \rightarrow f_4^n(k\,M) \begin{pmatrix} kd & kc \\ kb & ka \end{pmatrix}$$

Regardez comment la fonction f_4^n agit sur les cases blanches et les cases vertes.

Vous pourrez alors déduire que $f_4^n(k\,M) = k\, f_4^n(M)$.

3) $$M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow f_4^n(M) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow f_4^n(f_4^n(M)) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

D'où $f_4^n(f_4^n(M)) = M$.

4) Montrons que $A \neq B \Rightarrow f_4^n(A) \neq f_4^n(B)$. Supposons $f_4^n(A) = f_4^n(B)$. Nous avons alors $f_4^n(f_4^n(A)) = f_4^n(f_4^n(B))$ d'où $A = B$. Contradiction puisque nous avions $A \neq B$. La fonction f_4^n est donc injective.

Soit maintenant M, un carré magique d'ordre n. Il existe un carré magique d'ordre n, soit $f_4^n(M)$, tel que $f_4^n(f_4^n(M)) = M$. La fonction f_4^n est donc surjective.

Finalement, c'est une bijection de $E_n \rightarrow E_n$.

C'est aussi un automorphisme de E_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre n.

37) Il faut trouver toutes les paires de cases qui totalisent 104 = 306 – 41 – 53 – 47 – 61. Nous regardons chaque entier w du carré en-dehors du carré central 2x2. Nous regardons si 104 – w se trouve dans le carré en-dehors du carré central 2x2. Nous trouvons ainsi 8 paires soient :

(28 ; 76) (31 ; 73) (34 ; 70) (36 ; 68) (37 ; 67) (38 ; 66) (42 ; 62) (46 ; 58)

Donc il existe 8 figures magiques qui renferment les cases centrales du 2x2.

38) Le carré $e = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la multiplication. Supposons que le carré $U = \begin{pmatrix} u & u & u & u \\ u & u & u & u \\ u & u & u & u \\ u & u & u & u \end{pmatrix}$ soit un autre élément neutre (une autre unité) pour la multiplication. Alors, quel que soit le nombre $a \neq 0$, nous avons :

$$U\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}U = \begin{pmatrix} 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \\ 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \\ 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \\ 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$$

Ce qui implique $4ua = a$ et $4u = 1$ puisque $a \neq 0$. Enfin $u = 1/4$. Nous avons donc $U = e$ d'où l'unicité de l'élément neutre.

39) Soit A, un trivial formé du nombre $a \neq 0$. Son inverse est en rouge.

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que $M = \begin{pmatrix} m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \end{pmatrix}$ soit un autre inverse avec $m \neq 0$.

Alors nous aurions : $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $4am = \frac{1}{4}$ et $m = \frac{1}{16a}$. L'inverse est donc unique.

40) **Question 1** :

L'ensemble A est celui des carrés semi-magiques d'ordre 4. Ceux-ci forment un groupe abélien pour l'addition. Puisque le produit (matriciel) de deux carrés semi-magiques est un carré semi-magique, alors A possède une structure d'anneau unitaire. En effet, la matrice unité I est l'élément neutre pour la multiplication matricielle; celle-ci est un carré semi-magique qui renferme que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. Enfin, l'anneau A est infini et non commutatif.

L'ensemble B est celui des super-Dürer-bêta. Si M et M' sont des super-Dürer-bêta, alors MM' est un trivial (voir le théorème de 9.6 de 9.4) donc un super-Dürer-bêta. L'ensemble B est un anneau commutatif (théorème 9.6) mais il n'est pas unitaire.
En effet, supposons que B contienne une unité U et que M soit un super-Dürer-bêta non trivial (il en existe une infinité). Alors nous avons UM = M et UM = trivial d'où la contradiction et B n'est pas unitaire.
N'oublions pas que les propriétés des matrices carrées sont transmises aux carrés semi-magiques et magiques!!!

L'ensemble C est celui des triviaux d'ordre 4. Le théorème 9.2 nous montre que le produit est un trivial. L'ensemble C est aussi un anneau commutatif selon le théorème 9.2. De plus, il est unitaire. Le carré trivial e du problème 38 ci-haut est l'élément neutre pour la multiplication dans C. Montrons que C est un corps commutatif. Il est commutatif car l'anneau l'est. Enfin, chaque trivial non nul est inversible puisque :

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse est en rouge et C est un corps commutatif.

Question 2 :

L'anneau commutatif non unitaire A est celui des super-Dürer-bêta. L'anneau B est celui des triviaux d'ordre 4. Les théorèmes du chapitre 9 nous permettent d'affirmer que :

$$\forall x \in A \; et \; \forall y \in A, \; xy \in B$$

Question 3 :

La matrice carrée M a un déterminant nul. De plus, M est inversible!!! Expliquez.
Prenons M, une matrice triviale dans le corps commutatif des carrés triviaux d'ordre 4.
Nous voyons, plus haut, que l'inverse d'un trivial non nul est un trivial non nul et que :

$$\text{trivial x son inverse} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = J$$

où J est l'élément neutre pour la multiplication dans le corps des triviaux lequel ne contient pas I. (voir question 1 ci-haut). Bien entendu, I n'est pas un trivial.

Nous connaissons le résultat suivant : «Une matrice carrée M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ ». Ici, la matrice unité (élément neutre pour la multiplication des matrices carrées) est I et non plus J.

Nous avons : $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot I$ et non pas $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot J$.

«Une matrice carrée M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ » est une conséquence de $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot I$.

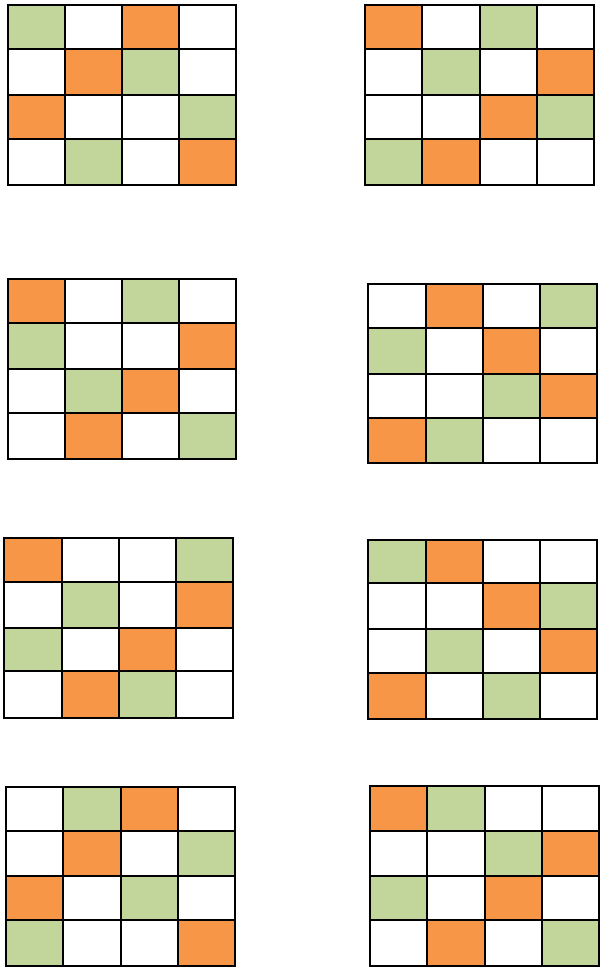
Question 4 : L'anneau A sera l'ensemble des carrés semi-magiques d'ordre 4 et B, l'ensemble des triviaux. Nous prendrons $u = I \; et \; v = J$. Nous aurons alors :

$$x\,I = I\,x = x \quad \forall x \in B$$
$$x\,J = J\,x = x \quad \forall x \in B$$

41) Aucun carré d'ordre 4 ne possède une figure complète pandiagonale.
Mentionnons d'abord que tout carré d'ordre 4 possède une seule figure complète et ses sept équivalents. Elles sont en vert dans les huit carrés suivants.

Pour montrer qu'aucune figure complète n'est pandiagonale, il suffit de trouver, pour chacun des huit carrés suivants, une diagonale brisée que ne contient pas de case verte.

Ici, une diagonale brisée qui ne contient pas de case verte est illustrée en orangé. Une seule suffit.



42) Le carré de droite est un Dürer de somme S = 33.

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

0	8	15	10
14	11	3	5
12	13	6	2
7	1	9	16

Nous avons choisi une figure complète qui renferme les quatre plus petits entiers du carré (carré de gauche). Puis nous avons enlevé 1 dans les cases de la figure complète afin d'abaisser la somme de 34 à 33 (carré de droite).

43) Nous avons trouvé les quatre carrés suivants :

1	6	12	15
11	16	2	5
14	9	7	4
8	3	13	10

1	7	10	16
12	14	3	5
15	9	8	2
6	4	13	11

1	7	10	16
15	9	8	2
12	4	13	5
6	14	3	11

8	10	15	1
9	3	6	16
4	14	11	5
13	7	2	12

Ces quatre carrés magiques renferment une figure complète qui contient les quatre plus petits entiers de chaque carré. Il reste à enlever 1 dans chaque case de la figure complète de chaque carré. Les quatre carrés auront S = 33 comme somme magique. Les deux carrés du haut sont des Dürer mais pas les deux du bas.

44) Nous vous présentons ici le plus beau carré magique d'ordre 6 (voir section 14.17):

Claude Bégin; Claude St-Hilaire : 6 avril 2016

15	10	4	24	27	31
25	17	9	32	2	26
3	33	14	21	28	12
34	30	19	7	8	13
16	20	29	5	35	6
18	1	36	22	11	23

Premier carré normal idéal connu d'ordre 6

Il est normal de somme S = 111 et possède une figure complète idéale. Ajoutons 114 dans toutes les cases du carré. Celui-ci devient presque normal de somme S = 6x114 + 111 = 795.

Enfin, ajoutons 5 dans toutes les cases de la figure complète. Le carré obtenu est donc presque normal avec 115 comme plus petit entier et S = 800.

Cette solution n'est pas unique. En effet, nous pouvons prendre le carré normal qui suit avec sa figure complète. Le procédé est exactement le même.

15	10	5	20	30	31
26	13	11	32	2	27
18	33	7	25	9	19
28	21	23	24	1	14
16	22	29	6	35	3
8	12	36	4	34	17

45) Consultez l'annexe 10 et 14.3 du chapitre 14.

a) $Det(M) = 360.$

b) $Det(W) = X^3 - 3XY^2 + 2Y^3 = (X-Y)^2(X+2Y).$ Celui-ci s'annule lorsque $X = Y$ ou $X = -2Y.$

c) Si $X \geq 0 \, et \, Y \geq 0,$ alors $Det(W) \neq 0$ dès que $X \neq Y.$ En effet, $X \neq Y$ implique que $(X-Y)^2$ est un entier $> 0.$ Le facteur $(X+2Y) \neq 0$ car si $X = 0,$ alors $Y > 0$ et si $Y = 0,$ alors $X > 0.$ Dans tous les cas, $(X+2Y) \neq 0$ en incluant évidemment le cas $X > 0$ et $Y > 0.$ **Notez que la définition de diviseur universel** W **implique** $Det(W) \neq 0.$

d) Voyons les deux produits suivant : $M'W \, et \, WM'$:

Dans les deux cas, nous obtenons :

$$M'W = WM' = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} = M$$

Pour trouver M', nous avons fait $M' = MW^{-1} = W^{-1}M.$

Notons que $X^2 + XY - 2Y^2 = (X-Y)(X+2Y).$

$$\underset{M'}{\begin{matrix} \frac{4X-7Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{3(3X+Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{2X-11Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{3(X-3Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{5}{X+2Y} & \frac{7X-Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{8X+Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{X-13Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{6X-3Y}{X^2+XY-2Y^2} \end{matrix}} \cdot \underset{W}{\begin{matrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{matrix}}$$

$$\underset{W}{\begin{matrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{matrix}} \cdot \underset{M'}{\begin{matrix} \frac{4X-7Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{3(3X+Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{2X-11Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{3(X-3Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{5}{X+2Y} & \frac{7X-Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{8X+Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{X-13Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{6X-3Y}{X^2+XY-2Y^2} \end{matrix}}$$

e)

$$\underset{Z}{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}} = \underset{ZW}{\begin{pmatrix} aX+2bY & bX+aY+bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & aX+2bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & bX+aY+bY & aX+2bY \end{pmatrix}}$$

$$\underset{W}{\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}} \underset{Z}{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}} = \underset{WZ}{\begin{pmatrix} aX+2bY & bX+aY+bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & aX+2bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & bX+aY+bY & aX+2bY \end{pmatrix}}$$

Nous voyons bien que $ZW = WZ$ et que ZW a la même structure que W.

f)

Nous avons vu en d) et dans 14.3 que $M = WM_1$ avec M_1 magique lorsque M est magique. À son tour, M_1 magique fait que $M_1 = W M_2$ où M_2 est magique, et ainsi de suite. Donc $M = W(W(WM_3)) = W^3 M_3$ avec M_3 magique. Nous pouvons continuer ainsi jusqu'à $M = W^k M_k$ où M_k est magique et k, un entier ≥ 1. Si $Det(M) \neq 0$ alors $Det(M_k) \neq 0$. En effet, $Det(W) \neq 0$ et $Det(M) \neq 0$ donc $Det(M_k) \neq 0$ puisque nous avons toujours $Det(AB) = Det(A) \times Det(B)$. Ici, $M = WWW...W M_k$.

g)

Le carré $W^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $et\ M' = M(W^4)^{-1} = \begin{matrix} -\frac{11}{16} & \frac{69}{16} & -\frac{43}{16} \\ -\frac{27}{16} & \frac{5}{16} & \frac{37}{16} \\ \frac{53}{16} & -\frac{59}{16} & \frac{21}{16} \end{matrix}$

Le carré M' est magique. Puis $M = W^4 M' = M' W^4$.

h)

Si $Det(M) = 0$, alors $Det(M') = 0$. Cependant, nous avons $M = M'W = WM'$ mais nous ne pouvons pas écrire $W = \dfrac{M}{M'}$.

46) Nous voulons montrer que si A est associatif, alors il en est de même de $k\,A + m$.
Le carré magique A est associatif et de somme S signifie que si x et y sont dans des cases symétriques par rapport au centre du carré, alors $x + y = \dfrac{2S}{n}$.

Dans $k\,A$, la nouvelle somme est $k\,S$. Puis nous avons :

$$k\,x + k\,y = k(x+y) = k\frac{2S}{n} = 2\frac{k\,S}{n}.$$

Le carré $k\,A$ est donc associatif.

Dans $k\,A + m$, la nouvelle somme est $k\,S + n\,m$. Puis nous avons :

$$(k\,x + m) + (k\,y + m) = k\,(x+y) + 2m = k\frac{2S}{n} + \frac{2n\,m}{n} = \frac{2}{n}\left(k\,S + n\,m\right).$$

Le carré $k\,A + m$ est donc associatif.

47) Si A est associatif et d'ordre n impair, alors voyons ce que nous trouvons sur la grande diagonale principale. Nous avons $\dfrac{n-1}{2}$ groupes de 2 cases symétriques par rapport au centre du carré dont la somme est $\dfrac{n-1}{2} \times \dfrac{2S}{n} = \dfrac{n\,S - S}{n}$. Le nombre dans la case centrale est donc : $S - \dfrac{n\,S - S}{n} = \dfrac{n\,S}{n} - \dfrac{n\,S - S}{n} = \dfrac{S}{n}$. Nous venons de voir que : si A est associatif, alors le centre est $\dfrac{S}{n}$. Donc, si le centre n'est pas $\dfrac{S}{n}$, alors A n'est pas

associatif. Nous pouvons dire qu'une condition nécessaire pour que A soit associatif est que le centre soit $\frac{S}{n}$ car si ce n'est pas $\frac{S}{n}$, alors A n'est pas associatif.

48)

a) Le carré M''est bien magique. En effet, M'est clairement semi-magique ainsi que M''. Enfin, nous voyons que sur les grandes diagonales de M'', les nombres a et b sont toujours sur la même diagonale ainsi que c et d, quoique permutés.

		a					c		
		d					b		

M

Dans les zones vertes, aucun nombre ne bouge avec les deux permutations.

b)

k					
	a			c	
	d			b	
					m

M

k					
	b			d	
	c			a	
					m

M''

Supposons que M soit presque normal. Nous voyons bien que M et M'' sont primitifs car aucun équivalent de M ne peut être égal à M'' puisque a est différent de b. Nous avons ka dans M mais kb dans M''.

c)

a					c
d					b

M

b					d
c					a

M’’

		a	c		
		d	b		

M

		b	d		
		c	a		

M’’

49) Dans l’annexe 11, première page, nous voyons que pour avoir un carré magique d’ordre 5 qui contient un seul nombre premier, il suffit d’ajouter le nombre premier 1123 dans toutes les cases d’un carré normal. Ce nombre premier est 1129 soit 1123 + 6. Si nous prenons le carré de centre 6 de 6.1, nous aurons le seul nombre premier dans la case centrale d’où le «bel-intrus-1129». Celui-ci est pandiagonal.

50) Les deux carrés suivants sont magiques de sommes 123 et 131. Ce sont deux Ariane.

23	1	54	5	40
56	27	3	24	13
4	43	15	32	29
10	14	42	37	20
30	38	9	25	21

A

23	1	58	5	44
56	31	3	24	17
8	43	15	36	29
10	14	46	41	20
34	42	9	25	21

B

23	1	54	5	40
57	27	3	24	13
4	43	15	32	29
10	14	42	37	20
30	38	9	25	21

A’

23	1	58	5	44
55	31	3	24	17
8	43	15	36	29
10	14	46	41	20
34	42	9	25	21

B’

Dans les cases blanches, nous avons maintenant 57 et 55, ce qui rend les deux carrés non magiques.
La somme magique de (A + B) est 123 + 131 = 254.
Avec (A’ + B’), la somme dans chaque rangée, excepté la deuxième, est 254. La somme dans toutes les colonnes, excepté la première à gauche, est 254. De même pour les deux grandes diagonales.
Dans la deuxième rangée, la somme est (123 + 1) + (131 – 1) = 254. De même dans la première colonne.
Le carré A’ + B’ est donc magique.

51) Avec le procédé DM, voir 14.17.1, le carré d’ordre $mn = 2p$ n’est pas possible. Nous avons $m \geq 3, n \geq 3,$ puis p premier implique $m = 2 et\, n = p\ ou\ m = p et\, n = 2.$ De plus, avec $n = 2 ou\, m = 2,$ nous aurons un carré trivial et le carré d’ordre mn doit être normal.

52) Ce carré arithmétique de somme 160 est défini avec a = 4, r = 2 et t = 12.

36	54	22	40	8
6	34	52	20	48
46	4	32	60	18
16	44	12	30	58
56	24	42	10	28

Pour avoir un vertical-alpha formé que d’entiers impairs, il suffit d’ajouter un impair ≥ 1 dans toutes les cases. C’est ce qui arrive, par exemple, avec a = 5. Nous trouvons :

37	55	23	41	9
7	35	53	21	49
47	5	33	61	19
17	45	13	31	59
57	25	43	11	29

Passer de a = 4 à a = 5 est équivalent à ajouter 1 dans toutes les cases du premier carré.

53) Vous trouverez la solution dans l'annexe 5.

54) Nous trouvons que r *et* t se terminent par 0 puisqu'ils sont des multiples de 10. Tous les nombres du carré se terminent donc par le dernier chiffre de a. Ainsi, le carré est à la fois vertical et horizontal. De plus, nous en avons trouvé avec des répétitions car la condition suffisante pour ne pas avoir de répétition n'était pas respectée (avec r = 10 et t = 40 par exemple).

55) Le carré magique d'ordre impair est vertical. Cela signifie que dans chaque colonne, tous les entiers se terminent par le même chiffre. Si un entier est impair, par exemple, alors la somme magique sera impaire. Donc, dans les autres colonnes, la somme est impaire d'où chaque entier de la colonne est impair et alors, tous les entiers du carré sont impairs. De même si nous trouvons un entier pair dans le carré; alors, tous les entiers seront pairs.

56) Puisque les 25 carrés d'ordre 3 sont magiques, alors la somme des 5 cases de chaque figure est un carré magique. Nous allons vérifier que chaque figure est bien magique car la somme est le carré S'. Ce qui est fait. Dans les trois cas, nous avons trouvé S'.

Nous pouvions aussi constater que ces trois figures sont des figures magiques dans la structure générale M' juste au-dessus du grand carré 15x15. C'est avec cette structure que nous avons construit le carré 5x5 formé de carrés 3x3.

57) Dans le carré normal, la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est $\frac{2\times 369}{9}=82$. La somme des cases correspondantes dans M est :

$82=5+7.11=5\bmod(11)$ soit $\frac{2S}{9}=\frac{2\times 6\bmod(11)}{9}=5\times 12\bmod(11)=5\bmod(11)$.

En effet, $S=369=6\bmod(11)$ et l'inverse multiplicatif de 9 dans est 5.

58) M' d'ordre $m \geq 3$ est magique et associatif et ses m^2 carrés d'ordre $n \geq 3$ sont aussi magiques et associatifs. Alors le grand carré d'ordre mn est aussi magique et associatif. Construisons M' avec soit ALG-1 ou ALG-2 ce qui nous assure M' arithmétique et associatif. De plus, en posant $t = mr$, nous trouvons que la somme de M' est :

$$S = ma + \frac{(m^3 - m)r}{2}$$

Puisque M' est associatif, alors deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours :

$$\frac{2S}{m} = 2a + (m^2 - 1)r$$

Les expressions dans M' ont tous la forme $a + wr$ où $w = 0, 1, \ldots, (m^2 - 1)$.

Dans M', prenons les cases U *et* V symétriques par rapport au centre du carré et plaçons dans celles-ci, respectivement, les carrés d'ordre n suivants :

$$a + k_1 r \; et \; a + k_2 r \text{ avec } k_1 + k_2 = m^2 - 1.$$

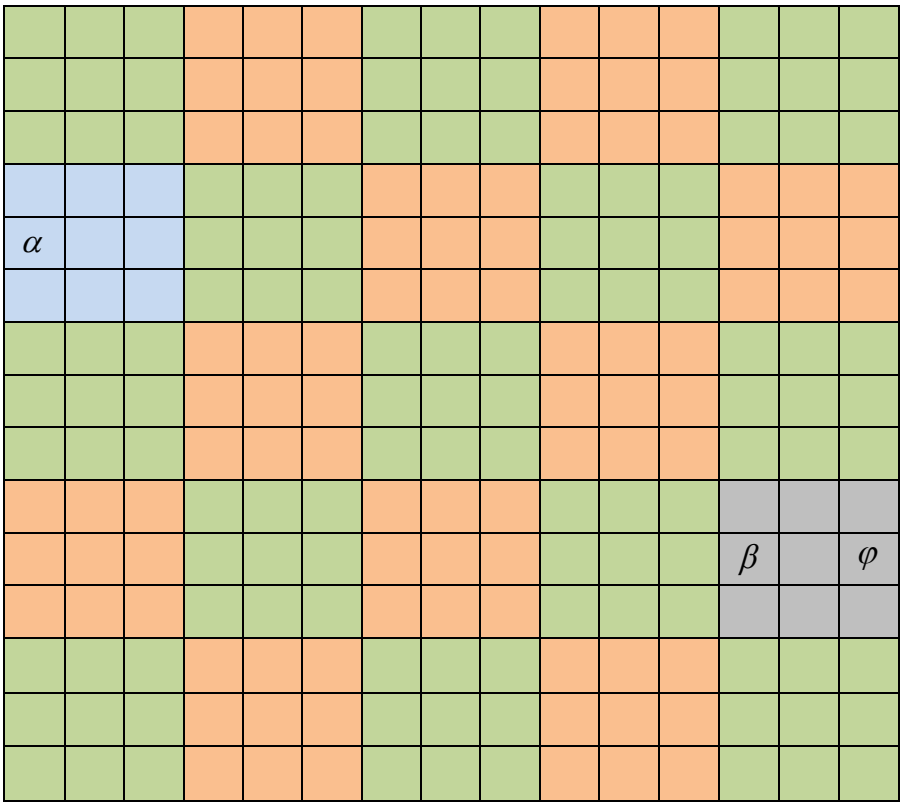
où a est un carré normal d'ordre n et r, le carré trivial formé du nombre n^2.

Il est important ici de bien comprendre le procédé DM de construction d'un carré doublement magique. Les carrés d'ordre n forment une suite arithmétique :

$$a \; ; \; a + r \; ; \; a + 2r \; ; \ldots ; \; a + (m^2 - 1)r$$

Le passage d'un terme au suivant se fait en ajoutant n^2 dans toutes les cases.
Dans U, la somme magique est : $S_1 = s + n^3 k_1$ et dans V, $S_2 = s + n^3 k_2$ où s est la somme magique du carré normal a.

La case U est bleue et la case V est grise. Dans une case du carré bleu, considérons le nombre $\alpha = \lambda + n^2 k_1$ où λ occupe la même case dans le carré normal a. Puis le nombre $\beta = \lambda + n^2 k_2$ qui occupe la même case dans le carré gris. Enfin, φ est situé dans la case symétrique par rapport au centre du carré gris de la case qui contient β.



Les cases qui renferment α et φ sont symétriques par rapport au centre du grand carré d'ordre mn.

Le procédé DM nous permet de voir que le grand carré d'ordre mn est magique et normal. Nous voulons montrer qu'il est associatif. Pour cela, nous devons calculer $\alpha+\varphi$. Nous trouvons :

$$\beta+\varphi=\frac{2(s+n^3k_2)}{n} \text{ d'où } \varphi=\frac{2(s+n^3k_2)}{n}-(\lambda+n^2k_2).$$

Finalement, $\alpha+\varphi=\lambda+n^2k_1+\frac{2s}{n}+2n^2k_2-\lambda-n^2k_2 = n^2+1+n^2(k_1+k_2) =$

$$= n^2+1+n^2(m^2-1) = n^2m^2+1.$$

N'oublions pas que $s=\frac{n(n^2+1)}{2}$ et que $k_1+k_2=m^2-1$.

La somme magique du grand carré d'ordre mn est $\frac{(mn)^3+mn}{2}$ car il est normal. Puis,

$\frac{2}{mn}\frac{(mn)^3+mn}{2} = m^2n^2+1$. Le grand carré est donc associatif!!!

59) Ce carré est un intrus et même un bel-intrus. En effet, tous les nombres sont premiers sauf le nombre central qui est composé : 203 = 7x29.

60) Dans l'annexe 31, vous trouverez 49 carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 dont les centres sont les entiers de 1 à 49. Ils sont construits avec le procédé : 1-3-5-7-2-4-6 (voir début du chapitre 6). Le carré suivant est de centre 36 et le nombre premier 9551 + 36 = 9587, un autre nombre premier. Voyons pourquoi nous considérons ces deux nombres premiers.

12	13	28	4	48	26	44
32	14	42	20	43	5	19
40	34	25	16	10	41	9
7	30	8	36	18	31	45
2	46	22	37	38	6	24
35	11	21	23	3	49	33
47	27	29	39	15	17	1

Dans la deuxième page de l'annexe 11, vous trouvez ''Ordre 7''et le nombre premier 9551 qui ajouté dans toutes les cases d'un carré normal d'ordre 7, nous donne un carré magique formé d'un seul nombre premier soit 9587. Celui-ci apparait dans la case où se trouve 36. Avec le carré ci-haut, nous obtiendrons le bel-intrus-9587 lequel est pandiagonal. Vous le trouverez après la solution du problème 64) à la page suivante.

61) Les entiers $n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ \ldots, n! + n$ sont consécutifs et non premiers lorsque $n \geq 3$. L'intervalle $[n! + 2\ ;\ n! + n]$ est donc un intervalle de longueur $n-1$ qui ne renferme aucun nombre premier. Si nous voulons un intervalle de longueur 10 000 qui ne renferme aucun nombre premier, il suffira de choisir $n = 10001$. Il est vrai que l'intervalle débutera par un entier extrêmement grand soit $10001! + 2$. Cependant, intuitivement, nous pouvons penser qu'un intervalle [a ; b] de longueur 10 000 qui renferme aucun nombre premier peut se trouver avec a, beaucoup plus petit que $10001! + 2$. Ainsi, pour un intervalle de longueur 25, nous prendrions $[26! + 2\ ;\ 26! + 26]$ lequel renferme 25 entiers consécutifs tous non premiers. Mais l'intervalle $[1328\ ;\ 1352]$ est un intervalle qui renferme aussi 25 entiers consécutifs tous non premiers (voir 14.12).

Terminons en montrant que $n! + k$ est composé où $2 \le k \le n$ est entier.

$$n! + k = k\left(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times (k+1) \times \ldots \times n + 1\right)$$

Il suffit de constater que la parenthèse contient un entier ≥ 2. Enfin, cet intervalle sans nombre premier peut donc avoir la longueur que nous voulons, aussi grande soit-elle.

62) Appelons w, le nombre d'entiers entre p et q. Nous avons $w = q - p - 1$, un entier impair puisque $q - p$ est pair. En effet, les deux nombres premiers sont impairs et impair – impair = pair. Il y a donc un nombre impair de nombres composés entre p et q et un nombre impair d'entiers dans tout intervalle $[p\ ;\ q]$ où p et q sont deux nombres premiers consécutifs.

63) C'est une conséquence immédiate du théorème 14.15.1. n^2 doit être impair d'où n doit être impair.

64) Parce que n^2 n'est pas impair. Remarquez que dans le tableau (*%) de 14.12, tous les entiers de la troisième colonne sont impairs.

9563	9564	9579	9555	9599	9577	9595
9583	9565	9593	9571	9594	9556	9570
9591	9585	9576	9567	9561	9592	9560
9558	9581	9559	9587	9569	9582	9596
9553	9597	9573	9588	9589	9557	9575
9586	9562	9572	9574	9554	9600	9584
9598	9578	9580	9590	9566	9568	9552

Le bel-intrus-9587

15.7 Chapitre 15

1) Soit le carré multiplicatif de produit $P \neq 0$.

a	b
c	d

a	$\frac{P}{a}$
$\frac{P}{a}$	$\frac{P}{a}$

a	a
a	a

Puisque le carré est multiplicatif, nous avons : $ab = ac = ad = P$ d'où $b = c = d = \frac{P}{a}$. Nous avons aussi : $\frac{P}{a}\frac{P}{a} = P$ d'où $P = a^2$. Finalement, le carré multiplicatif est le trivial formé du nombre $a \neq 0$.

Voyons maintenant le cas $P = 0$. Il nous faut un 0 par rangée, colonne et diagonale. Nous ne perdons aucune généralité en plaçant m dans la case (1 ; 1) :

m	0
0	0

0	0
0	0

Les trois 0 doivent occuper ces cases si m, éventuellement non nul, occupe la case (1 ; 1). Il est également possible d'avoir m = 0.

2) Si A et B sont différents, cela signifie qu'il existe deux cases correspondantes dans lesquelles nous trouvons deux nombres différents u et v. Il s'ensuit que $a^u \neq a^v$. En effet, cette fonction exponentielle est strictement croissante. Les deux carrés multiplicatifs sont donc différents.

3) D'abord, revoyons la démonstration du théorème 15.7. En plaçant toutes les valeurs possibles de a et c dans (*), nous trouverons 56 carrés dont 48 qui ne sont pas presque normaux. Les huit autres carrés seront les seuls susceptibles de donner des carrés presque normaux. Ainsi, avec $a = p^2q^2$; $c = pq^2$; $d = pq$, nous trouvons :

(1) $$\begin{pmatrix} p^2q^2 & \frac{1}{pq^2} & p^2q^3 \\ pq^2 & pq & p \\ \frac{1}{q} & p^3q^4 & 1 \end{pmatrix}$$

Évidemment, ce carré n'est pas presque normal. Par contre, avec $a = p; c = q^2; d = pq$, nous trouvons :

(2) $$\begin{pmatrix} p & p^2q^2 & q \\ q^2 & pq & p^2 \\ p^2q & 1 & pq^2 \end{pmatrix}$$

Ce carré multiplicatif est susceptible de donner un carré presque normal. Avec $p = 2\, et\, q = 3$, nous obtenons le presque normal du plus petit produit 216.

(3) $$\begin{pmatrix} 2 & 36 & 3 \\ 9 & 6 & 4 \\ 12 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

Sur les 56 cas possibles, 48 donneront un carré de type (1) donc à rejeter. Le type (1) peut aussi contenir des répétitions et le carré sera rejeté pour cette raison.

Sur les 56 cas, 8 carrés sont de type 2. Ce sont 8 équivalents. Voici comment les trouver sachant que $d = pq$.

$a = p\, et\, c = q^2$; $a = p\, et\, c = p^2q^2$; $a = q\, et\, c = p^2$; $a = q\, et\, c = p^2q^2$;
$a = p^2q\, et\, c = 1$; $a = p^2q\, et\, c = q^2$; $a = pq^2\, et\, c = 1$; $a = pq^2\, et\, c = p^2$

Si nous prenons le premier carré (en rouge) comme primitif, alors les sept autres sont ses équivalents. Ces huit carrés sont susceptibles de produire des carrés presque normaux; effectivement, le carré (3) nous montre qu'ils en produisent.

Montrons que si $p\, et\, q$ sont des nombres premiers différents, alors les nombres du carré (2) : $1, p, q, p^2, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2$ sont tous différents deux à deux. Nous ne perdons aucune généralité en prenant $p < q$. Deux nombres de cette liste ne peuvent pas être égaux sinon, excepté les cas évidents, nous aurions un entier

qui possèderait deux décompositions différentes en facteurs premiers et cela contredirait le théorème fondamental de l'arithmétique.

Une autre façon de faire est d'ordonner ces 9 nombres du plus petit au plus grand.

Premier cas : $p < q \, et \, q < p^2$. La suite ordonnée des 9 nombres est :

$$1 \quad p \quad q \quad p^2 \quad pq \quad q^2 \quad p^2q \quad pq^2 \quad p^2q^2$$

Second cas : $p < q \, et \, p^2 < q$. La suite ordonnée des 9 nombres est :

$$1 \quad p \quad p^2 \quad q \quad pq \quad p^2q \quad q^2 \quad pq^2 \quad p^2q^2$$

Nous voyons bien que les 9 nombres sont différents deux à deux.

4) Nous obtenons le carré multiplicatif :

$$M = \begin{pmatrix} p^4 & p^9 & p^2 \\ p^3 & p^5 & p^7 \\ p^8 & p & p^6 \end{pmatrix}$$

Nous pouvions obtenir M en faisant l'exponentiation en base $p > 0 \; et \; p \neq 1$ du carré magique $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5) Ces carrés auront pour produit $P = 270^3 = 19\,683\,000$. Nous pouvons les construire avec la structure générale (*) de 15.2.

36	18225	30
225	270	324
2430	4	2025

a = 36 ; c = 225 ; d = 270

324	25	2430
2025	270	36
30	2916	225

k = 9 ; a = 36 k ; c = 225 k ; d = 270

36	6075	90
675	270	108
810	12	2025

k = 3 ; a = 36 ; c = 225 k ; d = 270

108	2025	90
225	270	324
810	36	675

k = 3 ; a = 36 k ; c = 225 ; d = 270

180	729	150
225	270	324
486	100	405

k = 5 ; a = 36 k ; c = 225 ; d = 270

Tous ces carrés multiplicatifs sont presque normaux, ont tous pour centre 270 et sont tous primitifs.

6) Vrai selon le théorème 15.7 puisque le centre 21 = 3×7 où 3 et 7 sont des nombres premiers différents. Nous avons donc un carré et ses sept équivalents.

7) Selon le théorème 15.5, nous trouvons avec p = 3 et k = 4, le carré multiplicatif :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3^8 & 3^3 \\ 3^6 & 3^4 & 3^2 \\ 3^5 & 1 & 3^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6561 & 27 \\ 729 & 81 & 9 \\ 243 & 1 & 2187 \end{pmatrix}$$

8) Pour tous les carrés d'ordres $n \geq 4$, nous trouvons toujours une figure complète dans laquelle chaque case contient 0. Le produit est donc 0. Dans toutes les autres cases, nous pouvons y mettre un nombre non nul. Il y a donc n fois le nombre 0 dans ce carré multiplicatif à produit nul.
Regardons maintenant un 3x3. Nous voyons bien que trois 0 suffisent :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}$$

9) Regardez les 8 figures complètes que possède tout carré d'ordre 4, voir le problème 41 de 14.18. Les cases des figures complètes sont en vert. Il suffit maintenant d'observer que chaque petit carré 2x2 situé dans un coin, contient une seule case verte.
Observez aussi où se trouvent les cases vertes de la figure complète. Par exemple, le 2x2 central contient toujours une case verte.

10) C'est une conséquence immédiate du problème 9) précédent.

11) Voir le problème 41 de 14.18 et les huit figures complètes à la fin de 15.3. Pour montrer que ce sont les seules possibles, il suffit de choisir la case (1 ; 1) et de voir comment choisir les trois autres cases. Sur la deuxième rangée, nous pouvons choisir soit la case rouge, soit la case bleue et voir ce qui arrive avec chaque choix…

(1 ; 1)			

Ensuite, nous recommençons en partant de la case (1 ; 2) et ainsi de suite.

12) Nous allons placer, une par une, les 8 figures complètes sur ce carré d'ordre 4 de produit 14 280. Dans chaque cas, nous ne pourrons pas diminuer le produit sans faire apparaitre des répétitions ou des rationnels non entiers.

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

Les figures complètes nous donnent un très bon moyen pour réduire le produit magique d'un carré multiplicatif.

13) Le premier carré (MSD*) de 15.3.2 a été fabriqué avec le carré A suivant, un m-hyper-magique presque normal d'ordre 4 :

A =

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

Ce carré fait partie d'un groupe de 48 m-hyper-magiques presque normaux primitifs d'ordre 4 lesquels renferment tous les mêmes 16 entiers!!! (Problème 31 de 15.7).

Nous allons en prendre un deuxième et fabriquer une autre structure (MSD*).

B =

1	24	15	40
60	10	4	6
8	3	120	5
30	20	2	12

Pour obtenir B, il nous faut prendre a = 1, b = 24, c = 15, f = 4, g = 8.

$$a = 1$$
$$b = 24 = 2^3 \times 3 = p^3 q$$
$$c = 15 = 3 \times 5 = q\,r$$
$$f = 4 = 2^2 = p^2$$
$$g = 8 = 2^3 = p^3$$

Nous placerons ces expressions dans (MSD) pour obtenir notre nouveau (MSD*) :

$(MSD^*)_1$ =

1	$p^3 q$	$q\,r$	$p^3 r$
$p^2 q\,r$	$p\,r$	p^2	$p\,q$
p^3	q	$p^3 q\,r$	r
$p\,q\,r$	$p^2 r$	p	$p^2 q$

Le produit est $p^6 q^2 r^2 = (p^3 q\,r)^2$.

Avec $p = 2, q = 3, r = 5$, nous retrouvons B.

Puisque nous trouvons dans (MSD*) et $(MSD^*)_1$, les mêmes expressions, alors pour construire un carré presque normal avec $(MSD^*)_1$, il suffit de faire la même chose qu'avec (MSD*).

Pour que $(MSD^*)_1$ soit presque normal, il est suffisant d'avoir :

$$1 < p < q < p^2 < r < pq$$

où $p, q \; et \; r$ sont des entiers ≥ 2.

Ce qui implique les inégalités qui suivent et tous ces termes forment une suite strictement croissance donc 16 termes différents.

$$1 < p < q < p^2 < r < pq < p^3 < pr < p^2q < qr < p^2r < p^3q < pqr < p^3r < p^2qr < p^3qr$$

La partie en rouge (la condition suffisante), est toujours réalisable; par exemple, en prenant :

$$q = p+1 \; et \; r = p^2+1$$

Donc, à partir du carré $(MSD^*)_1$, nous sommes assurés qu'avec

$$q = p+1 \; et \; r = p^2+1,$$

nous obtiendrons un m-hyper-magique presque normal d'ordre 4.

Avec $p = 2, q = p+1 = 3 \; et \; r = p^2+1 = 5$, nous obtenons un carré du plus petit produit soit $14\,400$.

Nous vous laissons trouver une troisième structure qui sera $(MSD^*)_2$. Revoyez la construction de (MSD*) dans 15.3.2 et la construction de $(MSD^*)_1$ que nous venons de faire; cela vous aidera pour construire $(MSD^*)_2$.

14) Nous allons construire deux carrés avec la structure (*) de 15.3. Les voici :
Le carré A est défini par :
$a = 1; b = 15; c = 24; d = -12; e = 28; f = -3; g = -21; P = -5040$
Le carré B est défini par :

$$a=1; b=15; c=24; d=-12; e=-28; f=-3; g=-21; P=5040$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 15 & 24 & -14 \\ -12 & 28 & -3 & -5 \\ -21 & 6 & 10 & 4 \\ -20 & -2 & 7 & -18 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 15 & 24 & 14 \\ -12 & -28 & -3 & -5 \\ -21 & -6 & -10 & -4 \\ 20 & 2 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

15) La réponse est non. Voir dans 15.3.3 les théorèmes 15.11 et 15.12 ainsi que l'avant dernier encadré vert. C'est M à lui seul qui détermine la somme magique de M'. Je construis le carré magique M'à l'aide d'une bordure autour de M et vous construisez le carré magique M''à l'aide d'une autre bordure autour de M. Alors M' et M'' ont la même somme magique!!!

16) La somme magique S de M'est $\frac{S^*}{n}$ où $S^* = nS_1 + 2S_1$. Finalement, $S = \left(\frac{n+2}{n}\right)S_1$.

17) Dans 15.3.3, vers la fin de la section, nous présentons, suite au théorème 15.12, un procédé pour construire le carré magique M'. Suivez ce procédé en donnant que des valeurs entières aux variables. Le carré M' sera magique et formé que d'entiers.

18) Le dernier carré de 15.3.3 nous montre que ce carré magique M' d'ordre 6 existe mais contiendra des entiers négatifs et peut-être 0. Il ne sera donc pas presque normal si nous exigeons que M soit dans M'.

M' =

	w				
	4	15	14	1	
	5	10	11	8	
	9	6	7	12	
	16	3	2	13	
	z				

Pour que M' soit un carré magique presque normal, il faudra prendre W, un entier > 16 et M' devra avoir pour somme magique S = 51 soit $\frac{n+2}{n}S_1 = \frac{6}{4}\times 34 = 51$.

Donc W + Z = 51 – 34 = 17. Il est clair que W = 17 et Z = 0, W = 18 et Z = – 1, etc … Le carré M' ne pourra jamais être ni presque normal ni normal si nous ne touchons pas au carré central en vert.

Construisons un carré magique M’comme suit :

M’ =

21	17	18	19	20	-44
22	4	15	14	1	-5
23	5	10	11	8	-6
24	9	6	7	12	-7
-100	16	3	2	13	117
61	0	-1	-2	-3	-4

Ce carré M’ contient 36 entiers différents. L’entier correcteur est 101. Il contient le carré normal d’ordre 4. M’ n’est pas presque normal si M reste dans M’.

M’’ =

122	118	119	120	121	57
123	105	116	115	102	96
124	106	111	112	109	95
125	110	107	108	113	94
1	117	104	103	114	218
162	101	100	99	98	97

Voici M’’, un carré presque normal d’ordre 6 obtenu à l’aide d’une bordure placée autour d’un carré normal d’ordre 4. L’entier correcteur 101 a été appliqué sur M’. La somme magique de M’’ est 657.

19)

X									

									Y

Prenons deux rangées symétriques par rapport au centre d'un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$ formé uniquement de nombres réels > 0. Puisque ce carré est associatif, alors le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré donne toujours le même nombre k. Ainsi, $X\,Y = k$.

Nous avons donc : $P^2 = k^n \;\; d'où \;\; k = (P^2)^{\frac{1}{n}} = P^{\frac{2}{n}} = \sqrt[n]{P^2}$.

Il est facile de montrer que si n est impair, alors la case centrale contient le nombre $\sqrt[n]{P}$.

20) Puisqu'un m-ultra-magique d'ordre impair $n \geq 3$ est associatif, par définition, alors si celui-ci est formé de n^2 entiers > 0, sa case centrale renferme l'entier $\sqrt[n]{P}$ (voir problème 19) ci-haut). Donc : $\sqrt[n]{P} = k \;\; et \;\; P = k^n$, k entier ≥ 1.

Dans la structure générale (UM*) de 15.4, la case centrale contient $P^{\frac{1}{5}}$. Si ce carré est formé exclusivement d'entiers > 0, alors $P = k^5$ où $k \geq 1$ est entier.

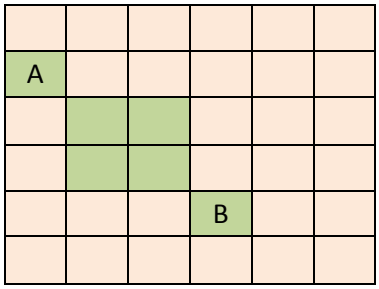
21) Nous avons $E^6 = P^5 \;\; où \;\; P \;\; et \;\; E$ sont des entiers ≥ 1. Tous les facteurs premiers de se retrouvent dans P et si le facteur premier p_1 se retrouve k fois dans E, alors il se retrouve $6k$ fois dans P^5. Cela signifie que nous trouvons $p_1, \frac{6k}{5}$ fois dans P.

Mais puisque $5 et 6$ sont premiers entre eux, 5 doit diviser k d'où $k = 5k_1$ avec $k_1 \geq 1$, un entier. Il s'ensuit que $\frac{6k}{5} = \frac{6 \times 5k_1}{5} = 6k_1$. De même avec le facteur premier p_2 ...

Finalement, $P = p_1^{6k_1} \times p_2^{6k_2} \times ... = \left(p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times ...\right)^6$.

22) Nous avons un m-hyper-magique d'ordre 6 avec la figure en vert, une super-figure. En effet, peu importe la façon de placer la figure dans le carré, la somme des cases

du carré 2x2 est toujours 4S/6 = 2S/3. Les cases A et B seront toujours situées sur une diagonale grande ou brisée et la somme A + B sera toujours 2S/6 = S/3. La somme de la figure est donc toujours 2S/3 + S/3 = S.



23) Prenons deux cases symétriques par rapport au centre du carré. Plaçons dans l'une, le plus petit nombre a du carré (a n'est pas nécessairement unique). Soit b, le nombre de l'autre case. Nous avons : $a\,b = \sqrt[n]{P^2}$
Puisque le produit est constant, alors si nous augmentons a, il est clair que b diminuera. Nous ne pouvons pas augmenter b car a diminuera ce qui est impossible puisque a est le plus petit. Nous concluons que b est le plus grand nombre du carré.

24) Grâce au théorème 15.13.1, nous savons que tous les entiers d'un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit $P = k^5$, sont des diviseurs de k^2. Donc, nous devons trouver au moins 25 diviseurs.
Si k^2 possède 24 diviseurs ou moins, alors notre carré ne sera pas presque normal.

a) Si $k = 144$, alors nous avons un bon candidat car $144^2 = 20\,736$ possède 45 diviseurs. Effectivement, notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 9472 m-ultra-magiques presque normaux soit 1184 primitifs. Ces primitifs sont répartis en 74 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes 25 entiers!!!

b) Si $k = 240$, alors nous avons un bon candidat car $240^2 = 57\,600$ possède 81 diviseurs. Effectivement, notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 79 872 m-ultra-magiques presque normaux soit 9 984 primitifs.

c) Si $k = 127$, alors le carré presque normal n'existe pas car $127^2 = 16129$ ne possède que 3 diviseurs.

d) Si $k = 24$, alors le carré presque normal n'existe pas car $24^2 = 576$ ne possède que 21 diviseurs.

25) Il faut trouver la valeur de k telle que l'entier k^2 possède au moins 25 diviseurs. Après $k = 120$, nous trouvons le candidat $k = 126$ puisque $126^2 = 15876$ possède 45 diviseurs. Pour $k = 121, 122, 123, 124 \, et \, 125$, nous trouvons que k^2 possède moins que 25 diviseurs. De plus, notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 1280 m-ultra-magiques presque normaux soit 160 primitifs répartis en 10 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes 25 entiers!!! Donc, le suivant dans le tableau est 126^5. C'est le dixième meilleur produit.

26)

a) Nous allons trouver deux carrés multiplicatifs dont la somme n'est pas un carré multiplicatif. Les deux carrés suivants sont multiplicatifs :

1	15	24	14
12	28	3	5
21	6	10	4
20	2	7	18

$P = 5040$

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

$P = 14\ 280$

Additionnons la première rangée de l'un avec la première rangée de l'autre; nous obtenons : 2 25 45 82 et le produit : 184 500.
Additionnons la deuxième rangée de l'un avec la deuxième rangée de l'autre; nous obtenons : 40 79 5 10 et le produit : 158 000. La somme n'est donc pas un carré multiplicatif.

b) Nous allons trouver deux carrés multiplicatifs dont la somme est un carré multiplicatif. Les deux carrés suivants sont multiplicatifs : M et N = k M.
Dans une figure magique de M: $x_1 x_2 ... x_n = P$.
Dans la même figure de k M : $k\,x_1\,k\,x_2 ... k\,x_n = k^n P$.
Dans la même figure de M + k M : $(k+1)x_1(k+1)x_2...(k+1)x_n = (k+1)^n P$. Le carré M + k M est donc multiplicatif.

Sans cette façon de faire, il est possible de trouver deux carrés multiplicatifs M et N tels que M + N soit aussi multiplicatif. Prenons les deux carrés multiplicatifs suivants :

1	10	63	340
84	255	2	5
170	21	20	3
15	4	85	42

M avec $P = 214\ 200$

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

N avec $P = 14\ 280$

Nous trouvons en additionnant ces deux carrés M et N, le carré suivant :

2	20	84	408
112	306	4	10
204	28	40	6
30	8	102	56

Celui-ci est multiplicatif de produit P = 1 370 880.

Les carrés M et k M ont un lien très fort entre eux mais M et N ci-haut ne semblent pas avoir de lien. Pourtant, N est obtenu de M à l'aide de deux figures complètes et dans chacune, nous avons divisé les quatre entiers respectivement par 3 et 5 d'où le produit magique de N qui est 15 fois plus petit que celui de M. Il faudrait analyser ce lien entre M et N!!!Quelles-en sont les conséquences?

27) Nous ferons comme dans 26 b) : $A_1, k_1A_1, k_2A_1, ..., k_{m-1}A_1$. Le produit du carré qui est la somme $A_1 + A_2 + ... + A_m$ sera $(1 + k_1 + k_2 + ... + k_{m-1})^n P$.

28) Un tel carré provient de la structure (*) de 15.2. Il suffit d'observer qu'une diagonale brisée a un produit différent de d^3. Précisons ici que les variables $a, c\ et\ d$ sont des nombres réels > 0. Dans une diagonale brisée de (*), nous trouvons :

$$\frac{a\,c}{d}\,c\,\frac{a^2c}{d^2} = \frac{a^3c^3}{d^3}$$

Mais se peut-il que $\frac{a^3c^3}{d^3} = d^3$?

Nous aurions alors $a\,c = d^2\ et\ a = \frac{d^2}{c}$. Ce qui n'est pas possible dans un carré presque normal car nous aurions au moins une répétition. Ce carré ne peut donc pas être pandiagonal.

29) À partir de la structure (MD), nous avons trouvé la structure (MSD) des m-super-Dürer laquelle nous permet la construction des presque normaux.
À partir de la structure (*) de 15.3, nous construisons celle des m-hyper-magiques. Nous trouvons (MSD).
À partir de (*), nous construisons celle des multiplicatifs pandiagonaux. Nous trouvons toujours (MSD)!!!
Lire aussi la preuve du théorème 15.9.

30) Nous venons de montrer, au problème 29), que la structure des m-hyper-magiques d'ordre 4 est la même que (MSD).

31) Selon le théorème 15.10 et jusqu'à l'encadré vert qui le suit, si un m-hyper-magique est presque normal, alors tous ses entiers sont des diviseurs de $c\,g$. Donc, puisque $P = c^2g^2 = 14400$, nous trouvons $c\,g = 120$. Mais voilà que 120 possède exactement 16 diviseurs!!! Deux m-hyper-magiques presque normaux doivent donc renfermer les mêmes 16 entiers, les 16 diviseurs de 120.

32) Vous trouverez cette suite un peu plus loin, juste après la structure (MSD*) de 15.3.2. Les inégalités en rouge constituent une condition suffisante pour que toutes les inégalités qui suivent soient respectées. De plus, cette condition suffisante est toujours réalisable. Par exemple, puisque $q < p^2$, nous trouvons $p\,q < p^3$. Puisque $p^2 < r$ alors $p^3 < p\,r, \ldots$

33) N est un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de nombres > 0. Son associé, M, s'obtient en logarithmant N.

a) Soient a, b, c, d, quatre nombres situés dans les cases d'un carré 2x2 de N. Nous trouvons, dans les cases correspondantes de M, les nombres :

$$\log_u a\ ;\ \log_u b\ ;\ \log_u c\ ;\ \log_u d$$

Nous avons alors :

$$a\,b\,c\,d = \sqrt[6]{P^4} = P^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_u a + \log_u b + \log_u c + \log_u d = \frac{2}{3}\log_u P = \frac{2}{3}S = \frac{4S}{6}$$

b) Soient a, b, deux nombres situés dans les deux cases d'une diagonale, grande ou brisée, séparées par deux cases. Nous avons :

$$a\,b = \sqrt[6]{P_2} = P^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_u a + \log_u b = \log_u P^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_u P = \frac{1}{3}S = \frac{2S}{6}$$

Selon a) et b), M est donc un hyper-magique.

34) Prenons le 2x2 coin haut-gauche de M. En procédant comme au problème précédent, nous trouverons par exponentiation en base u, le m-Dürer N. Puis, à partir du coin haut-gauche de N, nous trouverons en logarithmant en base u, le Dürer M.
Si M est un Dürer, alors par exponentiation, nous obtenons un m-Dürer. De cette façon, nous obtiendrons tous les m-Dürer. En effet, soit N, un m-Dürer. En logarithmant N, nous obtenons un Dürer qui, par exponentiation, redonnera N.

35) Nous ne perdons aucune généralité en choisissant la base $a = 2$ étant donné que la variable a se retrouve dans la structure générale des Dürer.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & f & a+b-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & a+b+d-f-g & a+c-g \\ a+b+c-f-g & a+d-g & S-a-b-c-d+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Effectuons l'exponentiation en base 2 :

$$(*)\qquad \begin{pmatrix} 2^a & 2^b & 2^c & \dfrac{2^S}{2^{a+b+c}} \\ 2^d & \dfrac{2^S}{2^{a+b+d}} & 2^f & \dfrac{2^{a+b}}{2^f} \\ \dfrac{2^{S+f+g}}{2^{2a+b+c+d}} & 2^g & \dfrac{2^{a+b+d}}{2^{f+g}} & \dfrac{2^{a+c}}{2^g} \\ \dfrac{2^{a+b+c}}{2^{f+g}} & \dfrac{2^{a+d}}{2^g} & \dfrac{2^{S+g}}{2^{a+b+c+d}} & \dfrac{2^{f+g}}{2^a} \end{pmatrix}$$

Posons maintenant :

(**) $2^a = m$; $2^b = p$; $2^c = q$; $2^S = P$; $2^d = u$; $2^f = v$; $2^g = w$.

Nous obtenons alors :

$$\begin{pmatrix} m & p & q & \dfrac{P}{m\,p\,q} \\ u & \dfrac{P}{m\,p\,u} & v & \dfrac{m\,p}{v} \\ \dfrac{P\,v\,w}{m^2\,p\,q\,u} & w & \dfrac{m\,p\,u}{v\,w} & \dfrac{m\,q}{w} \\ \dfrac{m\,p\,q}{v\,w} & \dfrac{m\,u}{w} & \dfrac{P\,w}{m\,p\,q\,u} & \dfrac{v\,w}{m} \end{pmatrix}$$

Cette structure est bien un m-Dürer où chaque nombre est > 0 selon (**).
Nous venons d'introduire des nouvelles variables mais ce n'est absolument pas nécessaire!!! Nous pourrions garder les mêmes que dans la structure (*). Au lieu d'écrire $2^a = m$, nous pourrions poser $2^a \to a, 2^b \to b, \ldots$ puisque l'écriture $2^a = a$ n'est pas admise. Celle-ci donne l'impression que nous avons une équation à résoudre laquelle n'a pas de solution. En gardant les mêmes variables que dans (*), nous obtenons beaucoup plus rapidement et simplement (***).

$$(***)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & \frac{P}{abc} \\ d & \frac{P}{abd} & f & \frac{ab}{f} \\ \frac{Pfg}{a^2bcd} & g & \frac{abd}{fg} & \frac{ac}{g} \\ \frac{abc}{fg} & \frac{ad}{g} & \frac{Pg}{abcd} & \frac{fg}{a} \end{pmatrix}$$

En partant de la structure des Dürer, nous passons directement à (***). L'addition se change en produit et la soustraction en quotient. Ainsi, $a+b-f$ devient $\frac{ab}{f}$.

Puis $S-a-b-d$ devient $\frac{P}{abd}$ en n'oubliant pas que S se change en P puisque $2^S = P$.

36)

a) Pour s'assurer que l'ensemble F_n est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, consultez les pages 1 et 2 de l'annexe 26.

b) Il existe un isomorphisme entre $E_n et\, F_n$. La fonction qui associe un carré de E_n à un carré de F_n est l'exponentiation en base a du carré de E_n. Étant données les propriétés de la fonction exponentielle, il est facile de montrer que cette fonction est bijective. Notons f cette bijection. Nous devons aussi montrer que :

$$f(A+B) = f(A) * f(B)$$
$$f(k\,A) = k \circ f(A)$$

Voici la structure de la preuve : $u\, et\, v$ sont dans des cases correspondantes respectivement dans $A et\, B$.

A	B	$A+B$	$f(A+B)$
u	v	$u+v$	$a^{u+v}=a^u a^v$

A	$f(A)$	B	$f(B)$	$f(A)*f(B)$
u	a^u	v	a^v	$a^u a^v$

A	kA	$f(kA)$
u	ku	a^{ku}

A	$f(A)$	$k\circ f(A)$
u	a^u	$(a^u)^k=a^{uk}=a^{ku}$

c) Puisque E_n *et* F_n sont isomorphes, alors les deux espaces ont la même dimension. La dimension de l'espace F_n est donc $n(n-2)$. Consultez aussi l'annexe 27, dernier encadré vert.

37) Pour simplifier, nous allons prendre un carré magique A d'ordre 3. Le procédé est le même pour tous les ordres ≥ 4.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{2^x} \underset{B}{\begin{pmatrix} 2^4 & 2^9 & 2^2 \\ 2^3 & 2^5 & 2^7 \\ 2^8 & 2^1 & 2^6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\log_3} \underset{C}{\begin{pmatrix} \log_3 2^4 & \log_3 2^9 & \log_3 2^2 \\ \log_3 2^3 & \log_3 2^5 & \log_3 2^7 \\ \log_3 2^8 & \log_3 2^1 & \log_3 2^6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{3^x}$$

$$\xrightarrow{3^x} \underset{B}{\begin{pmatrix} 3^{\log_3 2^4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 2^4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}$$

Nous savons que $3^{\log_3 x} = x$ d'où l'égalité ci-haut. De plus, il est facile de montrer que $C \neq A$. Par exemple, avons-nous $\log_3 2^4 = 4$? Si oui, nous aurions $2^4 = 3^4$ ce qui est faux donc $C \neq A$.

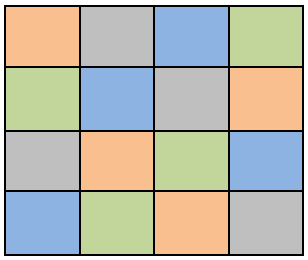
Les carrés A et C sont magiques et A donne B par exponentiation en base 2 tandis que C donne B par exponentiation en base 3.

38) Dans ce carré, toutes les expressions sont différentes deux à deux. Si nous attribuons aux cinq variables, des nombres premiers différents, nous aurons alors un m-super-Dürer presque normal. En effet, tous les nombres seront des entiers ≥ 1. Ils seront tous différents deux à deux car si deux cases renferment le même entier N, cela signifie que N aura deux décompositions différentes en facteurs premiers, ce qui contredit le théorème fondamental de l'arithmétique.

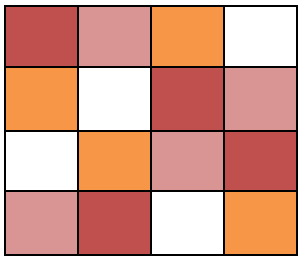
$(MSD-1)$

a^2bfg	ab^2fg	$abcfg$	cfg^3
bcf^2g	acg^3	abf^2g	a^2b^2g
$abfg^2$	a^2b^2f	$bcfg^2$	$acfg^2$
$abcg^2$	cf^2g^2	a^2bg^2	ab^2f^2

39) Effectivement, ce sont bien les huit figures complètes que nous retrouvons à la fin de 15.3.



Carré réducteur 1



Carré réducteur 2

40) Voir l'annexe 26.

a) Nous ne pouvons pas avoir un espace vectoriel tel que défini au problème 36 ci-haut. Si M est issu de (MD*) et renferme le nombre 0, alors ce carré ne sera pas inversible et nous n'aurons pas notre structure de groupe.
b) Il faut vérifier que les deux structures soient équivalentes et alors dans les deux cas, nous aurons un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
c) C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 7 car le nombre minimum de variables libres est 7 (voir d) qui suit).
d) La structure (MD*) est une combinaison linéaire de huit carrés linéairement dépendants.
e) Ils forment un système de générateurs duquel nous trouverons une base formée de sept carrés. Avec les carrés de la base, les coordonnées du carré de Sayles sont uniques mais ce n'est pas le cas si le carré de Sayles est une combinaison linéaire des carrés d'un système de générateurs qui contient au moins huit carrés.

Voici ce système de générateurs dans lequel $b \in]0;1[\cup]1;\infty[$.

$$A=\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez vérifier que :

$$(MD^*)=\begin{pmatrix} mn & uv & xy & rs \\ ry & sx & mu & nv \\ su & ny & rv & mx \\ vx & mr & ns & uy \end{pmatrix} =$$

$$= (\log_b m)\circ A * (\log_b n)\circ B * (\log_b u)\circ C * (\log_b v)\circ D *$$
$$*(\log_b x)\circ E * (\log_b y)\circ F * (\log_b r)\circ G * (\log_b s)\circ H$$

Pour montrer que A, B, C, D, E, F, G sont linéairement indépendants, il faut montrer qu'une combinaison linéaire égale à T implique que tous les scalaires soient nuls (ici, T est le trivial formé de l'entier 1). Donc, montrons que :

$$(*) \qquad \begin{aligned} &(a_1 \circ A) * (a_2 \circ B) * \ldots * (a_7 \circ G) = T \\ &A^{a_1} * B^{a_2} * C^{a_3} * D^{a_4} * E^{a_5} * F^{a_6} * G^{a_7} = T \end{aligned}$$

implique $a_1 = a_2 = \ldots = a_7 = 0.$ Il suffit de trouver explicitement le membre de gauche dans (*) et de considérer que $b^w = 1$ implique $w = 0.$

Le carré H est une combinaison linéaire des sept autres carrés.

$$H = A^{-1} * B * C * D^{-1} * E * F^{-1} * G$$

Pour trouver ces exposants, il suffit de poser le membre de gauche de (*) $= H.$

ATTENTION!!!

Ici, $A^{-1} = (-1) \circ A.$ C'est l'inverse de A relativement à l'opération $*.$

41) La structure générale (UM*) des m-ultra-magiques d'ordre 5 (voir 15.4) nous montre que la case centrale contient $P^{\frac{1}{5}} = k$ et que le produit est alors $P = k^5.$ Puisqu'un m-ultra-magique est associatif, cela signifie que le produit de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[5]{P^2} = \sqrt[5]{k^{10}} = k^2.$ Si le carré est formé exclusivement d'entiers, alors ceux-ci sont tous des diviseurs de $k^2.$
42) Ici, le produit est $P = k^6.$ Puisqu'un m-hyper-magique possède la propriété 4) de l'encadré vert de 15.5 (page 74), alors sur toute diagonale, grande ou brisée, le produit de deux cases séparées par (n – 2)/2 cases est toujours $\sqrt[6]{P^2} = \sqrt[6]{k^{12}} = k^2.$ Si le carré est formé exclusivement d'entiers, alors ceux-ci sont tous des diviseurs de $k^2.$
43) Bonne recherche!!!
44) L'entier 456 533 = $7^3 \times 11^3$ a la forme $a^3 b^3.$ Selon les tableaux des pages 82 et 85 de 15.5, notre prédiction est 288, laquelle s'est avérée exacte!!!
45) a)
Le carré M est un m-hyper-magique d'ordre n et de produit $P.$ Considérons maintenant le carré $r\,M$ où $r > 0$ est un nombre réel. Il est clair que $r\,M$ est toujours un carré multiplicatif de produit $P^* = r^n P.$

Dans M : carré 2x2; le produit des 4 cases est : $\sqrt[n]{P^4}$.

Dans $r\,M$: carré 2x2; le produit des 4 cases est :

$$r^4\sqrt[n]{P^4} = \sqrt[n]{r^{4n}P^4} = \sqrt[n]{(r^nP)^4} = \sqrt[n]{(P^*)^4}$$

Sur toute diagonale, grande ou brisée, le produit de 2 cases séparées par $(n-2)/2$ cases est :

Dans M : $\sqrt[n]{P^2}$.

Dans $r\,M$: $r^2\sqrt[n]{P^2} = \sqrt[n]{r^{2n}P^2} = \sqrt[n]{(r^nP)^2} = \sqrt[n]{(P^*)^2}$

b)

Le carré M est un m-ultra-magique d'ordre n. Pour montrer que $r\,M$ est encore un m-ultra-magique, il faut montrer que $r\,M$ est toujours pandiagonal et associatif. Il est évident que ce nouveau carré est toujours multiplicatif et pandiagonal. En fait, à toute figure magique de produit P dans M correspond, dans $r\,M$, une figure magique de produit r^nP. Dans M, le produit de 2 cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[n]{P^2}$. Dans $r\,M$, nous trouverons : $\sqrt[n]{(P^*)^2}$ (voir la dernière ligne de 45) a)).

46) La réponse est oui. Voir le corollaire 1 de l'annexe 30, page 3.

47) Le carré est d'ordre $n = 2m+1$. Sur la grande diagonale principale, le produit des entiers est : $P = \left(\sqrt[n]{P^2}\right)^m \times k$ où k est l'entier de la case centrale. Il s'ensuit que :

$$k = \frac{P}{P^{\frac{2m}{n}}} = \frac{P^{\frac{n}{n}}}{P^{\frac{2m}{n}}} = P^{\frac{n-2m}{n}} = P^{\frac{2m+1-2m}{n}} = P^{\frac{1}{n}}$$

Le carré étant presque normal, nous avons $P^{\frac{1}{n}} = k$ d'où $P = k^n$. (Voir problème 20).

Partie 3

Les annexes et les programmes

La Partie 3 de cet ouvrage vous présente 34 annexes qui sont des compléments d'informations. Par exemple, dans l'annexe 18, vous trouverez 10 carrés premiers parfaits d'ordre 3 (formés de 9 nombres premiers consécutifs) trouvés par Harry L. Nelson en 1988. Avant 1988, aucun carré premier parfait d'ordre 3 n'était connu.

Puis, vous trouverez des fichiers et programmes EXCEL (annexe 21), MATHEMATICA (annexe 22) et MAPLE (annexe 23). Ces annexes vous donnent le nom des fichiers et programmes ainsi qu'une brève description de chacun. Avant d'avoir accès à ceux-ci, nous vous suggérons fortement de consulter les annexes 21, 22 et 23.

Quant à l'annexe 23, vous y trouverez les programmes MAPLE construits par Claude St-Hilaire, lesquels ont apporté au texte un bon nombre de données nouvelles. Par exemple, nous savons qu'il existe 3456 Dürer parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4. Les 2 programmes pour construire les m-ultra-magiques d'ordre 5 et les m-hyper-magiques d'ordre 6 méritent, comme aux échecs, un prix de beauté!!!

Annexe 1 : **Quelques structures générales**
Cette annexe présente les principales structures générales qui permettent la construction de nombreux carrés magiques et carrés multiplicatifs.

Annexe 2 : **Quelques conjectures et observations**
Les conjectures présentées ici peuvent être vues comme autant de projets de recherches.

Annexe 3 : **Carrés magiques emboîtes appelés r-tours**
Dans une r-tour, chaque carré magique M devient un autre carré magique si nous ajoutons une bordure autour de M. Vous verrez comment construire une r-tour. Par exemple, dans une 8-tour impaire, vous trouverez 8 carrés magiques d'ordres impairs.

Annexe 4 : **Réflexion sur les inverses**
L'inverse par rapport à quelle multiplication?

Annexe 5 : **Des carrés verticaux-alpha, horizontaux-alpha et plus**
Ce sont des carrés magiques exceptionnels. Dans chaque colonne (rangée), tous les entiers se terminent par le même chiffre, différent d'une colonne (rangée) à l'autre.

Annexe 6 : **Lemme sur les diagonales brisées**
Nous montre comment les diagonales, grandes et brisées, se rencontrent à l'intérieur et à l'extérieur du carré. Il sert à démontrer l'algorithme ALG-1.

Annexe 7 : **Excursion dans les nombres premiers**
Cette annexe explore les nombres premiers et les n-uplets de nombres premiers.

Annexe 8 : **Suite de 16 nombres premiers consécutifs**
Nous construisons des carrés premiers parfaits d'ordre 4.

Annexe 9 : **Carré à la fois magique et multiplicatif**
Nous connaissons des carrés presque normaux qui sont à la fois magiques et multiplicatifs; ils sont d'ordres 7, 8 et 9 (voir chapitre 13 de la Partie 2). La présente annexe montre qu'il n'existe pas de tels carrés pour les ordres 3 et 4.

Annexe 10 : **Diviseurs universels**
Carré semi-magique d'ordre *n* qui divise tous les carrés magiques et semi-magiques d'ordre *n*.

Annexe 11 : **Carrés magiques avec k nombres premiers**
Vous voulez construire un carré magique d'ordre 6 qui contient exactement 5 nombres premiers, c'est très simple!!!

Annexe 12 : **5040 permutations, 5040 carrés magiques d'ordre 5**
Nous permutons les chiffres de tous les entiers d'un carré magique pour obtenir un nouveau carré magique de même somme!!!

Annexe 13 : **Preuves des théorèmes 14.14 et 14.15**
Ces théorèmes montrent qu'il existe une infinité de carrés composés presque normaux et une infinité de carrés presque normaux qui renferment n^2 entiers consécutifs dont un seul est premier.

Annexe 14 : **Preuve du théorème 14.9**
On donne ici la dimension de l'espace vectoriel des carrés magiques de sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale.

Annexe 15 : **Polynômes rationnels à valeurs entières**
On indique ici quand un polynôme à coefficients rationnels prend des valeurs entières lorsque la variable est un entier.

Annexe 16 : **Structure générale des hyper-magiques d'ordre 10**
Cette annexe nous permet de construire des hyper-magiques d'ordre 10. L'annexe 16 en présente un presque normal.

Annexe 17 : **Réflexion sur les rotations d'un carré**
On propose ici une façon de noter ces rotations.

Annexe 18 : **Carrés magiques d'ordre 3 avec 9 nombres premiers consécutifs**
Nous donne les 27 carrés premiers parfaits connus d'ordre 3.

L'annexe 18.1, présente 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 trouvés à l'aide de 3 p-générateurs. Nous en avons maintenant 50 en date du 26 juillet 2020.

Annexe 19 : **Comment j'ai trouvé ALG-1**
Montre le cheminement qui conduit à l'algorithme ALG-1 lequel nous permet de construire des carrés arithmétiques associatifs d'ordres impairs.

Annexe 20 : **Applications de carrés magiques**
Cette annexe présente quelques applications des carrés magiques.

Annexe 21 : **Les fichiers EXCEL**
Le fichier proposé permet de construire une infinité de carrés magiques d'ordres 3 à 32.

Annexe 22 : **Les fichiers MATHEMATICA**
Ces fichiers (programmes) vous permettent de construire des carrés magiques d'ordres 3 à 24. D'autres vous donnent, pour un carré magique, le nombre de figures magiques, ses 8 équivalents, etc…

Pour utiliser ces programmes, vous devez disposer de l'application MATHEMATICA.

Annexe 23 : **Les programmes MAPLE**
Cette annexe vous présente un grand nombre de programmes dans MAPLE dont CM-arith-2k+1 qui vous permet de construire des carrés magiques (arithmétiques) d'ordres impairs. Un autre nous donne les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4 et les 880 primitifs, etc…

Pour utiliser ces programmes, vous devez d'abord disposer de l'application MAPLE. Téléchargez le dossier « Programme-MAPLE » comprenant les programmes et décompressez-le sur le bureau de votre ordinateur. Pour ouvrir un programme, chargez d'abord le programme Maple et allez choisir votre programme dans le dossier « Programmes-Maple » sur le bureau de l'ordinateur.
Note : ne pas essayer d'ouvrir un programme en double-cliquant dessus avant de charger le programme Maple.
Ouvrez ensuite l'application MAPLE, choisissez « Bureau » comme dossier des programmes à ouvrir, puis choisissez le programme à utiliser.

Annexe 24 : **Le procédé ± r ± t et ± t ± r pour construire les équivalents**
Une autre approche pour construire les équivalents d'un carré magique.

Annexe 25 : **Suites arithmétiques dans un carré magique**
On montre comment construire un carré magique dont les n^2 nombres forment une suite arithmétique.

Annexe 26 : **L'espace vectoriel des m-Dürer (MD*)**
On montre que nous sommes bien en présence d'un espace vectoriel sur R. Aussi, nous montre comment nous trouvons la structure générale des m-Dürer à partir de la structure générale des Dürer.

Annexe 27 : **Carrés magiques vers carrés multiplicatifs**
On y verra comment construire une structure générale de carrés multiplicatifs à partir d'une structure générale de carrés magiques.

Annexe 28 : **Une autre structure générale pour les Dürer**
Celle-ci est plus simple que la première!!!

Annexe 29 : **Problèmes supplémentaires**
Vous pouvez proposer un nouveau problème (avec solution) sur les carrés magiques ou multiplicatifs que nous ajouterons à l'annexe 29 en indiquant l'auteur de chaque problème.
L'annexe 29.1 présente des solutions aux problèmes de l'annexe 29.

Annexe 30 : **Les carrés géométriques**
Semblables aux carrés arithmétiques (chapitre 11), les carrés géométriques sont des carrés multiplicatifs tels que les nombres de ceux-ci forment un tableau géométrique (voir page 2 de l'annexe 30).

Annexe 31 : **Carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 avec les centres de 1 à 49**
Il est faux de croire que ces carrés ont toujours S/n comme centre. À la fin, vous trouverez le bel-intrus-9587. La case centrale renferme le seul nombre premier du carré soit 9587.

Annexe 32 : **Carrés m-ultra-magiques presque normaux**
On montre quelques propriétés des m-ultra-magiques et comment en construire un d'ordre 5.

Annexe 33 : **24 permutations d'où 24 carrés d'ordre 10**
On observera ici un groupe de 24 carrés magiques d'ordre 10 avec des propriétés remarquables.

Annexe 34 : **Projets de recherches; divers**

On propose quelques projets de recherches ainsi que deux carrés magiques avec date de naissance.

Annexe 1 : Quelques structures générales

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 3

Dimension : 3 f(S) = 8

$$(1.1)\qquad \begin{pmatrix} A+t+2r & A & A+2t+r \\ A+2t & A+t+r & A+2r \\ A+r & A+2t+2r & A+t \end{pmatrix}$$

Seconde structure générale

Dimension : 3 f(S) = 8

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & e & f & S-d-e-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & S-e-f-g & 2a+b+c+d+e-g-S \\ a+b+c-f-g & S-b-e-g & -c+e+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 4

Dimension : 8 f(S) = 14

$$(2.1)\qquad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & f & a+b-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & a+b+d-f-g & a+c-g \\ a+b+c-f-g & a+d-g & S-a-b-c-d+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Structure générale des Dürer

Dimension : 7 f(S) = 24

$$(2.2)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

Structure générale des super – Dürer

Dimension : 5 f(S) = 52

$$(2.3)\quad \begin{pmatrix} a & b & \frac{3S-2a-6b}{4} & \frac{S-2a+2b}{4} \\ \frac{2S-2a-3b}{3} & \frac{S-a}{3} & \frac{10a+6b-S}{12} & \frac{S+2a+6b}{12} \\ \frac{2a+6b-S}{4} & \frac{S+2a-2b}{4} & \frac{S-2a}{2} & \frac{S-2b}{2} \\ \frac{7S-10a-6b}{12} & \frac{5S-2a-6b}{12} & \frac{2a}{3}+b-\frac{S}{6} & \frac{S+2a}{6} \end{pmatrix}$$

Structure générale des super – Dürer – alpha

Dimension : 3 f(S) = 68

$$(2.4)\quad \begin{pmatrix} A+3r & A+t & A+3r+3t & A+2t \\ A+2r+3t & A+r+2t & A+2r & A+r+t \\ A & A+3r+t & A+3t & A+3r+2t \\ A+r+3t & A+2r+2t & A+r & A+2r+t \end{pmatrix}$$

Autre structure générale des super – Dürer – alpha

Dimension : 3 f(S) = 68

$$(2.6)\quad \begin{pmatrix} a & \frac{S+2a}{6} & \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} \\ \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} & a & \frac{S+2a}{6} \\ a & \frac{S+2a}{6} & \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} \\ \frac{S-2a}{2} & \frac{S-a}{3} & a & \frac{S+2a}{6} \end{pmatrix}$$

Structure générale des super – Dürer – bêta

Dimension : 2 f(S) = 360

(2.7)
$$\begin{pmatrix} a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \end{pmatrix}$$

Autre structure des sup *er – Dürer – bêta*

Dimension : 2 f(S) = 360

(2.8)
$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ S-a-c-f & -b+c+f & f & a+b-f \\ \frac{S}{2}-a-b+f & \frac{S}{2}-f & \frac{S}{2}+b-c-f & -\frac{S}{2}+a+c+f \\ -\frac{S}{2}+a+b+c & \frac{S}{2}-c & \frac{S}{2}-b & \frac{S}{2}-a \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques A – Dürer

Dimension : 5 f(S) = 52

(2.9)
$$\begin{pmatrix} a & \frac{11S-26a}{18} & \frac{5S-11a}{9} & \frac{10a-S}{6} \\ \frac{14a+S}{18} & \frac{S-a}{3} & \frac{7S-10a}{18} & \frac{a+2S}{9} \\ \frac{5S-2a}{18} & \frac{5a+S}{9} & \frac{2a+S}{6} & \frac{4S-7a}{9} \\ \frac{2S-5a}{3} & \frac{22a-S}{18} & \frac{13a-S}{9} & \frac{S-2a}{2} \end{pmatrix}$$

Structure générale des diaboliques

Dimension : 2 f(S) = 86

(2.10)
$$\begin{pmatrix} u+3r & u+14r & u+13r & u \\ u+4r & u+9r & u+10r & u+7r \\ u+8r & u+5r & u+6r & u+11r \\ u+15r & u+2r & u+r & u+12r \end{pmatrix}$$

Seconde structure des diaboliques

Dimension : 2 f(S) = 86

(2.11)
$$\begin{pmatrix} a & \frac{13S-22a}{30} & \frac{7S-13a}{15} & \frac{S+6a}{10} \\ \frac{11S-14a}{30} & \frac{S+a}{5} & \frac{S+2a}{6} & \frac{4S-a}{15} \\ \frac{7S+2a}{30} & \frac{S-a}{3} & \frac{3S-2a}{10} & \frac{2S+7a}{15} \\ \frac{2S-3a}{5} & \frac{S+26a}{30} & \frac{S+11a}{15} & \frac{S-2a}{2} \end{pmatrix}$$

Structure générale des diaboliques – alpha

Dimension : 2 f(S) = 86

(2.12)
$$\begin{pmatrix} a & a+13r & a+14r & a+3r \\ a+11r & a+6r & a+5r & a+8r \\ a+7r & a+10r & a+9r & a+4r \\ a+12r & a+r & a+2r & a+15r \end{pmatrix}$$

Seconde structure des diaboliques – alpha

Dimension : 2 f(S) = 86

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 2b & -57a+54h+S & 84a-2b-80h & -29a+26h+S \\ -110a+2b+110h & S-3a & 42a-40h & 2h & 71a-2b-72h+S \\ 43a-46h+S & 40h-38a & 18a-16h & -13a+10h+S & 12h-10a \\ 74a-2b-70h & 20a-18h & -33a+30h+S & -23a+20h+S & -38a+2b+38h \\ -9a+6h+S & 21a-2b-22h+S & 30a-28h & -48a+2b+48h & 6a-4h \end{pmatrix}$$

Structure générale des Ariane

Dimension : 4 f(S) = 109

$$\begin{array}{ccccc}
a & b & c & a+b+c+f-3k & -2a-2b-2c-f+8k \\
-a-b+3k & f & -a-2b-c-f+6k & a+2b-2k & a+b+c-2k \\
-a-c-f+4k & 2a+2b+c-4k & k & -2a-2b-c+6k & a+c+f-2k \\
-a-b-c+4k & -a-2b+4k & a+2b+c+f-4k & -f+2k & a+b-k \\
2a+2b+2c+f-6k & -a-b-c-f+5k & -c+2k & -b+2k & -a+2k
\end{array}$$

Structure générale des ultra – magiques d'ordre 5

Dimension : 5 f(5k) = 362

$$\begin{pmatrix}
a & b & \frac{-2a-b+5k}{2} & -2a-2b+5k & \frac{4a+3b-5k}{2} \\
-a-b+3k & \frac{-4a-5b+11k}{2} & 2a+b-2k & a+2b-2k & \frac{b+k}{2} \\
2a+3b-4k & \frac{2a+3b-3k}{2} & k & \frac{-2a-3b+7k}{2} & -2a-3b+6k \\
\frac{-b+3k}{2} & -a-2b+4k & -2a-b+4k & \frac{4a+5b-7k}{2} & a+b-k \\
\frac{-4a-3b+9k}{2} & 2a+2b-3k & \frac{2a+b-k}{2} & -b+2k & -a+2k
\end{pmatrix}$$

Structure générale des ultra – magiques – alpha

Dimension : 3 f(5k) = 934

$$\begin{array}{ccc}
a & \frac{1}{2}(-a-2b-c+S) & b \\
d & \frac{1}{6}(-3a+6b+3c-6d+S) & a-b+d \\
\frac{1}{6}(-3a+3c-6d+2S) & a-b-c+d+\frac{S}{6} & \frac{1}{6}(-9a+6b+3c-6d+2S) \\
\frac{1}{3}(-3c+S) & \frac{1}{6}(-3a+6b+9c-S) & a-b-c+\frac{S}{3} \\
a+c+d-\frac{S}{3} & \frac{1}{6}(-3a-6b-9c-6d+5S) & b+c+d-\frac{S}{3} \\
\frac{1}{6}(-9a-3c-6d+4S) & a+b+c+d-\frac{S}{2} & \frac{1}{6}(-3a-6b-3c-6d+4S) \\
(1) & (2) & (3)
\end{array}$$

Ce sont les trois premières colonnes de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6.

c	$\frac{1}{2}(a-2b-3c+S)$	$-a+b+c$
$-a-c-d+\frac{2S}{3}$	$\frac{1}{2}(a+2b+3c+2d-S)$	$-b-c-d+\frac{2S}{3}$
$\frac{1}{6}(9a+3c+6d-2S)$	$\frac{1}{6}(-6a-6b-6c-6d+5S)$	$\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}+d-\frac{S}{3}$
$\frac{1}{3}(-3a+S)$	$\frac{1}{6}(3a+6b+3c-S)$	$\frac{1}{3}(-3b+S)$
$\frac{1}{3}(-3d+S)$	$\frac{1}{6}(3a-6b-3c+6d+S)$	$-a+b-d+\frac{S}{3}$
$\frac{1}{2}(a-c+2d)$	$-a+b+c-d+\frac{S}{6}$	$\frac{3a}{2}-b-\frac{c}{2}+d$
(4)	(5)	(6)

Ce sont les trois dernières colonnes de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6.

Dimension : 5 f(S) = 5052

$\mathrm{a1}$	$-2\mathrm{a1}-5\mathrm{a3}+S$	$\mathrm{a3}$	$-\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S$
$-2\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$3\mathrm{a1}-\frac{S}{4}$	$-\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$2\mathrm{a1}+\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$
$-4\mathrm{a1}-11\mathrm{a3}+2S$	$3\mathrm{a1}+6\mathrm{a3}-S$	$-5\mathrm{a1}+2(-5\mathrm{a3}+S)$	$4\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-S$
$-\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$2\mathrm{a1}+13\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$	$-9\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$\mathrm{a1}+14\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$
$5\mathrm{a1}+8\mathrm{a3}-\frac{3S}{2}$	$-6\mathrm{a1}-13\mathrm{a3}+\frac{5S}{2}$	$4\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}-\frac{3S}{2}$	$-5\mathrm{a1}-14\mathrm{a3}+\frac{5S}{2}$
$11\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$	$\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$	$\mathrm{a1}+10\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$	$-5\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$
$-2\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$	$-3\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$2\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$
$3\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\frac{3S}{4}$	$-2\mathrm{a1}+\mathrm{a3}+\frac{S}{4}$	$4\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}-\frac{3S}{4}$	$-3\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+\frac{S}{4}$
(1)	(2)	(3)	(4)

Ce sont les quatre premières colonnes de la structure générale des **Gauss**.

$\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$3\mathrm{a3}-\frac{S}{4}$	$2\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$	$-\mathrm{a1}-4\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$
$-2\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}$	$\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+S$	$-3\mathrm{a1}-4\mathrm{a3}+S$	$2\mathrm{a1}-\mathrm{a3}$
$-4\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+\frac{7S}{4}$	$5\mathrm{a1}+14\mathrm{a3}-\frac{9S}{4}$	$-3\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}+\frac{3S}{4}$	$4\mathrm{a1}+7\mathrm{a3}-\frac{5S}{4}$
$-\mathrm{a1}-10\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$5\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$	$-2\mathrm{a1}-17\mathrm{a3}+\frac{5S}{2}$	$\mathrm{a1}+12\mathrm{a3}-\frac{3S}{2}$
$5\mathrm{a1}+10\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$	$-4\mathrm{a1}-5\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$6\mathrm{a1}+17\mathrm{a3}-\frac{11S}{4}$	$-5\mathrm{a1}-12\mathrm{a3}+\frac{9S}{4}$
$9\mathrm{a3}-S$	$-\mathrm{a1}+2(-7\mathrm{a3}+S)$	$-\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}$	$-7\mathrm{a3}+S$
$-2\mathrm{a1}-7\mathrm{a3}+\frac{5S}{4}$	$3\mathrm{a1}+12\mathrm{a3}-\frac{7S}{4}$	$\frac{1}{4}(-4\mathrm{a1}+S)$	$2\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-\frac{3S}{4}$
$3\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}-\frac{S}{2}$	$-4\mathrm{a1}-7\mathrm{a3}+\frac{3S}{2}$	$2\mathrm{a1}-5\mathrm{a3}+\frac{S}{2}$	$\frac{1}{2}(-6\mathrm{a1}+S)$
(5)	(6)	(7)	(8)

Ce sont les quatre dernières colonnes de la structure générale des **Gauss.**

Dimension : 3

$\mathrm{a1}$	$\frac{1}{4}(-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}+S)$	$\mathrm{a3}$	$\frac{1}{4}(2\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{20}(-12\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{10}(\mathrm{a1}-7\mathrm{a3}+2S)$	$\frac{1}{20}(8\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{10}(-9\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+2S)$
$\frac{1}{15}(13\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-22\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+11S)$	$\frac{1}{15}(-2\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(38\mathrm{a1}+11(-6\mathrm{a3}+S))$
$\frac{1}{60}(-44\mathrm{a1}+48\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{30}(7\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+4S)$	$\frac{1}{60}(16\mathrm{a1}-12\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{30}(-23\mathrm{a1}+21\mathrm{a3}+4S)$
$\frac{1}{60}(34\mathrm{a1}+13(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{30}(-2\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-26\mathrm{a1}-18\mathrm{a3}+13S)$	$\frac{1}{30}(28\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{30}(-29\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(28\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{30}(\mathrm{a1}-27\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(-32\mathrm{a1}+84\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{20}(14\mathrm{a1}+3(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{10}(-2\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(-6\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+3S)$	$\frac{1}{10}(8\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{6}(-5\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{12}(4\mathrm{a1}+S)$	$\frac{1}{6}(\mathrm{a1}-3\mathrm{a3}+S)$	$-\frac{2\mathrm{a1}}{3}+\mathrm{a3}+\frac{S}{12}$

Ce sont les quatre premières colonnes de la structure générale des hyper-magiques-alpha.

$\frac{1}{30}(-17\mathrm{a1}+39\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(4\mathrm{a1}-48\mathrm{a3}+13S)$	$\frac{1}{30}(13\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-56\mathrm{a1}+12\mathrm{a3}+13S)$
$\frac{1}{60}(58\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{30}(-14\mathrm{a1}-12\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(-2\mathrm{a1}+54\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{30}(16\mathrm{a1}+7(-6\mathrm{a3}+S))$
$\frac{1}{10}(-7\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(4\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+3S)$	$\frac{1}{10}(3\mathrm{a1}-\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(-16\mathrm{a1}+3(4\mathrm{a3}+S))$
$\frac{1}{12}(10\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{6}(-2\mathrm{a1}+S)$	$\frac{1}{12}(-2\mathrm{a1}+6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{6}(4\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{4}(-4\mathrm{a1}+S)$	$\frac{\mathrm{a1}+\mathrm{a3}}{2}$	$\frac{1}{4}(-4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{2}(-\mathrm{a1}+3\mathrm{a3})$
$\frac{1}{5}(3\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(-2\mathrm{a1}+14\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{5}(-2\mathrm{a1}-\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(18\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{60}(-52\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+11S)$	$\frac{1}{30}(11\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+2S)$	$\frac{1}{60}(8\mathrm{a1}-36\mathrm{a3}+11S)$	$\frac{1}{30}(-19\mathrm{a1}+33\mathrm{a3}+2S)$
$\frac{1}{15}(11\mathrm{a1}+2(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{60}(-14\mathrm{a1}+18\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{15}(-4\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+2S)$	$\frac{1}{60}(46\mathrm{a1}+7(-6\mathrm{a3}+S))$

Ce sont les quatre dernières colonnes de la structure générale des hyper-magiques-alpha.

Dimension : 3

$\mathrm{a1}$	$\frac{1}{2}(-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a7}+S)$	$\mathrm{a3}$
$\mathrm{a7}$	$\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{3}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}+S)$
$-\mathrm{a1}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}-6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+5S)$	$\mathrm{a15}$
$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-\mathrm{a4}+\frac{S}{3}$	$\frac{1}{12}(6\mathrm{a15}+12\mathrm{a3}-6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}-S)$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+S)$
$-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{3}$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+2\mathrm{a4}-\frac{S}{6}$	$\frac{1}{4}(2\mathrm{a15}-4\mathrm{a3}-6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}+S)$
$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}+\mathrm{a3}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a4}+S)$

Ce sont les trois premières colonnes de la structure générale des ultra-magiques-bêta.

$\mathrm{a4}$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}-\mathrm{a3}+\frac{S}{3}$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$
$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}+12\mathrm{a3}+18\mathrm{a4}-18\mathrm{a7}+S)$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}+\frac{S}{2}$	$\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}$
$\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}+2\mathrm{a7}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}-12\mathrm{a3}+6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+5S)$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+\mathrm{a4}$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+S)$	$\frac{1}{12}(6\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}-S)$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$
$\frac{1}{4}(2\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a7}+S)$	$-\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a7}+S)$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a3}+S)$	$\mathrm{a1}+\mathrm{a7}-\frac{S}{6}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a1}+S)$

Ce sont les trois dernières colonnes de la structure générale des ultra-magiques-bêta.

Dimension : 6

La structure générale des **hyper-magiques d'ordre 10** contient 9 variables libres et se trouve dans l'annexe 16.

Voici quelques structures générales de carrés multiplicatifs de produits $P \neq 0$.

a	$\frac{d^4}{a^2c}$	$\frac{ac}{d}$
c	d	$\frac{d^2}{c}$
$\frac{d^3}{ac}$	$\frac{a^2c}{d^2}$	$\frac{d^2}{a}$

Structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 3; $P = d^3$.

kmn^2	k	km^2n
km^2	kmn	kn^2
kn	km^2n^2	km

Autre structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 3; $P = (kmn)^3$.

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	e	f	$\frac{P}{def}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$\frac{P^2}{a^2bcdeg}$	$\frac{ef}{g}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP^2}{a^2b^2cdeg}$	$\frac{a^2bdeg}{fP}$	$\frac{abcdg}{P}$

Structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 4

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	$\frac{P}{abd}$	f	$\frac{ab}{f}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$\frac{P}{acg}$	$\frac{fP}{abdg}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP}{abcg}$	$\frac{ag}{f}$	$\frac{abcdg}{P}$

Structure générale (MD) des m-Dürer

mn	uv	xy	rs
ry	sx	mu	nv
su	ny	rv	mx
vx	mr	ns	uy

Autre structure générale (MD*) des m-Dürer

a	b	c	$\frac{c\,g^2}{a\,b}$
$\frac{c\,f}{a}$	$\frac{c\,g^2}{b\,f}$	f	$\frac{a\,b}{f}$
g	$\frac{a\,b}{g}$	$\frac{c\,g}{a}$	$\frac{c\,g}{b}$
$\frac{c\,g}{f}$	$\frac{c\,f\,g}{a\,b}$	$\frac{a\,g}{f}$	$\frac{b\,f}{g}$

Structure générale (MSD) des m-super-Dürer

$a^2b\,f\,g$	$a\,b^2\,f\,g$	$a\,b\,c\,f\,g$	$c\,f\,g^3$
$b\,c\,f^2g$	$a\,c\,g^3$	$a\,b\,f^2g$	a^2b^2g
$a\,b\,f\,g^2$	$a^2b^2\,f$	$b\,c\,f\,g^2$	$a\,c\,f\,g^2$
$a\,b\,c\,g^2$	$c\,f^2g^2$	$a^2b\,g^2$	$a\,b^2\,f^2$

Autre structure générale (MSD – 1) des m-super-Dürer

u	$u\,v^3w^2$	$u\,v^3w$	$u\,w^3$
$u\,v^2w^3$	$u\,v\,w$	$u\,v\,w^2$	$u\,v^2$
$u\,v\,w^3$	$u\,v^2w$	$u\,v^2w^2$	$u\,v$
$u\,v^3$	$u\,w^2$	$u\,w$	$u\,v^3w^3$

Carré géométrique de produit $P = (u^2v^3w^3)^2$

a	$\frac{P^{\frac{3}{5}}}{a\,e}$	$\frac{e^2}{m}$	d	$\frac{m\,P^{\frac{2}{5}}}{d\,e}$
e	$\frac{d\,m}{e}$	$\frac{a\,e}{d}$	$\frac{P^{\frac{4}{5}}}{a\,e^2}$	$\frac{e\,P^{\frac{1}{5}}}{m}$
$\frac{P^{\frac{4}{5}}}{a\,d\,e}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{m}$	$P^{\frac{1}{5}}$	m	$\frac{a\,d\,e}{P^{\frac{2}{5}}}$
$\frac{m\,P^{\frac{1}{5}}}{e}$	$\frac{a\,e^2}{P^{\frac{2}{5}}}$	$\frac{d\,P^{\frac{2}{5}}}{a\,e}$	$\frac{e\,P^{\frac{2}{5}}}{d\,m}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{e}$
$\frac{d\,e}{m}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{d}$	$\frac{m\,P^{\frac{2}{5}}}{e^2}$	$\frac{a\,e}{P^{\frac{1}{5}}}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{a}$

Structure générale des m-ultra-magiques d'ordre 5 à variables non nulles

Si ce m-ultra-magique d'ordre 5 est formé exclusivement d'entiers > 0, alors $P = k^5$ où $k \geq 1$ est entier.

$\frac{k^2}{t}$	$\frac{n^2t^3wy}{k^6}$	$\frac{k^{11}}{n^3t^4wy^2}$	$\frac{n^2t^3y^2}{k^6}$	$\frac{k^2w}{ty}$	$\frac{k^3}{nw}$
$\frac{k^2}{y}$	$\frac{k^6}{n^2t^2w}$	$\frac{n^3t^3wy}{k^7}$	$\frac{k^6}{n^2t^2y}$	$\frac{k^2}{w}$	$\frac{ntwy}{k^3}$
$\frac{nt^2y^2}{k^4}$	$\frac{nw}{y}$	$\frac{k^5}{n^2tw}$	n	$\frac{nt^2wy}{k^4}$	$\frac{k^9}{n^2t^3wy^2}$
$\frac{k^8}{n^2t^3y^2}$	$\frac{ty}{w}$	$\frac{nw}{k}$	t	$\frac{k^8}{n^2t^3wy}$	$\frac{n^3t^4wy^2}{k^9}$
$\frac{n^2t^2y}{k^4}$	w	$\frac{k^5}{ntwy}$	y	$\frac{n^2t^2w}{k^4}$	$\frac{k^9}{n^3t^3wy}$
$\frac{k^2}{n}$	$\frac{k^6}{nt^2wy}$	$\frac{n^2t^3wy^2}{k^7}$	$\frac{k^6}{nt^2y^2}$	$\frac{k^2y}{nw}$	$\frac{n^2tw}{k^3}$

Structure générale (HM) des m-hyper-magiques d'ordre 6 avec $P = k^6$

Annexe 2 : Quelques conjectures et observations

Nous présentons ici toutes les conjectures que nous trouvons à travers ce livre.

CONJECTURE 1 :

Soit M, un carré magique d'ordre n et de somme magique S qui renferme n^2 nombres différents et soit E, un carré magique normal d'ordre n (qui renferme les entiers de 1 à n^2) et de somme magique T. Le nombre de figures magiques de M se note $f(S)$ *ou* $f(M)$ et le nombre de figures magiques de E, $f(T)$ *ou* $f(E)$. Alors :

$$f(S) \leq f(T)$$

Ainsi, pour $n = 4$, $f(T) = f(34) = 86$ d'où $f(S) \leq 86$

Pour $n = 5$, $f(T) = f(65) = 1394$ d'où $f(S) \leq 1394$

Pour $n = 7$, $f(T) = f(175) = 957332$ d'où $f(S) \leq 957332$

CONJECTURE 2 :

Pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe au moins un carré magique normal idéal.

Pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe un super-générateur.

Pour tous les ordres $n \geq 4$, il existe au moins un carré magique presque normal de somme magique k et ce, pour tout $k \geq S$.

CONJECTURE 3 : la conjecture CBCS

Il existe une infinité de quadruplets jumeaux voisins.

CONJECTURE 4 :

Soit W un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ qui contient n^2 entiers consécutifs. Le nombre maximum de nombres premiers contenus dans W est $p(M)$ ou $p(M)+1$.

CONJECTURE 5 :

Soit W un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$, qui contient n^2 entiers consécutifs. Si le carré W contient p(M) + 1 nombres premiers, alors celui-ci est le seul à contenir p(M) + 1 nombres premiers.

CONJECTURE 6 :

Considérons les structures générales de carrés arithmétiques construites avec ALG-1, ALG-2 et ALG-3. Vues comme des matrices carrées, nous pouvons calculer leurs déterminants.

a) Pour les ordres pairs multiples de 4 : $Det = 0$ si $n \geq 4$.
b) Pour les ordres pairs non multiples de 4 : $Det = 0$ si $n \geq 10$.
c) Pour les ordres impairs $n = 2k+1$, $Det = \pm(2k+1)^{2k}(r^2 - t^2)^k(a + k\,r + k\,t)$ avec $k \geq 1$, un entier. Nous choisissons le signe $+$ si k est pair et le signe $-$ si k est impair.

CONJECTURE 7 :

Si un carré est vertical-alpha ou horizontal-alpha, alors il est d'ordre 5.

CONJECTURE 8 : Voir 15.3.2

Tous les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 donc de produit $P = k^2$, se retrouvent, lorsqu'ils existent, en groupes de quarante-huit carrés. Dans chaque groupe, tous les carrés renferment exactement les mêmes seize entiers, des diviseurs de k.

CONJECTURE 9 : Voir annexe 24, pages 9 et 10.

CONJECTURE 10 : Voir annexe 24, pages 12 et 13.

OBSERVATION 1 :

Les treize meilleurs produits pour les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 et de produit $P = k^2$ sont obtenus avec :

$k = 120$; 168 ; 210 ; 216 ; 240 ; 264 ; 270 ; 280 ; 312 ; 330 ; 336 ; 360 ; 378 ; 384

Les treize meilleurs produits pour les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 et de produit $P = k^6$ sont obtenus avec :

$k = 120$; 168 ; 210 ; 216 ; 240 ; 264 ; 270 ; 280 ; 312 ; 330 ; 336 ; 360 ; 378

Ces treize valeurs de k sont les mêmes pour les ordres 4 et 6. Toutes les autres valeurs de 120 à 378 nous donnent aucun carré ni pour 4 ni pour 6.

Cependant, avec $k = 384$, nous trouvons des presque normaux d'ordre 4 mais aucun d'ordre 6.

Annexe 3 : Carrés magiques emboîtés appelés r-tours

Voici quatre carrés magiques emboîtés presque normaux avec :

$S_1 = 125 \quad S_3 = 375 \quad S_5 = 625 \quad S_7 = 875$

91	105	106	107	108	109	249
152	130	131	132	133	99	98
153	134	124	129	122	116	97
154	135	123	125	127	115	96
155	75	128	121	126	175	95
169	151	119	118	117	120	81
1	145	144	143	142	141	159

Les sommes magiques S_1, S_3, S_5, S_7 sont respectivement celles du carré central d'ordre 1, du carré central d'ordre 3, du carré central s'ordre 5 et du carré d'ordre 7. Ces sommes s'écrivent également :

$$S_1 = 125 \quad S_3 = 3 \times 125 \quad S_5 = 5 \times 125 \quad S_7 = 7 \times 125$$

Six carrés magiques emboîtés presque normaux

146	144	301	142	303	140	305	138	307	136	380
150	145	148	149	177	179	247	253	257	443	294
310	273	188	202	203	204	205	206	346	171	134
133	274	249	227	228	229	230	196	195	170	311
312	275	250	231	221	226	219	213	194	169	132
131	276	251	232	220	222	224	212	193	168	313
314	277	252	172	225	218	223	272	192	167	130
129	278	266	248	216	215	214	217	178	166	315
321	199	98	242	241	240	239	238	256	245	123
432	1	296	295	267	265	197	191	187	299	12
64	300	143	302	141	304	139	306	137	308	298

$$S_1 = 222 \quad S_3 = 666 \quad S_5 = 1110 \quad S_7 = 1554 \quad S_9 = 1998 \quad S_{11} = 2442$$

$$S_1 = 222 \quad S_3 = 3 \times 222 \quad S_5 = 5 \times 222 \quad S_7 = 7 \times 222 \quad S_9 = 9 \times 222 \quad S_{11} = 11 \times 222$$

Quatre autres carrés magiques emboîtés presque normaux :

59	18	57	20	23	22	67
27	43	32	45	24	46	49
55	51	37	42	35	25	21
28	50	36	38	40	26	48
75	16	41	34	39	60	1
13	30	44	31	52	33	63
9	58	19	56	53	54	17

$$S_1 = 38 \quad S_3 = 3\times 38 \quad S_5 = 5\times 38 \quad S_7 = 7\times 38$$

Nous observons que $S_n = n\times centre$!!! En est-il toujours ainsi?

Six carrés magiques emboîtés presque normaux

87	146	69	152	67	155	64	157	62	61	190
160	119	140	79	142	77	144	75	148	66	60
59	138	131	90	129	92	95	94	139	82	161
162	83	99	115	104	117	96	118	121	137	58
57	136	127	123	109	114	107	97	93	84	163
164	86	100	122	108	110	112	98	120	134	56
53	149	147	88	113	106	111	132	73	71	167
168	70	85	102	116	103	124	105	135	150	52
51	55	81	130	91	128	125	126	89	165	169
219	154	80	141	78	143	76	145	72	101	1
30	74	151	68	153	65	156	63	158	159	133

$$S_1 = 110 \quad S_3 = 3\times 110 \quad S_5 = 5\times 110 \quad S_7 = 7\times 110 \quad S_9 = 9\times 110 \quad S_{11} = 11\times 110$$

$$S_1 = 110 \quad S_3 = 330 \quad S_5 = 550 \quad S_7 = 770 \quad S_9 = 990 \quad S_{11} = 1210$$

Sept carrés magiques emboîtés presque normaux

189	32	187	34	185	36	183	38	181	18	179	2	166
3	87	146	69	152	67	155	64	157	62	61	190	217
24	160	119	140	79	142	77	144	75	148	66	60	196
215	59	138	131	90	129	92	95	94	139	82	161	5
214	162	83	99	115	104	117	96	118	121	137	58	6
213	57	136	127	123	109	114	107	97	93	84	163	7
28	164	86	100	122	108	110	112	98	120	134	56	192
29	53	149	147	88	113	106	111	132	73	71	167	191
40	168	70	85	102	116	103	124	105	135	150	52	180
11	51	55	81	130	91	128	125	126	89	165	169	209
200	219	154	80	141	78	143	76	145	72	101	1	20
210	30	74	151	68	153	65	156	63	158	159	133	10
54	188	33	186	35	184	37	182	39	202	41	218	31

$$S_1 = 110 \quad S_3 = 3\times 110 \quad S_5 = 5\times 110 \quad S_7 = 7\times 110 \quad S_9 = 9\times 110 \quad S_{11} = 11\times 110 \quad S_{13} = 13\times 110$$

$$S_1 = 110 \quad S_3 = 330 \quad S_5 = 550 \quad S_7 = 770 \quad S_9 = 990 \quad S_{11} = 1210 \quad S_{13} = 1430$$

Nous avons vu, dans 15.3.3, qu'il est toujours possible de placer une bordure autour d'un carré d'ordre $n \geq 3$, à la condition que l'unique somme possible pour que le carré d'ordre $n+2$ devienne magique soit $S = \frac{S^*}{n}$. Ici, notre carré initial d'ordre 3 est toujours magique presque normal.

Dans les exemples que nous venons de voir, le carré central d'ordre 3 a toujours comme somme magique 3 fois le nombre central. Posons : $S_3 = 3c$. Nous trouvons, selon le procédé de 15.3.3 :

$$S_5 = \frac{5S_3}{3} = \frac{5 \times 3c}{3} = 5c$$
$$S_7 = \frac{7S_5}{5} = \frac{7 \times 5c}{5} = 7c$$
$$S_9 = \frac{9S_7}{7} = \frac{9 \times 7c}{7} = 9c$$

Supposons $S_k = k\,c$. Alors $S_{k+2} = \frac{k+2}{k} k\,c = (k+2)c$. Ainsi, nous voyons bien comment se calcule chaque somme magique. Nous aurons, en continuant avec d'autres bordures autour du carré précédent, par exemple, $S_{77} = 77c$.

Il est important de dire ici que nous commençons toujours avec un carré magique d'ordre 3 de centre c. Nous aurons alors :

$$S_k = k\,c$$

où $k \geq 3$ est un entier impair.

Qu'arrive-t-il si $k \geq 4$ est un entier pair et que nous commençons toujours avec un carré magique presque normal d'ordre 4? À vous de répondre. Voir l'exemple qui suit.

Pour faciliter la construction du carré magique presque normal d'ordre k + 2, nous vous suggérons d'ordonner tous les entiers du carré d'ordre k puis…..

Quel que soit le carré quelconque d'ordre $n \geq 3$, nous pouvons toujours à l'aide d'une bordure construire un carré magique d'ordre $n+2$.

Trois carrés magiques emboîtés presque normaux

104	64	106	70	108	60	110	54
116	93	75	95	73	100	71	53
52	101	80	91	90	77	68	117
118	67	81	86	87	84	102	51
50	103	85	82	83	88	66	119
120	45	92	79	78	89	124	49
1	98	94	74	96	69	76	168
115	105	63	99	61	109	59	65

$$S_4 = 338 \qquad S_6 = 507 \qquad S_8 = 676$$
$$S_4 = 4 \times 84,5 \qquad S_6 = 6 \times 84,5 \qquad S_8 = 8 \times 84,5$$

Posons S, la somme du carré magique d'ordre 4. Le procédé de construction des bordures nous donne le résultat suivant : $S_k = k\dfrac{S}{4}$ avec $k \geq 4$, un entier pair.

Ici, le carré central d'ordre 4 a pour somme $S = 338 = 4 \times \dfrac{338}{4} = 4 \times 84,5$.

Voici, relié au théorème 15.12, un procédé qui va nous permettre de placer une bordure autour d'un carré magique presque normal d'ordre n afin d'obtenir un carré magique presque normal d'ordre $n+2$. En fait, nous allons construire une série de carrés magiques presque normaux emboîtés à partir d'un carré magique normal d'ordre 3 ou d'un carré magique normal d'ordre 4. Si les carrés magiques presque normaux sont d'ordres impairs, alors nous parlerons d'une **r-tour-impaire** si celle-ci est formée de r carrés magiques emboîtés comme les cinq que nous venons de voir (deux 4-tours-impaires, deux 6-tours-impaires et une 7-tour-impaire). Si les carrés magiques presque normaux sont d'ordres pairs, alors nous parlerons d'une **r-tour-paire** si celle-ci est formée de r carrés magiques emboîtés comme le dernier exemple ci-haut (une 3-tour-paire).

1) Nous allons prendre M, un carré magique presque normal d'ordre n et de somme S puis nous allons construire la bordure, ici en vert.

$W+k_1$	$W+k$	$W+2k$	...					$W+nk$	X
							W		
Y	$m-k$	$m-2k$	...					$m-nk$	$m-k_1$

W est le plus grand entier de M. Posons $A=\frac{2S}{n}$ *et* $m=A-W$. Nous verrons un peu plus loin que A est un entier. Nous posons dans la case (1 ; 1) le nombre $W+k_1$ et dans

la case (n+2 ; n+2), le nombre $m-k_1$. Ainsi la somme de ces deux cases est A, nombre nécessaire pour que le carré d'ordre n + 2 soit magique.

Dans la première rangée et dans la dernière rangée, nous trouvons respectivement:

$$W+k_1\ ;\ W+k\ ;\ W+2k\ ;\ \ldots\ ;\ W+nk\ ;\ X$$
$$Y\ ;\ m-k\ ;\ m-2k\ ;\ \ldots\ ;\ m-nk\ ;\ m-k_1$$

La somme magique du carré d'ordre $n+2$ est $S'=\dfrac{n+2}{n}S=S+A.$

2) Nous allons donner à $k_1 \geq 1$ une valeur entière qui rend négatif $m-k_1$. Puis nous allons donner à $k \geq 1$ une valeur entière qui fait de X , un entier négatif en précisant que $k_1 < k.$

3) Parmi les entiers que nous avons maintenant dans le carré d'ordre n + 2, nous affirmons que X est le plus petit entier et que Y est le plus grand entier. En effet :

$$\begin{aligned}
X &= S'-(n+1)W-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k)-nk \\
&= S+A-nW-W-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k)-nk \\
&= (A-W)+(S-nW)-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k)-nk \\
&= (m-nk)-(nW-S)-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k) < m-nk
\end{aligned}$$

puisque $nW-S>0.$ Trouvons maintenant :

$$\begin{aligned}
Y = A-X &= m+W-(m-nk)-(S-nW)+k_1+(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k) \\
&= (W+nk)+(nW-S)+k_1+(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k) > W+nk
\end{aligned}$$

4) Ainsi nous voyons que dans le carré d'ordre n+2, les n colonnes centrales, les deux grandes diagonales et les première et dernière rangées sont de somme $S'=S+A.$ De plus, tous les nombres sont des entiers différents deux à deux.

5) Il reste à compléter les première et dernière colonnes. Nous savons maintenant que $X+Y=A.$ De plus, X est le plus petit entier négatif et Y, le plus grand entier positif. Voici comment nous allons remplir les deux colonnes (voir le carré qui suit).

6) Nous allons donner à la variable u des valeurs entières $\geq 1.$ Sauf R dans la colonne de gauche, les nouveaux nombres forment une suite strictement croissante ce qui nous donne des nombres différents des autres. De même, excepté T dans la colonne de droite, les nouveaux nombres forment une suite strictement décroissante ce qui donne des nombres différents des autres.

7) Nous allons ensuite montrer que R deviendra le plus petit nombre négatif du carré et que T deviendra le plus grand nombre positif du carré. Ainsi, nous n'aurons pas de répétitions. Mais actuellement, la case bleue contient le plus grand nombre et la case grise, le plus petit.

8) Trouvons R :

$$R = S + A - W - k_1 - nY - (u + 2u + 3u + \ldots + (n-2)u) - (n-1)u$$
$$= S + X + Y - W - k_1 - nY - (u + 2u + 3u + \ldots + (n-2)u) - (n-1)u$$
$$= (X - (n-1)u) + [S - (n-1)Y - W - k_1 - (u + 2u + 3u + \ldots + (n-2)u]$$

Il est clair qu'avec u suffisamment grand, le nombre entre crochets sera négatif et R deviendra le plus petit entier du carré.

9) Trouvons T :

$$T = S + X + Y - m + k_1 - nX + (u + 2u + 3u + \ldots + (n-2)u) + (n-1)u$$
$$= (Y + (n-1)u) + [S + (1-n)X + k_1 + (u + 2u + 3u + \ldots + (n-2)u) - m]$$

Il est clair qu'avec u suffisamment grand, le nombre entre crochets sera positif et T deviendra le plus grand entier du carré.

10) Il est facile de vérifier que la rangée qui contient R et T est magique et que $R + T = A$.

11) Le carré final est magique et renferme que des entiers tous différents deux à deux.

$W + k_1$	$W + k$	$W + 2k$	...	...	...	...	...	$W + nk$	X
$Y + (n-1)u$									$X - (n-1)u$
...									...
...							W		...
...									...
$Y + 3u$									$X - 3u$
$Y + 2u$									$X - 2u$
$Y + u$									$X - u$
R									T
Y	$m - k$	$m - 2k$	...	...	...	...	...	$m - nk$	$m - k_1$

Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Soit M un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$. Il est toujours possible de construire à l'aide d'une bordure, un carré magique M'd'ordre $n+2$ formé exclusivement d'entiers différents deux à deux. En ajoutant un entier correcteur dans toutes les cases de M', celui-ci deviendra presque normal. Nous pouvons donc construire une infinité de r-tours avec r > 0, un entier.

Quelques remarques :

1) Pourquoi A sera un entier et donc que tous les nombres du carré d'ordre n+2 seront des entiers?
2) Dans la construction des r-tours, nous partirons toujours avec un carré magique normal d'ordre 3 pour les r-tours- impaires et avec un carré magique normal d'ordre 4 pour les r-tours -paires. Nous verrons alors pourquoi A sera un entier.
3) L'algorithme que nous venons de voir ne sera pas utilisé tel quel pour construire un carré magique à l'aide d'une bordure. Celui-ci n'avait pour but que de montrer l'existence d'un carré magique presque normal obtenu à l'aide d'une bordure donc de montrer l'existence des r-tours.
4) Dans une r-tour, tous les carrés de même case centrale doivent être magiques et presque normaux.

En terminant, voici une 8-tour-impaire de centre 160 et une de centre 122. La toute première que nous avions trouvée avait pour centre 236. Pouvez-vous améliorer cette 8-tour avec un centre plus petit que 122?

Pourquoi pour construire le carré d'ordre 15, il a fallu augmenter le centre 110?

Voici une 8-tour-impaire de centre 160

266	58	261	62	257	64	255	66	253	69	249	72	247	220	1
221	239	82	237	84	235	86	233	88	231	68	229	52	216	99
3	53	137	196	119	202	117	205	114	207	112	111	240	267	317
223	74	210	169	190	129	192	127	194	125	198	116	110	246	97
96	265	109	188	181	140	179	142	145	144	189	132	211	55	224
225	264	212	133	149	165	154	167	146	168	171	187	108	56	95
94	263	107	186	177	173	159	164	157	147	143	134	213	57	226
227	78	214	136	150	172	158	160	162	148	170	184	106	242	93
92	79	103	199	197	138	163	156	161	182	123	121	217	241	228
243	90	218	120	135	152	166	153	174	155	185	200	102	230	77
76	61	101	105	131	180	141	178	175	176	139	215	219	259	244
245	250	269	204	130	191	128	193	126	195	122	151	51	70	75
50	260	80	124	201	118	203	115	206	113	208	209	183	60	270
20	104	238	83	236	85	234	87	232	89	252	91	268	81	300
319	262	59	258	63	256	65	254	67	251	71	248	73	100	54

$$S_1 = 160 \quad S_3 = 3\times160 \quad S_5 = 5\times160 \quad S_7 = 7\times160 \quad S_9 = 9\times160$$
$$S_{11} = 11\times160 \quad S_{13} = 13\times160 \quad S_{15} = 15\times160$$

Une 8-tour-impaire de centre 122

228	20	223	24	219	26	217	28	215	31	211	34	237	55	62
183	201	44	199	46	197	48	195	50	193	30	191	14	178	61
60	15	99	158	81	164	79	167	76	169	74	73	202	229	184
185	36	172	131	152	91	154	89	156	87	160	78	72	208	59
35	227	71	150	143	102	141	104	107	106	151	94	173	17	209
187	226	174	95	111	127	116	129	108	130	133	149	70	18	57
56	225	69	148	139	135	121	126	119	109	105	96	175	19	188
186	40	176	98	112	134	120	122	124	110	132	146	68	204	58
39	41	65	161	159	100	125	118	123	144	85	83	179	203	205
206	52	180	82	97	114	128	115	136	117	147	162	64	192	38
37	23	63	67	93	142	103	140	137	138	101	177	181	221	207
12	212	231	166	92	153	90	155	88	157	84	113	13	32	232
233	222	42	86	163	80	165	77	168	75	170	171	145	22	11
1	66	200	45	198	47	196	49	194	51	214	53	230	43	243
182	224	21	220	25	218	27	216	29	213	33	210	7	189	16

$$S_1 = 122 \quad S_3 = 3\times 122 \quad S_5 = 5\times 122 \quad S_7 = 7\times 122 \quad S_9 = 9\times 122$$
$$S_{11} = 11\times 122 \quad S_{13} = 13\times 122 \quad S_{15} = 15\times 122$$

Annexe 4 : Réflexion sur les inverses

Ici, notre définition de corps n'impose pas la commutativité de la multiplication.

Dans un corps K, un élément particulier, noté 0, est appelé «élément neutre pour l'addition» car nous avons :

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ pour tout } x \text{ dans } K.$$

Il existe un second élément particulier, noté 1, que nous appelons «élément neutre pour la multiplication» car nous avons :

$$x\,1 = 1\,x = x \text{ pour tout } x \text{ dans } K.$$

Soit x dans K. Si x est différent de 0, alors il existe un élément unique x' dans K tel que :

$$x\,x' = x'\,x = 1$$

Nous dirons que x' est l'inverse multiplicatif de x. Plus simplement, x' est l'inverse de x et nous écrirons : $x' = x^{-1}$

Quant à l'inverse additif de x, nous l'appellerons l'opposé de x et nous le noterons $-x$ d'où :

$$x + -x = -x + x = 0$$

Nous allons porter notre réflexion sur l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n > 0.

Prenons, par exemple, l'ensemble M des matrices carrées d'ordre 4 formées de nombres réels. Il est clair que M n'est pas un corps commutatif puisqu'en général, AB est différent de BA. De plus, M n'est toujours pas un corps car il existe au moins un carré A qui n'est pas inversible. Précisons tout ça.

1) Quelle est la multiplication dans M? S'agit-t-il de la multiplication matricielle (*) ou de la multiplication terme à terme (**)?
2) Dans les deux cas, M est un anneau. Il n'est pas commutatif avec (*) mais il l'est avec (**).
3) M possède un élément neutre avec (*) différent de l'élément neutre avec (**).
4) Avec (*), une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul tandis qu'avec (**), A est inversible si et seulement si A ne renferme aucun 0.

Il est donc très important de préciser notre choix de la multiplication d'où notre choix de l'élément neutre. Également, le choix des éléments de notre ensemble de départ. Ici, M contient toutes les matrices carrées d'ordre 4 formées de nombres réels. Nous aurions pu choisir

l'ensemble M des matrices carrées triviales (nous trouvons le même nombre à chaque position dans la matrice).

Cas 1 : M contient toutes les matrices d'ordre 1 formées d'un seul nombre réel.

Il est évident que si x est non nul, alors la matrice est inversible. Avec (*) ou (**), l'élément neutre pour la multiplication est (1) et l'inverse de (x) est (1/x).

Cas 2 : M contient toutes les matrices carrées formées de nombres réels, d'ordre $n, n \geq 2$.

Nous prendrons comme exemple, $n = 3$. La généralisation sera évidente!

a) La multiplication est matricielle et la matrice unité est :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A appartient à M, alors A possède dans M une matrice inverse A' si et seulement si le déterminant de A est non nul. Nous aurons alors AA' = A'A = I.

b) La multiplication est terme à terme et la matrice unité est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A est dans M, alors son inverse existe dans M si et seulement si A ne contient aucun 0. Nous aurons alors : AA' = A'A = J.

Cas 3 : M contient toutes les matrices triviales d'ordre 3. La multiplication est matricielle.

Il est clair que I n'est pas dans M tandis que J s'y trouve. Mais J n'est pas une matrice unité puisque :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{J} = \begin{pmatrix} 3k & 3k & 3k \\ 3k & 3k & 3k \\ 3k & 3k & 3k \end{pmatrix}$$

De plus, $J\,J = 3J$.

Il est facile de vérifier que $(1/3)J$ est la matrice unité de M. Si $k \neq 0$, alors la matrice A est inversible et son inverse est : $A^{-1} = \dfrac{1}{9k} J$.

Maintenant, vous et moi regardons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vous me dites que A n'est pas inversible puisque que nous trouvons dans A, deux lignes identiques d'où un déterminant nul.

Je vous réponds que cette matrice ne peut pas être vue obligatoirement comme faisant partie de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 avec I comme élément neutre.

Je vois A comme matrice qui appartient à un autre ensemble, celui des matrices triviales d'ordre 3, qui ne contient pas I et qui possède une structure de corps commutatif.

Finalement, nous avons raison tous les deux!!! Tout est une question de point de vue!!! De plus, il n'y a aucune contradiction!!!

Annexe 5 : Des carrés verticaux-alpha, horizontaux-alpha et plus

14.13.1 :

Dans la section 14.13, nous avons cherché un carré magique presque normal d'ordre 5 qui contiendrait vingt cinq entiers qui ne forment pas une suite arithmétique. Pour cela, nous avons utilisé l'algorithme ALG-1 en nous servant du fichier «Ordre 5» dans MATHEMATICA. Avec les variables a = 4, r = 2, t = 12, nous avons obtenu le carré arithmétique suivant :

36	54	22	40	8
6	34	52	20	48
46	4	32	60	18
16	44	12	30	58
56	24	42	10	28

a = 4; r = 2; t = 12; S = 160

Mais quelle surprise de voir apparaitre ce carré!!! Dans chaque colonne, les cinq entiers se terminent tous par le même chiffre, celui de droite. Pour les cinq colonnes, ces cinq chiffres sont différents deux à deux. De gauche à droite, nous trouvons 6, 4, 2, 0 et 8. Nous appelons «carré vertical-alpha», un tel carré.

C'est par chance que nous avons trouvé ce carré. Nous cherchions seulement un carré magique presque normal d'ordre 5 tel que ses vingt cinq entiers ne forment pas une suite arithmétique. Et nous trouvons ce curieux carré!!! Pouvons-nous en trouver d'autres? Oui, dans 14.13, nous avons montré qu'il en existe une infinité d'ordre 5.

Pouvons-nous en trouver d'ordre 3, 4, 6, 7, …?

Nous allons montrer que pour obtenir un carré vertical-alpha d'ordre $n \geq 3$, seulement les ordres $n = 5 et\, n = 10k$ où $k \geq 1$ est un entier, sont susceptibles de nous donner de tels carrés. Nous pourrons donc affirmer, par exemple, qu'il n'existe pas de carré vertical-alpha d'ordre 6.

Il est clair que si un carré vertical-alpha existe, alors, avec une rotation de 90°de celui-ci, nous trouverons un carré horizontal-alpha.

Avant de démontrer ce résultat, voyons **les cas** $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$

Supposons que M soit un carré vertical-alpha **d'ordre 3**. Ce carré est donc magique et presque normal. L'addition des entiers des trois colonnes nous donne trois entiers identiques puisque M

est magique donc trois entiers qui se terminent par le même chiffre u. . Voyons par quel chiffre se termine la somme dans chaque colonne.

$$\begin{array}{l} u: 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ S: 0\ 3\ 6\ 9\ 2\ 5\ 8\ 1\ 4\ 7 \end{array}$$

Puisque M est magique, nous devons avoir dans la rangée S au moins trois fois le même chiffre, ce qui n'est pas le cas. Donc M ne peut jamais être ni vertical-alpha, ni horizontal-alpha.

Pour le cas $n = 4$, le tableau ci-haut devient :

$$\begin{array}{l} u: 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ S: 0\ 4\ 8\ 2\ 6\ 0\ 4\ 8\ 2\ 6 \end{array}$$

Nous devons avoir dans la rangée S, au moins quatre fois le même chiffre, ce qui n'est pas le cas. Donc M ne peut jamais être ni vertical-alpha, ni horizontal-alpha.

Pour le cas $n = 5$, le tableau ci-haut devient :

$$\begin{array}{l} u: 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ S: 0\ 5\ 0\ 5\ 0\ 5\ 0\ 5\ 0\ 5 \end{array}$$

Nous devons avoir dans la rangée S, au moins cinq fois le même chiffre, ce qui est le cas. En effet, nous avons cinq 0 et cinq 5. L'ordre 5 peut donc nous donner des carrés verticaux-alpha et des carrés horizontaux-alpha. Ce qui est le cas puisque le premier trouvé est le vertical-alpha ci-haut.

Nous commençons à voir la condition nécessaire pour avoir un vertical-alpha.

Pour les cas $n = 6, 7, 8, 9$, le tableau suivant nous donne les rangées S pour les ordres $n = 6, 7, 8, 9$, respectivement de haut en bas :

$$\begin{array}{l} u: 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ S: 0\ 6\ 2\ 8\ 4\ 0\ 6\ 2\ 8\ 4 \\ S: 0\ 7\ 4\ 1\ 8\ 5\ 2\ 9\ 6\ 3 \\ S: 0\ 8\ 6\ 4\ 2\ 0\ 8\ 6\ 4\ 2 \\ S: 0\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{array}$$

Nous devons avoir dans les rangées S, respectivement au moins 6, 7, 8, 9 fois le même chiffre. Ce qui n'est pas le cas. M ne peut donc pas être ni vertical-alpha, ni horizontal-alpha.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème suivant :

Théorème 14.16.1:

Si M est un carré vertical-alpha ou horizontal-alpha d'ordre $n \geq 3$, alors $n = 5 ou\, n = 10k$ avec $k \geq 1$, un entier.

Preuve :

Nous venons de voir ce qui se passe pour les ordres 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Pour l'ordre $n = 10$, nous trouvons le tableau suivant :

$$(*) \qquad \begin{array}{l} u: 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \\ S: 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

Nous devons avoir au moins dix fois le même chiffre, ce qui est le cas. L'ordre $n = 10$ est donc susceptible de nous donner des carrés verticaux-alpha et des carrés horizontaux-alpha.

Si l'ordre est $n = 10k$, il est clair que nous aurons le même tableau (*) et que tous ces ordres sont susceptibles de nous donner des carrés verticaux-alpha et des carrés horizontaux-alpha.

Si l'ordre est $n \geq 11$, alors nous devons avoir dans M, au moins une colonne telle que tous ses entiers se terminent par 0, au moins une autre colonne telle que tous ses entiers se terminent par 1, et ainsi de suite jusqu'à 9. Voyons le tableau suivant dans lequel $k \geq 1$ est un entier.

	n: $10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	0	2	4	6	8

Dans ce tableau, les chiffres en bleu à gauche indiquent le chiffre des unités des entiers d'une colonne. Par exemple, le chiffre 2 indique que nous considérons la colonne dans laquelle tous les entiers se terminent par le chiffre 2. Si l'ordre du carré a la forme $10k+7$, par exemple, alors nous trouvons que la somme des entiers de cette colonne est un entier qui se termine par le chiffre 4. Les deux dernières rangée du tableau nous indiquent que la somme dans la colonne où tous les entiers se terminent par le chiffre 1 est toujours différente de la somme dans la colonne où tous les entiers se terminent par le chiffre 2. Par exemple, dans un carré d'ordre $n = 10k+7$, nous trouvons $7\, et\, 4$. Cela contredit le fait que M soit magique et alors, pour ces ordres, aucun carré vertical-alpha ne peut exister et aucun carré horizontal-alpha ne peut exister.

Soit M un carré vertical-alpha. Il est évident qu'une rotation de 90° de M nous donne un carré horizontal-alpha. Cependant, nous pouvons aussi en construire un qui n'est pas un équivalent de M. Par exemple :

48	78	28	58	8
6	46	76	26	66
64	4	44	84	24
22	62	12	42	82
80	30	60	10	40

a = 4; r = 2; t = 18; S = 220

De ce dernier carré, nous pouvons construire une infinité d'horizontaux-alpha (Voir dans 14.13 pour les verticaux-alpha).

Pour finir, montrons que si deux entiers ≥ 0 n'ont pas le même chiffre des unités, alors ces deux entiers sont différents.

Soient $10k+u \ et \ 10K+v$, deux entiers ≥ 0 avec :

$k \, et \, K$, des entiers ≥ 0, $u \, et \, v \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $u \neq v$. Sans perte de généralité, nous pouvons poser $u > v$. Supposons que nos deux entiers soient égaux. Nous avons alors :

$10k+u=10K+v \quad \Leftrightarrow u-v=10K-10k=10(K-k)$, et la contradiction devient évidente. En effet, $1 \leq u-v \leq 9$ et $u-v$ ne peut pas être égal à un multiple de 10. Nos deux entiers sont donc différents.

Le théorème 14.16.1 est démontré. Nous savons maintenant que si un carré est vertical-alpha ou horizontal-alpha, alors son ordre est $n=5 \, ou \, n=10k$ avec $k \geq 1$, un entier.

Nous avons trouvé une infinité de carrés verticaux-alpha d'ordre 5 et une infinité de carrés horizontaux-alpha d'ordre 5. Pour en trouver d'ordre 10, nous avons pris la structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 10 obtenue avec l'algorithme ALG-3 (voir le fichier «Ordre 10» d'EXCEL ou de MATHEMATICA). Nos essais n'ont rien donné!!! Cependant, nous pouvons trouver avec «Ordre 10», des carrés verticaux tels que tous les entiers de ceux-ci se terminent par le même chiffre. Pour le moment, nous ne pouvons pas conclure qu'un carré vertical-alpha d'ordre 10 n'existe pas.

Nos recherches ne nous ont pas donné de carrés verticaux-alpha d'ordre 10 mais nous ont permis de trouver quelques carrés magiques remarquables.

5	565	208	215	348	418	425	558	138	635
691	82	152	481	411	341	222	502	572	61
684	89	159	474	404	334	264	509	579	19
47	117	537	236	306	376	446	187	607	656
670	600	530	243	313	383	453	180	110	33
663	593	523	250	320	390	460	173	103	40
26	586	516	257	327	397	467	166	96	677
649	124	194	439	369	299	229	544	614	54
12	131	201	432	362	292	271	551	621	642
68	628	495	488	355	285	278	145	75	698

Carré arithmétique presque normal : a = 5; r = 7; t = 70; S = 3515

Les cent entiers de ce carré arithmétique forment une suite arithmétique. De plus, dans chaque rangée, cinq entiers se terminent par le chiffre u et les cinq autres, par le chiffre v avec $u \neq v$.

Dans deux rangées de même couleur, nous trouvons dans chacune cinq entiers qui se terminent par un même chiffre et cinq autres entiers qui se terminent par un autre même chiffre. Dans les rangées 2 et 9, en bleu, nous trouvons cinq entiers qui se terminent par 1 et cinq autres, par 2.

Observez les autres paires de rangées.

Quant aux colonnes, dans chacune, les chiffres des unités sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Voici maintenant un autre carré magique arithmétique presque normal d'ordre 10. Dans ce carré, cinquante entiers se terminent par 4 et cinquante entiers se terminent par 9. Nous trouvons ces deux chiffres dans chaque rangée et dans chaque colonne.

Il en est toujours ainsi lorsque r et t sont des multiples de 5. En effet, ce carré est arithmétique d'ordre 10 avec $r = 5 et\, t = 55$ donc tous ses entiers ont la forme $a + k_1 r + k_2 t$ avec $k_1\, et\, k_2$, des entiers qui prennent toutes les valeurs de 0 à 9. Maintenant, puisque $r\, et\, t$ sont des multiples de 5, il s'ensuit que $k_1 r\, et\, k_2 t$ se termineront chacun, cinq fois par 0 et cinq fois par 5 donc $k_1 r + k_2 t$ se terminera cinquante fois par 0 et cinquante fois par 5. Finalement, $a + k_1 r + k_2 t$ se terminera cinquante fois par le chiffre des unités de a, soit w ce chiffre. Nous aurons alors cinquante entiers qui se terminent par w et cinquante entiers qui se terminent par le chiffre des unités de (w + 5).

Dans le carré qui suit, w = 4 puisque a = 4 et w + 5 = 9. Nous aurons cinquante fois le chiffre 4 et cinquante fois le chiffre 9.

Dans les cinq premières rangées, nous trouvons six cases vertes par rangée et dans les cinq dernières rangées, nous trouvons quatre cases vertes par rangée.

Dans les cinq premières colonnes, nous trouvons quatre cases vertes par colonne et dans les cinq dernières colonnes, nous trouvons six cases vertes par colonne.

Vous remarquez sans doute que toutes les cases vertes renferment un entier qui se termine par 4 et que toutes les autres cases renferment un entier qui se termine par 9.

Qu'observez-vous sur les deux grandes diagonales?

Ce magnifique carré magique suit:

4	444	159	169	269	324	334	434	104	499
539	64	119	374	319	264	174	394	449	44
534	69	124	369	314	259	204	399	454	14
34	89	419	184	239	294	349	144	474	514
524	469	414	189	244	299	354	139	84	24
519	464	409	194	249	304	359	134	79	29
19	459	404	199	254	309	364	129	74	529
509	94	149	344	289	234	179	424	479	39
9	99	154	339	284	229	209	429	484	504
49	489	389	379	279	224	214	114	59	544

Carré arithmétique presque normal d'ordre 10 : a = 4; r = 5; t = 55; S = 2740

Notre prochain carré arithmétique est presque normal d'ordre 10. Il est obtenu avec a = 5, r = 2, t = 20 et il est de somme S = 1040. Dans quatre de ses rangées (beiges), nous trouvons dans chacune, cinq entiers qui se terminent par 3 et cinq entiers qui se terminent 5. Puis dans quatre autres rangées (vertes), nous trouvons dans chacune, cinq entiers qui se terminent par 1 et cinq entiers qui se terminent par 7. Enfin, dans deux rangées (bleues), tous les entiers se terminent par 9.

Dans chaque colonne, nous trouvons toujours deux entiers qui se terminent par 1, deux entiers qui se terminent par 3, deux entiers qui se terminent par 5, deux entiers qui se terminent par 7 et deux entiers qui se terminent par 9.

Qu'observez-vous sur les deux grandes diagonales?

Les cent entiers du carré sont donc tous impairs ce que nous savions déjà puisque r et t sont pairs et a, impair.

5	165	63	65	103	123	125	163	43	185
201	27	47	141	121	101	67	147	167	21
199	29	49	139	119	99	79	149	169	9
17	37	157	71	91	111	131	57	177	191
195	175	155	73	93	113	133	55	35	13
193	173	153	75	95	115	135	53	33	15
11	171	151	77	97	117	137	51	31	197
189	39	59	129	109	89	69	159	179	19
7	41	61	127	107	87	81	161	181	187
23	183	145	143	105	85	83	45	25	203

Carré arithmétique presque normal d'ordre 10: a = 5; r = 2; t = 20; S = 1040

Suit ce joli carré arithmétique presque normal d'ordre 5 qui est déterminé par a = 4, r = 2, t = 10, de somme S = 140. Ce carré est associatif car il a été construit avec l'algorithme ALG-1.

32	46	20	34	8
6	30	44	18	42
40	4	28	52	16
14	38	12	26	50
48	22	36	10	24

a = 4; r = 2; t = 10; S = 140

Nous notons les rangées de 1 à 5 de haut en bas et les colonnes de 1 à 5 de gauche à droite. Voici quelques propriétés de ce carré :

1) Tous les entiers de ce carré sont pairs puisque a, r et t sont des entiers pairs.
2) Les entiers de la rangée 1 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 1 soit 2, 6, 0, 4, 8.
3) Les entiers de la rangée 2 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 2 soit 6, 0, 4, 8, 2.
4) Les entiers de la rangée 3 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 3 soit 0, 4, 8, 2, 6.
5) Les entiers de la rangée 4 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 4 soit 4, 8, 2, 6, 0.
6) Les entiers de la rangée 5 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 5 soit 8, 2, 6, 0, 4.
7) Dans chaque rangée et chaque colonne, les cinq entiers se terminent par 0, 2, 4, 6, 8.
8) Les cinq entiers de la diagonale principale se terminent par 0, 2, 4, 6, 8.
9) Les cinq entiers de toutes les diagonales brisées principales se terminent par 0, 2, 4, 6, 8.
10) Tous les entiers de la diagonale secondaire se terminent par 8.
11) Tous les entiers de chaque diagonale brisée secondaire se terminent par le même chiffre soit 2, 6, 0, 4.
12) La fréquence de ce carré est $f(140) = 1394.$ C'est la fréquence des carrés magiques normaux d'ordre 5.

Terminons avec trois façons de construire des carrés verticaux-alpha d'ordre 5 et horizontaux-alpha d'ordre 5.

Première façon :

La structure générale suivante (carré 1) va nous permettre de construire une infinité de carré verticaux-alpha. Elle est obtenue de la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 5 laquelle a été construite avec l'algorithme ALG-1 (Voir le fichier «Ordre 5»). Nous posons : $r = 2k \ et \ t = 6r.$

Cette structure générale est un carré arithmétique, associatif et vertical-alpha dès que $k \geq 1$ est un entier qui n'est pas un multiple de 5, avec a, un entier ≥ 1. Si k est un multiple de $5 (k = 5, 10, 15, ...)$, alors tous les entiers du carré vont se terminer par le même chiffre.

Dans tous les autres cas $(k = 1, 2, 3, 4, \ 6, 7, 8, 9, \ 11, ...)$, le carré obtenu sera vertical-alpha.

Cette structure générale a pour somme $5a+140k$. Deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours $2a+56k$.

$a+32k$	$a+50k$	$a+18k$	$a+36k$	$a+4k$
$a+2k$	$a+30k$	$a+48k$	$a+16k$	$a+44k$
$a+42k$	a	$a+28k$	$a+56k$	$a+14k$
$a+12k$	$a+40k$	$a+8k$	$a+26k$	$a+54k$
$a+52k$	$a+20k$	$a+38k$	$a+6k$	$a+24k$

Carré 1 $r=2k;\ t=6r$

L'ensemble des carrés issus de cette structure générale est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. C'est évidemment un sous espace de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 des carrés arithmétiques d'ordre 5.

Mais nous nous intéressons seulement à certains carrés de ce sous-espace de dimension 2, plus précisément, ceux déterminés par a, un entier ≥ 1 et $k \geq 1$, un entier non multiple de 5.

Deuxième façon :

En utilisant la structure générale suivante :

$36+20k$	$54+40k$	$22+10k$	$40+30k$	8
6	$34+20k$	$52+40k$	$20+10k$	$48+30k$
$46+30k$	4	$32+20k$	$60+40k$	$18+10k$
$16+10k$	$44+30k$	12	$30+20k$	$58+40k$
$56+40k$	$24+10k$	$42+30k$	10	$28+20k$

Carré 2 *a* = 4, *r = 2, t = 12 + 10 k*

Cette structure est obtenue de la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 5 laquelle a été construite avec l'algorithme ALG-1 (Voir le fichier «Ordre 5»). Nous avons posé : $a = 4, r = 2, t = 12 + 10k$ avec k, un entier ≥ 0. (Voir 14.13).

L'ensemble des carrés issus de cette structure générale n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En effet, nous trouvons l'entier 8 dans une des cases puis les entiers 6, 4, 12 et 10 dans quatre autres cases.

Ces deux structures ne nous donnent pas, en général, les mêmes carrés verticaux-alpha.

Par exemple, le carré obtenu du carré 2 avec $k = 1$ ne peut pas être obtenu du carré 1 ni même d'un de ses équivalents. Nous aurions :

$$\begin{matrix} a + 50k = 94 \\ a + 18k = 32 \end{matrix} \text{ d'où } k = \frac{62}{32} = 1,9375 \quad \text{et} \quad \begin{matrix} a + 2k = 6 \\ a + 30k = 54 \end{matrix} \text{ d'où } k = \frac{48}{28} = 1,734...$$

Puisque nous trouvons deux valeurs de k différentes, nous concluons que le carré obtenu du carré 2 avec $k = 1$ ne peut pas être obtenu du carré 1. En effet, nous devons avoir la même valeur de k et la même valeur de a dans toutes les expressions du carré 1.

Nous procédons de la même façon avec les équivalents du carré 1. Par exemple, si nous tournons le carré 1 de 90°, alors nous aurons les systèmes suivants :

$$\begin{matrix} a + 44k = 94 & \quad a + 36k = 6 \\ a + 14k = 32 & \quad a + 16k = 54 \end{matrix}$$

et deux valeurs différentes pour k.

Par contre, avec $k = 0$ dans le carré 2 et $a = 4, k = 1$ dans le carré 1, nous obtenons le même carré.

De plus, il est évident que des carrés issus du carré 1 ne le seront jamais du carré 2.

Donc le carré 1 ne donne qu'une partie des carrés verticaux-alpha et il en est de même du carré 2.

Troisième façon :

Si nous connaissons un carré vertical-alpha ou horizontal-alpha, alors nous pouvons en obtenir des nouveaux en ajoutant l'entier $k \geq 1$ dans chaque case du carré.

Nous dirons qu'un carré magique est pair (impair) si dans toutes ses cases se trouve un entier pair (impair).

Le problème 55 de 14.18 nous apprend qu'un carré vertical ou horizontal est soit pair, soit impair si son ordre est impair. Donc si nous avons un carré vertical-alpha d'ordre 5 qui est pair

(impair), alors d'ajouter 1 dans toutes ses cases donnera un nouveau carré vertical-alpha qui sera impair (pair).

Nous savons maintenant fabriquer une infinité de carrés verticaux-alpha et une infinité de carrés horizontaux-alpha d'ordre 5. Notre objectif est atteint!!!

Quant aux carrés horizontaux-alpha d'ordre 5, nous savons en obtenir à partir des verticaux-alpha. Nous pouvons aussi utiliser une structure générale faite à partir de celle des carrés arithmétiques d'ordre 5 (ALG-1). Nous posons $r = 2k, t = 9r$ avec l'entier $k \geq 1$ qui n'est pas un multiple de 5 et ainsi, le carré sera horizontal-alpha.

Trouvez cette structure générale.

Mentionnons que tout le travail qui vient d'être fait ici est basé sur un premier carré vertical-alpha d'ordre 5 trouvé par hasard!!! Voir le carré de somme S = 160 dans 14.12.

Nous savons maintenant que si nous trouvons un autre carré vertical-alpha qui n'est pas d'ordre 5, alors celui-ci sera d'ordre 10, 20, 30, …

Nous allons chercher notre premier carré vertical-alpha d'ordre 10 et notre premier carré vertical-alpha d'ordre 20. Allons-nous y arriver??? Non pour l'ordre 10 puisque nous avons le résultat suivant :

Théorème 14.16.2

Il n'existe aucun carré vertical-alpha ou horizontal-alpha d'ordres $10(2k+1)$ où $k \geq 0$ est un entier.

La preuve est toute simple! Si un carré vertical-alpha est d'ordre 10, alors sa somme magique, selon les colonnes, est un entier qui se termine par 0. Mais sa somme magique, selon les rangées, est un entier qui se termine par 5. En effet, dans toutes les rangées, nous trouvons dix entiers qui se terminent par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dont la somme des derniers chiffres est 45. Voilà pourquoi un carré vertical-alpha ou un carré horizontal-alpha d'ordre 10 n'existent pas. La somme magique ne peut pas se terminer à la fois par 0 et par 5.

Dans un carré vertical-alpha d'ordre $10(2k+1)$, nous trouvons $2k+1$ groupes de dix colonnes. Dans chaque groupe, nous trouvons une colonne telle que tous ses entiers se terminent par 0 puis une autre colonne telle que tous ses entiers se terminent par 1 et ainsi de suite jusqu'à 9. Selon les colonnes, la somme magique se termine par 0 mais selon les rangées, elle se termine aussi par 5. En effet, dans chaque rangée, la somme magique est un entier qui comprend le nombre $45(2k+1)$ dans la colonne des unités et donc la somme magique se termine par 5.

Pour la même raison, le carré vertical-alpha n'existe pas. Enfin, terminons en disant que si le carré vertical-alpha n'existe pas, alors l'horizontal-alpha ne peut pas exister!!!

Ceci termine la preuve.

Maintenant, si nous voulons un autre carré vertical-alpha dont l'ordre est différent de 5, alors il nous faudra chercher parmi les ordres 20, 40, 60, … soit tous les multiples de 20 à partir de 20.

Nous allons chercher un carré vertical-alpha d'ordre 20 ou tenter de démontrer qu'il n'existe pas. C'est donc à suivre!!!

Pour l'instant, nous n'avons peut-être pas encore de carré vertical-alpha d'ordre 20 mais nous avons trouvé de magnifiques carrés arithmétiques d'ordre 20 que nous vous invitons à trouver avec EXCEL, MAPLE ou MATHEMATICA en posant :

a = 1, r = 10, t = 195 : le carré est presque normal et renferme dans chaque colonne, dix entiers qui se terminent par 1 et dix entiers qui se terminent par 6. De même, dans chaque rangée, nous trouvons dix entiers qui se terminent par 1 et dix entiers qui se terminent par 6. Il en est de même des deux grandes diagonales!!! Tous les entiers de ce carré se terminent donc par 1 ou 6. Observez comment les 1 et les 6 sont regroupés!!!

a = 1, r = 10, t=196 : le carré est presque normal et dans quatre colonnes, tous les entiers se terminent par 3. Dans chacune des autres colonnes, dix entiers se terminent par le chiffre u et les dix autres par le chiffre v, différent de u.

1 7 3 9 5	5 9 3 7 1	5 9 3 7 1	1 7 3 9 5
5 9 3 7 1	1 7 3 9 5	1 7 3 9 5	5 9 3 7 1

Ce tableau nous indique que dans la première colonne (nous allons de gauche à droite), tous les entiers se terminent soit par 1, soit par 5. Dans cette colonne, de haut en bas, nous trouvons cinq 1, dix 5 et de nouveau cinq 1. Dans la deuxième colonne, nous trouvons, de haut en bas, cinq 7, dix 9 et cinq 7. Dans la troisième colonne, tous les entiers se terminent par 3, et ainsi de suite. Observez les colonnes en positions symétriques par rapport à la verticale qui passe par le centre du carré!!! Observez chaque groupe de cinq colonnes, de gauche à droite. Enfin, dans chaque rangée et dans chaque grande diagonale, nous trouvons quatre fois les chiffres 1, 3, 5, 7 et 9.

Nous vous laissons observer ce qui se passe avec : a = 1, r = 10, t = 198 puis a = 1, r = 10, t = 205.

Ce que nous observons ici est étroitement relié à l'algorithme ALG-2 et à notre choix de r et de t; r = 10 et t se termine par 5 puis r = 10 et t est pair.

Voyons maintenant un carré magique arithmétique d'ordre 8 défini par a = 1, r = 10 et t = 75 :

1	76	446	371	296	221	451	526
11	86	436	361	286	211	461	536
576	501	171	246	321	396	126	51
566	491	181	256	331	406	116	41
556	481	191	266	341	416	106	31
546	471	201	276	351	426	96	21
61	136	386	311	236	161	511	586
71	146	376	301	226	151	521	596

Ce carré est presque normal. Trente deux de ses entiers se terminent par 1 et les trente deux autres se terminent par 6. Dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, nous trouvons quatre entiers qui se terminent par 1 et quatre entiers qui se terminent par 6.

Le carré magique suivant d'ordre 8 est arithmétique et presque normal; il est défini par a = 1, r = 10 et t = 76 :

1	77	451	375	299	223	457	533
11	87	441	365	289	213	467	543
583	507	173	249	325	401	127	51
573	497	183	259	335	411	117	41
563	487	193	269	345	421	107	31
553	477	203	279	355	431	97	21
61	137	391	315	239	163	517	593
71	147	381	305	229	153	527	603

Nous trouvons deux colonnes dans lesquelles tous les entiers se terminent par 7. Comme pour le cas a = 1, r = 10, t = 196 vu plus haut, voici le tableau qui décrit chaque colonne :

1 7 1 5 9 3 7 3
3 7 3 9 5 1 7 1

Pouvons-nous construire un carré semblable au carré précédent tel que dans ses deux colonnes vertes, les seize entiers se termineraient par le même chiffre, celui que vous désirez?

La réponse est oui. Voici comment.

1) Consultez le carré A qui nous permet de construire la structure de carrés arithmétiques d'ordre 8 avec ALG-2. (voir dans EXCEL ou MATHEMATICA, «Ordre 8»).
2) Le carré A va nous permettre de trouver qu'avec a = 1, r = 10 et t = 72, les entiers dans les deux colonnes vertes se termineront par le chiffre 3 puisque 2x1 + 1 et 2x6 + 1 se terminent par 3.
3) Si vous voulez que les seize entiers dans les deux colonnes vertes se terminent par le chiffre 8, par exemple, alors il suffira d'ajouter 5 dans toutes les cases donc de poser a = 6.

Enfin, une autre conjecture :

Si un carré est vertical-alpha ou horizontal-alpha, alors il est d'ordre 5.

Pour faire un théorème de cette conjecture, il faut démontrer que de tels carrés n'existent pas pour les ordres $n = 20k$ où $k \geq 1$ est un entier.

Annexe 6 : Lemme sur les diagonales brisées

Lemme :

Considérons un carré d'ordre impair $n \geq 3$. Toute diagonale principale rencontre chaque diagonale secondaire en une seule case.

Preuve :

Précisons tout de suite qu'alors, toute diagonale secondaire rencontre chaque diagonale principale en une seule case.

Nous allons définir une diagonale secondaire à l'aide de sa première case $(k\ ;1)$ située dans la rangée k et dans la colonne 1. De même, la première case d'une diagonale principale est la case $(r\ ;1)$, située dans la rangée r et dans la colonne 1. Il est clair que nous avons :
$1 \leq k \leq n \ et\ 1 \leq r \leq n$

La branche qui contient la case $(k\ ;1)$ d'une diagonale secondaire est la branche A ; l'autre est la branche B. Lorsque $k = n$, la branche A est la grande diagonale secondaire et la branche B n'existe plus.

La branche qui contient la case $(r\ ;1)$ d'une diagonale principale est la branche C ; l'autre est la branche D. Lorsque $r = 1$, la branche C est la grande diagonale principale et la branche D n'existe plus.

Branche A : $(k\ ;1)\ (k-1\ ;2)\ (k-2\ ;3)\ \ldots\ (1\ ;k)$

Son terme général : $(k-u\ ;u+1) \quad u = 0\ ,1\ ,2\ ,\ldots\ ,k-1$

Branche B : $(n\ ;k+1)\ (n-1\ ;k+2)\ (n-2\ ;k+3)\ \ldots\ (k+1\ ;n)$

Son terme général : $(n-u\ ;k+1+u) \quad u = 0\ ,1\ ,2\ ,\ldots\ ,n-(k+1)$

Branche C : $(r\ ;1)\ (r+1\ ;2)\ (r+2\ ;3)\ \ldots\ (n\ ;n-r+1)$

Son terme général : $(r+v\ ;v+1) \quad v = 0\ ,1\ ,2\ ,\ldots\ ,n-r$

Branche D : $(1\ ;n-r+2)\ (2\ ;n-r+3)\ (3\ ;n-r+4)\ \ldots\ (r-1\ ;n)$

Son terme général est : $(v\ ;n-r+v+1) \quad v = 1\ ,2\ ,3\ ,\ldots\ ,r-1$

Il est important de remarquer que le terme général d'une branche permet de trouver toutes les cases de la diagonale sur laquelle se trouve cette branche.

Par exemple, le terme général de la branche A est $(k-u\ ;\ u+1)$. Si u parcourt Z, l'ensemble des entiers, alors nous obtenons toutes les cases de la diagonale infinie qui contient A. Par contre, si u prend les valeurs 0, 1, 2, ..., $k-1$, alors nous obtenons toutes les cases de la branche A, situées dans le carré.

Si u n'est pas un entier, alors en aucun cas, nous obtenons une case de la diagonale.

Il en sera de même pour les branches $B, C\ et\ D.$

Nous allons montrer que chaque diagonale principale rencontre toutes les diagonales secondaires en une seule case. Nous allons considérer 4 cas :

Premier cas : k est impair et r est pair

Branche A : toutes les cases ont une somme paire. En effet, la somme des coordonnées de chaque case vaut $k+1$.

Branche B : toutes les cases ont une somme impaire. En effet, la somme des coordonnées de chaque case vaut $n+k+1$.

Branche C : toutes les cases ont une somme impaire puisque $r+1$ est impair et que nous passons d'une case à l'autre en ajoutant toujours 2.

Branche D : toutes les cases ont une somme paire puisque $1+n-r+2$ est pair et que nous passons d'une case à l'autre en ajoutant toujours 2.

Il est clair que la parité des cases d'une branche est la même pour toutes les cases de la diagonale infinie qui contient cette branche.

Nous allons résumer ainsi :

A	pair
B	impair
C	impair
D	pair

Nous dirons que toutes les cases de la diagonale infinie qui supporte A sont paires (que les couples correspondants sont pairs). De même pour les diagonales infinies qui supportent respectivement $B, C\ et\ D.$ La diagonale qui contient la branche A sera aussi appelée A ; de même pour $B, C\ et\ D.$ Ainsi, par exemple, nous dirons que la diagonale C contient ou supporte la branche C. Revenons au premier cas.

Nous pouvons déjà affirmer que la diagonale A peut rencontrer la diagonale D mais ne peut pas rencontrer la diagonale C. De même, la diagonale B peut rencontrer la diagonale C mais ne peut pas rencontrer la diagonale D. Il n'y a donc que 2 possibilités : A rencontre D ou B rencontre C.

$\rightarrow A$ rencontre D :

L'égalité $(k-u\ ;\ u+1) = (v\ ;\ n-r+v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} k-u=v \\ u+1=n-r+v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u=\frac{k+(n-r)}{2}$$
$$v=\frac{k-(n-r)}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc, A rencontre D et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers :

$$\left(\frac{k-(n-r)}{2}\ ;\ \frac{k+(n-r)+2}{2}\right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

(1)
$$1 \leq \frac{k-(n-r)}{2} \leq n$$
$$1 \leq \frac{k+(n-r)+2}{2} \leq n$$

ce qui implique :

$$k+r \leq 3n$$
$$n+k \geq r$$
$$n+r \geq k+2$$
$$n \leq k+r-2$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

(2) $$n \leq k+r-2$$

Nous vérifions sans peine que (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$\rightarrow$ B rencontre C

L'égalité $(n-u\ ;\ k+1+u) = (r+v\ ;\ v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} n-u = r+v \\ k+1+u = v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u = \frac{n-k-r}{2}$$
$$v = \frac{n+k-r}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc, B rencontre C et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers:

$$\left(\frac{n+k+r}{2}\ ;\ \frac{n+k-r+2}{2}\right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

(3)
$$1 \leq \frac{n+k+r}{2} \leq n$$
$$1 \leq \frac{n+k-r+2}{2} \leq n$$

ce qui implique :

$$n+k+r \geq 2$$
$$n+r \geq k+2$$
$$n+k \geq r$$
$$n \geq k+r$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

(4) $$n \geq k+r$$

Nous vérifions sans peine que (3) $\Leftrightarrow$ (4)

Puisque (2) et (4) s'excluent mutuellement, nous pouvons affirmer que si A rencontre D dans le carré, alors B ne rencontre pas C dans le carré et réciproquement. Il n'y a donc, dans le carré, qu'une seule case d'intersection. Nous avons, en résumé :

k impair et r pair

A rencontre $D \Leftrightarrow n < k + r$ et B rencontre $C \Leftrightarrow n \geq k + r.$

ce qui signifie, si k est impair et r est pair, qu'il n'est pas possible que les cases d'intersection de A avec D et de B avec C soient toutes les deux à l'intérieur ou à l'extérieur du carré et que si l'une est à l'intérieur du carré, alors l'autre est à l'extérieur et réciproquement.

Deuxième cas : k est impair et r est impair

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & pair \\ B & impair \\ C & pair \\ D & impair \end{array}$$

et nous pouvons déjà affirmer que A peut rencontrer C mais ne peut pas rencontrer D et que B peut rencontrer D mais ne peut pas rencontrer C. Il n'y a donc que deux possibilités : A rencontre C ou B rencontre D.

$\rightarrow$ *A rencontre C*

L'égalité $(k-u\ ;\ u+1) = (r+v\ ;\ v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} k-u = r+v \\ u+1 = v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u = \frac{k-r}{2} \quad ; \quad v = \frac{k-r}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc, A rencontre C et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers :

$$\left(\frac{k+r}{2} ; \frac{k-r+2}{2} \right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

$$(5) \qquad \begin{aligned} 1 &\leq \frac{k+r}{2} \leq n \\ 1 &\leq \frac{k-r+2}{2} \leq n \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} &k+r \geq 2 \\ &k+r \leq 2n \\ &k+2 \leq 2n+r \\ &k \geq r \end{aligned}$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

$$(6) \qquad k \geq r$$

Nous vérifions sans peine que (5) $\Leftrightarrow$ (6)

$\rightarrow$ *B rencontre D*

L'égalité $(n-u\ ;\ k+1+u) = (v\ ;\ n-r+v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} n-u=v \\ k+1+u=n-r+v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u = \frac{2n-k-r}{2} \quad ; \quad v = \frac{k+r}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc B rencontre D et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers suivant :

$$\left(\frac{k+r}{2}\ ;\ \frac{2n+k-r+2}{2} \right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

$$(7) \qquad \begin{aligned} 1 &\leq \frac{k+r}{2} \leq n \\ 1 &\leq \frac{2n+k-r+2}{2} \leq n \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} &k+r \leq 2n \\ &k+r \geq 2 \\ &r \leq 2n+k \\ &k \leq r-2 \end{aligned}$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

$$(8) \qquad k \leq r-2$$

Nous vérifions sans peine que (7) $\Leftrightarrow$ (8)

Puisque (6) et (8) s'excluent mutuellement, nous pouvons affirmer que si A rencontre C dans le carré, alors B ne rencontre pas D dans le carré et réciproquement. Il n'y a donc, dans le carré, qu'une seule case d'intersection. Nous avons, en résumé :

$$k \text{ impair et } r \text{ impair}$$

$$A \text{ rencontre } C \Leftrightarrow k \geq r \text{ et } B \text{ rencontre } D \Leftrightarrow k < r$$

ce qui signifie, si k est impair et r est impair, qu'il n'est pas possible que les cases d'intersection de A avec C et de B avec D soient toutes les deux à l'intérieur ou à l'extérieur du carré et que si l'une est à l'intérieur du carré, alors l'autre est à l'extérieur et réciproquement.

Troisième cas : $k \text{ est pair et } r \text{ est impair}$

Ce cas se traite exactement de la même façon que le premier cas et nous avons le même résumé.

Quatrième cas : $k \text{ est pair et } r \text{ est pair}$

Ce cas se traite exactement de la même façon que le deuxième cas et nous avons le même résumé.

Finalement, notre étude se résume ainsi :

$$n \text{ est impair}$$

$$\text{Si } k \text{ et } r \text{ sont de parités différentes, alors :}$$

$$n \geq k+r \iff B \text{ rencontre } C \text{ à la case } \left(\frac{n+k+r}{2} ; \frac{n+k-r+2}{2}\right)$$

$$n < k+r \iff A \text{ rencontre } D \text{ à la case } \left(\frac{k-n+r}{2} ; \frac{n+k-r+2}{2}\right)$$

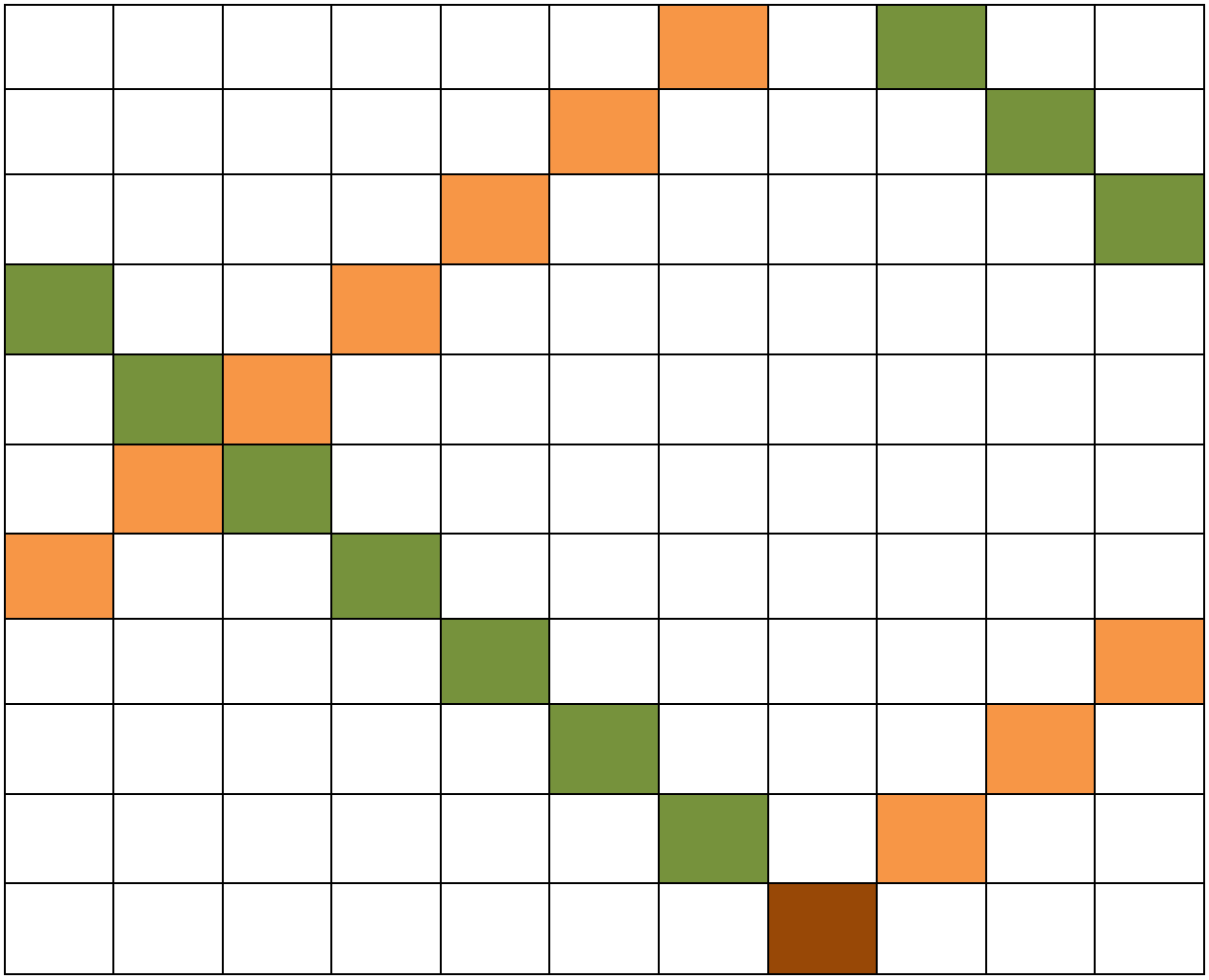
$$\text{Si } k \text{ et } r \text{ ont la même parité, alors :}$$

$$k \geq r \iff A \text{ rencontre } C \text{ à la case } \left(\frac{k+r}{2} ; \frac{k-r+2}{2}\right)$$

$$k < r \iff B \text{ rencontre } D \text{ à la case } \left(\frac{k+r}{2} ; \frac{2n+k-r+2}{2}\right)$$

Donc, nous voyons que chaque diagonale (principale ou secondaire) rencontre toutes les diagonales (secondaires ou principales) en une seule case. Dans cet encadré, toutes les rencontres ont lieu à l'intérieur du carré.

Par exemple :



La diagonale secondaire est formée de la case brune et des cases oranges; la diagonale principale est formée de la case brune et des cases vertes. L'intersection est la case brune soit la case déterminée par le couple $(11\,;\,8)$.

Nous avons ici, $n=11$, $k=7$ et $r=4$ d'où k et r sont de parités différentes avec $n \geq k+r$. Il s'ensuit que B rencontre C effectivement à la case $(11\,;\,8)$, selon la formule du tableau ci-haut.

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque $n \geq 4$ est un entier pair. Les diagonales A, B, C, D sont définies de la même façon que dans le cas où n est impair. Nous avons aussi quatre cas à considérer.

Premier cas : $k \ est \ impair \ et \ r \ est \ pair$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & pair \\ B & pair \\ C & impair \\ D & impair \end{array}$$

ce qui nous permet déjà d'affirmer que la diagonale A ne peut pas rencontrer ni la diagonale C, ni la diagonale D. Il en est de même pour la diagonale B, elle ne peut pas rencontrer ni C, ni D. Donc, aucune intersection n'est possible, ni à l'intérieur du carré, ni à l'extérieur.

Deuxième cas : $k \ est \ pair \ et \ r \ est \ impair$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & impair \\ B & impair \\ C & pair \\ D & pair \end{array}$$

d'où la même conclusion qu'au premier cas.

En résumé :

$n \ pair$

Si k et r sont de parités différentes, alors il n'y a aucune intersection ni à l'intérieur du carré, ni à l'extérieur du carré.

Troisième cas : $k \text{ est impair et } r \text{ est impair}$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & pair \\ B & pair \\ C & pair \\ D & pair \end{array}$$

Il y a donc quatre intersections possibles. Pour trouver l'intersection de A avec C, le travail est le même que dans le cas où n est impair et puisque u et v sont toujours des entiers, nous savons que A et C se rencontrent. De même pour les trois autres intersections. Nous noterons ces intersections : $AC, AD, BC, BD.$

Il faut maintenant trouver sous quelles conditions nécessaires et suffisantes, les intersections sont dans le carré. En procédant comme dans le cas où n est impair, nous trouvons :

Rencontre	Point de rencontre	À l'intérieur	
AC	$\left(\frac{k+r}{2} ; \frac{k-r+2}{2}\right)$	$ssi\ k \geq r$	(1)
AD	$\left(\frac{k-n+r}{2} ; \frac{k+n-r+2}{2}\right)$	$ssi\ n < k+r$	(2)
BC	$\left(\frac{n+k+r}{2} ; \frac{k+n-r+2}{2}\right)$	$ssi\ n \geq k+r$	(3)
BD	$\left(\frac{k+r}{2} ; \frac{2n+k-r+2}{2}\right)$	$ssi\ k < r$	(4)

Puisque (1) et (4) ainsi que (2) et (3) s'excluent mutuellement, nous aurons toujours deux intersections dans le carré et deux intersections à l'extérieur du carré.

Quatrième cas : $k \text{ est pair et } r \text{ est pair}$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & impair \\ B & impair \\ C & impair \\ D & impair \end{array}$$

Ce cas est identique au troisième cas et nous pouvons affirmer que si k *et* r ont la même parité, alors il y aura toujours deux intersections dans le carré et deux, à l'extérieur du carré.

En résumé :

$$n \text{ est pair}$$

$$\text{Si } k \text{ et } r \text{ sont de même parité, alors :}$$

$$n \geq k+r \text{ et } k \geq r \quad \Leftrightarrow \quad C \text{ rencontre } A \text{ et } B \text{ dans le carré}$$

$$n \geq k+r \text{ et } k < r \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ rencontre } C \text{ et } D \text{ dans le carré}$$

$$n < k+r \text{ et } k \geq r \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ rencontre } C \text{ et } D \text{ dans le carré}$$

$$n < k+r \text{ et } k < r \quad \Leftrightarrow \quad D \text{ rencontre } A \text{ et } B \text{ dans le carré}$$

$$\text{Les cases d'intersection sont :}$$

$$AC \qquad \left(\frac{k+r}{2} ; \frac{k-r+2}{2}\right)$$

$$AD \qquad \left(\frac{k-n+r}{2} ; \frac{k+n-r+2}{2}\right)$$

$$BC \qquad \left(\frac{n+k+r}{2} ; \frac{k+n-r+2}{2}\right)$$

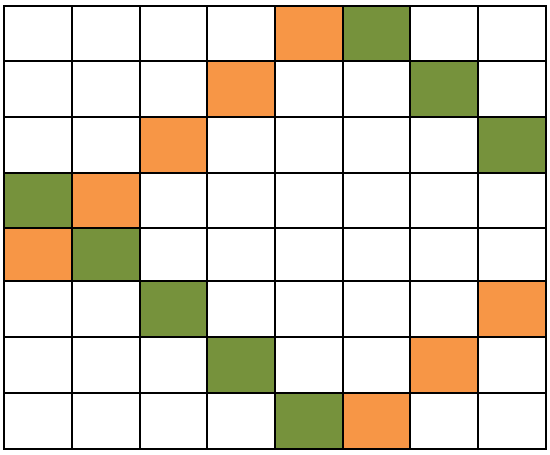
$$BD \qquad \left(\frac{k+r}{2} ; \frac{2n+k-r+2}{2}\right)$$

$$\text{Si } k \text{ et } r \text{ sont de parités différentes, alors :}$$

$$\text{il n'y a aucune intersection ni à l'intérieur du carré,}$$

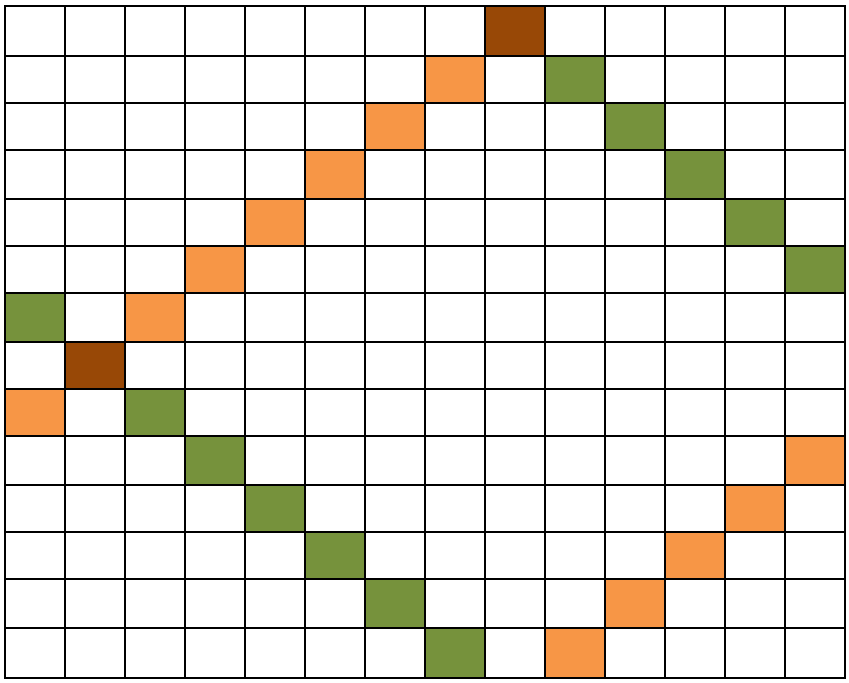
$$\text{ni à l'extérieur du carré.}$$

Exemple :



Ici, $n=8, k=5, r=4$ d'où des parités différentes. Nous constatons alors aucune intersection ni à l'intérieur du carré, ni à l'extérieur.

Exemple :



Ici, $n=14, k=9, r=7$. La théorie nous apprend que A rencontre C et D à l'intérieur du carré; les deux autres intersections ont lieu à l'extérieur du carré. Les cases d'intersection sont les cases brunes.

Diagonale secondaire

						1 k								
		k-2 3												
	k-1 2													
k 1														
														k+1 n
													k+2 n-1	
									n-2 k+3					
								n-1 k+2						
							n k+1							

Diagonale principale

									1 t					
										2 t+1				
											3 t+2			
														r-1 n
r 1														
	r+1 2													
		r+2 3												
			r+3 4											
								x y						

$$x = n\ ;\ y = n - r + 1\ ;\ t = n - r + 2$$

Annexe 7 : Excursion dans les nombres premiers

1) **Un nombre premier** est un entier ≥ 2 qui ne possède que deux diviseurs entiers **distincts** ≥ 1 donc qui n'est divisible que par 1 et lui-même. En conséquence, 1 n'est pas un nombre premier. Tous les nombres premiers sont impairs sauf 2, le seul qui soit pair.
2) Les nombres suivants sont premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …, 107, 109, …
3) **Le théorème fondamental de l'arithmétique** affirme que tout entier ≥ 2 qui n'est pas un nombre premier se décompose en un produit de nombres premiers et ce, de façon unique, à l'ordre près des facteurs. Par exemple, 2x2x5 et 2x5x2 sont la même décomposition en facteurs premiers de l'entier 20.
4) **Il existe une infinité de nombres premiers.** Voyons la preuve : considérons p et p+1, des entiers ≥ 2. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, p possède au moins un facteur premier p_1 et p+1, un facteur premier p_2. Mais $p_1 \neq p_2$ puisque p et p+1 sont premiers entre eux. Soit maintenant le nouveau nombre p (p+1) + 1 qui possède au moins un facteur premier p_3 tel que $p_3 \neq p_1 \ et \ p_3 \neq p_2$. Puis le nombre p (p+1) [p (p+1) + 1] + 1 qui possède un nouveau facteur premier. Ainsi, nous voyons qu'à chaque étape, nous faisons apparaitre au moins un nouveau nombre premier. Il y en a donc une infinité!!! Nous n'avons pas fait appel au raisonnement par l'absurde mais avons plutôt utilisé un procédé constructif. Après chaque étape, nous pouvons citer les nombres premiers différents obtenus. Réf : [1], page 61.
5) Les nombres premiers sont aux entiers ≥ 2, ce que les atomes sont à la matière!! Toute quantité de matière est constituée d'atomes et tout entier ≥ 2 est constitué de nombres premiers : 111 111 111 111 = 3x7x11x13x37x101x9901 en est un exemple et ce nombre entier est composé de 7 nombres premiers. Quant à 20, il est composé de 3 nombres premiers.
6) Nous savons qu'il existe une infinité de nombres premiers mais comment ceux-ci sont-ils répartis sur la droite des entiers naturels? Par exemple, dans l'intervalle $[2\ ;\ 25]$, nous trouvons 9 nombres premiers, dans l'intervalle $[52\ ;\ 75]$, nous en trouvons 7 et dans l'intervalle $[284\ ;\ 307]$, seulement 2. Dans trois intervalles de longueur 24, nous avons trouvé 9, 7 et 2 nombres premiers. Précisons ici que nos intervalles auront tous la forme $[a\ ;\ b]$ où a, b sont des entiers ≥ 0 et $a < b$. La longueur d'un tel intervalle sera le nombre d'entiers contenus dans celui-ci.

Il est naturel de penser qu'un intervalle de longueur 24 qui commencerait par un très grand entier, ne renferme aucun nombre premier. C'est ce qui arrive avec l'intervalle $[164840\ ;\ 164863]$. Cependant, il est évident qu'il existe une infinité d'intervalles de longueur 24 qui renferment au moins un nombre premier.

Nous venons de voir qu'un intervalle de longueur 24 peut renfermer aucun nombre premier. Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de trouver un intervalle aussi grand que nous voulons qui ne renferme aucun nombre premier.

Observons d'abord que les entiers $n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ \ldots,\ n! + n$ sont consécutifs et non premiers lorsque $n \geq 3$. L'intervalle $[n! + 2\ ;\ n! + n]$ est donc un intervalle de longueur $n-1$ qui ne renferme aucun nombre premier. Si nous voulons un intervalle de longueur 10 000 qui ne renferme aucun nombre premier, il suffira de choisir $n = 10001$. Il est vrai que l'intervalle débutera par un entier extrêmement grand soit $10001! + 2$. Cependant, intuitivement, nous pouvons penser qu'un intervalle [a ; b] de longueur 10 000 qui renferme aucun nombre premier peut se trouver avec a, beaucoup plus petit que $10001! + 2$. Ainsi, pour un intervalle de longueur 25, nous prendrions $[26! + 2\ ;\ 26! + 26]$ lequel renferme 25 entiers consécutifs tous non premiers. Mais l'intervalle $[1328\ ;\ 1352]$ est un intervalle qui renferme aussi 25 entiers consécutifs tous non premiers (voir 14.12).

Imaginons une route infinie sur laquelle on place tous les entiers positifs 1, 2, 3, …, un sur chaque millimètre de route. Nous pouvons affirmer qu'en marchant sur cette route, nous allons rencontrer un entier N à partir duquel, sur le milliard de milliards de milliards de milliards ... de kilomètres qui suivent, nous ne rencontrerons aucun nombre premier!!! Notons ici que le mot milliards est répété une fois par seconde pendant $10^{100000000}$ années!!! Les nombres premiers rencontrés avant N sont en nombre fini; ensuite sur un tronçon de route extrêmement long, aucun nombre premier puis, après ce tronçon, une infinité!!!

Cette image ne nous permet-elle pas de mieux percevoir la notion d'infini? Et qu'il existe des intervalles aussi longs que nous voulons qui ne renferment aucun nombre premier.

1_____N_____M_____

De 1 à N, nous avons un nombre fini de nombres premiers. Dans l'intervalle de N à M qui est aussi long que nous puissions l'imaginer, il n'y a aucun nombre premier. Enfin, nous rencontrerons une infinité de nombres premiers à partir de M.

7) **Combien de nombres premiers trouvons-nous dans un intervalle donné?** Dans MATHEMATICA, nous avons la commande PrimePi[n] qui nous donne le nombre de nombres premiers $\leq n$. Ainsi, PrimePi[11] = 5, PrimePi[12] = 5, PrimePi[1000] = 168 et PrimePi[10^6] = 78 498. Nous pouvons aussi avoir entre crochets, un nombre réel quelconque : PrimePi[50 π] = 37 et PrimePi[97/3] = 11. Maintenant, combien de nombres premiers trouvons-nous dans l'intervalle fermé [a ; b] où a et b sont des entiers ≥ 1 et a < b? Il suffit de faire PrimePi[b] – PrimePi[a-1]. Par exemple, dans l'intervalle [100 ; 250], nous trouvons PrimePi[250] – PrimePi[99] = 53 – 25 = 28 nombres premiers. Pour trouver le nombre de nombres premiers dans l'intervalle [59,67 ; 104,776], nous prendrons l'intervalle [60 ; 104].

8) **Table de nombres premiers :** dans MATHEMATICA, il suffit d'utiliser la commande : Table[Prime[n], {n, 1, 100}] pour obtenir les 100 premiers nombres premiers. Si vous voulez les 4200 premiers nombres premiers, il suffit de prendre Table[Prime[n],{n,1,4200}]. Enfin, avec Table[Prime[n], {n, 8,10}], MATHEMATICA nous donne {19, 23, 29} soient les huitième, neuvième et dixième nombres premiers.

9) **(p ; p + 2) : couples de nombres premiers jumeaux :** un couple de nombres premiers jumeaux est un couple de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2)$. **Nous ne savons pas s'il existe une infinité de couples de nombres premiers jumeaux** même si, intuitivement, nous croyons que oui!!! Nous avons indiqué le nombre de couples de nombres premiers jumeaux dans les intervalles suivants :

[1 ; 10]	2
[1 ; 10^2]	8
[1 ; 10^3]	35
[1 ; 10^4]	205
[1 ; 10^5]	1 224
[1 ; 10^6]	8 169
[1 ; 10^7]	58 980
[1 ; 10^8]	440 312
[1 ; 10^9]	3 424 506

Nous avons regardé extrêmement loin sur la droite des entiers naturels et nous avons trouvé de nouveaux couples de nombres premiers jumeaux. Voici quelques intervalles et le nombre de couples qu'ils contiennent :

$[1+10^{16};1+10^{16}+10^{6}]$	948
$[1+10^{20};1+10^{20}+10^{6}]$	599
$[1+10^{25};1+10^{25}+10^{6}]$	451
$[1+10^{30};1+10^{30}+10^{6}]$	283
$[1+10^{35};1+10^{35}+10^{6}]$	199
$[1+10^{50};1+10^{50}+10^{6}]$	97
$[1+10^{70};1+10^{70}+10^{6}]$	53
$[1+10^{100};1+10^{100}+10^{6}]$	28
$[1+10^{115};1+10^{115}+10^{6}]$	23
$[1+10^{300};1+10^{300}+10^{6}]$	3
$[1+10^{380};1+10^{380}+10^{6}]$	0
$[1+10^{390};1+10^{390}+10^{6}]$	3
$[1+10^{400};1+10^{400}+10^{6}]$	2
$[1+10^{500};1+10^{500}+10^{6}]$	1

Nous remarquons qu'ils sont de plus en plus rares dans des intervalles dont la longueur est 1 million.

Un résultat très intéressant nous provient d'un mathématicien chinois Yitang Zhang : il affirme qu'il existe une infinité de couples de nombres premiers $(p;p+k)$ *avec* $k \leq 70\,000\,000$. Puis, une amélioration : $k \leq 60\,000\,000$. Avec Terence Tao et son projet «Polymath», une très grande amélioration s'ensuit : $k \leq 4680$.
Enfin, avec J. Maynard de l'université de Montréal, $k \leq 600$. La méthode employée par Maynard ne pourrait pas faire mieux que de donner $k \leq 12$, ce qui n'est pas encore fait à ce jour. Début 2014, nous avons eu $k \leq 270$.

10) Couples de nombres premiers de la forme (p ; p + 2k)

Nous pensons qu'il existe une infinité de tels couples mais ceci n'est qu'une conjecture. Ici, k est un entier > 1. Nous allons regarder combien nous en trouvons, respectivement de gauche à droite, dans les intervalles $[1\,;10^7]$, $[1+10^{10};1+10^{10}+10^6]$, $[1+10^{50};1+10^{50}+10^6]$ et $[1+10^{120};1+10^{120}+10^6]$:

$(p\,;\,p+4)$	58 622	2446	102	27
$(p\,;\,p+8)$	58 595	2465	100	9
$(p\,;\,p+6)$	117 207	4989	187	33
$(p\,;\,p+12)$	117 486	4935	212	34
$(p\,;\,p+18)$	117 463	4998	193	30
$(p\,;\,p+24)$	117 342	4941	193	30
$(p\,;\,p+30)$	156 517	6505	266	53
$(p\,;\,p+10)$	78 211	3248	116	22
$(p\,;\,p+10^2)$	78 248	3292	139	19
$(p\,;\,p+10^3)$	78 265	3338	131	15
$(p\,;\,p+10^4)$	77 850	3249	129	31
$(p\,;\,p+6\times10^4)$	155 798	6679	251	45

Par curiosité, dans l'intervalle $[1+10^{500};1+10^{500}+10^6]$, nous avons trouvé un couple de nombres premiers de la forme $[p\,;\,p+4]$, zéro couple de nombres premiers de la forme $[p\,;p+8]$, trois couples de nombres premiers de la forme $[p\,;\,p+6]$ et trois couples de nombres premiers de la forme $[p\,;\,p+60000]$. Nous n'avons pas cherché le nombre de couples pour les autres types. Ce que nous venons d'observer nous laisse croire que la conjecture suivante mérite d'être posée :

Conjecture 1 :

Il existe une infinité de couples de nombres premiers de la forme $(p\,;\,p+2k)$ où k est un entier ≥ 1.

Lorsque $k=1$, les couples sont appelés **jumeaux.**

11) Triplet de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 4) = triplet jumeau

Nous connaissons le triplet $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$ et c'est le seul!!! Nous l'appelons **triplet jumeau.** Lorsque $2 \leq p \leq 11$, nous trouvons 1 seul triplet jumeau: $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$. Soit maintenant $p \geq 13$, un nombre premier. Tous les entiers ≥ 12 ont la forme $3k\ ou\ 3k+1\ ou\ 3k+2$ avec k, un entier ≥ 4. Donc, un nombre premier ≥ 12 aura la forme $3k+1\ ou\ 3k+2$.

Avec $p = 3k+1$, le triplet devient $(3k+1\ ;\ 3k+3\ ;\ 3k+5)$ et $3k+3 = 3(k+1)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+1 \geq 5$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

Avec $p = 3k+2$, le triplet devient $(3k+2\ ;\ 3(k+1)+1\ ;\ 3k+6)$. Nous voyons que $3k+6 = 3(k+2)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+2 \geq 6$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

Théorème 1 :

Il n'existe qu'un seul triplet jumeau soit $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$.

Le triplet $(1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ n'est pas un triplet jumeau puisque 1 n'est plus considéré comme un nombre premier.

12) Triplets de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 6)

Les triplets $(5\ ;\ 7\ ;\ 11)$ $(11\ ;\ 13\ ;\ 17)$ $(17\ ;\ 19\ ;\ 23)$ $(41\ ;\ 43\ ;\ 47)$ sont les quatre premiers triplets rencontrés. Il en existe 55 dans l'intervalle $[1\ ;\ 10\ 000]$. Précisons que c'est p qui va parcourir l'intervalle $[1\ ;\ 10\ 000]$. Voyons le nombre de triplets trouvés dans les intervalles suivants :

$[1\,;10]$	1
$[1\,;10^2]$	4
$[1\,;10^3]$	15
$[1\,;10^4]$	55
$[1\,;10^5]$	259
$[1\,;10^6]$	1393
$[1\,;10^7]$	8543
$[1\,;10^8]$	55 600

Allons voir dans des intervalles beaucoup plus loin :

$[1+10^{15}; 1+10^{15}+10^6]$	69
$[1+10^{20}; 1+10^{20}+10^6]$	34
$[1+10^{25}; 1+10^{25}+10^6]$	13
$[1+10^{40}; 1+10^{40}+10^6]$	4
$[1+10^{50}; 1+10^{50}+10^6]$	2
$[1+10^{60}; 1+10^{60}+10^6]$	1
$[1+10^{90}; 1+10^{90}+10^6]$	1
$[1+10^{100}; 1+10^{100}+10^6]$	0
$[1+10^{110}; 1+10^{110}+10^6]$	0
$[1+10^{110}; 1+10^{110}+10^7]$	1
$[1+10^{121}; 1+10^{121}+10^6]$	1
$[1+10^{122}; 1+10^{122}+10^6]$	1

Ces observations nous permettent d'énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 2 :

Il existe une infinité de triplets de nombres premiers de la forme $(p\,;\ p+2\,;\ p+6)$.

Théorème 2 :

Tous les triplets de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6)$ forment les trois groupes qui suivent :

Le groupe 1 renferme le triplet $(5\ ;\ 7\ ;\ 11)$.
Le groupe 2 renferme tous les triplets de la forme $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17)$ où k est un entier ≥ 0.
Le groupe 3 renferme tous les triplets de la forme $(30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23)$ où k est un entier ≥ 0.

Les triplets $(11\ ;\ 13\ ;\ 17)$; $(41\ ;\ 43\ ;\ 47)$; $(101\ ;\ 103\ ;\ 107)$ sont les trois premiers du groupe 2 et les triplets $(17\ ;\ 19\ ;\ 23)$; $(107\ ;\ 109\ ;\ 113)$; $(227\ ;\ 229\ ;\ 233)$ sont les trois premiers du groupe 3.
Dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^8]$, nous avons trouvé 55 600 triplets; plus précisément celui du groupe 1, les 27 934 du groupe 2 et les 27 665 du groupe 3.
La démonstration du théorème 2 est très semblable à celle du théorème 4 de la section 14) qui suit.

13) Quadruplet jumeau et k-uplet jumeau

Nous appelons quadruplet jumeau, un quadruplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+4\ ;\ p+6)$.

Nous appelons k-uplet jumeau, un k-uplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+4\ ;\ \ldots\ ;\ p+2(k-1))$ avec k, un entier ≥ 4.

Théorème 3 :

Il n'existe aucun quadruplet jumeau donc aucun k-uplet jumeau avec k, un entier ≥ 4.

La preuve est laissée au lecteur. (Voir la section 11 ci-haut)

14) Quadruplets jumeaux voisins

Nous appelons **quadruplet jumeau voisin**, un quadruplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$. Voici les quatre premiers quadruplets jumeaux voisins :

$(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13)$ $(11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19)$ $(101\ ;\ 103\ ;\ 107\ ;\ 109)$ $(191\ ;\ 193\ ;\ 197\ ;\ 199)$

Puis un très beau théorème qui caractérise les quadruplets jumeaux voisins :

Théorème 4 :

Si $p \geq 11$, alors tout quadruplet jumeau voisin a la forme $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19)$ où k est un entier ≥ 0.

Preuve :

Lorsque $p \leq 10$, nous trouvons un seul quadruplet jumeau voisin soit $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13)$. Lorsque $p \geq 11$, il est clair que p se termine par 1, 3, 7 ou 9.

a) Si p se termine par 1, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 1, 3, 7, 9.

b) Si p se termine par 3, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 3, **5**, 9, 1.

c) Si p se termine par 7, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 7, 9, 3, **5**.

d) Si p se termine par 9, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 9, 1, **5**, 7.

Mais un entier ≥ 11 qui se termine par 5 ne peut pas être premier. Donc notre quadruplet aura ses 4 nombres qui se termineront respectivement par 1, 3, 7, 9.

Le nombre premier p aura donc la forme $10y+11$ avec y, un entier ≥ 0. D'un autre côté, p a la forme $3r+2$ avec r, un entier impair ≥ 3 ; nous poserons $r = 2u+1$ où u est un entier ≥ 1.

Ainsi, nous aurons $p = 10y + 11 = 6u + 5$, ce qui implique $u = 1 + 5y/3$. Puisque u est un entier, alors $5y/3$ doit être un entier d'où $y = 3k$ avec k, un entier ≥ 0.

Finalement $p = 10y + 11 = 10 \times 3k + 11 = 30k + 11$ et notre quadruplet jumeau voisin aura la forme :

$$(30k + 11\ ;\ 30k + 13\ ;\ 30k + 17\ ;\ 30k + 19)$$

où k est un entier ≥ 0. Notons que p ne peut pas avoir la forme $3r + 1$. En effet, nous trouverions le quadruplet $(30k + 1\ ;\ 30k + 3\ ;\ 30k + 7\ ;\ 30k + 9)$ lequel contient deux nombres composés. $p = 10y + 11 = 3r + 1\ d'où\ 10y + 10 = 3r\ et\ r = 10k$. Nous trouvons $y = 3k - 1\ et\ p = 10(3k - 1) + 11 = 30k + 1$.

Évidemment, $p = 3k$ n'est pas possible lorsque $p \geq 11$.

Voyons maintenant le nombre de quadruplets jumeaux voisins contenus dans les intervalles suivants :

$[1\ ;\ 10]$	1
$[1\ ;\ 10^2]$	2
$[1\ ;\ 10^3]$	5
$[1\ ;\ 10^4]$	12
$[1\ ;\ 10^5]$	38
$[1\ ;\ 10^6]$	166
$[1\ ;\ 10^7]$	899
$[1\ ;\ 10^8]$	4768
$[1\ ;\ 10^9]$	28388
$[1\ ;\ 10^{10}]$	180529

Allons voir dans des intervalles beaucoup plus loin :

$[11 + 3\times10^{20}; 11 + 3\times10^{20} + 10^8]$	82
$[11 + 3\times10^{50}; 11 + 3\times10^{50} + 10^8]$	4
$[11 + 3\times10^{70}; 11 + 3\times10^{70} + 10^8]$	1
$[11 + 3\times10^{100}; 11 + 3\times10^{100} + 10^8]$	0
$[11 + 3\times10^{100}; 11 + 3\times10^{100} + 10^9]$	2

Ces résultats suggèrent la conjecture suivante :

Conjecture 3 :

Il existe une infinité de quadruplets jumeaux voisins.

En terminant, voyons un très grand quadruplet jumeau voisin :

$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,01$$
$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,03$$
$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,07$$
$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,09$$

15) Quintuplets jumeaux voisins et autres quintuplets

Nous appelons **quintuplet jumeau voisin**, un quintuplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8\ ;\ p+12)$.

Puisque les quatre premiers nombres du quintuplet forment un quadruplet jumeau voisin, alors nous devons avoir $p = 30k + 11$ lorsque $p \geq 11$.

Pour $p < 11$, nous trouvons un seul quintuplet jumeau voisin : $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17)$.

Théorème 5 :

Si $p \geq 11$, alors tout quintuplet jumeau voisin a la forme
$(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23)$ où k est un entier ≥ 0.

Dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^9]$, nous trouvons 3633 quintuplets jumeaux voisins dont $(11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23)$ $(101\ ;\ 103\ ;\ 107\ ;\ 109\ ;\ 113)$ $(1481\ ;\ 1483\ ;\ 1487\ ;\ 1489\ ;\ 1493)$

Nous appelons **quintuplet jumeau-alpha**, un quintuplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8\ ;\ p+2\alpha)$$

où α est un entier > 6.

Avec $p \geq 11$, les quintuplets jumeaux-alpha auront la forme :

$$(**) \quad (30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+11+2\alpha)$$

où k, un entier ≥ 0.

Si $p < 11$, alors un seul quintuplet jumeau-alpha est possible soit :

$$(*) \qquad (5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 5+2\alpha)$$

la condition étant que $5+2\alpha$ soit un nombre premier.

Le tableau suivant indique la valeur de α ; le quintuplet (*) si il existe; puis le nombre de quintuplets (**) dans l'intervalle $[11\ ;\ 10^7]$, le nombre de quintuplets (**) dans l'intervalle $[11\ ;\ 10^9]$ et enfin, le premier quintuplet (**) rencontré.

α	(*)	$[11\ ;\ 10^7]$	$[11\ ;\ 10^9]$	*Exemple*
6	(5:7;11;13;17)	159	3632	(11;13;17;19;23)
7	(5;7;11;13;19)	/	/	/
9	(5;7;11;13;23)	158	3648	(11;13;17;19;29)
10	/	236	5321	(11;13;17;19;31)
15	/	246	6126	(11;13;17;19;41)
25	/	251	6340	(11;13;17;19;61)
30	/	185	4206	(11;13;17;19;71)

α	(*)	$[11\,;10^7]$	$[11\,;10^9]$	*Exemple*
34	(5:7;11;13;73)	195	4761	(11;13;17;19;79)
40	/	160	4167	(101;103;107;109;181)
45	/	288	6439	(11;13;17;19;101)
55	/	220	5036	(101;103;107;109;211)
250	/	177	4539	(101;103;107;109;601)
2500	/	328	7769	(11;13;17;19;5011)
25×10^5	/	119	3674	(11;13;17;19;5000011)

Dans l'intervalle $[11+3\times10^{25}\,;\,11+3\times10^{25}+10^8]$, nous trouvons tout de même 3 quintuplets jumeaux voisins. Les 3 nombres qui suivent sont le premier nombre de chaque quintuplet :

$$300000000000000000016327271$$
$$300000000000000000030315371$$
$$300000000000000000090120851$$

Conjecture 4 :

Il existe une infinité de quintuplets jumeaux voisins.

16) Le seul 6-uplet jumeau voisin et autres 6-uplets

Nous appelons **6-uplet jumeau voisin**, un 6-uplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\,;\ p+2\,;\ p+6\,;\ p+8\,;\ p+12\,;\ p+14)$$

Avec $p<11$, nous connaissons un seul 6-uplet jumeau voisin soit :

$$(5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,;\,19)$$

Avec $p \geq 11$, nous avons $p = 30k + 11$ puisque les quatre premiers nombres du 6-uplet forment un quadruplet jumeau voisin (ici, k est un entier ≥ 0). Nous avons alors $p + 14 = 30k + 25$ qui n'est jamais un nombre premier. D'où :

Théorème 6 :

Il n'existe qu'un seul 6-uplet jumeau voisin soit $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19)$.

Remarque : nous avons utilisé couple, triplet, quadruplet et quintuplet à la place de 2-uplet, 3-uplet, 4-uplet et 5-uplet.

Nous appelons **6-uplet jumeau-alpha**, un 6-uplet de nombres premiers de la forme: $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8\ ;\ p+12\ ;\ p+18)$.

Avec $p < 11$, nous trouvons un seul 6-uplet jumeau-alpha soit :

$$(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 23)$$

Avec $p \geq 11$, nous trouvons le nombre suivant de 6-uplets jumeaux-alpha dans les intervalles :

$[1\ ;\ 10]$	1
$[11\ ;\ 10^2]$	1
$[11\ ;\ 10^3]$	1
$[11\ ;\ 10^4]$	2
$[11\ ;\ 10^5]$	2
$[11\ ;\ 10^6]$	5
$[11\ ;\ 10^7]$	15
$[11\ ;\ 10^8]$	62
$[11\ ;\ 10^9]$	329

Pour les 6 premiers 6-uplets jumeaux-alpha, le premier nombre est :

$$5\ ;\ 11\ ;\ 1481\ ;\ 165701\ ;\ 326141\ ;\ 661091$$

17) Les 8-uplets jumeaux voisins

Nous appelons 8-uplet jumeau voisin, un 8-uplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8\ ;\ p+90\ ;\ p+92\ ;\ p+96\ ;\ p+98)$$

Ce 8-uplet n'est rien d'autre qu'un couple de quadruplets jumeaux voisins. Les deux plus petits sont :

$$(11;13;17;19;101;103;107;109)\ et\ (101;103;107;109;191;193;197;199)$$

Le troisième est :

$$(15641;15643;15647;15649;15731;15733;15737;15739)$$

Dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^9]$, les 8-uplets jumeaux voisins sont au nombre de 30. Dans l'intervalle $[11+3\times10^{12};\ 11+3\times10^{12}+10^9]$, nous trouvons un seul 8-uplet jumeau voisin; également dans l'intervalle $[11+3\times10^{15};\ 11+3\times10^{15}+10^9]$, nous en trouvons un seul. Voici ces deux derniers :

3000592262951	3000000916685231
3000592262953	3000000916685233
3000592262957	3000000916685237
3000592262959	3000000916685239
3000592263041	3000000916685321
3000592263043	3000000916685323
3000592263047	3000000916685327
3000592263049	3000000916685329

18) Les 12-uplets jumeaux voisins

Nous appelons **12-uplet jumeau voisin**, un 12-uplet de nombres premiers de la forme :

$$(p; p+2; p+6; p+8; p+90; p+92; p+96; p+98; p+180; p+182; p+186; p+188)$$

Il s'agit d'un triplet de quadruplets jumeaux voisins avec $p = 30k + 11$. Dans l'intervalle $[1\,;\,18\times10^9]$, nous en avons trouvé un seul soit celui déterminé par $k = 0$:

(*) $(11\,;\,13\,;\,17\,;\,19\,;\,101\,;\,103\,;\,107\,;\,109\,;\,191\,;\,193\,;\,197\,;\,199)$

La structure des 12-uplets jumeaux voisins a été déterminée à partir de (*). Il est donc évident que nous en trouvions au moins un!!! Étant données les contraintes imposées :

a) Dans un intervalle de longueur 189, nous exigeons la présence d'au moins 12 nombres premiers.
b) De plus, dans cet intervalle, 12 nombres premiers doivent être regroupés en 6 paires de nombres premiers jumeaux.
c) Enfin, ces 6 paires doivent être regroupées en 3 quadruplets jumeaux voisins.

et un seul 12-uplet jumeau voisin connu dans l'intervalle cité plus haut, alors

nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture 5 :

Il n'existe qu'un seul 12-uplet jumeau voisin.

Malgré tout cela, il demeure possible de trouver un autre 12-uplet jumeau voisin dans un intervalle tel que $[1\,;\,10^{10^{100}}]$. Mais cette vérification est hors de notre portée, pour l'instant!!! Nous admettons que notre ordinateur n'est pas assez puissant pour aborder certains calculs!!!

19) Les couples de Sophie Germain et autres

Ce sont les couples de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ 2p+1)$. Voici les 7 premiers : $(2\ ;\ 5)$ $(3\ ;\ 7)$ $(5\ ;\ 11)$ $(11\ ;\ 23)$ $(23\ ;\ 47)$ $(29\ ;\ 59)$ $(41\ ;\ 83)$.
Dans chaque couple, le premier nombre p à gauche est appelé **«nombre premier de Sophie Germain»**. Nous le noterons **p-SG**. Ces nombres sont reliés au grand théorème de Fermat. « Il est devenu traditionnel, en grande partie à cause du théorème de Sophie Germain, de diviser le grand théorème de Fermat en 2 cas :
Cas 1 : dans $x^n + y^n = z^n$, aucun des entiers $x, y\ et\ z$ n'est divisible par n.
Cas 2 : dans $x^n + y^n = z^n$, un seul des entiers $x, y\ ou\ z$ est divisible par n.
Le théorème de Sophie Germain revient à dire que si n est un nombre premier de Sophie Germain, alors le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour toutes ces valeurs de n ». [2], page 77.

Voici le nombre de couples de Sophie Germain dans les intervalles suivants :

$[1\ ;\ 10]$	3
$[1\ ;\ 10^2]$	10
$[1\ ;\ 10^3]$	37
$[1\ ;\ 10^4]$	190
$[1\ ;\ 10^5]$	1171
$[1\ ;\ 10^6]$	7746
$[1\ ;\ 10^7]$	56032
$[1\ ;\ 10^8]$	423140

Allons voir dans des intervalles plus lointains :

$[1+10^{10}; 1+10^{10}+10^7]$	24183
$[1+10^{12}; 1+10^{12}+10^7]$	16835
$[1+10^{20}; 1+10^{20}+10^7]$	6093
$[1+10^{50}; 1+10^{50}+10^7]$	973
$[1+10^{100}; 1+10^{100}+10^7]$	250
$[1+10^{300}; 1+10^{300}+10^7]$	32

La conjecture suivante est déjà bien connue :

Conjecture 6 :

Il existe une infinité de couples de Sophie Germain.

Dans les couples mentionnés ci-haut, regroupons ceux qui sont en rouge :

$$(2\,;5)\ (5\,;11)\ (11\,;23)\ (23\,;47)$$

Nous remarquons que dans chaque couple, excepté 47, les deuxièmes entiers sont des nombres premiers de Sophie Germain. Cela nous permet d'écrire le quadruplet suivant :

$$(2\,;5\,;11\,;23)$$

lequel est formé de 4 nombres premiers de Sophie Germain. Nous l'appellerons quadruplet-SG. Plus généralement, un **quadruplet-SG** est un quadruplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\,;2p+1\,;4p+3\,;8p+7)$$

Un **k-uplet-SG** est un k-uplet de nombres premiers tels que, excepté le premier entier, chaque entier est égal à 1 plus le double de l'entier précédent. Ici, k est un entier > 1.

Nous allons dresser un tableau qui donnera, dans les intervalles indiqués, le nombre de triplets-SG, de quadruplets-SG, de quintuplets-SG, de 6-uplets-SG, de 7-uplets-SG et de 8-uplets-SG :

	3	4	5	6	7	8
$[1\,;10]$	2	2	1	0	0	0
$[1\,;10^2]$	5	3	2	1	0	0
$[1\,;10^3]$	9	6	3	1	0	0
$[1\,;10^4]$	41	11	3	1	0	0
$[1\,;10^5]$	205	37	8	2	0	0
$[1\,;10^6]$	1187	159	33	5	0	0
$[1\,;10^7]$	7476	892	190	45	3	0

Ainsi, dans la quatrième rangée, nous trouvons à partir de l'intervalle $[1\ ;\ 10^4]$, respectivement 41 triplets-SG, 11 quadruplets-SG, 3 quintuplets-SG, 1 seul 6-uplet-SG, aucun 7-uplet-SG et aucun 8-uplet-SG.

Par exemple, observons les 2 quadruplets-SG suivants :

(2 ; 5 ; 11 ; 23) et (5 ; 11 ; 23 ; 47)

Dans le premier, les 4 entiers sont des nombres premiers-SG tandis que dans le second, les 3 premiers seulement sont des nombres premiers-SG. En effet, 1 + 2x47 = 95 n'est pas premier. Nous dirons que le premier est un **quadruplet-SG parfait** et que le second est tout simplement un quadruplet-SG.

Comment pouvons-nous trouver le nombre de quadruplets-SG parfaits dans un intervalle donné? Par exemple, dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^7]$, nous avons trouvé 892 quadruplets-SG et 190 quintuplets-SG. Nous avons donc 190 quadruplets-SG parfaits. Toujours dans le même intervalle, nous avons 892 triplets-SG parfaits. Cela est dû au résultat de l'encadré plus bas. Nous pouvons également nous servir du programme « k-uplets de nombres premiers » que nous avons fabriqué dans MAPLE.

Continuons avec l'intervalle $[1+10^{50}\ ;\ 1+10^{50}+10^7]$ dans lequel nous trouvons 24 triplets-SG donc 24 couples-SG parfaits parmi les 973 couples-SG de cet intervalle.

Puis l'intervalle $[1+10^{100}\ ;\ 1+10^{100}+10^7]$ dans lequel nous trouvons 5 triplets-SG donc 5 couples-SG parfaits parmi les 250 couples-SG de cet intervalle.

Enfin, l'intervalle $[1+10^{180}\ ;\ 1+10^{180}+10^7]$ dans lequel nous trouvons aucun triplet-SG donc aucun couple-SG parfait parmi les 76 couples-SG de cet intervalle!!!

Il existe une bijection entre les k-uplets-SG et les (k-1)-uplets-SG parfaits.

Dans les intervalles qui suivent, nous indiquons le nombre d'entiers n qui font de n^2+1, un nombre premier puis de n^2+5, un nombre premier.

	n^2+1	n^2+5
$[0\,;10]$	5	2
$[0\,;10^2]$	19	8
$[0\,;10^3]$	112	49
$[0\,;10^4]$	841	340
$[0\,;10^5]$	6656	2568
$[0\,;10^6]$	54110	20847
$[0\,;10^7]$	456362	175991

Voici les 19 entiers de l'intervalle $[0\,;10^2]$ qui font de n^2+1, un nombre premier :

$1\,;2\,;4\,;6\,;10\,;14\,;16\,;20\,;24\,;26\,;36\,;40\,;54\,;56\,;66;74\,;84\,;90\,;94$

Par exemple : $84^2+1=7057$ est un nombre premier.

Puis les 8 entiers du même intervalle qui font de n^2+5, un nombre premier :

$0\,;6\,;12\,;36\,;48\,;72\,;78\,;96$

Par exemple : $48^2+1=2309$ est un nombre premier.

Remarquons que 6 fait de n^2+1, un nombre premier et qu'il fait aussi de n^2+5, un autre nombre premier ($6^2+1=37\ et\ 6^2+5=41$, deux nombres premiers). Il en est de même avec 36. Mais, il y en a beaucoup d'autres. Par exemple, dans l'intervalle $[0\,;10^7]$, nous trouvons 13 204 entiers comme 6 et 36, qui rendent à la fois, $n^2+1\ et\ n^2+5$, des nombres premiers. Ainsi, 126 qui fait partie des 13 204 entiers, donne $126^2+1=15877\ et\ 126^2+5=15881$, deux nombres premiers.

Il est étonnant de voir qu'il existe **beaucoup** de nombres premiers qui ont la même structure. Par exemple, à partir de l'intervalle $[0\,;10^6]$, nous trouvons 54 110 nombres premiers qui ont la structure n^2+1. À partir du même intervalle, nous trouvons 77 685 nombres premiers qui ont la structure n^2+7.

Dans l'intervalle $[10^{30};10^{30}+10^6]$, nous trouvons 14 340 entiers qui font de n^2+7, un nombre premier. Mais dans l'intervalle aussi lointain que $[10^{300};10^{300}+10^6]$, nous en trouvons encore 1396!!!

Nous croyons que très souvent, le mot «**beaucoup»** pourrait être remplacé par «**une infinité»**.

La théorie des nombres est très riche en conjectures!!!

Problème1 : Utilisez le programme « k-uplets de nombres premiers » afin de trouver :

a) Le nombre de triplets de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+6\ ;\ p+12)$ où p est contenu dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^k]$ avec k, un entier qui varie de 1 à 8.
b) Au moins une centaine de ces triplets.
c) Des intervalles très lointains comme $[1+10^{20};\ 1+10^{20}+10^7]$ qui contiennent de tels triplets (celui-ci en contient 564).
d) Une conjecture.

Problème 2 : Démontrez qu'il n'y a qu'un seul triplet de nombres premiers de la forme :

a) $(p\ ;\ p+4\ ;\ p+8)$ et trouvez-le.
b) $(p\ ;\ p+8\ ;\ p+16)$ et trouvez-le.
c) $(p\ ;\ p+10\ ;\ p+20)$ et trouvez-le.
d) $(p\ ;\ p+10\ ;\ p+14)$ et trouvez-le.

Problème 3 : Combien trouvons-nous de couples-SG parfaits à partir de l'intervalle $[1\ ;\ 10^7]$?

Problème 4 : Pouvons-nous trouver des couples de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p^2+5)$?

Problème 5 : Le nombre $10^{30000}+10^{3000}+10^{300}+10^{30}+10^{10}+7$ est-il premier?

Problème 6 : Nous avons vu plus haut que 6 fait de n^2+1, un nombre premier et qu'il fait aussi de n^2+5, un nombre premier puis qu'il en est de même de 36. Pouvez-vous trouver 10 autres entiers positifs comme 6 et 36?

Problème 7 : Considérons les cinq nombres suivants où n est un entier ≥ 0 :

(*) $\qquad n^2+15\ ;\ n^2+55\ ;\ n^2+93\ ;\ n^2+123\ ;\ n^2+177$

Choisissons dans l'intervalle $[0\ ;\ 10^6]$, un entier qui fera un nombre premier des cinq nombres de (*). Le plus petit est 2 et nous vérifions sans peine que 4 + 15 = 19, 4 + 55 = 59, 4 + 93 = 97, 4 + 123 = 127 et 4 + 177 = 181 sont bien des nombres premiers. Le suivant est 4 et nous avons bien 16 + 15 = 31, 16 + 55 = 71, … encore cinq nombres premiers.

Trouvez tous les entiers de l'intervalle $[0\ ;\ 10^6]$ qui sont comme 2 et 4 donc tous les entiers tels que chacun rend premiers les cinq nombres de (*). Combien y en a-t-il?

Problème 8 : Considérons les cinq nombres suivants où n est un entier ≥ 0 :

$$(**) \qquad n^2 + a_1\ ;\ n^2 + a_2\ ;\ n^2 + a_3\ ;\ n^2 + a_4\ ;\ n^2 + a_5$$

où les a_i sont des nombres premiers impairs. Attribuez des valeurs aux a_i et trouvez tous les entiers de l'intervalle $[0\ ;\ 10^6]$ tels que chacun rend premiers les cinq nombres de (**). Combien en trouvez-vous?

Suggestion : vous pouvez faire vos propres essais pour attribuer des valeurs aux a_i et ensuite, vous pouvez essayer 7, 11, 19, 41 et 53 puis 19, 37, 59, 67 et 79.

Problème 9 : Nous connaissons les triplets de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6)$ mais il y a aussi ceux de la forme $(p\ ;\ p+4\ ;\ p+6)$. Appelons A, l'ensemble des triplets de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6)$ et B, l'ensemble des triplets de la forme $(p\ ;\ p+4\ ;\ p+6)$. Les trois premiers de A sont $(5;7;11)$, $(11;13;17)$ et $(17;19;23)$. Les trois premiers de B sont $(7;11;13)$, $(13;17;19)$ et $(37;41;43)$.

a) Montrez que $A \cap B = \varnothing$.
b) Comparez le nombre de triplets de A issus de l'intervalle $[1\ ;\ 10^k]$ avec le nombre de triplets de B issus du même intervalle, k variant de 1 à 8.

Références:

[1] Biscuits of Number Theory, Arthur T. Benjamin and Ezra Brown, Editors, MAA 2009.

[2] Les mathématiciens, Bibliothèque pour la Science, Diffusion Belin, 1996.

Annexe 8 : Suites de 16 nombres premiers consécutifs

Notre programme, **«Premiers parfaits-4»,** dans MAPLE, regarde toutes les suites de seize nombres premiers consécutifs et conserve seulement celles qui conduisent à des carrés magiques, évidemment d'ordre 4. Puis, le programme nous donne tous les carrés magiques formés des seize nombres premiers consécutifs de ces suites.

Nous allons regarder les 5 550 000 premières suites. Pour obtenir un carré magique, une **condition nécessaire** est que la somme des seize nombres premiers consécutifs soit divisible par 8. Nous dirons qu'une telle suite est une **suite favorable**. Le nombre $sf(k)$ nous indique le nombre de suites favorables parmi les k premières suites. Par exemple, nous avons :

$$sf(1500) = 374$$

Nous trouvons, dans MATHEMATICA, $sf(k)$ qui est obtenu de la façon suivante :

$$\text{Count}[\text{Table}[\text{IntegerQ}[\sum_{n=i}^{i+15} \text{Prime}[n]/8], \{i, 1, k\}], \text{True}]$$

Ce programme s'appelle **«Suites favorables».**

Si une suite favorable nous permet de trouver des carrés magiques, alors nous dirons que cette suite est une **suite magique**. Nous avons trouvé **12 suites magiques** en regardant les 5 550 000 premières suites. Pour cela, nous écrivons :

$$sm(5\ 550\ 000) = 12$$

où $sm(k)$ est la valeur de la fonction sm soit le nombre de suites, parmi les k premières suites, qui permettent de construire des carrés magiques (donc le nombre de suites magiques). Notez que le domaine de la fonction sm est l'ensemble des entiers ≥ 1.

Voyons maintenant le tableau suivant qui nous indique, respectivement dans les colonnes de gauche à droite :

1) Le rang de la suite magique.
2) Le nombre de carrés premiers parfaits obtenus avec la suite.
3) Le nombre de primitifs.
4) En rouge, le nombre de couples de nombres premiers jumeaux dans la suite.

Ainsi, dans la première colonne à gauche, nous trouvons 11. Cela signifie que la première suite magique rencontrée est la onzième suite laquelle commence par le nombre premier 31, soit le onzième nombre premier de la liste :

$$\{2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23\ ;\ 29\ ;\ 31\ ;\ 37\ ;\ 41\ ;\ldots\}$$

La suite de rang k commence donc avec le nombre premier de rang k. La suite de rang 1 commence avec 2; la suite de rang 2 commence avec 3; la suite de rang 3 commence avec 5 et ainsi de suite.

Notons que pour construire un carré premier parfait d'ordre $n, n \geq 3,$ (carré magique formé de n^2 nombres premiers consécutifs), nous devons commencer avec la deuxième suite car la première renferme 2, un nombre pair.

	11	32	4	3
	12	64	8	4
	201	96	12	5
	658	32	4	3
	1 500	32	4	1
	234 232	32	4	2
(*)	238 519	32	4	1
	620 637	32	4	4
	1 511 056	32	4	3
	1 625 973	32	4	1
	2 793 700	32	4	1
	5 543 074	32	4	2
	TOTAL	480	60	$sm(5\ 550\ 000) = 12$

Les suites qui conduisent à des carrés magiques sont plutôt **rares** puisqu'avec les 5 550 000 premières suites, seulement 12 nous permettent de trouver au total 480 carrés magiques d'où 60 primitifs. C'est ce que nous montre le tableau.

La grande question :

La fonction sm est-elle bornée?

En d'autres mots, le nombre de suites magiques est-il fini?

Pour le moment, nous n'en savons rien. Notre intuition nous dit, faiblement, qu'il doit y en avoir une infinité avec une densité linéaire extrêmement petite!!!

Nous avons considéré les 1 110 000 premières suites, par tranches de 30 000, pour constater que 278 102 sont favorables soit 25,054 %. En moyenne, cela nous donne **une suite favorable sur quatre**. Parmi les 278 102 suites favorables, seulement 8 sont des suites magiques!!!

Parmi les 5 550 000 premières suites de seize nombres premiers consécutifs, seulement **douze** suites sont magiques!!! Celles-ci sont d'une grande rareté!!!

De plus, elles nous permettent de construire, au total, 480 carrés magiques donc 60 primitifs.

Conjecture :

Il existe une infinité de suites magiques formées de seize nombres premiers consécutifs.

Le tableau suivant nous indique, dans les colonnes de gauche à droite, le rang de la suite magique, le premier nombre premier de chaque suite ainsi que les dix plus petites sommes magiques pour un carré premier parfait d'ordre 4 :

	11	31	258
	12	37	276
	201	1 229	5 118
	658	4 931	19 896
	1 500	12 553	50 478
(**)	234 232	3 259 909	13 039 980
	238 519	3 324 329	13 297 678
	620 637	9 291 521	37 166 532
	1 511 056	24 066 643	96 266 778
	1 625 973	26 025 107	104 100 834
	2 793 700	46 330 021	185 320 518
	5 543 074	95 979 511	383 918 304

Par exemple, avec la suite 201, nous obtenons 96 carrés premiers parfaits de somme 5 118 donc 12 primitifs et 1229 comme plus petit nombre premier dans chaque carré.

Avec les suites de 1 à 1 000 000, nous avons trouvé **huit suites magiques** puis, avec les suites de 1 000 001 à 2 000 000, nous en avons trouvé seulement **deux**. Avec les suites qui vont de 2 000 001 à 3 000 000, nous avons trouvé **une** seule suite magique. Quant aux suites qui vont de 3 000 001 à 5 550 000, **une seule** est magique. Pourrions-nous en trouver d'autres au-delà de la suite 5 550 000?

Quant à nous, nos recherches s'arrêtent avec la suite 5 550 000. Vous voulez continuer?

Nous avons : $sf(5\ 550\ 000) = 1\ 388\ 015$; $sm(5\ 550\ 000) = 12$

Si vous voulez retrouver ces carrés premiers parfaits, vous n'avez qu'à entrer dans MAPLE et choisir le programme «Premiers parfaits-4» puis donner la valeur que vous voulez à a ainsi qu'à b, dans la deuxième ligne sous Programme 1, a := et b :=. Quand vous aurez donné vos valeurs à a et à b, vous devrez avoir, par exemple, ce qui suit :

$$a := 7 : b := 1500 :$$

Nous vous recommandons de regarder les carrés obtenus avec une seule suite à la fois. Par exemple, les carrés obtenus avec la suite 201. Vous devriez avoir :

$$a := 201 : b := 201 :$$

Notons que si nous trouvions dans tous les groupes consécutifs de 10^8 suites de seize nombres premiers consécutifs, une seule suite magique, alors nous en aurions une infinité!!!

Mais cela est-t-il possible???

Le carré suivant est un carré magique fabriqué avec la suite 11 donc un carré de la plus petite somme $S = 258$. Ses seize entiers forment une suite de seize nombres premiers consécutifs. Ce carré renferme trois couples de nombres premiers jumeaux :

61	53	73	71
83	37	41	97
47	79	101	31
67	89	43	59

Carré premier parfait $S = 258$

Le suivant est un carré magique fabriqué avec la suite 201. Il est de somme $S = 5118$, la troisième plus petite somme après $258\, et\, 276$. Ses seize entiers forment une suite de seize nombres premiers consécutifs. Ce carré contient cinq couples de nombres premiers jumeaux :

1279	1303	1307	1229
1289	1283	1297	1249
1259	1301	1237	1321
1291	1231	1277	1319

Carré premier parfait $S = 5118$

Voici une nouvelle conjecture :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{sf(k)}{k} = \frac{1}{4}$$

Le nombre $sf(k)$ est le nombre de suites favorables parmi les k premières suites de seize nombres premiers consécutifs.

Par exemple, nous avons $\frac{sf(k)}{k} = 0,250010404$ lorsque $k = 500\ 000\ 000.$

Le tableau suivant nous mène à cette conjecture :

De la suite 1 à la suite k	$sf(k)$	%
1 à 5 550 000	1 388 015	25,00928 %
1 à 10 000 000	2 500 405	25,00405 %
1 à 15 000 000	3 750 455	25,00303 %
1 à 20 000 000	5 000 057	25,00028 %
1 à 25 000 000	6 250 347	25,00139 %
1 à 30 000 000	7 499 634	24,99878 %
1 à 35 000 000	8 750 779	25,00223 %
1 à 40 000 000	10 001 675	25,00419 %
1 à 45 000 000	11 252 148	25,00477 %
1 à 50 000 000	12 500 286	25,00057 %
1 à 55 000 000	13 750 988	25,00180 %
1 à 60 000 000	15 001 483	25,00247 %
1 à 100 000 000	25 000 632	25,000632 %
1 à 150 000 000	37 499 456	24,999637 %
1 à 200 000 000	50 002 173	25,0010865 %
1 à 250 000 000	62 499 807	24,999923 %
1 à 400 000 000	99 998 869	24,999717 %
1 à 500 000 000	125 005 202	25,0010404 %

Pour terminer, voici douze carrés premiers parfaits d'ordre 4, chacun étant associé à la suite qui permet sa construction. Pour chaque carré, sont illustrés le plus petit et le plus grand nombre ainsi que sa somme magique S. **Ce sont les douze plus petites sommes magiques!**

37	53	89	79
83	61	67	47
97	71	59	31
41	73	43	101

Suite 11 S = 258

43	83	89	61
59	79	97	41
103	47	53	73
71	67	37	101

Suite 12 S = 276

1279	1303	1307	1229
1289	1283	1297	1249
1259	1301	1237	1321
1291	1231	1277	1319

Suite 201 S = 5 118

4951	4999	5003	4943
4931	4967	4987	5011
5021	4973	4969	4933
4993	4957	4937	5009

Suite 658 S = 19 896

12 613	12 641	12 671	12 553
12 569	12 601	12 619	12 689
12 637	12 647	12 611	12 583
12 659	12 589	12 577	12 653

Suite 1500 S = 50 478

3 260 063	3 259 987	3 259 999	3 259 931
3 259 933	3 259 979	3 260 051	3 260 017
3 260 027	3 260 041	3 259 909	3 260 003
3 259 957	3 259 973	3 260 021	3 260 029

Suite 234 232 S = 13 039 980

3 324 509	3 324 407	3 324 421	3 324 341
3 324 359	3 324 361	3 324 491	3 324 467
3 324 353	3 324 389	3 324 437	3 324 499
3 324 457	3 324 521	3 324 329	3 324 371

Suite 238 519 S = 13 297 678

9 291 617	9 291 721	9 291 641	9 291 553
9 291 631	9 291 643	9 291 719	9 291 539
9 291 671	9 291 647	9 291 523	9 291 691
9 291 613	9 291 521	9 291 649	9 291 749

Suite 620 637 S = 37 166 532

24 066 733	24 066 677	24 066 701	24 066 667
24 066 643	24 066 737	24 066 689	24 066 709
24 066 683	24 066 703	24 066 649	24 066 743
24 066 719	24 066 661	24 066 739	24 066 659

Suite 1 511 056 S = 96 266 778

26 025 211	26 025 271	26 025 203	26 025 149
26 025 127	26 025 227	26 025 199	26 025 281
26 025 239	26 025 229	26 025 179	26 025 187
26 025 257	26 025 107	26 025 253	26 025 217

Suite 1 625 973 S = 104 100 834

46 330 111	46 330 217	46 330 133	46 330 057
46 330 069	46 330 061	46 330 187	46 330 201
46 330 157	46 330 093	46 330 177	46 330 091
46 330 181	46 330 147	46 330 021	46 330 169

Suite 2 793 700 S = 185 320 518

95 979 553	95 979 563	95 979 617	95 979 571
95 979 523	95 979 581	95 979 557	95 979 643
95 979 599	95 979 547	95 979 619	95 979 539
95 979 629	95 979 613	95 979 511	95 979 5

Suite 5 543 074 S = 383 918 304

À vous de trouver la treizième suite magique!!!

Annexe 9 : Carré à la fois magique et multiplicatif

L'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} a & \frac{4S}{3}-2a-c & a+c-\frac{S}{3} \\ c & \frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-c \\ S-a-c & 2a+c-\frac{2S}{3} & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 3

$$\begin{pmatrix} a & \frac{P^{4/3}}{a^2c} & \frac{ac}{P^{1/3}} \\ c & P^{1/3} & \frac{P^{2/3}}{c} \\ \frac{P}{ac} & \frac{a^2c}{P^{2/3}} & \frac{P^{2/3}}{a} \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 3 *avec* $P \neq 0$

Ces deux structures peuvent-elles nous donner le même carré? Si oui, nous aurions :

$P^{1/3} = \frac{S}{3} = k$ et $\frac{2S}{3} - a = \frac{P^{2/3}}{a}$ d'où l'équation $2k - a = \frac{k^2}{a} \Leftrightarrow 2ak - a^2 = k^2$ puisque $P \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$. Puis $(a-k)^2 = 0$ nous donne $a = k$. De la même façon, nous trouvons $c = k$.

Finalement, nous trouvons k dans les neuf cases et le carré est alors trivial. De plus, il est évident qu'un carré trivial est toujours à la fois magique et multiplicatif!!! Nous avons donc le théorème suivant :

Soit M, un carré d'ordre 3 formé de neuf nombres non nuls. Alors M est à la fois magique et multiplicatif si et seulement si M est trivial.

Un tel carré M ne peut donc pas être presque normal!!!

<u>L'ordre 4</u> :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & e & f & S-d-e-f \\ g & 2a+b+c+d-f+g-S & -2a-b-c-d-e-g+2S & e+f-g \\ -a-d-g+S & -2a-2b-c-d-e+f-g+2S & 2a+b+d+e-f+g-S & a+b+c+d+g-S \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 4

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \frac{P}{abc} \\ d & e & f & \frac{P}{def} \\ g & \frac{a^2bcdg}{fP} & \frac{P^2}{a^2bcdeg} & \frac{ef}{g} \\ \frac{P}{adg} & \frac{fP^2}{a^2b^2cdeg} & \frac{a^2bdeg}{fP} & \frac{abcdg}{P} \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés multiplicatifs
d'ordre 4 *formé de* 16 *nombres* > 0

Soit M, un carré d'ordre 4 formé de seize nombres > 0. Si M est à la fois magique et multiplicatif, alors nous avons :

$$\frac{ef}{g} = e+f-g \Leftrightarrow ef = eg+fg-g^2 \Leftrightarrow g(g-f) = e(g-f)$$

Il y a deux cas.

1) $g = f$ d'où une répétition.
2) $g \neq f$ d'où $g = e$ et nous avons une répétition.

Nous avons donc le théorème suivant :

Soit M, un carré d'ordre 4 formé de seize nombres > 0. Si M est à la fois magique et multiplicatif, alors il y a au moins une répétition dans M.

Un tel carré M ne peut donc pas être presque normal!!!

<u>Les ordres impairs</u> $n \geq 3$:

Nous allons considérer ici les carrés d'ordres impairs $n \geq 3$ formés de n^2 nombres > 0. Nous nous demandons si un tel carré peut être à la fois magique associatif et multiplicatif associatif.

Dans un carré magique associatif, le centre est $\frac{S}{n}$ et la somme de deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est $\frac{2S}{n}$.

Dans un carré multiplicatif associatif, le centre est $P^{1/n}$ et le produit de deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est $P^{2/n}$.

Soit M, un carré d'ordre impair $n \geq 3$ qui est à la fois magique associatif et multiplicatif associatif, formé de n^2 nombres > 0.

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & \frac{S}{n} & \\ & & \frac{2S}{n} - a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & & \\ & P^{1/n} & \\ & & \frac{P^{2/n}}{a} \end{pmatrix}$$

Carré magique *Carré multiplicatif*

Posons $P^{1/n} = \frac{S}{n} = k$ puis $\frac{2S}{n} - a = \frac{P^{2/n}}{a}$ $soit$ $2k - a = \frac{k^2}{a}$ d'où $a = k$. La carré M contient au moins trois fois le même nombre donc répétitions!!!

Un tel carré M ne peut donc pas être presque normal!!!

Nous demandons beaucoup à un carré lorsque nous voulons qu'il soit à la fois presque normal, magique et multiplicatif mais qu'il soit en plus associatif, c'en est trop!!! En tous les cas, pour les ordres impairs $n \geq 3$, nous aurons toujours des répétitions donc aucun presque normal.

Il existe des carrés presque normaux à la fois magiques et multiplicatifs pour les ordres 7, 8 et 9 (voir chapitre 13). Cependant, ceux-ci ne sont pas associatifs.

Pour l'instant, nous ne savons pas si un carré presque normal, à la fois magique et multiplicatif, existe pour les ordres $n = 5, 6$.

Pour les ordres $n \geq 10$, nous connaissons des carrés presque normaux à la fois magiques et multiplicatifs. Ces ordres sont :

10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ;15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; ? ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; ? ; 30 ; ? ; 32 $puis 1024$.

Conjecture :

Il existe un carré presque normal à la fois magique et multiplicatif pour tous les ordres $n \geq 7$.

Cette conjecture est basée sur les résultats ci-haut et sur l'intuition suivante : plus l'ordre du carré est grand, plus grande est la possibilité d'augmenter les contraintes dans le carré. Par exemple, d'exiger que le carré soit à la fois presque normal, magique et multiplicatif!!!

Rappel : un carré est presque normal s'il renferme que des entiers >0, tous différents deux à deux.

Enfin, mentionnons que nous allons toujours exiger qu'un carré à la fois magique et multiplicatif soit presque normal.

Annexe 10 : Diviseurs universels

Dans la section 14.3 de la partie 2, nous avons présenté un aperçu des diviseurs universels pour l'ordre 3. Nous allons ici détailler l'étude de ceux-ci. Commençons par définir ce qu'est un diviseur universel.

Définition :

Un **diviseur universel** pour les carrés semi-magiques d'ordre n **est un carré semi-magique** W d'ordre n formé de deux nombres entiers $X \geq 0$ et $Y \geq 0, X \neq Y,$ tel que toutes les cases de la diagonale principale renferment l'entier X et toutes les autres cases renferment l'entier Y.

De plus, quel que soit le carré semi-magique A, il existe un seul carré semi-magique B tel que :

$$A = BW = WB$$

Puis, quel que soit le carré magique A, il existe un seul carré magique B tel que :

$$A = BW = WB$$

Notons qu'il s'agit ici de la multiplication matricielle.

Si W est un diviseur universel alors celui-ci **divise** tous les carrés semi-magiques d'ordre $n \geq 3$ car le résultat de cette division est toujours un carré semi-magique unique.

Nous allons considérer l'ensemble SM_n des carrés semi-magiques d'ordre n. Il est évident que SM_n contient tous les carrés magiques du même ordre. Un diviseur universel W est un carré qui appartient à SM_n et qui divise tous les carrés de SM_n. Ce qui est remarquable est que le quotient $\frac{A}{W} = B$ est toujours un carré semi-magique lorsque A est semi-magique et qu'il est toujours magique lorsque A est magique!!!

Nous allons montrer que pour l'ensemble des carrés de SM_n, le carré W est un diviseur universel lorsque $\det(W) \neq 0$. Nous verrons plus loin que la définition d'un diviseur universel implique $\det(W) \neq 0$. Voyons cela de plus près en commençant par établir quelques propriétés du carré W que nous verrons à travers les différents théorèmes qui suivent. Nous allons trouver

l'inverse de W sans même connaître son déterminant!!! Nous démontrerons plus loin le résultat suivant :

Théorème 1 :

Si W est d'ordre n, alors :

$$\det(W) = (X-Y)^{n-1}(X+(n-1)Y)$$

Notre définition de W et le théorème 1 impliquent que $\det(W) \neq 0$. Donc l'inverse W^{-1} existe toujours.

Indiquons déjà que la somme magique de W, soit $X+(n-1)Y$, se note S et que S est toujours un entier > 0. Pour les ordres $n = 3, 4\, et\, 5$, nous trouvons :

$$\det(W) = X^3 - 3XY^2 + 2Y^3 = (X-Y)^2(X+2Y) = (X-Y)^2 S.$$

$$\det(W) = X^4 - 6X^2Y^2 + 8XY^3 - 3Y^4 = (X-Y)^3(X+3Y) = (X-Y)^3 S.$$

$$\det(W) = (X-Y)^4(X+4Y) = (X-Y)^4 S.$$

Pour ces valeurs de n, nous voyons que $\det(W) \neq 0$ puisque $X \neq Y\, et\, S > 0$.

Regardons W^{-1} pour les ordres 3, 4 et 5.

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{X+2Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+2Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+2Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+2Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

Nous observons que la structure de W^{-1} est la même que celle de W. Pour démontrer qu'il en sera toujours ainsi, considérons Z, un carré semi-magique d'ordre n, qui contient dans toutes les cases de sa diagonale principale, le nombre $\frac{X+(n-2)Y}{(X-Y)S}$ et dans toutes les autres cases, le nombre $\frac{-Y}{(X-Y)S}$. Ce carré Z est très bien défini puisque que $X \neq Y \; et \; S \neq 0$, ce qui est le cas avec W. De plus, il est facile de voir que **les deux nombres qui forment Z sont différents.** Cependant, ils seront toujours de signes contraires lorsque $Y \neq 0$. Si $Y = 0$, alors le nombre sur la diagonale principale sera $\frac{1}{S}$. Ainsi, W^{-1} ne répond pas à notre définition de diviseur universel.

Montrons maintenant que $W\,Z = I$. Trouvons d'abord $W\,Z$. Nous commencerons par trouver les nombres situés sur sa diagonale principale. Nous trouvons ainsi, dans la case $(i\,;i)$, le nombre :

$$X\frac{X+(n-2)Y}{(X-Y)S}+(n-1)Y\frac{-Y}{(X-Y)S}=\frac{(X-Y)S}{(X-Y)S}=1 \qquad X\neq Y\, et\, S>0$$

Puis, nous trouvons dans la case $(i\,;\,j)$ $avec\ i\neq j$, le nombre :

$$X\frac{-Y}{(X-Y)S}+Y\frac{X+(n-2)Y}{(X-Y)S}+(n-2)Y\frac{-Y}{(X-Y)S}=\frac{0}{(X-Y)S}=0 \qquad X\neq Y\, et\, S>0$$

D'où : $$WZ=I.$$

Puisque $\det(I)=1$, nous déduisons que $\det(W)\neq 0\, et\, \det(Z)\neq 0$. Donc W est inversible et son inverse W^{-1} est unique. Finalement :

$$\boxed{Z=W^{-1}.}$$

Puisque $WW^{-1}=W^{-1}W=I$, nous pouvons écrire $WZ=ZW=I$.

Théorème 2 :

Pour tout $n\geq 3$, W est inversible et son inverse W^{-1} a la même structure que W.
Quel que soit n, nous pouvons trouver W^{-1} de façon immédiate!!!
W^{-1} est semi-magique.

Nous avons donc trouvé W^{-1} sans l'aide du déterminant de W. En regardant W^{-1}, nous voyons bien que les conditions de son existence sont les mêmes que celles qui rendent non nul le déterminant de W.

Nous allons montrer que $AW=WA$ où A est un carré semi-magique de somme T. Nous montrerons que le nombre en position $(i\,;\,j)$ dans AW est le même que celui en position $(i\,;\,j)$ dans WA. Le nombre en position $(i\,;\,j)$ dans AW est le produit scalaire de la rangée i de A avec la colonne j de W, soit dans cet ordre:

$$(q_1,q_2,\ldots,q_j,\ldots,q_n).(Y,Y,\ldots,X,Y,\ldots,Y)=q_1Y+q_2Y+\ldots+q_jX+\ldots+q_nY=YT+q_j(X-Y)$$

Le nombre en position $(i\,;\,j)$ dans WA est le produit scalaire de la rangée i de W avec la colonne j de A, soit dans cet ordre:

$$(Y,Y,\ldots,X,Y,\ldots,Y).(r_1,r_2,\ldots,r_i,\ldots,r_n)=Yr_1+Yr_2+\ldots+Xr_i+\ldots+Yr_n=YT+r_i(X-Y)$$

Mais $q_j=r_i$. C'est la clé de la démonstration!!! En effet, q_j est en position $(i\,;\,j)$ dans A et r_i occupe la même position dans A.

Nous concluons que $AW=WA$ quel que soit le carré semi-magique A. Ce résultat est indépendant de la valeur de $X\ et\ Y$. D'où :

Théorème 3 :

Si A est semi-magique, alors $AW=WA$.

Il est clair que si A est magique, alors $AW=WA$.

Puisque $W\ et\ W^{-1}$ ont la même structure, alors $AW^{-1}=W^{-1}A$, que A soit semi-magique ou magique.

Nous allons montrer maintenant un autre théorème très important.

Théorème 4 :

Si A est un carré semi-magique, alors AW est semi-magique.

Si A est un carré magique, alors AW est magique.

Preuve :

Le théorème 9.1 nous assure que AW est semi -magique puisque $A\,et\,W$ le sont. Montrons que si A est magique, alors AW le sera.

Le carré AW est semi-magique de produit $T\,S$ avec $S=X+(n-1)Y$. Il reste à montrer que la somme des nombres de chaque grande diagonale de AW est $T\,S$.

Dans la case $(i\,;i)$ de la diagonale principale, nous trouvons un nombre qui est le produit scalaire de la rangée i de A avec la colonne i de W, soit dans cet ordre :

$$(q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_n).(Y, Y, \ldots, X, Y, \ldots, Y) = q_1 Y + q_2 Y + \ldots + q_i X + \ldots + q_n Y = T\,Y + q_i (X - Y)$$

La somme des nombre de la diagonale principale est donc :

$$nT\,Y + T\,(X - Y) = T\,(nY + X - Y) = T\,(X + (n-1)Y) = T\,S$$

Observons que les q_i remplissent la diagonale principale.

De façon très semblable, nous trouvons que la somme des nombre de la diagonale secondaire est aussi $T\,S$. Les nombres de la diagonale secondaire de A sont aussi en position $(i\,;i)$ si les rangées de A sont notées 1 à n de bas en haut. Cela facilite l'écriture lorsque nous identifions les nombres de la diagonale secondaire.

Le carré AW est donc magique. D'où :

Si A est magique, alors le carré $AW^{-1} = W^{-1}A$ est magique.

Soit maintenant A, la structure générale des carrés magiques d'ordre n et de somme T. Nous voulons résoudre les équations :

$$A = B_1 W \qquad \det(W) \neq 0$$
$$A = W\,B_2 \qquad \det(W) \neq 0$$

Nous trouvons :

$$B_1 = AW^{-1}$$
$$B_2 = W^{-1}A$$

D'où : $$B_1 = B_2 = B$$

Nous venons de trouver un carré magique unique $B = AW^{-1}$ tel que :

$$A = BW = WB$$

Et ce, quel que soit le carré magique A.

Également, nous venons de trouver un carré semi-magique unique $B = AW^{-1}$

tel que : $A = BW = WB$

Et ce, quel que soit le carré semi-magique A.

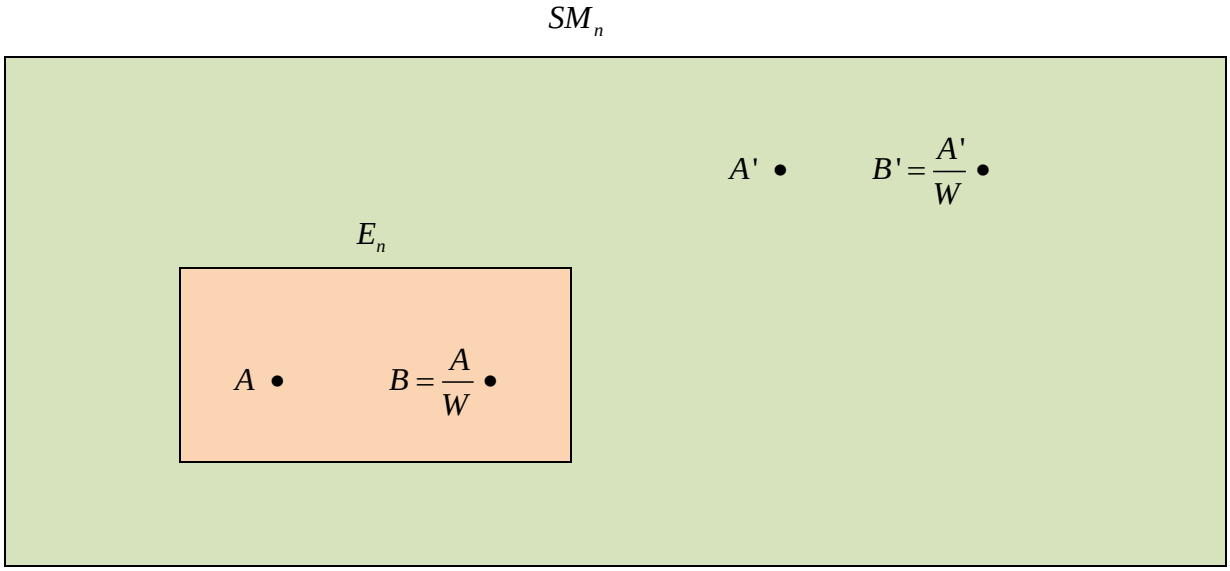
Théorème 5 :

W est un diviseur universel pour tous les carrés semi-magiques d'ordres $n \geq 3$.

Si A est semi-magique, alors B est semi-magique.

Si A est magique, alors B est magique.

Soit SM_n, l'ensemble des carrés semi-magiques d'ordre $n \geq 3$ et E_n, le sous-ensemble des carrés magiques de SM_n.



Le carré W est un diviseur universel et nous écrirons : $\frac{A}{W} = B.$

Si A est semi-magique, alors $\frac{A}{W} = B$ est semi-magique.

Si A est magique, alors $\frac{A}{W} = B$ est magique.

Maintenant avec $\det(W) \neq 0$, nous avons $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(B) \neq 0$ ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{A}{W} = B \; ou \; \frac{A}{B} = W$$

Puis avec $\det(W) \neq 0$, nous avons $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(B) = 0$ ce qui nous permet d'écrire seulement :

$$\frac{A}{W} = B$$

Puisque la somme magique de A est T et que celle de W est S, alors celle de W^{-1} est $\frac{1}{S}$ et celle de B est $\frac{T}{S}$. (Voir théorème 9.1).

Il existe une infinité de diviseurs universels d'ordre n.

Dans tous les exemples qui suivent, A sera arithmétique et pourra être construit avec les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3 ou encore les fichiers «Ordre 3», «Ordre 4», …de MATHEMATICA ou d'EXCEL ou avec les programmes correspondants dans MAPLE.

Exemple 1 :

Avec $a = 19$; $r = -2$; $t = -3$; $X = 0$; $Y = 1$, nous trouvons :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 \\ 19 & 14 & 9 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{W} = WB$$

Avec $a = 17$; $r = -3$; $t = -2$; $X = 0$; $Y = 1$, nous trouvons :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 13 & 14 \\ 17 & 12 & 7 \\ 10 & 11 & 15 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 11 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{W} = WB$$

Même si A renferme neuf entiers, il se peut que B renferme des nombres rationnels non entiers.

Exemple 2:

Avec $a=7$; $r=1$; $t=3$; $X=0$; $Y=1$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 8 \\ 7 & 11 & 15 \\ 14 & 9 & 10 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 19 & 11 & 3 \\ 5 & 15 & 13 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Nous voyons ici que B renferme neuf nombres rationnels. Puisque nous préférons construire des exemples où $A, B et W$ renferment que des entiers, alors de cet exemple, nous allons en trouver un autre où les trois carrés seront formés d'entiers.

En effet, $A=BW \Leftrightarrow 2A=2(BW)=(2B)W$ d'où :

$$\underset{2A}{\begin{pmatrix} 24 & 26 & 16 \\ 14 & 22 & 30 \\ 28 & 18 & 20 \end{pmatrix}} = \underset{2B}{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 19 & 11 & 3 \\ 5 & 15 & 13 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Avec $a=19$; $r=-2$; $t=-3$; $X=7$; $Y=2$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 \\ 19 & 14 & 9 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = \frac{1}{55}\underset{B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{55A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{55B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

Exemple 3 :

Avec $a=124; r=5; t=-30; X=7; Y=2$,
$a=114; r=5; t=-20; X=7; Y=2$, $a=119; r=10; t=-30; X=7; Y=2\, et$
$a=61; r=15; t=-10; X=7; Y=2, nous\, obtenons\, respectivement$:

$$\begin{pmatrix} 104 & 64 & 129 \\ 124 & 99 & 74 \\ 69 & 134 & 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 15 \\ 14 & 9 & 4 \\ 3 & 16 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 104 & 74 & 119 \\ 114 & 99 & 84 \\ 79 & 124 & 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 12 & 9 & 6 \\ 5 & 14 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 109 & 59 & 129 \\ 119 & 99 & 79 \\ 69 & 139 & 89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 13 & 9 & 5 \\ 3 & 17 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 81 & 41 & 76 \\ 61 & 66 & 71 \\ 56 & 91 & 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Nous venons de voir deux diviseurs universels pour les carrés magiques d'ordre 3. Enfin voyons comment un carré magique d'ordre 3 peut se décomposer en facteurs d'au moins deux façons différentes :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{B'}{\begin{pmatrix} 495 & 440 & 220 \\ 110 & 385 & 660 \\ 550 & 330 & 275 \end{pmatrix}} \underset{W'}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exemple 4 :

Avec $a=3; r=-1; t=3; X=0; Y=1$, nous obtenons :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 18 & 4 \\ 6 & 10 & 14 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix}}_{2A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -3 & 11 \\ 9 & 5 & 1 \\ -1 & 13 & 3 \end{pmatrix}}_{2B} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{W}$$

Mais $2B$ renferme des entiers négatifs!!! Nous allons les faire disparaître comme suit :

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 11 \\ 9 & 5 & 1 \\ -1 & 13 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 13 & 9 & 5 \\ 3 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 18 & 4 \\ 6 & 10 & 14 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 26 & 12 \\ 14 & 18 & 22 \\ 24 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} 16 & 26 & 12 \\ 14 & 18 & 22 \\ 24 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 13 & 9 & 5 \\ 3 & 17 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappelons ici que le produit d'un trivial par un semi-magique est toujours un trivial (voir chapitre 9).

Exemple 5 :

Nous venons de voir deux diviseurs universels W pour l'ordre 3 avec $\det(W) \neq 0$. Cette condition était nécessaire. Nous allons prendre ici un autre carré semi-magique W tel que $\det(W) \neq 0$ et voyons ce qui se passe :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 11 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Ici, A est magique et $\det(W) = 288$. Nous trouvons :

$$B=\begin{pmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{pmatrix}\frac{1}{72}\begin{pmatrix}25&-41&19\\1&7&-5\\-23&37&-11\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}7&-3&1\\-9&19&-5\\7&-11&9\end{pmatrix}$$

en observant que W^{-1} est aussi semi-magique. Le carré B est donc semi-magique avec ses deux diagonales non magiques. **Le carré B n'est pas magique!!!**

La condition $\det(W)\neq 0$ est nécessaire mais non suffisante. Ici, W n'a pas la structure particulière $\begin{pmatrix}X&Y&Y\\Y&X&Y\\Y&Y&X\end{pmatrix}$, laquelle a permis d'obtenir B magique!!!

Enfin, observons aussi que $W^{-1}A\neq AW^{-1}$ ce qui implique que les équations $A=WB\,et\,A=BW$ ne nous donnent pas la même solution B. Terminons avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}32&72&16\\24&40&56\\64&8&48\end{pmatrix}}_{8A}=\underbrace{\begin{pmatrix}7&-3&1\\-9&19&-5\\7&-11&9\end{pmatrix}}_{8B}\underbrace{\begin{pmatrix}6&14&4\\7&9&8\\11&1&12\end{pmatrix}}_{W}$$

$$\begin{pmatrix}32&72&16\\24&40&56\\64&8&48\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&12&12\\12&12&12\\12&12&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&14&4\\7&9&8\\11&1&12\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}7&-3&1\\-9&19&-5\\7&-11&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&12&12\\12&12&12\\12&12&12\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}6&14&4\\7&9&8\\11&1&12\end{pmatrix}$$

Finalement, nous trouvons :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}320&360&304\\312&328&344\\352&296&336\end{pmatrix}}_{M}=\underbrace{\begin{pmatrix}19&9&13\\3&31&7\\19&1&21\end{pmatrix}}_{N}\underbrace{\begin{pmatrix}6&14&4\\7&9&8\\11&1&12\end{pmatrix}}_{W}$$

Le carré M est magique, le carré W est semi-magique mais N n'est que semi-magique!!!

Le carré W n'est donc pas un diviseur universel puisque N n'est pas magique.

Si $A = BW$ et si le carré magique A est presque normal, alors

qu'en est-il du carré magique B ?

Celui-ci ne renfermera que des nombres rationnels et certains ou tous pourraient être des entiers.

Quel que soit A, un carré magique presque normal, nous trouverons un carré magique unique B tel que $A = WB$. Mais B peut contenir des rationnels et peut-être même des négatifs.

Alors nous pourrons toujours trouver, à partir de A, un nouveau carré magique presque normal A' et à partir de B, un nouveau carré magique unique B' tel que $A' = WB'$ où B' ne renferme que des entiers ≥ 1. (Voir les exemples 2, 4 et 5 plus haut).

Mais avons-nous des répétitions dans B' ?

Nous verrons qu' il y aura des répétitions dans B' si et seulement si il y en a dans B.

Mais avons-nous des répétitions dans B ? Nous allons montrer que s'il n'y a pas de répétition dans A, alors il n'y en a pas dans B. Nous nous dirigeons maintenant vers un résultat très important!!!

Soit $B = AW^{-1}$. L'élément b_{ij} de B est le produit scalaire de la rangée i de A avec la colonne j de W^{-1}. Nous pouvons donc écrire :

$$b_{ij} = (a_{i1}y + a_{i2}y + \ldots + a_{ij}x + \ldots + a_{in}y = yT + a_{ij}(x - y)$$

Mais :
$$x = \frac{X + (n-2)Y}{(X-Y)S} \quad et \quad y = \frac{-Y}{(X-Y)S}$$

Nous trouvons alors :

Théorème 6 :

$$b_{ij} = \frac{-YT}{(X-Y)S} + \frac{a_{ij}}{(X-Y)}$$

Nous voyons maintenant que b_{ij} dépend directement de a_{ij}. À deux entiers différents de A correspondent donc deux entiers différents de B. Nous savons maintenant que si tous les entiers de A sont différents deux à deux, alors il en sera de même pour les entiers de B.

Lorsque le carré A est presque normal, nous aimerions aussi que B le soit!!! Quel serait alors $A et W$?

Le théorème 6 nous conduit à une deuxième façon de construire le carré B et nous montre le lien important entre $A et B$.

Théorème 7 : Théorème fondamental des diviseurs universels :

Nous avons $b_{ij} = \dfrac{-YT}{(X-Y)S} + \dfrac{a_{ij}}{(X-Y)}$ qui implique $\boxed{B = \dfrac{1}{X-Y}A + \dfrac{-YT}{(X-Y)S}.}$

Ainsi, $A et B$ possèdent les mêmes propriétés!!!

Par exemple, avec $n = 4$, si A est un Dürer associatif, alors B est un Dürer associatif. Si le carré A est arithmétique, alors il en est de même du carré B.

Voici les deux façons de construire B :

$$B = W^{-1}A$$

$$B = \frac{1}{X-Y}A + \frac{-YT}{(X-Y)S}$$

Cette deuxième façon de construire B nous montre le lien entre $A et\ B$. Cependant, si A est presque normal, il est possible que B ne le soit pas. Nous devrons «réparer» B et donc trouver un nouveau A.

Pouvons-nous trouver un carré magique A presque normal afin que $\frac{A}{W} = B$ soit presque normal et ce, d'une façon très simple? La réponse est oui. Nous allons construire A en se donnant B, un carré magique presque normal (ou même normal) de somme T et un diviseur universel W. Montrons qu'alors $A = BW$ est magique presque normal.

$$a_{ij} = (b_{i1}Y + b_{i2}Y + \ldots + b_{ij}X + \ldots + b_{in}Y = TY + b_{ij}(X - Y) = (T - b_{ij})Y + b_{ij}X$$

Dans notre carré B, il est évident que tous ses entiers b_{ij} vérifient $b_{ij} < T$. Donc, tous les a_{ij} sont des entiers différents deux à deux (selon l'expression en rouge) et ils sont tous ≥ 1 (selon l'expression en bleu). Le carré A est magique puisque B l'est. Nous avons donc le résultat :

Théorème 8 :

Soient donnés le carré magique presque normal B et un diviseur universel W.

Si $A = BW$, alors A est magique presque normal.

Nous savons donc qu'il existe une infinité de carrés magiques presque normaux A tels que $\frac{A}{W}$ soit un carré magique presque normal.

Exemple 6 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 290 & 304 & 278 & 292 & 266 \\ 264 & 288 & 302 & 276 & 300 \\ 298 & 262 & 286 & 310 & 274 \\ 272 & 296 & 270 & 284 & 308 \\ 306 & 280 & 294 & 268 & 282 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 22 & 9 & 16 & 3 \\ 2 & 14 & 21 & 8 & 20 \\ 19 & 1 & 13 & 25 & 7 \\ 6 & 18 & 5 & 12 & 24 \\ 23 & 10 & 17 & 4 & 11 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{W}$$

Ici, B est normal donc A est presque normal.

Exemple 7 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 112 & 136 & 129 & 135 & 123 & 142 \\ 146 & 119 & 134 & 125 & 137 & 116 \\ 145 & 121 & 126 & 132 & 139 & 114 \\ 144 & 138 & 127 & 133 & 120 & 115 \\ 113 & 122 & 131 & 128 & 140 & 143 \\ 117 & 141 & 130 & 124 & 118 & 147 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 25 & 18 & 24 & 12 & 31 \\ 35 & 8 & 23 & 14 & 26 & 5 \\ 34 & 10 & 15 & 21 & 28 & 3 \\ 33 & 27 & 16 & 22 & 9 & 4 \\ 2 & 11 & 20 & 17 & 29 & 32 \\ 6 & 30 & 19 & 13 & 7 & 36 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{W}$$

Ici, B est normal donc A est presque normal.

Théorème 9 :

Si W_1 *et* W_2 sont des diviseurs universels, alors W_1W_2 *et* $k\,W_1$ sont des diviseurs universels où $k \geq 1$ est un entier.

Preuve :

Le carré W_1 est défini avec X *et* Y et le carré W_2, avec R *et* V. Ces quatre nombres sont des entiers ≥ 0 avec $X \neq Y$ *et* $R \neq V$.

Dans W_1W_2, nous trouvons en position $(i;i)$ l'entier $X\,R+(n-1)YV$. C'est donc l'entier qui se trouve dans toutes les cases de la diagonale principale.

En position $(i;j)$, $i \neq j$, nous trouvons l'entier $X\,V+Y\,R+(n-2)YV$. C'est donc l'entier qui se trouve dans toutes les autres cases.

Ces deux entiers sont ≥ 0 et sont différents. En effet,

$$X\,R+(n-1)YV = X\,V+Y\,R+(n-2)YV \Rightarrow (X-Y)R=(X-Y)V$$

d'où la contradiction $R=V$. Ainsi, dans W_1W_2, les deux entiers sont différents et ≥ 0. Le carré W_1W_2 est donc un diviseur universel.

Puisque W_1 est semi-magique, le théorème 3 nous permet d'écrire $W_1W_2 = W_2W_1$.

Quant à $k\,W_1$, c'est un diviseur universel de toute évidence!!!

Si A est un carré magique d'ordre n et si $W_1, W_2, \ldots, W_k$ sont des diviseurs universels, alors :

$A = W_1W_2 \ldots W_k B_1 \; et \; A = W_i^m B_2$ où $B_1 \; et \; B_2$ sont des carrés magiques, $1 \le i \le k$ et m, un entier

Théorème 10 :

Si A est un carré magique d'ordre n et si $W_1, W_2, \ldots, W_k$ sont des diviseurs universels, alors :

$A = W_1W_2 \ldots W_k B_1 = W_i^m B_2$ où $B_1 \; et \; B_2$ sont des carrés magiques, $1 \le i \le k$ et m, un entier ≥ 1.

Terminons avec la preuve du théorème 1.

Théorème 1 :

Si W est d'ordre n, alors :

$$\det(W) = (X - Y)^{n-1}(X + (n-1)Y)$$

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur l'ordre $n \ge 3$. Illustrons les deux carrés que nous allons rencontrer, par exemple, pour l'ordre $n = 5$.

X	Y	Y	Y	Y
Y	X	Y	Y	Y
Y	Y	X	Y	Y
Y	Y	Y	X	Y
Y	Y	Y	Y	X

W_5

Y	Y	Y	Y	Y
Y	X	Y	Y	Y
Y	Y	X	Y	Y
Y	Y	Y	X	Y
Y	Y	Y	Y	X

Z_5

Nous noterons W_n le diviseur universel W d'ordre n. Voyons maintenant les déterminants suivants :

$$\det(W_3) = (X-Y)^2(X+2Y) \qquad \det(Z_3) = (X-Y)^2 Y$$
$$\det(W_4) = (X-Y)^3(X+3Y) \qquad \det(Z_4) = (X-Y)^3 Y$$
$$\det(W_5) = (X-Y)^4(X+4Y) \qquad \det(Z_5) = (X-Y)^4 Y$$

Supposons que les égalités $\det(W_n) = (X-Y)^{n-1}(X+(n-1)Y)$ et $\det(Z_n) = (X-Y)^{n-1}Y$ soient vraies pour $n = 3, 4, 5, \ldots, k-1$. Alors nous devons établir que les deux égalités sont vraies pour $n = k$. Nous savons déjà qu'elles sont vraies pour $n = 3, 4 \, et \, 5$.

Nous allons calculer $\det(W_k)$ en développant selon la première rangée de W_k.

$$\det(W_k) = X(-1)^2 \det(W_{k-1}) + Y(-1)^3 \det(Z_{k-1}) + Y(-1)^4 \det(M_3) + Y(-1)^5 \det(M_4) + \ldots$$

où M_3 est le mineur relativement au Y en position $(1;3)$, M_4 est le mineur relativement au Y en position $(1;4)$, et ainsi de suite.

Le passage de Z_{k-1} à M_3 se fait en permutant la rangée qui ne renferme que des Y dans Z_{k-1} avec la rangée juste en dessous. Le déterminant de M_3 est celui de Z_{k-1} changé de signe. Cependant, le cofacteur reste le même. Il en sera de même pour le passage de M_i à M_{i+1}. En fait, tous les cofacteurs seront les mêmes. Nous avons alors :

$$\det(W_k) = X(X-Y)^{k-2}(X+(k-2)Y) + (-Y)(X-Y)^{k-2}Y(k-1) = (X-Y)^{k-1}(X+(k-1)Y).$$

Cependant, pour continuer, il nous faut trouver $\det(Z_k)$. De façon semblable, nous trouvons :

$$\det(Z_k) = Y(X-Y)^{k-2}(X+(k-2)Y) + (-Y)(X-Y)^{k-2}Y(k-1) = (X-Y)^{k-1}Y.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Nous venons de créer une classe magnifique de carrés semi-magiques appelés **diviseurs universels.**

Il y en a une infinité.

Tous divisent tous les carrés semi-magiques pour donner un carré semi-magique et tous les carrés magiques pour donner un carré magique.

Il y a une infinité de carrés magiques presque normaux tels que la division par un diviseur universel donne un carré magique presque normal!!!

Un carré semi-magique est un diviseur universel s'il est conforme avec la définition donnée.

Nous pourrions généraliser cette définition de diviseur universel mais à quoi bon puisque nous voulons dans nos carrés que des entiers non négatifs. Quant à nos carrés magiques, nous les voulons au moins presque normaux.

Quelques remarques :

La définition de W implique que $\det(W) \neq 0$ pour tout W.

Dans l'exemple 5, W est un diviseur à gauche de A et un diviseur à droite de A mais n'est pas un diviseur de A.

En effet, nous avons $A = BW = WB'$ avec $B \neq B'$. W est un diviseur de A si et seulement si $B = B'$. Nous prenons la notation $\frac{A}{W}$ seulement si W est un diviseur de A.

Problèmes :

1) Soit M, un carré magique quelconque d'ordre 3.

a) Pourquoi M^2 est-il un bon candidat pour devenir un diviseur universel?

b) Sous quelles conditions M^2 sera-t-il un diviseur universel?

2) Soient A et B, deux carrés magiques quelconques d'ordre 3. Montrez que les carrés AB et BA possèdent un centre de symétrie.

3) Pour $n = 4$ $et\, n = 5$, combien pouvez-vous trouver de carrés presque normaux A tels que

$A = BW$ où B est normal et W, un diviseur universel fixe?

4) $W_1 + W_2$ est-il toujours un diviseur universel?

Annexe 11 : Carrés magiques avec k nombres premiers

Pouvons-nous construire un carré magique presque normal d'ordre 7 qui renferme exactement cinq nombres premiers? La réponse est oui et la construction est toute simple :

a) Nous construisons d'abord un carré magique normal M d'ordre 7.
b) Puis nous ajoutons à chaque entier du carré, le nombre premier 491.
c) Le carré magique ainsi obtenu renferme exactement cinq nombres premiers qui sont 499, 503, 509, 521 et 523. De plus, celui-ci est formé de 49 entiers consécutifs.

Nous notons $p(M)$, le nombre de nombres premiers dans le carré magique normal M. Par exemple, si M est normal d'ordre 7, alors $p(M)=15$. Cela est équivalent au nombre de nombres premiers contenus dans la suite des entiers consécutifs allant de 1 à 49.

Aussi, nous notons $g_n(A)$, le nombre de nombres premiers contenus dans le carré magique presque normal A d'ordre n. Par exemple, nous avons $g_7(M+17)=11$.

Enfin, si nous ajoutons à tous les nombres du carré magique A, le nombre p, alors le nouveau carré magique ainsi obtenu se note $A+p$. Par exemple, $M+17$ est le carré magique M auquel nous avons ajouté le nombre 17 à tous les nombres de M.

Pour construire un carré magique A d'ordre $n \geq 3$ qui renferme k nombres premiers avec $0 \leq k \leq p(M)$, il suffit de trouver $M+p$ où p est un nombre premier à déterminer et M, un carré normal. **Ainsi nous obtiendrons un carré magique formé de n^2 nombres entiers consécutifs**. Nous allons présenter une démonstration de ce résultat mais avant, voyons les cas suivants :

Ordre 3

$g_3(M)=4=p(M)$
$g_3(M+3)=3$
$g_3(M+7)=2$
$g_3(M+19)=1$
$g_3(M+113)=0$

Ordre 4

$g_4(M)=6=p(M)$
$g_4(M+1)=7=p(M)+1$
$g_4(M+5)=5$
$g_4(M+11)=4$
$g_4(M+19)=3$
$g_4(M+79)=2$
$g_4(M+109)=1$
$g_4(M+523)=0$

Ordre 5

$g_5(M)=9=p(M)$
$g_5(M+2)=8$
$g_5(M+3)=7$
$g_5(M+11)=6$
$g_5(M+31)=5$
$g_5(M+71)=4$
$g_5(M+109)=3$
$g_5(M+197)=2$
$g_5(M+1123)=1$
$g_5(M+1327)=0$

Ordre 6

$g_6(M) = 11 = p(M)$

$g_6(M+1) = 12 = p(M)+1$

$g_6(M+3) = 10$

$g_6(M+13) = 9$

$g_6(M+19) = 8$

$g_6(M+59) = 7$

$g_6(M+89) = 6$

$g_6(M+109) = 5$

$g_6(M+293) = 4$

$g_6(M+503) = 3$

$g_6(M+1237) = 2$

$g_6(M+1321) = 1$

$g_6(M+15683) = 0$

Ordre 7

$g_7(M) = 15 = p(M)$

$g_7(M+2) = 14$

$g_7(M+3) = 13$

$g_7(M+7) = 12$

$g_7(M+17) = 11$

$g_7(M+43) = 10$

$g_7(M+47) = 9$

$g_7(M+107) = 8$

$g_7(M+113) = 7$

$g_7(M+281) = 6$

$g_7(M+491) = 5$

$g_7(M+887) = 4$

$g_7(M+1307) = 3$

$g_7(M+2153) = 2$

$g_7(M+9551) = 1$

$g_7(M+19609) = 0$

Ordre 8

$g_8(M) = 18 = p(M)$

$g_8(M+2) = 17$

$g_8(M+5) = 16$

$g_8(M+13) = 15$

$g_8(M+23) = 14$

$g_8(M+31) = 13$

$g_8(M+61) = 12$

$g_8(M+83) = 11$

$g_8(M+113) = 10$

$g_8(M+241) = 9$

$g_8(M+281) = 8$

$g_8(M+491) = 7$

$g_8(M+1301) = 6$

$g_8(M+1307) = 5$

$g_8(M+1327) = 4$

$g_8(M+5573) = 3$

$g_8(M+18593) = 2$

$g_8(M+19609) = 1$

$g_8(M+31397) = 0$

Ordre 9

$g_9(M) = 22 = p(M)$

$g_9(M+3) = 21$

$g_9(M+5) = 20$

$g_9(M+7) = 19$

$g_9(M+13) = 18$

$g_9(M+19) = 17$

$g_9(M+43) = 16$

$g_9(M+67) = 15$

$g_9(M+107) = 14$

$g_9(M+109) = 13$

$g_9(M+263) = 12$

$g_9(M+283) = 11$

$g_9(M+463) = 10$

$g_9(M+883) = 9$

$g_9(M+1129) = 8$

$g_9(M+1307) = 7$

$g_9(M+1321) = 6$

$g_9(M+1327) = 5$

$g_9(M+7351) = 4$

$g_9(M+17209) = 3$

$g_9(M+31393) = 2$

$g_9(M+38461) = 1$

$g_9(M+155921) = 0$

Pour les ordres de 10 à 13, nous allons utiliser la notation suivante par économie d'espace : nous écrirons $(10\ ;19\ ;\ 22)$ pour indiquer que le carré est d'ordre 10, que nous avons $M+19$ et que ce dernier renferme 22 nombres premiers.

Ordre 10

(10 ; 0 ; 25) (10 ; 1 ; 26) (10 ; 5 ; 24) (10 ; 17 ; 23) (10 ; 19 ; 22) (10 ; 23 ; 21) (10 ; 43 ; 20)
(10 ; 47 ; 19) (10 ; 89 ; 18) (10 ; 109 ; 17) (10 ; 199 ; 16) (10 ; 241 ; 15) (10 ; 317 ; 14) (10 ; 461 ; 13)
(10 ; 467 ; 12) (10 ; 1109 ; 11) (10 ; 1297 ; 10) (10 ; 1303 ; 9) (10 ; 1307 ; 8) (10 ; 1321 ; 7)
(10 ; 5903 ; 6) (10 ; 18553 ; 5) (10 ; 18797 ; 4) (10 ; 35603 ; 3) (10 ; 35617 ; 2) (10 ; 155893 ; 1)
(10 ; 370261 ; 0)

Ordre 11

(11 ; 0 ; 30) (11 ; 2 : 29) (11 ; 3 ; 28) (11 ; 5 ; 27) (11 ; 13 ; 26) (11 ; 23 ; 25) (11 ; 41 ; 24) (11 ; 67 ; 23)
(11 ; 89 ; 22) (11 ; 101 ; 21) (11 ; 181 ; 20) (11 ; 241 ; 19) (11 ; 283 ; 18) (11 ; 433 ; 17) (11 ; 463 : 16)
(11 ; 683 ; 15) (11 ; 887 ; 14) (11 ; 1291 ; 13) (11 ; 1297 ; 12) (11 ; 1301 ; 11) (11 ; 3041 ; 10) (11 ; 5879 ; 9)
(11 ; 5881 ; 8) (11 ; 18539 ; 7) (11 ; 23371 ; 6) (11 ; 35593 ; 5) (11 ; 35597 ; 4) (11 ; 35603 ; 3)
(11 ; 204173 ; 2) (11 ; 370247 ; 1) (11 ; 1357201 ; 0)

Ordre 12

(12 ; 0 ; 34) (12 ; 2 ; 33) (12 ; 3 ; 32) (12 ; 11 ; 31) (12 ; 17 ; 30) (12 ; 31 ; 29) (12 ; 43 ; 28)
(12 ; 71 ; 27) (12 ; 73 ; 26) (12 ; 109 ; 25) (12, 181 ; 24) (12 ; 197 ; 23) (12 ; 199 ; 22) (12 ; 283 ; 21)
(12 ; 467 ; 20) (12 ; 659 ; 19) (12 ; 661 ; 18) (12 ; 1123 ; 17) (12 ; 1129 ; 16) (12 ; 2089 ; 15)
(12 ; 2393 ; 14) (12 ; 4273 ; 13) (12 ; 5233 ; 12) (12 ; 5879 ; 11) (12 ; 5881 ; 10) (12 ; 18523 ; 9)
(12 ; 23371 ; 8) (12 ; 33967 ; 7) (12 ; 35597 ; 6) (12 ; 66191 ; 5) (12 ; 69499 ; 4) (12 ; 268291 ; 3)
(12 ; 396719 ; 2) (12 ; 1561891 ; 1) (12 ; 2010733 ; 0)

Ordre 13

(13 ; 0 ; 39) (13 ; 2 ; 38) (13 ; 3 ;37) (13 ; 7 ; 36) (13 ; 17 ; 35) (13 ; 19 ; 34) (13 ; 41 ; 33) (13 ; 47 ; 32)
(13 ; 53 ; 31) (13 ; 107 ; 30) (13 ; 137 ; 29) (13 ; 167 ; 28) (13 ; 197 ; 27) (13 ; 283 ; 26) (13 ; 383 ; 25)
(13 ; 467 ; 24) (13 ; 647 ; 23) (13 ; 683 ; 22) (13 ; 1097 ; 21) (13 ; 1103 ; 20) (13 ; 1237 ; 19)
(13 ; 1801 ; 18) (13; 2417 ; 17) (13 ; 2447 ; 16) (13 ; 2477 ; 15) (13 ; 5867 ; 14) (13 ; 6373 ; 13)
(13 ; 11503 ; 12) (13 ; 18541 ; 11) (13 ; 18803 ; 10) (13 ; 33941 ; 9) (13 ; 35617 ; 8) (13 ; 69497 ; 7)
(13 ; 69499 ; 6) (13 ; 175081 ; 5) (13 ; 250501 ; 4) (13 ; 749471 ; 3) (13 ; 1320437 ; 2)

Pour l'ordre 13, le tableau est presque complet. Cela est dû à un manque de mémoire!!!

Démontrons maintenant les théorèmes 14.17 et 14.18 :

Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous pouvons construire un carré magique presque normal qui contiendra n^2 entiers consécutifs parmi lesquels il y aura exactement k nombres premiers et ce, pour toutes les valeurs de k qui vérifient :

$$0 \leq k \leq p(M)$$

Ce carré aura la forme $M + p$ avec M , un carré normal et p, un nombre premier.

Pour construire un carré magique presque normal formé de n^2 nombres entiers consécutifs, il suffit de considérer les suites suivantes :

1) Suite 1 : elle contient tous les entiers de $1 \; à \; n^2$. Suite 2 : elle contient tous les entiers de $2 \; à \; n^2 + 1$. De façon générale, la suite r contient tous les entiers de $r \; à \; n^2 + r - 1$.
2) La suite r est obtenue par un déplacement de ($r - 1$) unités vers la droite, de la suite 1.
3) Nous savons construire un carré magique avec une suite de n^2 nombres entiers consécutifs.
4) Il existe une suite J d'entiers consécutifs tous ≥ 1, **aussi longue que nous voulons**, laquelle ne renferme aucun nombre premier. (Voir (*) dans 14.13 et le problème 61 de 14.18).
5) Nous allons considérer ici toutes les suites de n^2 entiers consécutifs, tous ≥ 1, avec $n \geq 3$.
6) À chaque déplacement vers la droite, la suite peut perdre un seul nombre premier ou elle peut gagner un seul nombre premier ou son nombre de nombres premiers reste inchangé.
7) Puisqu'il y aura un déplacement qui conduira obligatoirement à une suite incluse dans J, alors nous sommes certains qu'il y aura au moins une suite qui contiendra k nombres premiers et ce, pour toutes les valeurs de k qui vérifient $0 \leq k \leq p(M)$.
8)

$p,\ p+1,\ p+2,\ p+3, \ldots,\ p+n^2-1$	q

a) En vert, nous avons une suite de n^2 entiers consécutifs ≥ 1 qui contient exactement k nombres premiers. C'est la suite (1).
b) Nous allons la déplacer d'une unité vers la droite pour obtenir la suite (2) :

p	$p+1,\ p+2,\ p+3,\ldots,\ p+n^2-1,\ q$

c) Si p *et* q sont premiers, alors la suite (2) contient k nombres premiers.
d) Si p *et* q ne sont pas premiers, alors la suite (2) contient k nombres premiers.
e) Si p est premier et q est non premier, alors la suite (2) contient $k-1$ nombres premiers.
f) Si p n'est pas premier et si q est premier, alors la suite (2) contient $k+1$ nombres premiers.
g) Ainsi, nous voyons que la suite (2) qui contient $k-1$ nombres premiers est précédée par le nombre premier p. De plus, il est clair que $q = p + n^2$.
h) Les nombres de la suite (2) forment donc un carré magique de la forme $M + p$ où M est un carré magique normal et p, un nombre premier.

Nous venons de montrer que dès que deux suites consécutives $(1)\ et\ (2)$ formées de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 1 renferment respectivement $k\ et\ k-1$ nombres premiers, alors la suite (2) est précédée par un nombre premier.

Voir le problème 6 à la fin de ce fichier.

Il est possible que $g_n(M+1) = p(M)+1$; pour $3 \leq n \leq 13$, cela se produit avec $n = 4, 6\ et\ 10$. Par exemple, avec $n = 10$, $p(M) = 25\ et\ g_{10}(M+1) = 26$. Si A est un carré magique presque normal qui renferme cent entiers consécutifs, alors $g_{10}(A) \leq 50$. Ainsi, nous savons :

a) Qu'un tel carré ne peut pas contenir 51 nombres premiers ou plus.
b) Qu'un tel carré peut contenir de 0 à 26 nombres premiers.
c) Que pour obtenir, par exemple, un tel carré avec trois nombres premiers, il suffit de faire $M + 35603$.

Toujours avec $n = 10$, nous savons que le nombre maximum de nombres premiers est 50.
Pouvons-nous améliorer cette borne supérieure? La réponse est oui.

Pour établir la borne 50, nous construisons cinquante couples avec les cent entiers consécutifs (les deux premiers, les deux suivants, etc.). Dans chaque couple, nous trouverons au plus un nombre premier sauf peut-être dans le couple (2 ; 3) mais avec $n \geq 3$, nous sommes certains

d'avoir le couple (8 ; 9) si nous avons (2 ; 3); cela nous assure que nous aurons au maximum cinquante nombres premiers.

Trouvons une meilleure borne supérieure pour notre carré magique presque normal d'ordre n formé de n^2 entiers consécutifs. Appelons E, la partie entière de $\frac{n^2}{6}$. Nous aurons donc E groupes de six entiers consécutifs. Si le plus petit entier est ≥ 4, alors chaque groupe renfermera deux nombres premiers au plus. En effet, si nous avions trois nombres premiers, nous aurions alors un triplet de nombres premiers jumeaux ce qui est impossible car il n'en existe qu'un seul soit (3 ; 5 ; 7).

Voyons maintenant les trois cas suivants :

Cas 1 : le plus petit entier est ≥ 4

Le nombre maximum de nombres premiers est déterminé en fonction du reste obtenu en divisant n^2 par 6.

Reste = R; nombre maximum de nombres premiers = A

R	A
0	$2E$
1	$2E+1$
2	$2E+1$
3	$2E+2$
4	$2E+2$
5	$2E+2$

Par exemple :

Un carré A presque normal d'ordre 10 formé de cent entiers consécutifs dont le plus petit est 5 possède au maximum 34 nombres premiers. En effet, $100/6$ donne $E=16$ avec 4 comme reste. Le tableau ci-haut nous donne $2E+2=34$. Plus précisément, il en possède 25. Notez que $g_{10}(M+4) = 25 = g_{10}(M)$.

Nous avions $g_{10}(A) \leq 50$ mais maintenant, nous avons $g_{10}(A) \leq 34$, une bien meilleure borne supérieure!!

Cas 2 : le plus petit entier est 1 ou 3

Les six premiers entiers nous donnent trois nombres premiers d'où le tableau :

R	A
0	$2E+1$
1	$2E+2$
2	$2E+2$
3	$2E+3$
4	$2E+3$
5	$2E+3$

Cas 3 : le plus petit entier est 2

Dans ce cas, les six premiers entiers nous donnent quatre nombres premiers d'où le tableau :

R	A
0	$2E+2$
1	$2E+3$
2	$2E+3$
3	$2E+4$
4	$2E+4$
5	$2E+4$

Donc si nous avons un carré magique d'ordre $n \geq 3$, presque normal et formé de n^2 entiers consécutifs, alors $2E+4$ est le nombre maximum de nombres premiers que peut contenir notre carré magique (borne supérieure). De plus, la connaissance du reste de la division de n^2 par 6 permet d'améliorer cette borne supérieure.

Par contre, avec une information supplémentaire, soit le plus petit entier du carré, cela nous permet également d'améliorer la borne supérieure.

Exemple 1 :

Le carré magique est d'ordre 8, il est presque normal et renferme 64 entiers consécutifs dont le plus petit est 7. Nous trouvons $E=10$ avec 4 pour reste. Le premier tableau ci-haut nous indique que le nombre maximum de nombres premiers dans notre carré est 22.

a) Notre carré magique est $M+6$.
b) Il renferme 16 nombres premiers.
c) $g_8(M+5)=16=g_8(M+6)$.

d) Si vous nous dites que $g_8(M+5)=16$ et que c'est la première fois que vous trouvez 16, alors nous pouvons affirmer que $g_8(M+4)=17.$ (Voir ordre 8, page 3 ci-haut).

Exemple 2 :

Un carré magique normal d'ordre 60 possède au maximum 1201 nombres premiers, selon le deuxième tableau où $E=600$ avec 0 comme reste.

Pouvons-nous encore faire mieux? La réponse est oui!!!

Au lieu de prendre des groupes de six entiers consécutifs, nous allons prendre des groupes de trente. Puisque le carré magique est au moins presque normal, le plus petit entier sera $\geq 1.$
L'idée ici est la suivante : les entiers d'un groupe de trente entiers consécutifs ont la forme :

(1) $30k+1$; $30k+2$; $30k+3$; $30k+4$; $30k+5$; $30k+6$; ... ; $30k+29$; $30k+30$

Un entier de la forme $30k+3$ sera un nombre premier si et seulement si $k=0.$ Par contre, un entier de la forme $30k+7$ peut être premier même si $k\neq 0.$ Nous dirons que $30k+7$ est un **candidat** (peut donner un nombre premier si $k\neq 0$). Dans la liste (1), il est facile de vérifier que nous avons seulement huit candidats qui sont :

$30k+1$; $30k+7$; $30k+11$; $30k+13$; $30k+17$; $30k+19$; $30k+23$; $30k+29$

Seulement $30k+2$, $30k+3 et 30k+5$ sont premiers si et seulement si $k=0.$

Voyons les cas suivants :

Cas 1 : le plus petit entier est ≥ 6

Les groupes de trente entiers consécutifs renferment au plus huit nombres premiers. Appelons E, la partie entière de $\frac{n^2}{30}$ et R, le reste de la division de $n^2 \, par \, 30.$ Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E.$ Les R entiers consécutifs qui restent donnent au plus huit autres nombres premiers. Nous avons déjà une première borne supérieure :

$$8E+8$$

Dans un cas particulier, il est possible d'améliorer la borne supérieure. Par exemple, R = 1 lorsque $n=19.$ Dans ce cas, la borne supérieure est :

$$8E+1=97 \text{ au lieu de } 104.$$

Cas 2 : le plus petit entier est 5

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+1$ puisque le premier groupe de trente renferme neuf nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+9$$

Cas 3 : le plus petit entier est 4

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+1$ puisque le premier groupe de trente renferme neuf nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+9$$

Cas 4 : le plus petit entier est 3

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+2$ puisque le premier groupe de trente renferme dix nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+10$$

Cas 5 : le plus petit entier est 2

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+3$ puisque le premier groupe de trente renferme onze nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+11$$

Cas 6 : le plus petit entier est 1

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+2$ car le premier groupe de trente renferme dix nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+10$$

La borne supérieure peut être améliorée comme dans le cas 1.

Exemple 3 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique normal d'ordre 12?

Nous avons $144/30 = 4 \ reste \ 24$. Nous sommes dans le cas 6 d'où le nombre maximum de nombres premiers est donné par $8E+10$ soit $8\times4+10 = 42$. Le nombre exact est 34.

Exemple 4 :

Comparez les trois procédés dans l'exemple 3.

$144/2 = 72$
$144/6 = 24 \ et \ 2\times24+1 = 49$
$144/30 = 4 \ avec \ reste \ 24 \ et \ 8\times4+10 = 42$

Exemple 5 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique normal d'ordre 60?

Nous sommes dans le cas 6 et $3600/30 = 120$ avec aucun reste. C'est pourquoi le nombre maximum de nombres premiers est $8E+2$ soit $8\times120 + 2 = 962$. Notez que $8E+10$ donnerait 972. Le nombre exact est 503. Comparons maintenant les trois procédés :

$3600/2 = 1800$
$3600/6 = 600 \ et \ 2E+1 \ donne \ 2\times600+1 = 1201$
$3600/30 = 120 \ et \ 8E+2 = 8\times120+2 = 962$

Exemple 6 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique normal d'ordre 11?

Nous somme dans le cas 6 et $121/30 = 4$ avec 1 comme reste. Le nombre maximum de nombres premiers est donc $8\times4 + 2 = 34$ pour les quatre premiers groupes de trente. Puisque R = 1, la borne supérieure devient 35. Le nombre exact est 30. Les trois méthodes nous donnent : $61, \ 42 \ et \ 35$.

Exemple 7 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique d'ordre 20 formé de 400 entiers consécutifs dont le plus petit est 2?

Nous sommes dans le cas 5 et $400/30 = 13$ avec 10 comme reste. Le nombre maximum de nombres premiers est $8E+3 = 8\times 13 + 3 = 107$ pour les treize premiers groupes de trente. Les 10 entiers qui restent donnent au maximum 4 nombres premiers. La borne supérieure est donc $107+4=111.$ Le nombre exact est $79.$ Les trois méthodes nous donnent : $200,136,111.$

Relativement aux groupes de trente entiers consécutifs, dans tous les cas, la première borne supérieure est $8E+11.$

Nous allons maintenant présenter une toute nouvelle conjecture qui sera justifiée par un grand nombre de résultats expérimentaux. La voici :

Conjecture 1 :

Soit W un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ qui contient n^2 entiers consécutifs. Le nombre maximum de nombres premiers contenus dans W est $p(M)$ ou $p(M)+1.$

Avec MATHEMATICA, nous avons fabriqué un programme appelé **«nombre de premiers»** qui nous permet de trouver le nombre de nombres premiers dans la suite des entiers consécutifs allant de $1 \text{ à } n^2$, puis de $2 \text{ à } n^2+1,\ 3 \text{ à } n^2+2$, etc. Autrement dit, nous déplaçons la première suite d'une unité vers la droite, puis la suite ainsi obtenue est déplacée d'une unité vers la droite et ainsi de suite. Pour chaque suite de $1 \text{ à } n^2,\ n \geq 3,$ nous avons effectué 600 000 déplacements dont le premier est de zéro unité et tous les autres, d'une unité vers la droite. Cela permet de construire 600 000 carrés magiques dont le premier est normal.

Le programme compte le nombre de nombres premiers dans chaque suite, donc le nombre de nombres premiers dans chaque carré magique qui correspond à chaque suite. Vous trouverez ce programme sur le CD. Le problème 8 vous demande de démontrer que la conjecture est vraie pour $n = 3,4,5,6,7\, et\, 8.$

Nous rappelons qu'il est toujours possible et facile de construire un carré magique d'ordre n avec n^2 entiers consécutifs.

Le tableau T_1 suivant montre, pour 600 000 carrés magiques observés pour chaque valeur de n :

Colonne 1 (à gauche), l'ordre du carré. Nous avons les ordres de 3 à 30.

Colonne 2, le nombre $p(M)$ de nombres premiers contenus dans M et entre parenthèses, le nombre de carrés qui possèdent $p(M)$ nombres premiers, parmi les 600 000 carrés magiques observés. Rappelons que M est un carré magique normal et que $W = M + k$ où k est un entier qui vérifie $0 \leq k \leq 599\ 999$.

Colonne 3, le nombre $p(M)+1$ de nombres premiers contenus dans $M + 1$ et entre parenthèses, le nombre de carrés qui possèdent $p(M)+1$ nombres premiers, parmi les 600 000 carrés magiques observés.

Colonne 4, le nombre maximum de nombres premiers que possèdent tous les carrés magiques W.

Ainsi, pour $n = 12$, les 600 000 carrés magiques possèdent au maximum 34 nombres premiers. Nous voyons qu'il en existe seulement deux qui possèdent 34 nombres premiers soit le normal $M\ et\ M+1$.

Pour $n = 26$, les 600 000 carrés magiques possèdent au maximum 123 nombres premiers. Seul $M+1$ en possède 123 et deux seulement en possèdent 122 soit le normal $M\ et\ M+2$.

Le tableau T_2 est le même mais seulement pour quelques ordres supérieurs à 30.

Enfin, le programme «nombre de premiers» sur le CD permet de savoir combien de carrés magiques parmi les 600 000 possèdent λ nombres premiers avec $0 \leq \lambda \leq p(M)\ ou\ p(M)+1$.

Par exemple, avec $n = 4$, nous obtenons :

$$\{121\ 440\ ;\ 242\ 561\ ;\ 173\ 490\ ;\ 54\ 438\ ;\ 7698\ ;\ 368\ ;\ 4\ ;\ 1\}$$

ce qui signifie que 121 440 carrés magiques parmi les 600 000 renferment aucun nombre premier, 242 561 renferment un seul nombre premier, 173 490 renferment deux nombres premiers, 54 438 renferment trois nombres premiers, 7698 renferment quatre nombres premiers, 368 renferment cinq nombres premiers et enfin, quatre renferment $p(M) = 6$ nombres premiers et un seul renferme $p(M)+1 = 7$ nombres premiers (voir le tableau T_1, $n = 4$).

Notons que dans le programme «nombre de premiers», nous pouvons remplacer 600 000 par l'entier ≥ 2 que nous voulons.

n	$p(M)$	$p(M)+1$	Borne Sup
3	4(120)	5(0)	4
4	6(4)	7(1)	7
5	9(2)	10(0)	9
6	11(2)	12(1)	12
7	15(2)	16(0)	15
8	18(2)	19(0)	18
9	22(3)	23(0)	22
10	25(6)	26(1)	26
11	30(2)	31(0)	30
12	34(2)	35(0)	34
13	39(2)	40(0)	39
14	44(4)	45(1)	45
15	48(4)	49(0)	48
16	54(2)	55(1)	55
17	61(2)	62(0)	61
18	66(2)	67(0)	66
19	72(2)	73(0)	72
20	78(2)	79(1)	79
21	85(3)	86(0)	85
22	92(2)	93(0)	92
23	99(2)	100(0)	99
24	105(2)	106(1)	106
25	114(2)	115(0)	114
26	122(2)	123(1)	123
27	129(2)	130(0)	129
28	137(2)	138(0)	137
29	146(2)	147(0)	146
30	154(2)	155(0)	154

T_1

n	$p(M)$	$p(M)+1$	Borne sup
33	181(4)	182(0)	181
38	228(2)	229(0)	228
50	367(2)	368(0)	367
60	503(2)	504(0)	503
74	722(4)	723(1)	723
99	1208(3)	1209(0)	1208
100	1229(2)	1230(0)	1229
135	2088(2)	2089(0)	2088
142	2281(2)	2282(0)	2281

T_2

Le programme **«nombre de premiers»** nous apprend combien de nombres premiers se trouvent dans un intervalle de longueur n^2 donc dans un carré magique d'ordre n.

Il nous donne également le nombre de nombres premiers qui se trouvent dans tous les intervalles de longueur n^2 tels que le premier entier de l'intervalle varie de $1\ à\ 600\ 000$ ou tout autre entier désiré. Par exemple, nous pouvons remplacer $600\,000\ \ par\ 10\ 000\,000$.

Gardons $600\ 000$. Le premier résultat que nous obtenons (avec le programme) est une liste de $600\,000$ nombres entiers qui indiquent le nombre de nombres premiers contenus dans chaque intervalle. Le premier entier de la liste indique le nombre de nombres premiers contenus dans l'intervalle de $1\ à\ n^2$, le deuxième entier indique combien de nombres premiers se trouvent dans l'intervalle de $2\ à\ n^2+1$, etc. Par exemple, pour $n=12$, le premier entier de la liste sera 34, le deuxième sera aussi 34, le troisième sera 33, puis 32, 32, etc.

Le second résultat est une liste d'entiers qui indiquent le nombre de carrés magiques presque normaux formés d'entiers consécutifs qui possèdent 0 nombre premier, 1 nombre premier, 2 nombres premiers, etc. **Voyons un exemple avec n = 5 :**

La première liste que nous obtenons renferme 600 000 entiers et commence par 9, 9, 8, 7, 8, 7, … . Elle nous indique que le premier carré magique contient neuf nombres premiers (c'est le carré normal), que le deuxième en contient neuf, que le troisième en contient huit, etc.

La seconde liste est la suivante :

(*) $\{45925 ; 153071 ; 202816 ; 136478 ; 50548 ; 10030 ; 1071 ; 56 ; 3 ; 2 ; 0\}$

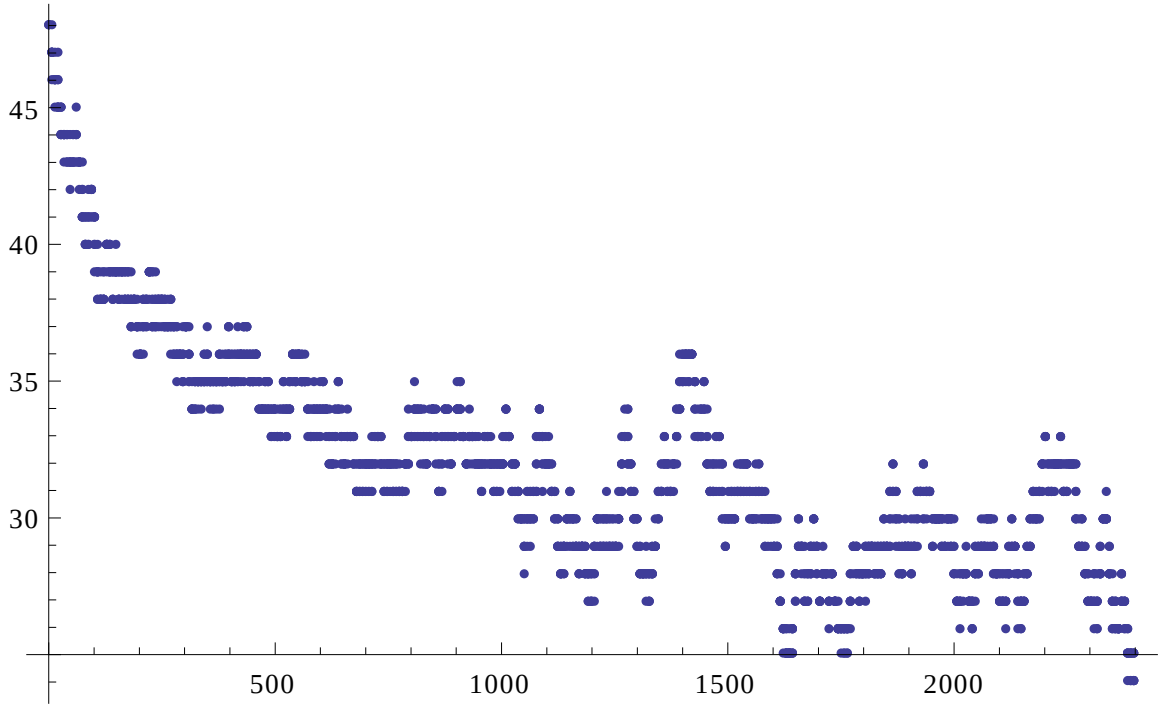
Cela nous apprend que:

45 925 carrés magiques, parmi les 600 000, possèdent aucun nombre premier; 153 071 en contiennent un seul; 202 816 en possèdent deux; 136 478 en contiennent trois; 50 548 en contiennent quatre; 10 030 en ont cinq; 1071 en ont six, 56 en ont sept; 3 en ont huit; 2 en ont 9 = p(M) et aucun n'en possède 10 = p(M) + 1.

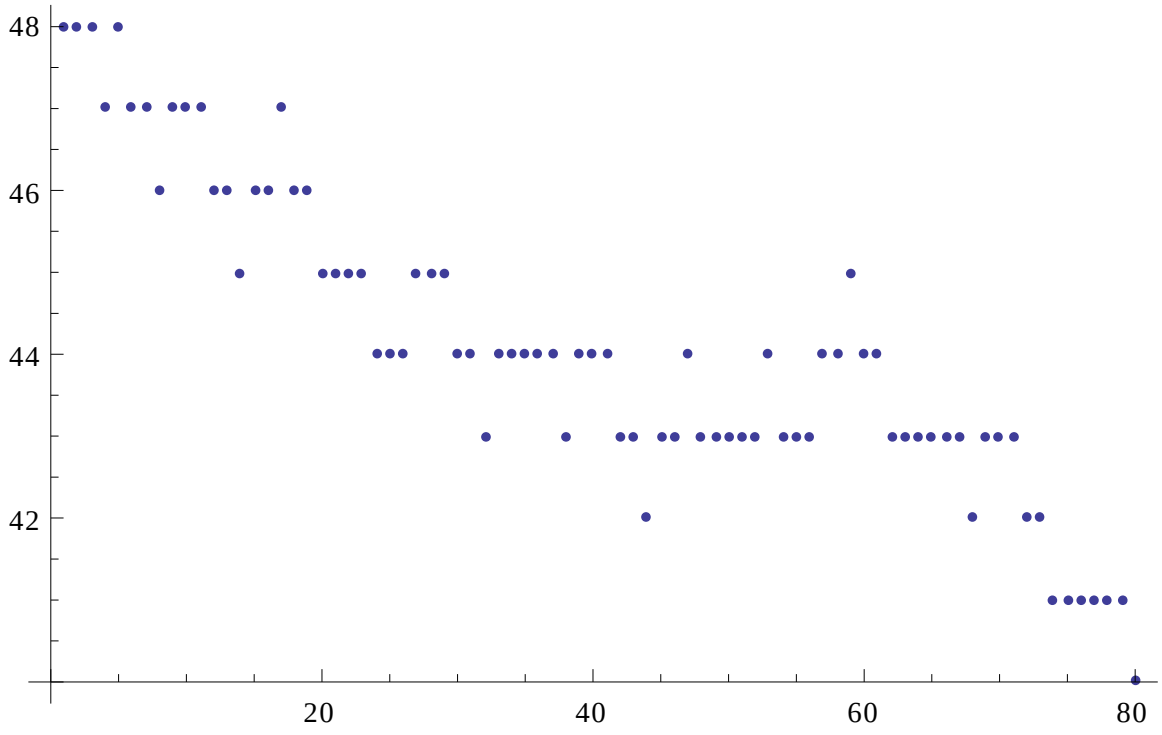
Puisque nous avons seulement deux 9, alors il est impossible d'avoir une suite de vingt cinq entiers consécutifs, parmi les 600 000 suites, qui contienne dix nombres premiers. En effet, après le second 9, nous sommes passés à 8. Donc pour avoir 10, il faudrait avoir un nouveau 9 (pourquoi?) or nous en avons que deux sur 600 000. Pourrait-il y avoir un 10 après 600 000 déplacements?

Pour n = 12, n = 15, n = 27 et n = 142, nous sommes passés de 600 000 à 10 000 000 de déplacements et nous n'avons pas dépassé p(M) dans chaque cas.

Avec n = 15, le graphique ci-dessous montre comment varie le nombre de nombres premiers dans les intervalles définis par k = 1 jusqu'à k = 2400, k étant le premier entier de l'intervalle :



Voyons de plus près avec k = 1 jusqu'à k = 80 :



Ce graphique montre le premier 80 déplacements et le nombre de nombres premiers dans chacun des 80 intervalles de 225 entiers consécutifs.

Ainsi, nous voyons que l'intervalle qui renferme les entiers de 1 à 225, lequel correspond à k = 1, contient 48 nombres premiers. L'intervalle qui contient les entiers de 2 à 226, lequel correspond à k = 2, contient aussi 48 nombres premiers, etc. Pour finir, l'intervalle qui contient les entiers de 80 à 304, lequel correspond à k = 80, contient 40 nombres premiers.

Sur l'horizontale qui passe par 48, nous trouvons 4 points donc 4 intervalles ou 4 carrés magiques qui renferment 48 nombres premiers. Sur l'horizontale qui passe par 44, nous trouvons 19 points d'où 19 carrés magiques qui contiennent 44 nombres premiers.

Voyons un dernier exemple avec n = 10 :

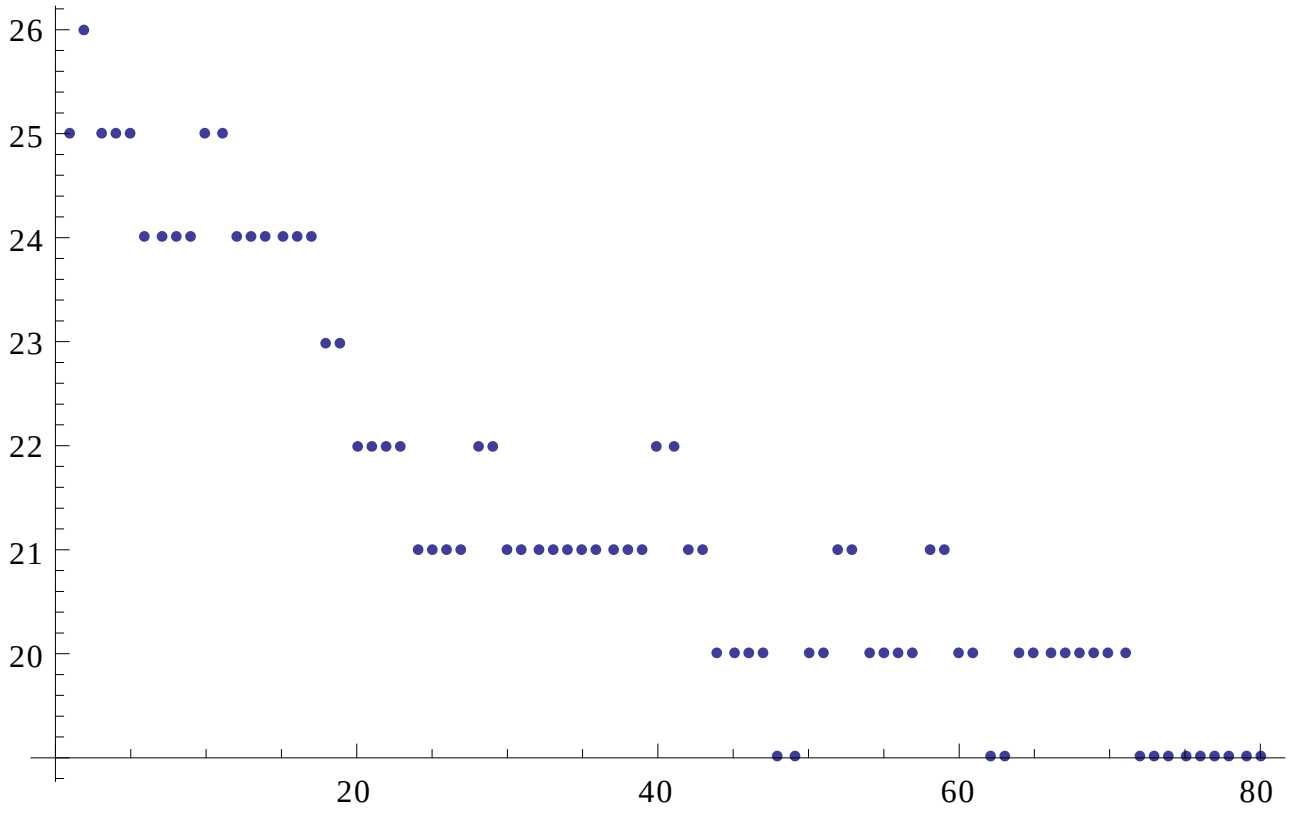
La première liste contient le nombre de nombres premiers contenus dans chacun des 600 000 intervalles considérés : 25, 26, 25, 25, 25, 24, etc.

La seconde liste nous donne le nombre de carrés magiques qui possèdent 0 nombre premier, 1 seul nombre premier, 2 nombres premiers, … ,24 puis 25 et enfin 26 nombres premiers.

{26 ; 264 ; 1326 ; 5630 ; 17 124 ; 38 336 ; 69 087 ; 97 162 ; 111 684 ; 102 294 ; 73 936 ; 44 362 ; 22 710 ; 9752 ; 3682 ; 1490 ;574 ; 298 ; 120 ; 64 ; 30 ; 22 ; 8 ; 2 ; 10 ; 6 ; 1}

Parmi les 600 000 carrés magiques, 26 contiennent 0 nombre premier, 264 en contiennent 1, 1326 en contiennent 2, …,10 en contiennent 24, 6 en contiennent 25 = p(M) et enfin, 1 en contient 26 = p(M) + 1.

La répartition est semblable à la précédente (cas n = 5). Nous présentons ici seulement 80 intervalles (en abscisses) et le nombre de nombres premiers (en ordonnées) dans chacun.



Nous voyons que le premier intervalle renferme 25 nombres premiers, le deuxième en contient 26, etc. Horizontalement, nous trouvons 6 points pour 25 d'où 6 intervalles qui contiennent 25 nombres premiers (donc 6 carrés magiques qui contiennent 25 nombres premiers.

Tous ces résultats renforcent la conjecture 1 ci-haut.

Voici une seconde conjecture, reliée à la conjecture 1.

Conjecture 2 :

Soit W un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$, qui contient n^2 entiers consécutifs. Si le carré W contient p(M) + 1 nombres premiers, alors celui-ci est le seul à contenir p(M) + 1 nombres premiers.

Nous avons refait les tableaux T_1 et T_2 en faisant 10 000 000 de déplacements au lieu de 600 000. Les deux tableaux restent identiques sauf pour n = 3.
Cependant, aucune borne supérieure n'a changé.

Pour n = 3, avec 600 000, nous avons dans la colonne p(M), 4 (120).
Pour n = 3, avec 10 000 000, nous avons dans la colonne p(M), 4 (902).

Cela signifie qu'avec 10 000 000 de déplacements, nous avons 902 carrés magiques presque normaux d'ordre 3 formés de neuf entiers consécutifs qui renferment quatre nombres premiers soit le maximum.

Voici maintenant le QUATUOR «12 P» formé de quatre carrés magiques presque normaux d'ordre 6 et de somme S = 306. Ils renferment tous exactement 12 nombres premiers; ceux-ci sont les mêmes dans les quatre carrés, ils sont consécutifs, dans le même ordre et sont situés respectivement dans les deux rangées centrales, les deux colonnes centrales, les deux grandes diagonales et dans deux colonnes tordues. Les 24 autres entiers sont tous pairs.

96	118	26	30	24	12
34	50	36	64	54	68
29	31	41	61	71	73
37	43	47	53	59	67
20	42	58	46	60	80
90	22	98	52	38	6

12P-1; S = 306; f(306) = 13 414

96	34	29	37	20	90
118	50	31	43	42	22
26	36	41	47	58	98
30	64	61	53	46	52
24	54	71	59	60	38
12	68	73	67	80	6

12P-2; S = 306; f(306) = 13 414

29	96	18	44	52	67
34	31	48	76	59	58
148	32	41	53	28	4
38	42	47	61	50	68
20	43	70	66	71	36
37	62	82	6	46	73

12P-3; S = 306; f(306) = 13 287

Remarquons que 12P-2 est un équivalent de 12P-1. De plus, 12P-3 possède 127 figures magiques de moins que les deux précédents et 127 est un nombre premier!!! Quant à 12P-4, il possède 2218 figures magiques de plus que 12P-1.

29	50	60	36	94	37
82	31	18	44	43	88
64	41	42	54	47	58
38	61	28	78	53	48
20	71	86	62	59	8
73	52	72	32	10	67

12P-4; S = 306; f(306) = 15 632

12P-1, 12P-3 et 12P-4 sont primitifs.

Enfin, en terminant, voyons comment nous pouvons, pour l'ordre $n = 5$, construire un carré magique presque normal qui renferme k nombres premiers avec $0 \le k \le 25$.

1) Nous avons vu plus haut que si les vingt-cinq entiers sont consécutifs, alors nous pouvons construire un carré magique formé de k nombres premiers où $0 \le k \le 9$.
2) Mais comment trouver un tel carré avec treize nombres premiers?
3) Nous allons utiliser le carré premier (3) de 10.2 qui est presque normal et nous allons nous servir de figures complètes afin d'enlever ou d'ajouter des nombres premiers.

Par exemple, voici le carré (3), (appelé aussi carré 25), et une figure complète en vert :

17	73	59	13	151
79	101	29	37	67
31	109	83	43	47
163	19	53	71	7
23	11	89	149	41

Carré 25

4) Dans la figure complète, nous ajoutons 1 dans les cinq cases. Ainsi nous perdons cinq nombres premiers. Le carré reste magique et sa somme magique passe de 313 à 314. Le carré 20 est noté ainsi car il contient 20 nombres premiers.

17	74	59	13	151
80	101	29	37	67
31	109	84	43	47
163	19	53	71	8
23	11	89	150	41

Carré 20

5) Nous allons nous servir du carré 20 pour construire le carré 15 à l'aide d'une autre figure complète, disjointe avec la première. Nous ajoutons 1 dans chacune des cinq cases. La somme devient 315.

17	74	59	13	152
80	101	30	37	67
32	109	84	43	47
163	19	53	72	8
23	12	89	150	41

Carré 15

6) Avec le carré 15, nous allons construire le carré 11 en utilisant une nouvelle figure complète qui possède une case déjà utilisée (celle qui contient 80). Le carré 11 est de somme 316. De plus les carrés 20, 15 et 11 sont presque normaux.

17	74	60	13	152
81	101	30	37	67
32	109	84	44	47
163	20	53	72	8
23	12	89	150	42

Carré 11

7) Le carré 16 est obtenu du carré 20 à l'aide de la figure complète illustrée dans le carré 11. La somme du carré 16 est 315 et il est presque normal.

17	74	60	13	151
81	101	29	37	67
31	109	84	44	47
163	20	53	71	8
23	11	89	150	42

Carré 16

8) Le carré 12 provient du carré 16 à l'aide de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 316.

18	74	60	13	151
81	101	29	38	67
31	110	84	44	47
163	20	53	71	9
23	11	90	150	42

Carré 12

9) Le carré 10 est obtenu du carré 15 avec la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 316.

17	74	59	14	152
80	102	30	37	67
32	109	84	43	48
163	19	54	72	8
24	12	89	150	41

Carré 10

10) Le carré 13 provient du carré 16 muni de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 319. Nous ajoutons 4 dans chaque case verte.

21	74	60	13	151
81	101	33	37	67
31	109	84	44	51
163	24	53	71	8
23	11	89	154	42

Carré 13

11) Le carré 14 est construit à partir du carré 16 avec la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 319. Nous ajoutons 4 dans chaque case verte.

17	74	64	13	151
81	105	29	37	67
31	109	84	48	47
163	20	53	71	12
27	11	89	150	42

Carré 14

12) Le carré 18 provient du carré 20 et de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 316. Nous ajoutons 2 dans chaque case verte.

17	76	59	13	151
80	101	29	37	69
31	109	86	43	47
165	19	53	71	8
23	11	89	152	41

Carré 18

13) Le carré 19 est construit à partir du carré 20 et de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 324. Nous ajoutons 10 dans chaque case verte.

17	84	59	13	151
80	101	29	37	77
31	109	94	43	47
173	19	53	71	8
23	11	89	160	41

Carré 19

14) Le carré 17 est construit à partir du carré 20 et de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 315. Nous ajoutons 1 dans chaque case verte.

17	74	59	13	152
80	102	29	37	67
32	109	84	43	47
163	19	54	71	8
23	11	89	151	41

Carré 17

15) Pour construire les carrés 21, 22, 23 et 24, nous partirons du carré 20. Nous allons ajouter aux cinq entiers pairs de la figure complète, un entier k de façon à obtenir le nombre de nombres premiers voulu. Pour déterminer la valeur de k, nous trouverons un nombre premier p supérieur à 151 et différent de 163. Le premier rencontré est 157. En ajoutant 7 dans la figure complète, les cinq entiers pairs deviennent :

15 ; 81 ; 87 ; 91 ; 157

Mais seulement 157 est premier. Nous venons donc de trouver un carré magique avec 21 nombres premiers. Il est presque normal de somme 321. Voici les quatre derniers carrés :

17	81	59	13	151
87	101	29	37	67
31	109	91	43	47
163	19	53	71	15
23	11	89	157	41

Carré 21

17	117	59	13	151
123	101	29	37	67
31	109	127	43	47
163	19	53	71	51
23	11	89	193	41

Carré 22

17	121	59	13	151
127	101	29	37	67
31	109	131	43	47
163	19	53	71	55
23	11	89	197	41

Carré 23

17	193	59	13	151
199	101	29	37	67
31	109	203	43	47
163	19	53	71	127
23	11	89	269	41

Carré 24

Ces quatre derniers carrés magiques sont presque normaux et ont respectivement pour sommes magiques, 321, 357, 361 et 433.

Notons que le carré 24 est le bel intrus-203. Le nombre composé 203 = 7 x 29 est au centre du carré et tous les autres nombres sont premiers. Le carré 25 est tout simplement le carré (3) du départ.

Cette démarche peut sans doute s'appliquer aux ordres supérieurs mais la difficulté grandira avec l'ordre!!! Il faut donc se retourner vers l'ordinateur!!!

Nous pouvons maintenant construire 26 carrés magiques presque normaux d'ordre 5 qui contiennent respectivement de 0 à 25 nombres premiers.

Pour l'ordre 4, avec le même procédé, nous avons construit 17 carrés magiques presque normaux qui renferment respectivement de 0 à 16 nombres premiers.

Pour $0 \leq k \leq 7$, les carrés sont presque normaux et renferment seize entiers consécutifs dont k sont premiers. Ils sont donnés au début de l'annexe 11.

Voici les autres :

37	53	89	79
83	61	67	47
97	71	59	31
41	73	43	101

Carré 16

139	53	89	79
83	61	67	149
97	173	59	31
41	73	145	101

Carré 15

147	53	89	79
83	61	67	157
97	181	59	31
41	73	153	101

Carré 14

141	53	89	79
83	61	67	151
97	175	59	31
41	73	147	101

Carré 13

38	53	89	79
83	61	67	48
97	72	59	31
41	73	44	101

Carré 12

69	53	89	80
83	62	67	79
98	103	59	31
41	73	76	101

Carré 11

45	53	89	80
83	62	67	55
98	79	59	31
41	73	52	101

Carré 10

38	53	89	80
83	62	67	48
98	72	59	31
41	73	45	101

Carré 9

38	54	89	79
83	61	68	48
98	72	59	31
41	73	44	102

Carré 8

Notons que tous les carrés d'ordre 4 et d'ordre 5 que nous venons de construire sont presque normaux.

Voici comment nous avons construit ces carrés d'ordre 4. Par exemple, le carré 12 provient du carré 16 de somme 258 qui renferme seize nombres premiers. Nous avons utilisé la figure complète illustrée dans le carré 12 et nous l'avons placée sur le carré 16. Nous avons ensuite ajouté 1 dans chaque case de cette figure complète d'où le carré 12 de somme 259.

Le carré 15 provient du carré 12. La figure complète illustrée dans le carré 15 est placée sur le carré 12 et dans chacune de ses quatre cases, nous avons ajouté le nombre 101. D'où le carré 15 de somme 360.

Nous allons noter notre action de la façon suivante :

$$(16 \rightarrow 12; +1; 259)$$

signifie qu'avec le carré 16 et la figure complète illustrée sur le carré 12 puis placée sur le carré 16, nous avons ajouté 1 dans les cases de la figure complète pour obtenir le carré 12 de somme 259.

$$(12 \rightarrow 15; +101; 360)$$

signifie qu'avec le carré 12 et la figure complète illustrée sur le carré 15 puis placée sur le carré 12, nous avons ajouté 101 dans les cases de la figure complète pour obtenir le carré 15 de somme 360.

Voici comment nous avons obtenu tous ces carrés :

$$\begin{aligned}
&(16 \rightarrow 12;\ +1\ ;259)\\
&(12 \rightarrow 15;\ +101\ ;360)\\
&(12 \rightarrow 9;\ +1\ ;260)\\
&(12 \rightarrow 8;\ +1;\ 260)\\
&(9 \rightarrow 10;\ +7\ ;267)\\
&(10 \rightarrow 11;\ +24\ ;291)\\
&(15 \rightarrow 13;\ +2\ ;362)\\
&(13 \rightarrow 14;\ +6\ ;368)
\end{aligned}$$

Pour l'ordre 3, nous avons procédé de façon différente car il n'existe pas de figure complète pour un carré d'ordre 3. Nous avons pris M, un carré magique premier et presque normal puis nous avons ajouté un entier k à tous les nombres de M jusqu'à ce que nous obtenions le nombre voulu de nombres premiers.

Pour $0 \leq k \leq 4,$ les carrés sont presque normaux et renferment neuf entiers consécutifs. Ils sont donnés au début de l'annexe 11.

71	89	17
5	59	113
101	29	47

83	101	29
17	71	125
113	41	59

85	103	31
19	73	127
115	43	61

73	91	19
7	61	115
103	31	49

89	107	35
23	77	131
119	47	65

Dans ces cinq derniers carrés magiques, les nombres dans les cases vertes sont tous composés. Tous les autres sont premiers. Ces carrés contiennent respectivement de haut en bas et de gauche à droite 9, 8, 7, 6 et 5 nombres premiers.

Nous allons terminer avec l'ordre 6. Pour $0 \leq k \leq 12$, les carrés sont presque normaux et renferment trente-six entiers consécutifs dont k sont premiers. Ils sont donnés au début de l'annexe 11.

Pour les autres carrés magiques presque normaux qui contiennent $15 \leq k \leq 36$ nombres premiers, nous allons les fabriquer à partir d'un **carré premier** qui contient trente-six nombres premiers consécutifs à partir de 7. Puis avec quelques figures complètes, nous pourrons faire le travail. Pour obtenir un carré magique avec treize ou quatorze nombres premiers, il suffira d'utiliser le carré 8 de l'OCTUOR «12 P» suivant et la figure complète F1 (voir plus bas).

29	31	40	44	46	116
37	41	154	32	20	22
120	34	43	47	38	24
56	64	53	59	70	4
48	54	10	66	61	67
16	82	6	58	71	73

Carré 8 de l'OCTUOR «12 P»

Pour obtenir les carrés 13 et 14, lesquels vont contenir respectivement treize et quatorze nombres premiers, utilisons la figure complète F1 et ajoutons 49 ou 61 dans les six cases de F1. Nous trouverons alors deux carrés magiques presque normaux qui auront treize et quatorze nombres premiers.

Voici ces deux carrés :

29	31	89	44	46	116
37	41	154	32	69	22
169	34	43	47	38	24
56	113	53	59	70	4
48	54	10	115	61	67
16	82	6	58	71	122

Carré 13

29	31	101	44	46	116
37	41	154	32	81	22
181	34	43	47	38	24
56	125	53	59	70	4
48	54	10	127	61	67
16	82	6	58	71	134

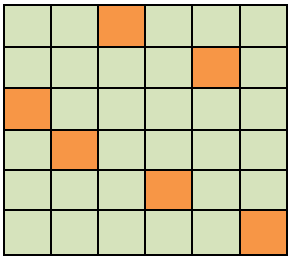
Carré 14

Voyons maintenant ce carré premier (appelé carré 36) et les neuf figures complètes que nous allons utiliser, notées F1, F3, F4, … Ici, nous n'avons pas utilisé les figures complètes F2 et F8.

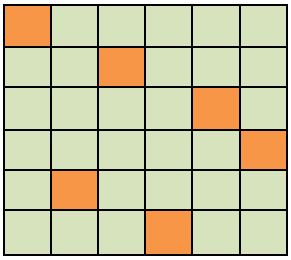
Nous vous invitons à trouver les carrés 15 à 35.

37	11	149	167	13	107
79	157	131	41	53	23
103	29	7	43	139	163
19	101	113	71	97	83
137	59	17	73	151	47
109	127	67	89	31	61

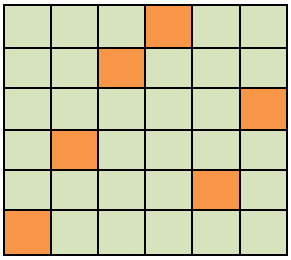
Carré 36



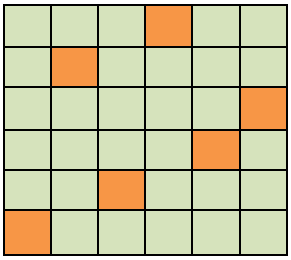
F1



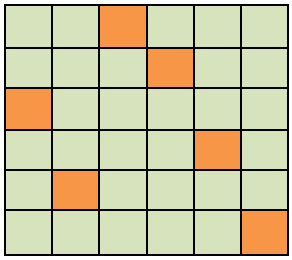
F3



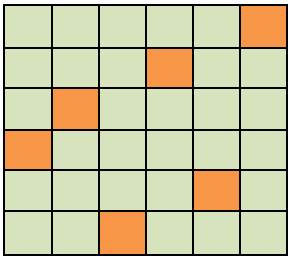
F4



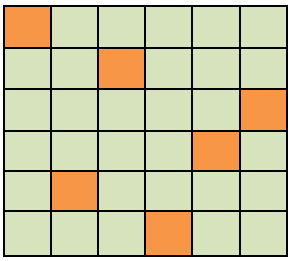
F5



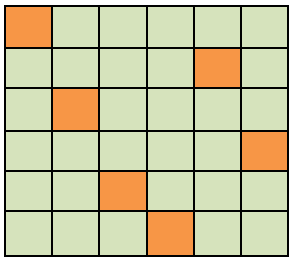
F6



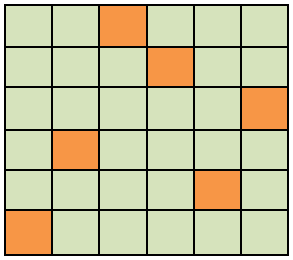
F7



F9



F10



F11

Il serait intéressant de continuer avec des ordres supérieurs et de trouver, pour l'ordre n, n^2+1 carrés presque normaux qui contiendraient de 0 $\grave{a}$ n^2 nombres premiers. C'est chose faite pour $n=3,4,5,6.$

Pour $n \geq 7$, il faudrait l'ordinateur et un bon programme!!!

Nous allons terminer avec deux des cent soixante carrés magiques d'ordre 4 formés des quinze premiers nombres premiers impairs et de l'entier 21. Ils sont tous presque normaux de somme 160. **Nous pourrions les appeler «Intrus-21».** Le plus petit entier est 3 et le plus grand 53.

3	21	29	47
53	19	23	5
31	17	41	11
13	43	7	37

47	21	29	3
23	5	53	19
17	31	11	41
13	43	7	37

Question 1 :

Comment construire un carré magique presque normal d'ordre 10 dans lequel il n'y aurait que 30 nombres premiers et sachant que les cent entiers du carré ne sont pas nécessairement consécutifs? **Ci-haut, nous avons tenté de répondre, en partie, à cette question.**

Problème 1 :

Construisez un carré magique presque normal d'ordre 9 qui est associatif, qui renferme 81 entiers consécutifs et qui contient exactement neuf nombres premiers.

Problème 2 :

Démontrez que si W est un carré magique presque normal formé d'entiers consécutifs, alors le nombre maximum de nombres premiers dans W est :

a) 4 pour l'ordre 3.
b) 7 pour l'ordre 4.
c) 9 pour l'ordre 5.
d) 12 pour l'ordre 6.
e) 15 pour l'ordre 7.
f) 18 pour l'ordre 8.
g) Ces nombres sont-ils atteints?

Problème 3 :

Soit donné un carré magique W d'ordre 10, presque normal, formé d'entiers consécutifs. Montrez qu'il ne peut pas y avoir plus de :

a) 28 nombres premiers en général.
b) Combien selon la conjecture 1?

Problème 4 :

Le nombre de nombres premiers contenus dans le carré normal M (k = 1) est p(M). Si pour k = 2, le nombre de nombres premiers est p(M) + 1, alors montrez que pour k = 3, le nombre de nombres premiers est de nouveau p(M). Ici, k indique le rang de la suite.

Problème 5 :

Un carré magique W est presque normal et renferme n^2 entiers consécutifs. Le carré normal M, d'ordre n, renferme p(M) nombres premiers (par définition). Montrez qu'il existe toujours un carré W différent de M qui possède p(M) nombres premiers.

Problème 6 :

Nous avons construit 200 carrés magiques presque normaux d'ordre 10. Le premier M est normal, le deuxième est $M+1$, le troisième est $M+2$, ..., $M+198$, $M+199$. Les 200 entiers qui suivent représentent, respectivement, le nombre de nombres premiers dans chaque carré.

```
{25,26,25,25,25,24,24,24,24,25,25,24,24,24,24,24,24,23,23,22,22,2
2,22,21,21,21,21,22,22,21,21,21,21,21,21,21,21,21,21,22,22,21,21,
20,20,20,20,19,19,20,20,21,21,20,20,20,20,21,21,20,20,19,19,20,20
,20,20,20,20,20,20,19,19,19,19,19,19,19,19,19,19,20,20,19,19,19,1
9,19,19,18,18,19,19,20,20,20,20,20,20,21,21,20,20,19,19,19,19,18,
18,17,17,18,18,17,17,17,17,17,17,17,17,17,17,18,18,18,18,18,18,19
,19,18,18,19,19,19,19,18,18,18,18,19,19,19,19,19,19,19,19,18,18,1
8,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,17,17,18,18,19,19,
18,18,18,18,19,19,18,18,18,18,19,19,19,19,19,19,19,19,18,18,18,18
,18,18,17,17,16}
```

Ainsi, $g_{10}(M)=25$; $g_{10}(M+1)=26$; $g_{10}(M+2)=25$; ... ; $g_{10}(M+17)=23$; ...

a) Observez que chaque fois que le nombre de nombres premiers passe de k $à$ $k-1$, le carré magique qui contient $k-1$ nombres premiers est $M+p$ où p est premier.
b) Remarquez que nous avons 22 carrés magiques qui possèdent 21 nombres premiers. Parmi ceux-ci, cinq ont la forme $M+p$ où p est un nombre premier. Déterminez les cinq valeurs de p.
c) Nous avons aussi dix-sept carrés magiques qui possèdent 21 nombres premiers et qui ont la forme $M+q$ où q est un entier non premier. Déterminez les dix- sept valeurs de q.
d) Parmi les 200 carrés ci-haut, trouvez trois carrés magiques presque normaux d'ordre 10

$$M+p_1, M+p_2 \ et \ M+q$$

qui possèdent dix-sept nombres premiers avec $p_1 \ et \ p_2$, des nombres premiers et q, un entier non premier.

Problème 7 :

a) Dans 12P-4, trouvez combien de figures magiques parmi les 15 632, renferment les quatre cases centrales. Donnez-les.
b) Dans 12P-4, trouvez combien de figures magiques parmi les 15 632, renferment les quatre coins. Donnez-les.

Problème 8 :

Montrez que la conjecture 1 est vraie pour $n=3,4,5,6,7 \ et \ 8$.

Problème 9 :

a) Considérons tous les carrés magiques presque normaux d'ordre 6 formés de trente-six entiers consécutifs. Montrez que si le plus petit entier d'un carré est ≥ 6, alors le nombre maximum de nombres premiers dans ce carré est 10.
b) En déduire qu'il n'y a que deux carrés qui renferment onze nombres premiers et un seul qui renferme douze nombres premiers.

Problème 10 :

Pouvez-vous construire vingt-cinq intrus d'ordre 5 (voir 14.13) qui contiendraient un seul nombre premier 1129 et que des nombres composés dans ses vingt-quatre autres cases? Si le seul nombre premier, 1129, se trouve dans la case centrale, alors l'intrus sera qualifié de **«bel intrus».** Dans ces vingt-cinq carrés, le nombre 1129 aura occupé toutes les cases du carré!!!

Suggestion : voir 6.1 du chapitre 6.

Problème 11 :

Pouvez-vous construire quarante-neuf intrus d'ordre 7 qui contiendraient un seul nombre premier 9587 et que des nombres composés dans ses quarante-huit autres cases? Si le seul nombre premier, 9587, se trouve dans la case centrale, alors l'intrus sera qualifié de **«bel intrus».** Dans ces quarante-neuf carrés, le nombre 9587 aura occupé toutes les cases du carré!!!

Suggestions : utilisez le carré ultra-magique (associatif et pandiagonal) normal suivant :

1	47	27	29	39	15	17
44	12	13	28	4	48	26
19	32	14	42	20	43	5
9	40	34	25	16	10	41
45	7	30	8	36	18	31
24	2	46	22	37	38	6
33	35	11	21	23	3	49

Utilisez aussi le procédé 1-3-5-7-2-4-6 (6.1 du chapitre 6).

Problème 12 :

Considérez M, un carré magique pandiagonal d'ordres 5, 7 ou 9.

a) Pour l'ordre 5, démontrez que le procédé 1-3-5-2-4 appliqué à M donnera toujours un nouveau carré M' magique pandiagonal et que le nombre en position (5 ; 5) dans M se retrouve toujours dans la case centrale de M'.
b) Pour l'ordre 7, démontrez que le procédé 1-3-5-7-2-4-6 appliqué à M donnera toujours un nouveau carré M' magique pandiagonal et que le nombre en position (7 ; 7) dans M se retrouve toujours dans la case centrale de M'.
c) Pour l'ordre 9, démontrez que le procédé 1-3-5-7-9-2-4-6-8 appliqué à M donnera toujours un nouveau carré M' magique pandiagonal et que le nombre en position (9 ; 9) dans M se retrouve toujours dans la case centrale de M'.
d) Pour l'ordre impair $n \geq 5$, démontrez que le procédé :

$$1-3-5-\ldots-n-2-4-6-\ldots-(n-1)$$

déplacera le nombre de la case $(n;n)$ de M dans la case centrale de M'.
e) Pouvez-vous utiliser ce procédé pour l'ordre $n=3$? $n=4$?

f) Pensez-vous que ce procédé est valable pour tous les ordres impairs $n \geq 5$?

Problème 13 :

a) Est-il vrai que nous pouvons trouver une suite infinie de carrés magiques presque normaux pandiagonaux d'ordre 5 sachant que tous les entiers ≥ 1 seront le centre d'un carré de la suite?
b) Est-il vrai que nous pouvons trouver une suite infinie de carrés magiques presque normaux pandiagonaux d'ordre 7 sachant que tous les entiers ≥ 1 seront le centre d'un carré de la suite?

Annexe 12 : 5040 permutations, 5040 carrés magiques d'ordre 5

Voici 7 carrés magiques d'ordre 5 et de somme magique S = 24, tous formés que des chiffres allant de 1 à 9. En plus, tous ces carrés renferment la figure magique (fusée) suivante :

(*) (1 ; 2) (2 ; 2) (3 ; 2) (4 ; 1) (4 ; 3)

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2&8&7\\7&6&6&1&4\\5&6&8&2&3\\6&5&2&4&7\\3&3&6&9&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5&4&3&8&4\\6&6&5&2&5\\3&6&7&2&6\\4&5&4&4&7\\6&3&5&8&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}6&3&4&9&2\\3&5&5&3&8\\2&7&6&3&6\\6&6&3&4&5\\7&3&6&5&3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}7&2&3&9&3\\3&4&5&4&8\\2&7&6&2&7\\7&6&4&4&3\\5&5&6&5&3\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}8&1&4&8&3\\2&4&5&5&8\\1&8&6&1&8\\9&6&2&4&3\\4&5&7&6&2\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}9&1&3&7&4\\3&3&4&5&9\\2&6&6&2&8\\6&5&8&4&1\\4&9&3&6&2\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}4&5&6&7&2\\8&3&4&6&3\\4&7&6&3&4\\3&5&6&3&7\\5&4&2&5&8\end{pmatrix}$$

Le carré $M=10^6A+10^5B+10^4C+10^3D+10^2E+10F+G$ est toujours un carré magique avec la fusée (*) ; il est de somme 1 111 111 $\times$ 24. Nous pouvons permuter A, B, C, D, E, F et G de 5040 façons et donc obtenir 5040 carrés magiques qui possèdent la figure magique (*) et qui ont tous la même somme soit 26 666 664. Tous ces carrés sont formés de 25 nombres de 7 chiffres. Voici M :

$$M=\begin{pmatrix}3567894&4432115&2343436&8899877&7423342\\7633238&6654433&6555544&1234556&4588893\\5322124&6677867&8766666&2232123&3667884\\6467963&5566655&2434286&4444443&7753317\\3675445&3335594&6566732&9855665&3233228\end{pmatrix}$$

Si nous appliquons aux 7 chiffres des 25 nombres de M , par exemple, la permutation :

$$abcdefg \rightarrow gbcdefa$$

alors, le travail sera un peu long avec risque d'erreurs, surtout si la permutation est plus compliquée. De façon équivalente, il suffit de permuter dans l'expression de $M, A et G$. Nous obtiendrons :

$$10^6 G + 10^5 B + 10^4 C + 10^3 D + 10^2 E + 10 F + A$$

soit :

4567893	5432114	6343432	7899878	2423347
8633237	3654436	4555546	6234551	3588894
4322125	7677866	6766668	3232122	4667883
3467966	5566655	6434282	3444444	7753317
5675443	4335593	2566736	5855669	8233223

Tous les 5040 carrés magiques contiendront (*), auront la même somme, seront différents (à cause de 3567894 dans M) et renfermeront 25 entiers différents (car c'est le cas pour M).

Si nous voulons un carré formé de 25 nombres de 4 chiffres, alors il suffira de choisir 4 carrés parmi les 7 présentés ci-haut. De même, si on veut des nombres de 3 chiffres.

Le carré $100A + 10B + C$ sera formé de 25 entiers positifs différents de 3 chiffres. En permutant $A, B et C,$ nous aurons 6 carrés magiques (avec (*)), de somme 2664.

Voir section 14.14 du chapitre 14.

Annexe 13 : Preuves des théorèmes 14.14 et 14.15

Théorème 14.14 :

Pour tous les ordres n, $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés presque normaux.

Établissons d'abord les résultats suivants :

Lemme 1 :

Si $n \geq 3$ est un entier, alors $n! > n$.

Preuve :

Nous savons que $n! > 1$ dès que $n \geq 2$. Il s'ensuit que $(n+1)n! > n+1$ d'où $(n+1)! > n+1$ lorsque $n \geq 2$. De façon équivalente, $n! > n$ lorsque $n \geq 3$.

Lemme 2 :

Pour l'entier $n \geq 2$, les entiers consécutifs $n! + 2$, $n! + 3$, $n! + 4$, ... , $n! + n$ sont tous composés (non premiers).

Preuve :

Ces $(n-1)$ entiers sont respectivement divisibles par $2, 3, 4, \ldots, n$. De plus, pour $n \geq 2$, les quotients sont des entiers ≥ 2. Remarquez que :

$$n! + k = k\,[1 + 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times (k+1) \times \ldots \times n]$$

où $2 \leq k \leq n$ est un entier. Le nombre dans le crochet est ≥ 2 dès que $n \geq 2$.

Il s'ensuit que ces nombres sont tous composés.

Il est donc possible de trouver un intervalle aussi long qu'on le veut dans lequel il n'y aura aucun nombre premier.

Par exemple, nous pouvons trouver une suite de $10^{100^{1000}}$ entiers consécutifs tous ≥ 1 dans laquelle il n'y aura aucun nombre premier.

Lemme 3 :

Soit $I = [a\ ;\ b]$, un intervalle formé d'entiers ≥ 2 qui contient $m = b - a + 1$ entiers où $b \geq 3$.
Nous pouvons construire un intervalle $J = [b!+2\ ;\ b!+b-a+2]$ tel que :

a) $I \cap J = \varnothing$

b) J est à droite de I, en général très loin.

c) J contient m entiers composés consécutifs.

Preuve :

En vertu du lemme 1, $I \cap J = \varnothing$ puisque $b \geq 3$ d'où $b! > b$ et enfin, $b! + 2 > b$.

Évidemment, J est à droite de I. La différence entre $b\ et\ b!$ grandit extrêmement vite!!!

Pour pouvoir appliquer le lemme 2, il faut $b - a + 2 \leq b$, ce qui se produit dès que $a \geq 2$ et c'est le cas ici puisque les entiers de I sont ≥ 2.

Notez la taille de l'entier $50!$:

30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000

L'intervalle J s'appelle **l'intervalle composé** de I.

Première preuve du théorème 14.14 (voir les deux autres preuves plus bas) :

Nous voulons construire une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre n, $n \geq 3$, qui renferment n^2 entiers consécutifs non premiers. Pour ce faire, nous allons prendre un intervalle I_1 tel que défini dans l'énoncé du lemme 3 qui contient $m = n^2$ entiers, $n \geq 3$. Nous allons ensuite construire son intervalle composé J_1 et donc notre premier carré magique M_1. Puis nous

poserons $I_2 = J_1$ et trouverons l'intervalle composé de I_2 soit J_2 donc notre deuxième carré magique M_2. Nous continuerons ainsi indéfiniment et obtiendrons une suite infinie de carrés magiques $M_1,\ M_2,\ M_3,\ldots,\ M_i,\ \ldots$ Ces carrés magiques sont :

a) Tous presque normaux et différents deux à deux.
b) Renferment tous n^2 entiers consécutifs non premiers.

Le schéma de cette preuve est donc :

$$\begin{array}{lllllll} I_1 & \rightarrow & J_1 = I_2 & & & & \\ & & I_2 & \rightarrow & J_2 = I_3 & & \\ & & & & I_3 & \rightarrow & J_3 = I_4 \\ & & & & & & I_4 \ldots \end{array}$$

Soit J, l'intervalle composé de I. Nous allons déplacer J vers la droite jusqu'au premier nombre premier p rencontré de sorte que le plus grand entier ce cet intervalle J^* soit l'unique nombre premier $p\, de\, J^*$.

J^* s'appelle **l'intervalle complété** de I.

$$I \rightarrow J \rightarrow J^*$$

Théorème 14.15 :

Pour tous les ordres $n, n \geq 3,$ il existe une infinité de carrés magiques presque normaux qui renferment n^2 entiers consécutifs dont un seul est un nombre premier.

Preuve :

Cette preuve est très semblable à celle du théorème 14.14. Au lieu de trouver l'intervalle $J\ de\, I$, nous allons trouver son intervalle J^*. Le schéma de la preuve est le suivant :

$$\begin{array}{lllllll} I_1 & \rightarrow & J_1^* = I_2 & & & & \\ & & I_2 & \rightarrow & J_2^* = I_3 & & \\ & & & & I_3 & \rightarrow & J_3^* = I_4 \\ & & & & & & I_4 \ldots \end{array}$$

Chaque intervalle J_i^* nous permet de construire un carré magique presque normal qui contient n^2 entiers consécutifs dont un seul est un nombre premier lequel est le plus grand entier du carré. Nous avons :

a) Que tous ces carrés sont différents et presque normaux.
b) Que le plus grand entier de chaque carré est le seul nombre premier du carré.
c) Que tous les nombres premiers de tous ces carrés forment une suite strictement croissante.

Si nous voulons trouver douze carrés magiques différents d'ordre 5 qui renferment vingt-cinq entiers consécutifs dont un seul est premier, alors comment allons-nous procéder? Le théorème 14.15 règle le problème de l'existence mais ne nous donne pas un procédé simple de construction!!!

Les carrés renferment très rapidement des nombres gigantesques!!!

Voici un procédé beaucoup plus simple.

Pour $n \geq 3$, nous allons trouver une suite de n^2 entiers ≥ 2, consécutifs et tous non premiers? Il est clair qu'une telle suite est située entre deux nombres premiers consécutifs. Il suffit donc de regarder entre les deux nombres premiers consécutifs de toutes les paires de nombres premiers consécutifs $\{2\ ;\ 3\}$; $\{3\ ;\ 5\}$; $\{5\ ;\ 7\}$; $\{7\ ;\ 11\}$; ... . Nous savons que l'intervalle cherché existe et qu'il est très loin. Nous pouvons donc nous mettre à sa recherche en espérant en trouver un beaucoup plus proche. C'est ce qui arrive en général.

Entre 2 et 3, nous ne trouvons aucun entier. Entre 3 et 5, nous trouvons l'entier 4. Entre 13 et 17, nous trouvons les entiers 14, 15 et 16; et ainsi de suite. La première suite d'entiers positifs, consécutifs et non premiers que nous chercherons devra contenir neuf entiers afin de pouvoir construire notre premier carré composé parfait d'ordre 3.

Nous avons créé pour cela un programme dans MAPLE qui regarde ce qu'il y a entre les deux nombres premiers consécutifs de toutes les paires de nombres premiers consécutifs et cela, jusqu'à ce que nous trouvions, pour une première fois, au moins n^2 entiers consécutifs. **Ce programme s'appelle «Nombres composés».**

Le tableau suivant nous donne l'ordre n du carré, le premier intervalle $[p_1\ ;\ p_2]$ dont les extrémités sont des nombres premiers consécutifs dans lequel nous trouvons au moins n^2 entiers consécutifs compris entre $p_1\ et\ p_2$, ce nombre d'entiers et enfin la somme magique du carré construit avec les n^2 entiers consécutifs qui commencent par $p_1 + 1$. Par exemple, pour $n = 5$, nous trouvons l'intervalle $[1327\ ;\ 1361]$ dans lequel il y a trente-trois entiers consécutifs $1328;1329;...;1360$. Nous prendrons les vingt-cinq premiers afin de construire le carré

composé parfait qui aura la plus petite somme magique. Les sommes magiques du tableau sont les plus petites pour les carrés composés parfaits d'ordre n.

(*%)

3	$[113\,;127]$	13	$S=354$
4	$[523\,;541]$	17	$S=2126$
5	$[1327\,;1361]$	33	$S=6700$
6	$[15683\,;15727]$	43	$S=94209$
7	$[19609\,;19661]$	51	$S=137438$
8	$[31397\,;31469]$	71	$S=251436$
9	$[155921\,;156007]$	85	$S=1403658$
10	$[370261\,;370373]$	111	$S=3703115$

Avec ce tableau, nous pouvons :

a) Trouver des carrés magiques formés de n^2 entiers consécutifs non premiers.
b) Trouver des carrés magiques formés de n^2 entiers consécutifs dont un seul est premier.

Nous venons de voir une autre façon de démontrer les théorèmes 14.14 et 14.15. En effet, il suffit de prolonger indéfiniment la suite d'intervalles ci-haut (Voir remarque 1). Tous les intervalles qui correspondent aux ordres $n \geq 7$, par exemple, vont nous permettent de construire une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre 7, sans nombre premier et une infinité avec un seul nombre premier.

Nous appelons «**carré composé»**, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ qui ne renferme aucun nombre premier.
Si les n^2 entiers d'un carré composé sont consécutifs, alors nous dirons que ce carré est un **«carré composé parfait».**
Si les n^2 entiers d'un carré composé forment une suite arithmétique de raison r, où r est un entier ≥ 2, alors nous dirons que ce carré est un **«carré hyper-composé».**

Pour tous les ordres n, $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés parfaits.

Voyons maintenant quatre carrés composés parfaits, chacun ayant la plus petite somme :

$$\begin{pmatrix} 119 & 120 & 115 \\ 114 & 118 & 122 \\ 121 & 116 & 117 \end{pmatrix}$$

$$S = 354$$

$$\begin{pmatrix} 524 & 535 & 531 & 536 \\ 538 & 529 & 533 & 526 \\ 537 & 530 & 534 & 525 \\ 527 & 532 & 528 & 539 \end{pmatrix}$$

$$S = 2126$$

$$\begin{pmatrix} 1342 & 1349 & 1336 & 1343 & 1330 \\ 1329 & 1341 & 1348 & 1335 & 1347 \\ 1346 & 1328 & 1340 & 1352 & 1334 \\ 1333 & 1345 & 1332 & 1339 & 1351 \\ 1350 & 1337 & 1344 & 1331 & 1338 \end{pmatrix}$$

$$S = 6700$$

$$\begin{matrix} 19637 & 19654 & 19629 & 19646 & 19621 & 19638 & 19613 \\ 19612 & 19636 & 19653 & 19628 & 19645 & 19620 & 19644 \\ 19643 & 19611 & 19635 & 19652 & 19627 & 19651 & 19619 \\ 19618 & 19642 & 19610 & 19634 & 19658 & 19626 & 19650 \\ 19649 & 19617 & 19641 & 19616 & 19633 & 19657 & 19625 \\ 19624 & 19648 & 19623 & 19640 & 19615 & 19632 & 19656 \\ 19655 & 19630 & 19647 & 19622 & 19639 & 19614 & 19631 \end{matrix}$$

$$S = 137\,438$$

Remarque 1 :

Comment allons-nous prolonger la suite des intervalles (*%)? Nos huit premiers intervalles ont les propriétés suivantes :

a) Deux intervalles consécutifs sont disjoints.
b) Ils ont tous la forme $[p_1 ; p_2]$ où p_1 *et* p_2 sont des nombres premiers avec $p_1 < p_2$.
c) L'intervalle ouvert $]p_1 ; p_2[$ ne contient aucun nombre premier.

d) Si $[p_1 ; p_2]$ et $[p_3 ; p_4]$ sont deux intervalles consécutifs, alors $p_3 > p_2$. Par exemple, nous avons $523 > 127, 1327 > 541, \ldots$

Nous allons poursuivre avec des intervalles qui auront les mêmes propriétés ou presque.

Si l'intervalle qui correspond à $n = 11$, obtenu avec le programme **«Nombres composés»,** respecte les quatre propriétés, alors c'est lui qui sera dans la suite (*%).

Si ce n'est pas le cas, alors les intervalles qui correspondent à $n = 10$ et $n = 11$ pourraient être identiques (cet intervalle serait le premier à contenir à la fois au moins cent entiers composés et cent vingt et un entiers composés, par exemple, il pourrait en contenir cent vingt-trois). Voici ce que nous allons faire :

a) Nous allons prendre l'intervalle $I = [370\,261; 370\,382]$ qui contient 122 entiers consécutifs.
b) Nous allons ensuite trouver son intervalle J^*.
c) J^* sera alors dans la suite (*%).
d) Avec J^*, nous pourrons construire un carré magique d'ordre 11 formé de 121 entiers consécutifs tous composés et un formé de 121 entiers consécutifs dont un seul est premier soit le plus grand entier de J^*.
e) Nous allons laisser de côté le programme «Nombres composés» et continuer d'ajouter d'autres intervalles dans (*%) en nous servant de J^*.

Ces deux intervalles pourraient aussi vérifier $p_3 = p_2$. Nous accepterions alors l'intervalle qui correspond à $n = 11$ dans la suite (*%).

Notez que l'intervalle J^* renferme un seul nombre premier soit le plus grand entier de J^*.

Nous pourrions passer de J^* à J^{**} qui aurait la forme $[p_1 ; p_2]$!!! Comment?

Remarque 2 :

Si nous voulons, par exemple, trouver seize carrés magiques différents presque normaux d'ordre 5 formés de vingt-cinq entiers consécutifs dont un seul est premier, alors comment procéderions-nous? Nous n'allons pas trouver ces intervalles J^* qui sont extrêmement loin. Ceux-ci nous ont permis de régler le problème d'existence mais concrètement, il faut trouver une meilleure façon de procéder.

Avec notre programme «Nombres composés», nous allons compléter le tableau (*%) ci-haut jusqu'à $n = 12$. Ce programme nous permet de trouver des intervalles $[p_1 \; ; \; p_2]$ qui contiennent

au moins k entiers composés situés entre les deux seuls nombres premiers p_1 *et* p_2 de l'intervalle.

Par exemple, pour $n = 5$, nous avons trouvé l'intervalle $[1327\ ;\ 1361]$ qui contient trente-trois entiers composés entre les nombres premiers $1327\ et\ 1361$. Dans la table (*%), nous avons pris les vingt-cinq premiers entiers sur les trente-cinq de l'intervalle d'où le carré magique correspondant. Avec les vingt-cinq derniers entiers, nous pouvions construire un second carré magique.

Maintenant, il est facile de trouver seize carrés magiques différents presque normaux formés de vingt-cinq entiers consécutifs dont un seul est premier. Pour huit carrés, leur nombre premier sera le plus petit entier et pour les huit autres, leur nombre premier sera le plus grand entier.

Voici les intervalles, ceux de gauche, que nous donne le programme «Nombres composés» :

$n = 3$	$[113\ ;\ 127]$	13	$[139\ ;\ 149]$
$n = 4$	$[523\ ;\ 541]$	17	*n'existe pas*
$n = 5$	$[1327\ ;\ 1361]$	33	$[2\ 477\ ;\ 2\ 503]$
$n = 6$	$[15683\ ;\ 15727]$	43	*n'existe pas*
$n = 7$	$[19609\ ;\ 19661]$	51	$[31\ 907\ ;\ 31\ 957]$
$n = 8$	$[31397\ ;\ 31469]$	71	*n'existe pas*
$n = 9$	$[155921\ ;\ 156007]$	85	$[265\ 621\ ;\ 265\ 703]$
$n = 10$	$[370261\ ;\ 370373]$	111	*n'existe pas*
$n = 11$	$[1357201\ ;\ 1357333]$	131	$[3\ 117\ 299\ ;\ 3\ 117\ 421]$
$n = 12$	$[2010733\ ;\ 2010881]$	147	*n'existe pas*
$n = 13$	$[17051707\ ;\ 17051887]$	179	$[27\ 915\ 737\ ;\ 27\ 915\ 907]$
$n = 14$	$[20831323\ ;\ 20831533]$	209	*n'existe pas*
$n = 15$	$[189695659\ ;\ 189695893]$	233	$[519\ 653\ 371\ ;\ 519\ 653\ 597]$

La colonne de gauche nous donne le premier intervalle qui contient **au moins** n^2 entiers composés entre les deux nombres premiers consécutifs. Le nombre qui suit indique le nombre de nombres composés dans l'intervalle qui le précède. La colonne de droite nous donne le premier intervalle qui contient **exactement** n^2 entiers composés entre les deux nombres premiers consécutifs. Nous savons que les intervalles de gauche existent. Quant à ceux de droite, nous savons qu'ils n'existent pas pour les ordres pairs (voir problème 63 de 14.18). **Pour l'instant, nous ne sommes pas certains qu'ils existent pour tous les ordres impairs!!!**

Notez que l'intervalle de droite s'éloigne de plus en plus de celui de gauche. Sans avoir trouvé l'intervalle de gauche pour $n = 17$, voici celui de droite :

$$n = 17 : \quad [1\ 948\ 819\ 133\ ;\ 1\ 948\ 819\ 423]$$

Théorème 14.15.1 :

Soit $[p\ ;\ q]$, un intervalle fermé tel que $p \geq 3\ et\ q$ soient des nombres premiers consécutifs. Alors le nombre d'entiers de cet intervalle est un entier impair. Dans un tel intervalle, il y a donc un nombre impair de nombres composés entre $p\ et\ q$.

Pour la preuve de ce théorème, voir le problème 62 de 14.18. Le théorème explique les «n'existe pas» du tableau ci-haut.

Deuxième preuve du théorème 14.14 :

Nous allons construire les intervalles suivant :

$$
\begin{array}{ll}
n=7: & [50!+2\ ;\ 50!+50] \\
n=8: & [65!+2\ ;\ 65!+65] \\
n=9: & [82!+2\ ;\ 82!+82] \\
\ldots & \\
 & [(n^2+1)!+2\ ;\ (n^2+1)!+n^2+1] \\
\ldots &
\end{array}
$$

Dans chaque intervalle, nous trouvons n^2 entiers composés consécutifs d'où la possibilité de construire un carré composé parfait d'ordre n. Mais chaque intervalle nous permet aussi de construire des carrés composés parfaits d'ordres 3, 4, 5, …, $n-1$ puis un seul d'ordre n.

Chaque intervalle qui suivra nous donnera plusieurs carrés d'ordre n. Donc, nous trouverons une infinité de carrés composés pour tous les ordres $n \geq 3$.

Notez que l'intervalle $[50!+2\ ;\ 50!+50]$, par exemple, nous donne :

1 carré composé parfait d'ordre 7

14 carrés composés parfaits d'ordre 6

25 carrés composés parfaits d'ordre 5

34 carrés composés parfaits d'ordre 4

41 carrés composés parfaits d'ordre 3.

Pour construire un carré composé parfait d'ordre 7, vous pourriez :

a) Construisez un carré normal M d'ordre 7.
b) Ajoutez 1 dans toutes les cases de M pour obtenir M'.
c) Ajoutez 50! dans toutes les cases de M'pour obtenir M''.
d) Le carré M''renferme aucun nombre premier.

Le carré M'' renferme ainsi des entiers gigantesques!!!

Cependant, l'annexe 11 vous indique qu'il suffit de prendre un carré normal d'ordre 7 et d'ajouter dans toutes ses cases le nombre 19 609. Le carré ainsi obtenu ne contiendra aucun nombre premier et tous ses entiers seront de petites tailles.

Troisième preuve du théorème 14.14 :

Pour chaque ordre $n \geq 3$, nous savons qu'il existe une infinité de carrés magiques presque normaux dont au moins un normal. Soit M, un tel carré. Le carré 4M est composé!!!

La troisième preuve nous montre que pour chaque ordre $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés.

Les première et deuxième preuves nous montrent qu'il existe, pour chaque ordre $n \geq 3$, une infinité de carrés composés parfaits.

Une conséquence du théorème 14.15 :

Nous pouvons trouver un intrus pour tous les ordres $n \geq 3$.

Annexe 14 : Preuve du théorème 14.9

Théorème 14.9 :

Soit P_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques de sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale, alors :

$$Dim(P_n) = \frac{n(n-2)}{2} \; si\, n\; pair \qquad Dim(P_n) = \frac{(n-1)^2}{2} \; si\, n\, impair$$

Preuve :

Cas 1 : $n \geq 4$ est pair.

C_1	C_2	C_3		…		$C_{n/2}$	$C_{n/2+1}$		…		C_{n-1}	C_n
u_1	u_2	…	…	…		$u_{n/2}$	$-a_{n/2}$	…	…	…	$-a_2$	$-a_1$
a_1	a_2	…	…	…		$a_{n/2}$	$-u_{n/2}$	…	…	…	$-u_2$	$-u_1$
$-C_n$	$-C_{n-1}$					$-C_{n/2+1}$	$-C_{n/2}$			$-C_3$	$-C_2$	$-C_1$

Décrivons ce carré d'ordre pair $n \geq 4$.

1) Les deux rangées centrales sont en bleu.
2) Les cases des colonnes en vert situées au-dessus des rangées centrales renferment chacune une variable libre. Il y en a donc $(n-1)(n-2)/2$.
3) Appelons C_i, la somme des cases de la colonne i à partir de la gauche avec $1 \leq i \leq n-1$. Ces colonnes sont situées au-dessus des rangées centrales (en bleu).
4) Dans la colonne n, en gris pâle, l'expression située dans chaque case rend nulle la somme des cases de la rangée correspondante.
5) Étant donnée l'antisymétrie centrale, les colonnes en-dessous des rangées centrales ont des sommes de signes contraires.
6) Par exemple, la somme des cases en gris pâle est C_n et la somme des cases en gris foncé est $-C_n$.
7) **En dehors des rangées centrales, toutes les autres sont donc de sommes nulles.**
8) Maintenant, nous allons remplir les deux rangées centrales de sorte que la somme dans chaque colonne du carré d'ordre n soit nulle.
9) Pour cela, nous aurons besoin de $n/2$ nouvelles variables libres, $u_1, u_2, \ldots, u_{n/2}$. Elles sont placées de gauche à droite dans les $n/2$ premières cases.
10) Afin que la somme dans chaque colonne soit nulle, nous remplirons la dernière case avec l'expression a_1 pour la première colonne à gauche, a_2 pour la deuxième, …
11) Par exemple, nous aurons : $C_1 + u_1 + a_1 - C_n = 0$ d'où $a_1 = C_n - C_1 - u_1$.
12) Nous voyons ainsi que a_1 est une expression linéaire des variables libres.
13) Avec l'antisymétrie centrale, nous remplissons les autres cases en bleu.
14) Nous avons maintenant $(n-2)$ rangées de sommes nulles, n colonnes de sommes nulles ainsi que les deux grandes diagonales.
15) Il nous reste à rendre nulle, la somme des cases de la première rangée centrale; la somme des cases de l'autre rangée centrale sera alors nulle elle aussi.
16) Pour ce faire, additionnons les cases de la première rangée centrale et posons cette somme égale à 0. Ainsi, nous pourrons isoler la variable u_1 pour obtenir :

$$u_1 = -(u_2 + u_3 + \ldots + u_{n/2}) - (C_1 + C_2 + \ldots + C_{n/2})$$
$$a_1 = (u_2 + u_3 + \ldots + u_{n/2}) - C_1 - (C_{1+n/2} + C_{2+n/2} + \ldots + C_{n-1})$$

17) Le nombre minimum de variables libres est donc :

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n(n-2)}{2} = Dim(P_n) = \frac{Dim(E_n)}{2}$$

Cas 2 : $n \geq 3$ est impair.

C_1	C_2		$C_{(n-1)/2}$		.....		C_{n-1}	C_n
a_1	a_2	...	$a_{(n-1)/2}$	0	$-a_{(n-1)/2}$	...	$-a_2$	$-a_1$
$-C_n$	$-C_{n-1}$				$-C_{(n-1)/2}$		$-C_2$	$-C_1$

1) Dans les cases grises au-dessus de la rangée centrale, se trouvent $(n-1)^2/2$ variables libres.
2) Dans les cases de la rangée centrale se trouvent les nombres qui nous assurent que la somme des colonnes soit nulle. Par exemple, $C_1 - C_n + a_1 = 0$ d'où $a_1 = C_n - C_1$.
3) Dans la colonne n, nous trouvons dans chaque case en haut de la rangée centrale, un nombre qui nous assure que la somme de la rangée soit nulle.
4) L'antisymétrie centrale nous assure que les rangées, sous la rangée centrale, soient de somme nulle.
5) Ainsi, le carré est magique de somme nulle et possède l'antisymétrie centrale.

6) Le nombre minimum de variables libres est donc :

$$\frac{(n-1)^2}{2} = Dim(P_n) = \frac{Din(E_n)+1}{2}.$$

Annexe 15 : Polynômes rationnels à valeurs entières

Théorème :

Soit donné un polynôme $p(x)$ de degré n à coefficients rationnels dont m est le plus petit dénominateur commun; nous pouvons donc écrire :

$$p(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{m}$$

où les a_i sont des entiers et m, un entier ≥ 1. Si les nombres $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,..., $p(m-1)$ sont des entiers, alors $p(x)$ est un entier quel que soit l'entier x.

preuve :

Nous savons que tout entier peut s'écrire sous la forme :

$$m\,r + k \qquad \text{où } r \text{ parcourt } \mathbb{Z} \text{ et } k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

$$p(m\,r+k) = \frac{a_0 + a_1(m\,r+k) + a_2(m\,r+k)^2 + \ldots + a_n(m\,r+k)^n}{m} = \frac{a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots + a_n k^n + E\,m}{m} =$$

$= p(k) + E$ où E est un entier.

Ainsi, nous voyons que $p(m\,r+k)$ est entier **si et seulement si** $p(k)$ est entier. Enfin, nous pouvons affirmer que si $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,..., $p(m-1)$ sont entiers, alors $p(x)$ est entier pour tout entier x.

Ce théorème nous fournit donc un moyen de connaitre les entiers x qui feront de $p(x)$ un entier.

Enfin, le nombre de cas à regarder est au plus m. Nous verrons dans les exemples qui suivent.

Exemple 1 :

Pour quelles valeurs entières de x, le polynôme $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ prend-il des valeurs entières?

Nous trouvons $m = 12$. Les valeurs de $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,..., $p(11)$ sont respectivement :

$$-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{11}{12}\ ;\ \frac{11}{3}\ ;\ \frac{31}{4}\ ;\ \frac{79}{6}\ ;\ \frac{239}{12}\ ;\ 28\ ;\ \frac{449}{12}\ ;\ \frac{289}{6}\ ;\ \frac{241}{4}\ ;\ \frac{221}{3}\ ;\ \frac{1061}{12}$$

Donc $p(x)$ est entier si et seulement si $x = 12r + 6$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$x = \ldots; -42\ ;\ -30\ ;\ -18\ ;\ -6\ ;\ 6\ ;\ 18\ ;\ 30\ ;\ 42\ ;\ldots$$

Exemple 2 :

Quel que soit l'entier x, montrez que le polynôme $\frac{x^3}{5} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$ ne sera jamais un entier.

Ici, $m = 30$ et $p(0);\ p(1);\ p(2);\ldots;\ p(29)$ ne sont pas entiers. Donc, si x est entier, $p(x)$ ne sera jamais entier.

Exemple 3 :

L'extraordinaire polynôme :

$$p(x) = -1769 + \frac{121409}{28}x - \frac{161307}{40}x^2 + \frac{56981}{30}x^3 - \frac{3981}{8}x^4 + \frac{881}{12}x^5 - \frac{57}{10}x^6 + \frac{19}{105}x^7$$

prend une valeur entière quel que soit l'entier x.

En effet, ici $m = 840$ et $p(0);\ p(1);\ p(2);\ldots;\ p(839)$ sont tous entiers d'où $p(x)$ est entier dès que x est entier.

Annexe 16 : Structure générale des hyper-magiques d'ordre 10

$$\mathrm{a1}$$
$$\mathrm{a10}$$
$$\mathrm{a19}$$
$$\mathrm{a28}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}-\mathrm{a2}-\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{9S}{10}$$
$$\mathrm{a1}+2\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$\mathrm{a10}-2\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{4S}{5}$$
$$\mathrm{a19}+2\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$-2\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}+\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}+\frac{S}{10}$$

Colonne 1

$$\mathrm{a2}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a10}-\mathrm{a2}+\frac{2S}{5}$$
$$\mathrm{a1}-\mathrm{a19}+\mathrm{a2}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+\frac{2S}{5}$$
$$2\mathrm{a1}+\mathrm{a10}+\mathrm{a19}+2\mathrm{a2}+\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\frac{9S}{10}$$
$$-2\mathrm{a1}-3\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{6S}{5}$$
$$\mathrm{a1}-\mathrm{a10}+3\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a19}-3\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{6S}{5}$$
$$\mathrm{a1}+3\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$\mathrm{a10}+\mathrm{a19}-2\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{3S}{10}$$

Colonne 2

$$\mathrm{a3}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a10}-\mathrm{a3}$$
$$-\mathrm{a1}+\mathrm{a19}+\mathrm{a3}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a28}-\mathrm{a3}$$
$$-2\mathrm{a1}-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}-\mathrm{a2}-\mathrm{a28}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{9S}{10}$$
$$2\mathrm{a1}+2\mathrm{a2}+\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}+\mathrm{a10}-2\mathrm{a2}-\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{4S}{5}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a19}+2\mathrm{a2}+\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}-2\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}+\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}+\frac{S}{10}$$

Colonne 3

$$\mathrm{a4}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a10}-\mathrm{a4}+\frac{2S}{5}$$
$$\mathrm{a1}-\mathrm{a19}+\mathrm{a4}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a28}-\mathrm{a4}+\frac{2S}{5}$$
$$2\mathrm{a1}+\mathrm{a10}+\mathrm{a19}+\mathrm{a2}+\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\frac{9S}{10}$$
$$-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-3\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{6S}{5}$$
$$\mathrm{a1}-\mathrm{a10}+2\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+3\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a19}-2\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-3\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\frac{6S}{5}$$
$$\mathrm{a1}+2\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+2\mathrm{a3}+3\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$\mathrm{a10}+\mathrm{a19}-\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{3S}{10}$$

Colonne 4

$$\mathrm{a5}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a10}-\mathrm{a5}$$
$$-\mathrm{a1}+\mathrm{a19}+\mathrm{a5}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a28}-\mathrm{a5}$$
$$-2\mathrm{a1}-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}-\mathrm{a2}-\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\frac{9S}{10}$$
$$2\mathrm{a1}+2\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}+\mathrm{a10}-2\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{4S}{5}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a19}+2\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}-2\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{4S}{5}$$
$$-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}+\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+\frac{S}{10}$$

Colonne 5

$$-\mathrm{a1}-2\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+S$$
$$-\mathrm{a10}+2\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{3S}{5}$$
$$-\mathrm{a19}-2\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+S$$
$$2\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{3S}{5}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a10}+\mathrm{a19}-\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{S}{10}$$
$$\frac{1}{5}(-5\mathrm{a1}+S)$$
$$\frac{1}{5}(-5\mathrm{a10}+S)$$
$$\frac{1}{5}(-5\mathrm{a19}+S)$$
$$\frac{1}{5}(-5\mathrm{a28}+S)$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a10}+\mathrm{a19}+\mathrm{a2}+\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\frac{7S}{10}$$

Colonne 6

$$2\mathrm{a1}+3\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-S$$
$$-\mathrm{a1}+\mathrm{a10}-3\mathrm{a2}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+S$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a19}+3\mathrm{a2}+2\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-S$$
$$-\mathrm{a1}-3\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-2\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+S$$
$$-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}+2\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\frac{S}{10}$$
$$\frac{1}{5}(-5\mathrm{a2}+S)$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a10}+\mathrm{a2}-\frac{S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}+\mathrm{a19}-\mathrm{a2}+\frac{S}{5}$$
$$\mathrm{a1}+\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-\frac{S}{5}$$
$$-2\mathrm{a1}-\mathrm{a10}-\mathrm{a19}-2\mathrm{a2}-\mathrm{a28}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{11S}{10}$$

Colonne 7

$$-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a2}-\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+S$$
$$\mathrm{a1}-\mathrm{a10}+2\mathrm{a2}+\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{3S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a19}-2\mathrm{a2}-\mathrm{a3}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+S$$
$$\mathrm{a1}+2\mathrm{a2}-\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+2\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\frac{3S}{5}$$
$$\mathrm{a10}+\mathrm{a19}-\mathrm{a2}+\mathrm{a28}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}+\frac{S}{10}$$
$$\frac{1}{5}(-5\mathrm{a3}+S)$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a10}+\mathrm{a3}+\frac{S}{5}$$
$$\mathrm{a1}-\mathrm{a19}-\mathrm{a3}+\frac{S}{5}$$
$$-\mathrm{a1}-\mathrm{a28}+\mathrm{a3}+\frac{S}{5}$$
$$2\mathrm{a1}+\mathrm{a10}+\mathrm{a19}+\mathrm{a2}+\mathrm{a28}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}-\frac{7S}{10}$$

Colonne 8

$2a1 + 2a2 + 2a3 + 3a4 + 2a5 - S$	$-2a1 - 2a2 - 2a3 - 2a4 - a5 + S$
$-a1 + a10 - 2a2 - 2a3 - 3a4 - 2a5 + S$	$a1 - a10 + 2a2 + 2a3 + 2a4 + a5 - \frac{3S}{5}$
$a1 + a19 + 2a2 + 2a3 + 3a4 + 2a5 - S$	$-a1 - a19 - 2a2 - 2a3 - 2a4 - a5 + S$
$-a1 - 2a2 + a28 - 2a3 - 3a4 - 2a5 + S$	$a1 + 2a2 - a28 + 2a3 + 2a4 + a5 - \frac{3S}{5}$
$-a10 - a19 + a2 - a28 + a3 + 2a4 + a5 - \frac{S}{10}$	$a10 + a19 - a2 + a28 - a3 - a4 + \frac{S}{10}$
$\frac{1}{5}(-5a4 + S)$	$\frac{1}{5}(-5a5 + S)$
$a1 + a10 + a4 - \frac{S}{5}$	$-a1 - a10 + a5 + \frac{S}{5}$
$-a1 + a19 - a4 + \frac{S}{5}$	$a1 - a19 - a5 + \frac{S}{5}$
$a1 + a28 + a4 - \frac{S}{5}$	$-a1 - a28 + a5 + \frac{S}{5}$
$-2a1 - a10 - a19 - a2 - a28 - a3 - 2a4 - a5 + \frac{11S}{10}$	$2a1 + a10 + a19 + a2 + a28 + a3 + a4 - \frac{7S}{10}$
Colonne 9	Colonne 10

Les dix colonnes sont numérotées de gauche à droite.

Les variables libres de cette structure sont : a1, a2, a3, a4, a5, a10, a19, a28 et S.

Afin d'obtenir un hyper-magique formé exclusivement d'entiers, il faudra attribuer une valeur entière à chacune des huit variables différentes de S et, que S soit un entier multiple de 10.

Voici notre troisième hyper-magique presque normal d'ordre 10. Sa somme magique est S = 2080. Les deux premiers étaient de sommes 10 440 et 2 740. Ils ne sont pas illustrés ici.

Nous avons S/5 = 416, 2S/5 = 832 pour l'hyper-magique et 9S/10 = 1872 pour l'équerre. Le plus petit entier est 1 et le plus grand, 415.

M =

218	217	220	209	259	52	383	54	375	93
257	140	255	148	216	305	92	303	100	264
240	195	242	187	281	30	405	32	397	71
166	231	164	239	125	396	1	394	9	355
86	349	88	341	127	184	251	186	243	225
364	33	362	41	323	198	199	196	207	157
111	324	113	316	152	159	276	161	268	200
386	11	384	19	345	176	221	174	229	135
20	415	22	407	61	250	185	252	177	291
232	165	230	173	191	330	67	328	75	289

Pour reproduire le carré M, vous avez besoin de connaitre neuf de ses nombres seulement. Quels sont-ils?

Nous allons tenter de trouver un autre hyper-magique d'ordre 10 avec une plus petite somme.

Voir les problèmes 25 et 26 de 7.4.

Annexe 17 : Réflexion sur les rotations d'un carré

Voir dans la Partie 2 : le glossaire et les pages 15 et 16 du chapitre 4.

Nous avons déjà posé $R^2(R_*(A)) = R_*^2(A)$. Mais le résultat est-il le même si nous avons $R_*(R^2(A))$? Nous allons montrer que :

1) $R^2(R_*(A)) = R_*(R^2(A))$
2) $R^1(R_*(A)) \neq R_*(R^1(A))$

Mais avant de démontrer ces résultats, voyons la notation suivante : $R^1(R_*(A)) = R_*^1(A)$. À cause de 2), il nous faut une autre façon d'écrire $R_*(R^1(A))$. Nous aurions, par exemple,

$$(1) \qquad \begin{aligned} R^1(R_*(A)) &= R_*^1(A) \\ R_*(R^1(A)) &= R_1^*(A) \end{aligned}$$

D'où $R_*^1(A) \neq R_1^*(A)$ mais $R_*^2(A) = R_2^*(A)$.

Finalement, pourquoi ne pas employer (1)?

Pour démontrer 1), nous allons nous donner un carré A d'ordre n et considérer ses quatre coins :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

Puis trouvons ses équivalents :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$$

Démontrons 1) :

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \dots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R^2} \begin{pmatrix} c & & d \\ u_n & \dots & u_1 \\ b & & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \begin{pmatrix} d & & c \\ u_1 & \dots & u_n \\ a & & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \dots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \begin{pmatrix} b & & a \\ u_n & \dots & u_1 \\ c & & d \end{pmatrix} \xrightarrow{R^2} \begin{pmatrix} d & & c \\ u_1 & \dots & u_n \\ a & & b \end{pmatrix}$$

Démontrons 2) :

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \dots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R^1} \begin{pmatrix} b & u_n & c \\ & \vdots & \\ a & u_1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \begin{pmatrix} c & u_n & b \\ & \vdots & \\ d & u_1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \dots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \begin{pmatrix} b & & a \\ u_n & \dots & u_1 \\ c & & d \end{pmatrix} \xrightarrow{R^1} \begin{pmatrix} a & u_1 & d \\ & \vdots & \\ b & u_n & c \end{pmatrix}$$

Mais qu'arrive-t-il avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$? Notez que ce carré n'est pas magique!!!

Nous trouvons $R_*^1(A) = R_1^*(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ce résultat, qui contredit $R_*^1(A) \neq R_1^*(A)$, est dû au fait qu'il y a des répétitions dans A. C'est pourquoi nous allons exiger la condition suivante sur A :

Le carré A doit contenir des nombres différents deux à deux.

Les propriétés 1) et 2) sont donc vérifiées si A est presque normal.

Annexe 18 : Carrés magiques d'ordre 3 avec 9 nombres premiers consécutifs

Reprenons ce carré premier parfait d'ordre 3 du chapitre 10, obtenu d'Harry L. Nelson en 1988.

1 480 028 201	1 480 028 129	1 480 028 183
1 480 028 153	1 480 028 171	1 480 028 189
1 480 028 159	1 480 028 213	1 480 028 141

Harry L. Nelson, 1988

Harry L. Nelson a été le premier à trouver un carré premier parfait d'ordre 3. Il est formé de neuf nombres premiers de dix chiffres. De ces neuf nombres premiers consécutifs, 1 480 028 129 est le plus petit. Dans la liste des nombres premiers, il occupe le rang 73 780 392.

Comme pour l'annexe 8, nous avons construit un programme dans MAPLE qui regarde toutes les suites de neuf nombres premiers consécutifs et qui nous donne celles qui conduisent à des carrés magiques ainsi que ces carrés. Ce programme se nomme **«Premiers parfaits-3».**

Nelson, en 1988, a-t-il trouvé le carré premier parfait de la plus petite somme magique?

Celui-ci a été obtenu avec la suite 73 780 392.

Nous allons tenter ici de montrer :

a) Que Nelson a trouvé celui de la plus petite somme.
b) Que nous venons de trouver celui de la plus petite somme.

Une suite de neuf nombres premiers consécutifs est une **suite favorable** si la somme des neuf nombres de la suite est divisible par 9. En effet, pour former un carré magique d'ordre 3 avec ceux-ci, il faut que cette somme T soit d'abord divisible par 3. Puisque le centre u est donné par S/3, alors T = 3S et S = 3u d'où T = 9u. C'est une condition nécessaire pour que le carré magique existe.

Une suite favorable qui nous permet de construire un carré magique est une **suite magique.**

Grâce à Nelson, nous savons que la suite de rang 73 780 392 est une suite magique.

La grande question :

Pouvons-nous trouver une suite magique de rang < 73 780 392 ?

Avant d'utiliser notre programme afin de répondre à cette grande question, voyons de plus près les suites favorables.

Le rapport $\frac{sf(k)}{k} = 0{,}1073634$ lorsque $k = 500\ 000\ 000.$ Ce nombre est voisin de $\frac{1}{9}$. Nous pouvons affirmer qu'en moyenne, avec les $500\ 000\ 000$ premières suites, une suite sur neuf est favorable.

Voyons le tableau 1 suivant, dans lequel la première colonne à gauche indique le nombre de suites considérées à partir de la suite 1, celle qui commence par 2.

La deuxième colonne indique le nombre, noté $sf(k),$ de suites favorables parmi les suites allant de 1 à k.

La troisième colonne nous donne le rapport $\frac{sf(k)}{k}$.

Dans ce tableau, nous voyons que le rapport augmente toujours. Il se rapproche de $0{,}11111...$ mais très lentement. **C'est une observation intuitive et expérimentale!!!**

Avons-nous $\lim_{k\to\infty} \frac{sf(k)}{k} = \frac{1}{9} = 0{,}11111...???$

De toute façon, une suite favorable sur neuf suites semble être une bonne estimation du nombre de suites favorables parmi les k premières suites de neuf nombres premiers consécutifs!!! Par exemple, avec les 9 000 000 premières suites, nous devrions avoir environ 1 000 000 de suites favorables. Précisément, nous en trouvons 952 783.

De la suite1 à la suite k	$sf(\mathrm{k})$	$\frac{sf(k)}{k}$
1000	86	0,086
10 000	961	0,0961
100 000	10 163	0,10163
200 000	20 460	0,1023
300 000	30 919	0,10306
400 000	41 265	0,10316
500 000	51 764	0,103528
1 000 000	104 589	0,104589
2 000 000	209 874	0,104937
10 000 000	1 059 198	0,1059198
15 000 000	1 592 145	0,106143
20 000 000	2 124 940	0,106247
25 000 000	2 658 027	0,106321
30 000 000	3 191 563	0,106385
35 000 000	3 724 907	0,1064259
40 000 000	4 260 062	0,106502
100 000 000	10 687 787	0,10687787
250 000 000	26 795 962	0,1071838
400 000 000	42 920 272	0,10730068
500 000 000	53 681 709	0,1073634
800 000 000	85 986 889	0,1074836
1 100 000 000	118 312 300	0,1075566
1 400 000 000	150 649 556	0,1076068
1 700 000 000	182 985 395	0,10763847
2 000 000 000	215 336 046	0,10766802

Tableau 1

Avec notre programme **«Premiers parfaits-3»,** nous allons maintenant partir à la recherche d'une suite magique dont le rang sera le plus petit possible d'où la plus petite somme magique.

Regardons les 75 000 000 premières suites. Nous constatons qu'il n'y a qu'**une seule suite magique** soit la suite de rang **73 780 392** qui nous donne huit carrés premiers parfaits donc un seul primitif. De cette suite, nous retrouvons le meilleur carré premier parfait d'ordre 3, le carré suivant trouvé par Nelson en 1988. Sa somme magique est donc la plus petite possible.

(1)

1 480 028 183	1 480 028 189	1 480 028 141
1 480 028 129	1 480 028 171	1 480 028 213
1 480 028 201	1 480 028 153	1 480 028 159

Carré premier parfait associé à la suite 73 780 392

Ensuite, nous regardons les suites au-delà de la suite 75 000 000. Nous avons rencontré sept suites magiques qui sont de rangs : 91 233 987, 243 732 111, 261 821 730, 268 755 906, 281 692 209, 286 252 067, 434 056 891. Nous avons donc ici les rangs des huit premières suites magiques : 73 780 392, 91 233 987, 243 732 111, 261 821 730, 268 755 906, 281 692 209, 286 252 067, 434 056 891.

(2)

1 850 590 111	1 850 590 117	1 850 590 069
1 850 590 057	1 850 590 099	1 850 590 141
1 850 590 129	1 850 590 081	1 850 590 087

Carré premier parfait associé à la suite 91 233 987

(3)

5 196 186 001	5 196 186 007	5 196 185 959
5 196 185 947	5 196 185 989	5 196 186 031
5 196 186 019	5 196 185 971	5 196 185 977

Carré premier parfait associé à la suite 243 732 111

(4)

5 601 567 241	5 601 567 247	5 601 567 199
5 601 567 187	5 601 567 229	5 601 567 271
5 601 567 259	5 601 567 211	5 601 567 217

Carré premier parfait associé à la suite 261 821 730

(5)

5 757 284 551	5 757 284 557	5 757 284 509
5 757 284 497	5 757 284 539	5 757 284 581
5 757 284 569	5 757 284 521	5 757 284 527

Carré premier parfait associé à la suite 268 755 906

(6)

6 048 371 083	6 048 371 089	6 048 371 041
6 048 371 029	6 048 371 071	6 048 371 113
6 048 371 101	6 048 371 053	6 048 371 059

Carré premier parfait associé à la suite 281 692 209

(7)

6 151 077 323	6 151 077 329	6 151 077 281
6 151 077 269	6 151 077 311	6 151 077 353
6 151 077 341	6 151 077 293	6 151 077 299

Carré premier parfait associé à la suite 286 252 067

(8)

9 517 122 313	9 517 122 319	9 517 122 271
9 517 122 259	9 517 122 301	9 517 122 343
9 517 122 331	9 517 122 283	9 517 122 289

Carré premier parfait associé à la suite 434 056 891

Ce sont les huit meilleurs carrés premiers parfaits d'ordre 3, aux équivalents près.

Enfin, le tableau 2 suivant nous indique le rang des suites magiques, le nombre de carrés premiers parfaits primitifs obtenus et la somme magique des carrés correspondants. Ce tableau nous montre les huit plus petites suites magiques d'où les huit carrés premiers parfaits ayant les huit plus petites sommes.

Rang de la suite magique	Nombre de carrés premiers parfaits primitifs	Somme magique
73 780 392	1	4 440 084 513
91 233 987	1	5 551 770 297
243 732 111	1	15 588 557 967
261 821 730	1	16 804 701 687
268 755 906	1	17 271 853 617
281 692 209	1	18 145 113 213
286 252 067	1	18 453 231 933
434 056 891	1	28 551 366 903

Tableau 2

C'est donc Harry L. Nelson qui a trouvé, en 1988, le premier carré premier parfait d'ordre 3. À l'aide d'un ordinateur CRAY, il a trouvé vingt deux suites magiques!!!

Puis, en janvier 2018, Claude Bégin et Claude St-Hilaire trouvent, avec «Premiers parfaits-3», huit carrés premiers parfaits d'ordre 3 soient le premier carré de Nelson et ses sept équivalents.

Toujours en janvier 2018, ils trouvent sept autres suites magiques qui conduisent aux carrés (2), (3), (4), (5), (6), (7) et (8) ci-haut.

Après les huit premières suites magiques qui conduisent aux carrés (1) à (8), nous vous présentons les carrés (21) et (22) obtenus avec les suites 21 et 22 trouvées par Harry L. Nelson. Ils correspondent aux suites de neuf nombres premiers consécutifs de rangs 1 042 374 622 et 2 090 654 856.

Nous avons trouvé ces deux derniers carrés sur le site de Harvey Heinz. Les voici :

(21)

23 813 359 751	23 813 359 673	23 813 359 667
23 813 359 613	23 813 359 697	23 813 359 781
23 813 359 727	23 813 359 721	23 813 359 643

Carré premier parfait associé à la suite 1 042 374 622 soit la suite 21 de Nelson

(22)

49 285 771 793	49 285 771 739	49 285 771 721
49 285 771 679	49 285 771 751	49 285 771 823
49 285 771 781	49 285 771 763	49 285 771 709

Carré premier parfait associé à la suite 2 090 654 856 soit la suite 22 de Nelson

Nous savons que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont des carrés arithmétiques et peuvent donc être obtenus avec le fichier «Ordre 3» (voir problèmes 21 et 22 de 4.3.8 et problème 20 de 11.4). Le tableau suivant nous indique comment construire les dix carrés ci-haut.

Pour les construire, il suffit, dans «Ordre 3» dans MATHEMATICA ou EXCEL, d'attribuer aux variables a, r et t, les valeurs du tableau suivant. Il en est de même avec le programme CM-arith-2 k + 1 dans MAPLE qui vous permet de construire tous les carrés magiques d'ordre 3.

Rang de la suite	a	r	t
(1) 73 780 392	1 480 028 129	12	30
(2) 91 233 987	1 850 590 057	12	30
(3) 243 732 111	5 196 185 947	12	30
(4) 261 821 730	5 601 567 187	12	30
(5) 268 755 906	5 757 284 497	12	30
(6) 281 692 209	6 048 371 029	12	30
(7) 286 252 067	6 151 077 269	12	30
(8) 434 056 891	9 517 122 259	12	30
(21) 1 042 374 622	23 813 359 613	54	30
(22) 2 090 654 856	49 285 771 679	42	30

Tableau 3

Poursuivons en mentionnant qu'il existe au moins deux carrés premiers parfaits d'ordre 3 formés de neuf nombres premiers consécutifs formant une suite arithmétique!!! Ils ont été trouvés en mars 1998 par Manfred Toplic d'Autriche.

Plus précisément, Manfred Toplic a trouvé une suite arithmétique de raison 210 formée de dix nombres premiers consécutifs. **Tout simplement extraordinaire!!!** Voici ces deux carrés trouvés sur le site de Harvey Heinz : Prime magic squares :

p + 1470	p	p + 1050
p + 420	p + 840	p + 1260
p + 630	p + 1680	p + 210

p + 1680	p + 210	p + 1260
p + 630	p + 1050	p + 1470
p + 840	p + 1890	p + 420

Celui de gauche contient les neuf premiers nombres premiers de cette suite tandis que celui de droite contient les neuf derniers. Le nombre premier p est formé de 93 chiffres!!!

p = 100 99697 24697 14247 63778 66555 87969 84032 95093 24689 19004 18036 03417 75890 43417 03348 88215 90672 29719.

Nous vous suggérons fortement de consulter l'excellent site : Prime Magic Squares d'Harvey Heinz.

Réflexion sur le nombre premier p ci-haut :

Sommes-nous certains à 100% que le nombre p ci-haut, formé de 93 chiffres, est bien un nombre premier?

La certitude est-elle absolue?

Théorème 1:

Si un carré magique d'ordre 3 contient **neuf nombres premiers consécutifs,** alors sa somme magique vérifie $S \geq 4\ 440\ 084\ 513$.

De plus, aux équivalents près, il existe un seul carré de somme $4\ 440\ 084\ 513$ soit le carré (1).

La case centrale d'un tel carré doit contenir un nombre premier $\geq 1\ 480\ 028\ 171$.

Rappelons ces trois théorèmes pour les ordres de 4 à 8 vus au chapitre 10 :

Théorème 10.3

Si un carré magique d'ordre 4 renferme **seize nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 258$.

De plus, nous savons qu'il existe, aux équivalents près, quatre carrés de somme $S = 258$.

Théorème 10.5 :

Si un carré magique d'ordre 5 renferme **vingt-cinq nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 313$.

De plus, nous connaissons des carrés premiers parfaits de somme $S = 313$.

Théorème 10. 6 :

La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 6 vérifie $S \geq 484$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 6 de somme $S = 484$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 7 vérifie $S \geq 797$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 7 de somme $S = 797$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 8 vérifie $S \geq 2016$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 8 de somme $S = 2016$.

Le tableau 3 de la page 8 nous indique que les carrés (2), (3), (4), (5), (6), (7) et (8) proviennent tous du carré (1) et ce, en ajoutant un même entier pair 2m dans toutes les cases de celui-ci.

Appelons S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 la suite des 9 nombres premiers consécutifs des carrés (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) et (8) respectivement. Rappelons que si M est un carré magique, alors M + k est le carré magique obtenu de M en ajoutant le nombre k dans toutes ses cases.
D'où le tableau 4 suivant :

$$S_2 = S_1 + 370\,561\,928$$
$$S_3 = S_1 + 3\,716\,157\,818$$
$$S_4 = S_1 + 4\,121\,539\,058$$
$$S_5 = S_1 + 4\,277\,256\,368$$
$$S_6 = S_1 + 4\,568\,342\,900$$
$$S_7 = S_1 + 4\,671\,049\,140$$
$$S_8 = S_1 + 8\,037\,094\,130$$

Tableau 4

Nous venons de trouver huit suites extraordinaires de 9 nombres premiers consécutifs. Les sept dernières étant obtenues de la première en ajoutant un même entier positif (qui doit être pair) à tous les nombres de celle-ci. **Ce qui est extraordinaire!!!**

D'abord, que les 9 nouveaux nombres soient premiers est déjà tout un exploit!!! De plus, qu'ils soient consécutifs est encore un autre exploit!!! Voyons la remarque suivante.

Remarque :

Nous avons pris la suite des 9 nombres premiers consécutifs allant de 23 à 59 puis nous avons ajouté l'entier 2 m à chacun des 9 nombres premiers. Nous voulons obtenir ainsi une nouvelle suite de 9 nombres premiers et pour y arriver, il a fallu que m = 808 290 donc 2 m = 1 616 580. Pour toutes les valeurs de m inférieures à 808 290, nous avons obtenu au mieux une suite qui contenait 8 nombres premiers.

De plus, cette nouvelle suite obtenue en ajoutant 1 616 580 est formée de 9 nombres premiers consécutifs!!!

Nous avons fait varier m de 1 à 600 000 000 et nous avons trouvé seulement 4 nouvelles suites de 9 nombres premiers (avec m = 808 290, m = 3 158 295, m = 167 194 125 et m = 558 226 305). Dans les quatre cas, les 9 nombres premiers sont consécutifs et les quatre suites ne sont pas favorables.

Si les 9 nombres premiers de la suite de départ sont consécutifs, alors en ajoutant 2 m à tous, nous avons de bonnes chances de trouver, s'ils sont premiers, 9 nombres premiers consécutifs.

Ensuite, nous avons pris une suite de 16 nombres premiers consécutifs allant de 23 à 89 puis nous avons ajouté l'entier 2 m à chacun des 16 nombres premiers. Nous voulons obtenir ainsi une nouvelle suite de 16 nombres premiers. Nous avons fait varier m de 1 à 2 600 000 000 mais nous n'avons obtenu aucune nouvelle suite de 16 nombres premiers. Cependant, avec m =

808 290, nous obtenons une suite qui contient 11 nombres premiers, avec m = 3 158 295, nous trouvons une suite qui contient 12 nombres premiers, avec m = 167 194 125, nous trouvons une suite qui contient 11 nombres premiers et avec m = 558 226 305, nous en trouvons 10.

Nous avons fait de même avec la **suite magique** allant de 31 à 101. Nous avons fait varier m de 1 à 6 000 000 000 mais nous n'avons obtenu aucune nouvelle suite de 16 nombres premiers.

Puis, je reçois de Christian Boyer 27 suites magiques formées de 9 nombres premiers consécutifs donc 27 carrés premiers parfaits. Vous les trouverez dans le tableau 5 un peu plus bas. Ces suites proviennent du site http://oeis.org/A256891 et ont été trouvées par Arkadiusz Wesolowski.

Rappelons que tous les carrés magiques d'ordre 3 proviennent de la structure générale suivante, laquelle n'est pas unique :

$$(*) \qquad \begin{matrix} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{matrix}$$

Dans la première colonne à gauche dans le tableau 5 suivant, nous trouvons le numéro de la suite et son rang.

Dans les trois colonnes suivantes, nous trouvons les valeurs de $a, r \; et \; t$ qui vont permettre la construction du carré magique à partir de (*). Le nombre a est le plus petit des 9 nombres premiers consécutifs de la suite.

Dans la dernière colonne, nous trouvons le nombre d. Par exemple, prenons la suite de la rangée (4). Nous avons d = 4 121 539 058. Pour obtenir la suite (4), il suffit d'ajouter à tous les nombres de la suite (1), l'entier d.

Quant à la suite (1), c'est une suite de 9 nombres premiers consécutifs qui commence par :

a = 1 480 028 129

Notez que le rang d'une suite de n^2 nombres premiers consécutifs est le rang de son plus petit nombre premier.

Donc, pour construire le carré magique (4), il suffit de prendre le carré magique (1) formé de 9 nombres premiers consécutifs et d'ajouter le nombre d = 4 121 539 058 à chaque nombre du carré (1).

Soient A et B, deux carrés premiers parfaits. Nous dirons que A et B sont des **carrés premiers parfaits cousins** si et seulement si A – B est trivial.

Il est clair que si A – B est trivial, alors B – A est trivial donc si A et B sont premiers parfaits cousins, alors B et A le sont aussi.

Il existe des carrés premiers parfaits cousins d'ordre 3.

Le tableau 5 qui suit nous donne un premier groupe de 190 paires de carrés premiers parfaits cousins et un second groupe de 6 paires de carrés premiers parfaits cousins.

Les 20 rangées roses du tableau 5 nous donnent les $\binom{20}{2} = 190$ paires et les 4 rangées vertes nous donnent les $\binom{4}{2} = 6$ paires.

Nous avons ici le plus grand groupe de carrés premiers parfaits cousins connu soit celui formé des 20 carrés magiques correspondant aux 20 rangées du tableau 5 dans lesquelles nous trouvons r = 12 et t = 30.

La grande question :

Existe-t-il des carrés premiers parfaits cousins d'ordres $n \geq 4$?

Pour l'instant, nous n'en connaissons aucun, même avec des milliards d'essais!!!

Puis, je reçois de Christian Boyer l'article d'Harry L. Nelson dans la revue «J. Recreational Mathematics», Vol. 20(3), 1988 dans lequel il nous présente ses 22 suites magiques formées de 9 nombres premiers consécutifs d'où 22 carrés premiers parfaits. Dans le tableau 5, Nelson a d'abord trouvé les suites de (1) à (10) puis les suites (12), (14), (15), (16), (18), (19), (21), (22), (24) et (26). Il a ensuite trouvé les suites (11) et (17).

Les 27 suites du tableau 5 ont été trouvées par Arkadiusz Wesolowski. Ce dernier a retrouvé les 22 suites de Nelson plus cinq autres.

Quant à nous, avec notre programme« Premier parfait-3», nous avons trouvé les huit premières suites du tableau 5. Nous savons que ce sont les huit premières. **Parmi les suites de rang 1 au rang 434 056 891, il n'y a que ces huit suites magiques. Elles sont donc d'une grande rareté!!!**

Rang de la suite	a	r	t	d
(1) 73 780 392 N	1 480 028 129	12	30	
(2) 91 233 987 N	1 850 590 057	12	30	370 561 928
(3) 243 732 111 N	5 196 185 947	12	30	3 716 157 818
(4) 261 821 730 N	5 601 567 187	12	30	4 121 539 058
(5) 268 755 906 N	5 757 284 497	12	30	4 277 256 368
(6) 281 692 209 N	6 048 371 029	12	30	4 568 342 900
(7) 286 252 067 N	6 151 077 269	12	30	4 671 049 140
(8) 434 056 891 N	9 517 122 259	12	30	8 037 094 130
(9) 842 207 042 N	19 052 235 847	12	30	17 572 207 718
(10) 902 344 164 N	20 477 868 319	12	30	18 997 840 190
(11) 1 042 374 622 N	23 813 359 613	54	30	
(12) 1 051 311 615 N	24 026 890 159	12	30	22 546 862 030
(13) 1 164 898 483	26 748 150 199	84	30	
(14) 1 238 594 408 N	28 519 991 387	12	30	27 039 963 258
(15) 1 499 228 081 N	34 821 326 119	12	30	33 341 297 990
(16) 1 892 656 056 N	44 420 969 909	12	30	42 940 941 780
(17) 2 090 654 856 N	49 285 771 679	42	30	
(18) 3 078 816 357 N	73 827 799 009	12	30	72 347 770 880
(19) 3 084 687 241 N	73 974 781 889	12	30	72 494 753 760
(20) 3 094 505 961	74 220 519 319	42	30	24 934 747 640
(21) 3 184 881 661 N	76 483 907 837	12	30	75 003 879 708
(22) 3 187 929 454 N	76 560 277 009	12	30	75 080 248 880
(23) 3 330 758 121	80 143 089 599	42	30	30 857 317 920
(24) 3 559 417 516 N	85 892 025 227	12	30	84 411 997 098
(25) 3 688 049 402	89 132 925 737	42	30	39 847 154 058
(26) 3 940 838 317 N	95 515 449 037	12	30	94 035 420 908
(27) 4 117 163 273	99 977 424 653	18	60	

Tableau 5

Dans le tableau 5, la lettre N signifie qu'Harry L. Nelson a été le premier à trouver cette suite.

Avec les 27 suites magiques de 9 nombres premiers consécutifs d'Arkadiusz Wesolowski, il fallait construire les 27 carrés magiques associés à ces suites mais comment? Pour cela, il suffit de poser a = le plus petit nombre de la suite puis en construisant le tableau arithmétique correspondant à chaque suite, nous trouvons le r > 0 et le t > 0 qui déterminent avec a, le carré magique. Rappelons qu'une suite de n^2 nombres, $n \geq 3$, est dite magique si nous pouvons construire un carré magique avec ses n^2 nombres.

Si le carré magique d'ordre 3 existe, alors son tableau arithmétique existe et réciproquement. Puisque les 27 carrés magiques de Wesolowski existent, alors nous pouvons construire un tableau arithmétique pour chacun, lequel nous permet de trouver r et t. Mais a n'est pas toujours le plus petit nombre de la suite. Alors, deux valeurs différentes de a peuvent-elles nous conduire à deux carrés magiques formés des mêmes nombres? La réponse est oui.

Voyons cela de plus près.

Théorème 2

Soit M, un carré magique d'ordre 3 qui contient m, son seul plus petit nombre. Alors, m ne peut pas être situé sur les grandes diagonales de M.

Preuve :

Nous devons montrer que dans la structure générale (*) des carrés magiques d'ordre 3, les nombres a + 2r + t, a + r + 2t, a + r + t, a + r et a + t ne peuvent pas être le plus petit nombre.

Si a + 2r + t est le plus petit, alors nous aurons :

a + 2r + t < a + 2r d'où t < 0 puis a + 2r + t < a + 2r + 2t d'où t > 0. Contradiction!!!

Si a + r + 2t est le plus petit, alors nous aurons :

a + r + 2t < a + 2r + 2t d'où r > 0 puis a + r + 2t < a + 2t d'où r < 0. Contradiction!!!

Si a + r est le plus petit, alors nous aurons :

a + r < a d'où r < 0 puis a + r < a + 2r d'où r > 0. Contradiction!!!

Si a + t est le plus petit, alors nous aurons :

a + t < a d'où t < 0 puis a + t < a + 2t d'où t > 0. Contradiction!!!

Si a + r + t est le plus petit, alors nous aurons :

a + r + t < a + r d'où t < 0 puis a + r + t < a + r + 2t d'où t > 0. Contradiction!!!

Le plus petit nombre ne peut donc pas se situer sur les grandes diagonales.

Le plus petit nombre se situe donc dans une des cases blanches du carré :

M =

m		

Supposons que l'unique nombre m du carré d'ordre 3 soit situé dans une des quatre cases blanches. Si c'est la case blanche gauche, alors le carré magique peut être construit avec a = m et r et t seront déterminés avec a + r et a + t. Si m se situe dans une autre case blanche, alors nous pourrons toujours trouver un équivalent de M qui présentera m dans la case blanche gauche. Le nouveau carré est un équivalent de M donc contient les mêmes nombres que M. Dans l'exemple qui suit, l'équivalent de M s'obtient avec une rotation de 90° de M.

	m	

→

m		

Nous aurons alors un nouveau carré, l'équivalent de M, qui sera défini avec un nouveau a et r et t, déterminés avec a + r et a + t. La structure générale (*) des carrés magiques d'ordre 3 nous indique la position des nombres a, a + r et a + t.

		a + r
a		
		a + t

Voyons un exemple :

71	5	101
89	59	29
17	113	47

Carré magique A

101	29	47
5	59	113
71	89	17

Carré magique B

$a = 89$
$r = 101 - 89 = 12$
$t = 47 - 89 = -42$

$a = 5$
$r = 47 - 5 = 42$
$t = 17 - 5 = 12$

Nous trouvons le carré B à l'aide d'une rotation de 90°du carré A. Maintenant, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3 :

Soit M, un carré magique d'ordre 3 qui contient l'unique plus petit nombre m. Alors, nous pouvons toujours construire un équivalent de M qui sera déterminé par a = m et r et t par a + r et a + t.

Théorème 4 :

Soit M un carré premier presque normal d'ordre 3. Alors M ne peut pas contenir 3.

Preuve :

Rappelons qu'un tel carré ne peut pas contenir 2. En effet, la somme de la rangée qui contient 2 serait paire tandis que la somme de chacune des deux autres rangées serait impaire. Le carré ne peut donc pas être magique.

Supposons que ce carré contienne le nombre 3. Alors nous savons, selon le théorème 3, que nous pouvons trouver un carré magique équivalent donc formé des mêmes 9 nombres premiers avec a = 3, r et t des entiers > 0.

Nous savons que tous les entiers sont de la forme : 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5 où k parcourt $\mathbb{Z}$. Or ici, puisque r et t sont positifs, alors k doit être un entier ≥ 0.

Si r = 6k, alors k > 0 car k = 0 implique r = 0 mais ici, r > 0. **De plus, k = 0 implique r = 0 implique une répétition.** Il s'ensuit que 3 + r = 3 + 6k n'est pas premier.

Si r = 6k + 1, alors 3 + r = 4 + 6k n'est pas premier.

Si r = 6k + 3, alors 3 + r = 6 + 6k n'est pas premier.

Si r = 6k + 5, alors 3 + r = 8 + 6k n'est pas premier. Nous savions que r et t doivent être pairs.

Donc r = 6k + 2 ou 6k + 4. Il en est de même avec t. Nous écrirons t = 6m + 2 ou 6m + 4.

Si r = 6k + 2 et t = 6m + 2, alors a + r + 2t = 9 + 6k + 12m n'est pas premier.

Si r = 6k + 2 et t = 6m + 4, alors a + r + t = 9 + 6k + 6m n'est pas premier.

Si r = 6k + 4 et t = 6m + 2, alors a + r + t = 9 + 6k + 6m n'est pas premier.

Si r = 6k + 4 et t = 6m + 4, alors a + r + 2t = 15 + 6k + 12m n'est pas premier.

Si r = 6m + 2 et t = 6k + 2, alors a + r + 2t = 9 + 6m + 12k n'est pas premier.

Si r = 6m + 2 et t = 6k + 4, alors a + r + t = 9 + 6m + 6k n'est pas premier.

Si r = 6m + 4 et t = 6k + 2, alors a + r + t = 9 + 6m + 6k n'est pas premier.

Si r = 6m + 4 et t = 6k + 4, alors a + r + 2t = 15 + 6m + 12k n'est pas premier.

Dans tous les cas, le carré magique formé de 9 nombres premiers distincts, va contenir au moins un nombre non premier. Contradiction!!! Le nombre 3 ne peut donc pas être dans le carré.

Rappelons que k et m sont des entiers ≥ 0.

Si notre carré d'ordre 3 est premier parfait, alors les conditions du théorème 4 sont respectées et le carré ne peut pas contenir 3.

De plus, ce résultat est conforme avec le fait que la suite de 9 nombres premiers consécutifs qui commence par 3 ne peut pas donner un carré magique puisque cette suite n'est pas favorable. En effet, 3 + 5 + … + 29 = 127 et 127 ne se divise pas par 9.

Enfin, nous pouvons démontrer le :

Théorème 5 :

Soit M, un carré premier presque normal d'ordre 3. Les nombres r et t qui définissent M sont obligatoirement des multiples de 6.

Preuve :

Nous savons que les 9 nombres de tout carré magique d'ordre 3 nous donne le tableau arithmétique suivant selon (*), page 12 :

$$\begin{array}{ccc} a & a+r & a+2r \\ a+t & a+t+r & a+t+2r \\ a+2t & a+2t+r & a+2t+2r \end{array}$$

Si ces 9 nombres sont premiers, alors r est un entier multiple de 6. En effet, r, comme tout entier, a la forme 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4 ou 6k + 5. Nous allons montrer que r ne peut par être de la forme 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4 ou 6k + 5. Il est donc de la forme 6k.

	a	$a+r$	$a+2r$
$r=6k+1$	a	$a+1+6k$	$a+2+12k$
$r=6k+2$	$3m+1$	$3m+3+6k$	$a+4+12k$
	$3m+2$	$a+2+6k$	$3m+6+12k$
$r=6k+3$	a	$a+3+6k$	$a+6+12k$
$r=6k+4$	$3m+1$	$a+4+6k$	$3m+9+12k$
	$3m+2$	$3m+6+6k$	$a+10+12k$
$r=6k+5$	a	$a+5+6k$	$a+10+12k$

Dans chaque cas, nous devons avoir 3 nombres premiers or le nombre en rouge n'est pas premier!!! Il est soit pair (différent de 2) puisque le nombre premier a est impair ≥ 5, soit multiple de 3 différents de 3.

Tout entier peut aussi se mettre sous la forme 3m, 3m + 1 ou 3m + 2. Le nombre premier a ne peut donc pas être sous la forme 3m.

L'entier r est donc un multiple de 6. De la même façon, l'entier t est aussi un multiple de 6.

Question :

Dans un carré magique d'ordre 3, le plus petit nombre est-il toujours unique?

Regardez : $\begin{pmatrix} 19 & 3 & 11 \\ 3 & 11 & 19 \\ 11 & 19 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 11 \\ 8 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

Un des trois 3 se trouve sur une grande diagonale!!! De même, un des trois 5.

Terminons en présentant 11 carrés premiers d'ordre 3. Ceux-ci renferment tous le nombre 5 comme unique plus petit nombre. Le 5 occupe toujours la même position. De plus, 9 carrés sont presque normaux (les carrés en noir).

$$\begin{pmatrix} 101 & 29 & 47 \\ 5 & 59 & 113 \\ 71 & 89 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 41 & 29 & 17 \\ 5 & 29 & 53 \\ 41 & 29 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 131 & 89 & 47 \\ 5 & 89 & 173 \\ 131 & 89 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 941 & 29 & 467 \\ 5 & 479 & 953 \\ 491 & 929 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1151 & 89 & 557 \\ 5 & 599 & 1193 \\ 641 & 1109 & 47 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2591 & 89 & 1277 \\ 5 & 1319 & 2633 \\ 1361 & 2549 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4091 & 89 & 2027 \\ 5 & 2069 & 4133 \\ 2111 & 4049 & 47 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5351 & 89 & 2657 \\ 5 & 2699 & 5393 \\ 2741 & 5309 & 47 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 55061 & 29 & 27527 \\ 5 & 27539 & 55073 \\ 27551 & 55049 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 34337 & 53 & 17159 \\ 5 & 17183 & 34361 \\ 17207 & 34313 & 29 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2596637 & 53 & 1298309 \\ 5 & 1298333 & 2596661 \\ 1298357 & 2596613 & 29 \end{pmatrix}$$

Problème 1 : Trouvez les coordonnées (a, r, t) de chacun des 11 carrés précédents.

Théorème 6 :

Soit donné un carré magique presque normal d'ordre 3. Formons une suite avec ses 9 nombres et ordonnons-les de gauche à droite, du plus petit au plus grand. Alors le cinquième occupera toujours la case centrale du carré magique.

Preuve :

Nous savons que notre carré magique sera défini avec a = le plus petit nombre, r et t étant des entiers ≥ 1 avec $r \neq t$.

Nous allons montrer que 4 nombres seront plus petits que $a+r+t$ et les 4 autres nombres, plus grands que $a+r+t$, le nombre central.

Cas 1 : $r < t$

De façon évidente, nous trouvons à gauche de $a+r+t$, les nombres $a, a+r, a+t$. Puisque $r < t$, le nombre $a+2r$ se trouve à gauche.

De façon évidente, nous trouvons à droite de $a+r+t$, les nombres $a+r+2t, a+2r+t$, $a+2r+2t$. Puisque $r < t$, le nombre $a+2t$ est à droite.

Cas 2 : $r > t$

De façon évidente, nous trouvons à gauche de $a+r+t$, les nombres $a, a+r, a+t$. Puisque $r > t$, le nombre $a+2r$ se trouve à droite.

De façon évidente, nous trouvons à droite de $a+r+t$, les nombres $a+r+2t, a+2r+t$, $a+2r+2t$. Puisque $r > t$, le nombre $a+2t$ est à gauche

Dans la suite ordonnée des 9 nombres du carré magique, seul le cinquième possède cette propriété. Donc, $a+r+t$, le centre du carré, est bien le cinquième nombre de la suite.

Nous venons de trouver quelques propriétés remarquables des carrés magiques d'ordre 3.

Revenons sur la définition de la page 12 :

Soient A et B, deux carrés magiques presque normaux d'ordre $n \geq 3$.

Nous dirons que A et B sont des **carrés cousins** si et seulement si A – B est trivial.

Si A et B sont premiers avec A – B trivial, alors nous dirons que A et B sont des **carrés premiers cousins**.
Si A et B sont premiers parfaits avec A – B trivial, alors nous dirons que A et B sont des **carrés premiers parfaits cousins**.

Voici A et B, deux carrés premiers cousins :

A =

10 107 062 243	10 107 062 267	10 107 062 129
10 107 062 099	10 107 062 213	10 107 062 327
10 107 062 297	10 107 062 159	10 107 062 183

a = 10 107 062 099 r = 30 t = 84

B =

26 748 150 343	26 748 150 367	26 748 150 229
26 748 150 199	26 748 150 313	26 748 150 427
26 748 150 397	26 748 150 259	26 748 150 283

a = 26 748 150 199 r = 30 t = 84

Le carré B n'est rien d'autre que le carré (13) du tableau 5 ci-haut. Nous avons donc :

$$B = A + 16\,641\,088\,100$$

A est un nouveau carré premier presque normal d'ordre 3. Il n'est pas premier parfait car ses 9 nombres premiers ne sont pas consécutifs. En effet, voici les rangs de ceux-ci dans l'ordre du plus petit à gauche au plus grand à droite :

459 701 082 ; 459 701 084 ; 459 701 086 ; 459 701 088 ; 459 701 090 ; 459 701 091 ; 459 701 092 ; 459 701 094 ; 459 701 096

Dans MATHEMATICA, le rang d'un nombre premier se trouve ainsi :

PrimePi [10 107 062 099] = 459 701 082

Ici, nous avons ajouté un même entier à une suite magique de 9 nombres premiers non consécutifs pour obtenir une nouvelle suite magique de 9 nombres premiers consécutifs.

Très intéressant!!!

En fait, nous avons transformé un carré premier, le carré A, en un carré premier parfait, le carré B.

Nous pourrions dire que les nombres premiers de A sont **presque consécutifs**!!!

Voici C et D, deux autres carrés premiers cousins:

C =

10 951 836 559	10 951 836 583	10 951 836 481
10 951 836 463	10 951 836 541	10 951 836 619
10 951 836 601	10 951 836 499	10 951 836 523

a = 10 951 836 463 r = 18 t = 60

D =

99 977 424 749	99 977 424 773	99 977 424 671
99 977 424 653	99 977 424 731	99 977 424 809
99 977 424 791	99 977 424 689	99 977 424 713

a = 99 977 424 653 r = 18 t = 60

Le carré D n'est rien d'autre que le carré (27) du tableau 5 ci-haut. Nous avons donc :

$$D = C + 89\,025\,588\,190$$

Encore une fois, nous avons transformé un carré premier, le carré C, en un carré premier parfait, le carré D. Les nombres premiers de C sont presque consécutifs tandis que ceux de D sont consécutifs.

Tentons une dernière fois de trouver deux carrés premiers cousins d'ordre 4. Pour ce faire, nous avons pris la suite magique suivante laquelle ne présente qu'un seul couple de nombres premiers jumeaux :

7 ; 11 ; 23 ; 37 ; 59 ; 71 ; 79 ; 83 ; 97 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 137 ; 151 ; 157

Puis nous additionnons l'entier pair 2m à chaque nombre premier et souhaitons ainsi trouver une autre suite magique formée de seize nombres premiers.

Nous avons fait varier m de 1 à 17 000 000 000 mais, aucun succès!!!

Nous n'avons trouvé aucune autre suite de seize nombres premiers.

Souhaitez-vous poursuivre la recherche?

Les questions suivantes deviennent légitimes :

Existe-t-il au moins deux carrés premiers cousins d'ordre 4? Voir page 39.

Existe-t-il au moins deux carrés premiers cousins d'ordre $n \geq 5$?

Nous commençons sérieusement à croire que pour les ordres $n \geq 5$, nous ne trouverons pas deux carrés premiers cousins!!!

Le problème est maintenant posé.

Et pourquoi pas une autre conjecture!!!

Nous terminerons avec la notion de p-générateur.

Un **p-générateur** est un carré premier presque normal G qui peut générer au moins un nouveau carré premier en ajoutant un même entier pair 2m (m entier) dans toutes ses cases.

Il est clair que l'entier qui sera ajouté dans toutes les cases de G doit être pair.

Tous les carrés ainsi générés seront presque normaux.

Nous dirons que G se génère lui-même.

Deux carrés premiers générés par G sont donc des carrés premiers cousins.

Les 27 carrés du tableau 5 ci-haut sont notés (1) à (27).

Nous allons essayer de trouver un plus petit p-générateur à partir du carré (1) du tableau 5 ci-haut.

Déjà, nous savons que le carré (1) est un p-générateur, En effet, il génère les 20 carrés premiers parfaits de Nelson, ceux définis par r = 12 et t = 30 dans le tableau 5.

Pouvons-nous trouver des carrés premiers en ajoutant l'entier 2m à tous les nombres de (1) de façon à obtenir ceux-ci entre les carrés (1) et (2)? La réponse est oui avec m, un entier positif.

Pour trouver le carré (1), consultez le tableau 5 et utilisez le fichier «Ordre 3» donc la structure générale des carrés magiques d'ordre 3.

Voici la commande avec MATHEMATICA :

Count[Table[PrimeQ[{1480028183 + 2m, 1480028189 + 2m, 1480028141 + 2m, 1480028129 + 2m,1480028171 + 2m, 1480028213 + 2m, 1480028201 + 2m, 1480028153 + 2m, 1480028159 + 2m}],{m,1,200 000 000}],{True,True,True,True,True,True,True,True,True}] (**)

Par exemple, ici, m varie de 1 à 200 000 000. Si la réponse obtenue est l'entier 3, cela signifie que parmi les 200 000 000 de carrés magiques obtenus, seulement 3 carrés sont premiers.

Comment les trouver avec la commande (**)? Essayez de localiser un intervalle dans lequel vous trouverez un seul carré puis diminuez cet intervalle jusqu'à ce que vous trouviez la valeur de m qui définit le carré.

Ou encore, construisez un programme plus efficace que (**).

Pour trouver les carrés premiers cousins entre (2) et (3), vous placerez les nombres du carré (2) dans (**).

Nous dirons qu'un groupe de carrés premiers est un groupe de carrés premiers cousins si toutes les paires de carrés pris dans ce groupe contiennent deux carrés cousins.

Si un carré premier G est un p-générateur d'ordre 3, alors nous dirons que c'est un gen-(u ; v). Cela signifie que G est défini avec r = u et t = v.

Nous allons trouver un gen-(12 ; 30) et un gen-(42 ; 30).

Le carré (1) est un gen-(12 ; 30) et le carré (17), un gen-(42 ; 30).

Dire que G génère le carré A, c'est dire que A est obtenu de G en ajoutant le même entier pair 2m dans toutes les cases de G donc A = G + 2m avec m entier.

Premier groupe de carrés premiers cousins :

Nous partons du carré (1) qui est un gen-(12 ; 30). Le tableau 5 nous montre comment (1) génère tous les carrés définis avec r = 12 et t = 30.

Par exemple, (14) = (1) + 27 039 963 258. Puis, toujours avec (1), nous avons enlevé 2m dans toutes les cases de (1) et nous avons ainsi obtenu 13 nouveaux carrés premiers, notés (-1), (-2), (-3), …, (-13). Enlever 2m revient à ajouter 2m avec m, un entier négatif. Dans le tableau 6 suivant, nous indiquons le carré (-k) et la valeur de m telle que :

$$(-k) = (1) - 2m.$$

Le carré (-14), en rouge dans le tableau 6, renferme 9 nombres premiers négatifs car MATHEMATICA considère les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. Un nombre premier dans $\mathbb{Z}$ est un entier qui n'admet que 4 diviseurs distincts soient ± 1 *et* $\pm$ lui-même.

Il est très intéressant de comparer (-14) avec (-13). Nous verrons cela après le tableau 6.

Le carré (-14) n'est pas conforme avec la définition de p-générateur; cependant, nous pourrions le considérer, exceptionnellement, comme étant notre plus petit gen-(12 ; 30).

$$
\begin{array}{ll}
(-1) & m = 5\ 848\ 436 \\
(-2) & m = 121\ 433\ 340 \\
(-3) & m = 166\ 243\ 385 \\
(-4) & m = 276\ 686\ 031 \\
(-5) & m = 312\ 305\ 615 \\
(-6) & m = 329\ 466\ 605 \\
(-7) & m = 379\ 210\ 271 \\
(-8) & m = 492\ 960\ 936 \\
(-9) & m = 510\ 229\ 566 \\
(-10) & m = 546\ 044\ 835 \\
(-11) & m = 581\ 527\ 260 \\
(-12) & m = 669\ 564\ 671 \\
(-13) & m = 740\ 014\ 050 \\
(-14) & m = 740\ 014\ 121
\end{array}
$$

Tableau 6

Voyons les carrés (-13) et (-14) :

83	89	41
29	71	113
101	53	59

Carré (-13)

-59	-53	-101
-113	-71	-29
-41	-89	-83

Carré (-14)

Nous avons :

$$(-13) = (-14) + 142$$

Donc, jusqu'à maintenant, (1) a généré les 20 carrés premiers parfaits définis par r = 12 et t = 30 du tableau 5 (les 20 de Nelson) ainsi que 13 carrés premiers ce qui nous fait déjà un groupe de 33 carrés premiers cousins. Également, (1) génère 16 nouveaux carrés premiers comme suit :

3 carrés entre (1) et (2).
5 carrés entre (2) et (3).
Aucun entre (3) et (4).
Aucun entre (4) et (5).
1 carré entre (5) et (6).
Aucun entre (6) et (7).
7 carrés entre (7) et (8).

Ce qui veut dire que le carré (-13) est le plus petit gen-(12 ; 30) qui génère **au moins** 49 carrés premiers dont 20 carrés premiers parfaits (ceux de Nelson).

C'est le plus grand groupe de carrés premiers cousins que nous connaissons maintenant.

Voyons les 3 carrés premiers entre (1) et (2). Nous allons ajouter l'entier positif 2m à tous les nombres du carré (1).

Les entiers m = 30 024 505, m = 53 001 459 et m = 160 503 904 nous donnent les trois carrés premiers entre (1) et (2) puisque (2) = (1) + 370 561 928 d'où m = 185 280 964 détermine le carré (2).

Existe-t-il d'autres carrés premiers entre (1) et (2)?

Nous allons construire un deuxième groupe de carrés premiers cousins et tenter d'en trouver un entre (1) et (2).

Second groupe de carrés premiers cousins :

Nous partons cette fois du carré (17) qui est un gen-(42 ; 30). Celui-ci génère les carrés (20), (23) et (25) du tableau 5. Il génère d'autres carrés premiers dont un seul entre (1) et (2) qui est différent des trois autres générés par (-13). Nous y reviendrons un peu plus bas.

La réponse à la question ci-haut est donc oui.

Le plus petit gen-(42 ; 30) est le carré M suivant :

254 941	254 887	254 869
254 827	254 899	254 971
254 929	254 911	254 857

M = G_{30}^{42}

Pour l'obtenir, nous avons d'abord enlevé 49 000 000 000 à tous les nombres du carré (17). Puis, avec ce nouveau carré, nous avons enlevé l'entier pair 2m à tous ses entiers.

Avec m = 142 758 426, nous avons obtenu le carré premier M. C'est le plus petit généré par (17). Les deux autres ci-dessous, générés aussi par (17), sont encore plus petits mais ne sont pas presque normaux. Nous trouvons P, celui de gauche avec m = 142 885 846 et Q, celui de droite avec m = 142 885 905.

101	47	29
-13	59	131
89	71	17

P

-17	-71	-89
-131	-59	13
-29	-47	-101

Q

Nous présentons P et Q car nous les trouvons sympathiques!!! En valeur absolue, ces 18 nombres sont des nombres premiers, les mêmes dans P et Q. Nous pouvons les voir comme des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. **Ce qui est remarquable est que Q soit l'inverse additif d'un équivalent de P (rotation de 180° de P donne -Q).**

Nous pouvons écrire :

P = Q + 118

M = P + 254 840

(17) = M + 49 285 516 852

Nous noterons le plus petit gen-(12 ; 30) par G_{30}^{12} et le plus petit gen-(42 ; 30) par G_{30}^{42}.

Nous pouvons donc écrire : $(-13) = G_{30}^{12}$ et $M = G_{30}^{42}$.

Il est facile de voir que G_{30}^{42} + 2m est un carré premier situé entre les deux carrés premiers parfaits (1) et (2) si m = 877 977 555. Il est différent des 3 carrés premiers situés entre (1) et (2), ceux-ci étant générés par $(-13) = G_{30}^{12}$.

Voyons maintenant les résultats suivants :

Tous les carrés premiers d'ordre 3 générés par G_v^u sont définis avec $r = u$ et $t = v$.

Preuve :

Nous savons que les carrés magiques d'ordre 3 sont des carrés arithmétiques. Tout carré magique d'ordre 3 s'écrit donc $aC + rA + tB$ où $\{C\ ;\ A\ ;\ B\}$ est une base ordonnée de l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre 3 avec C, un carré trivial formé de l'entier 1.
Donc :

$$G_v^u + k = aC + uA + vB + k = (a+k)C + uA + vB$$

Ce carré est bien défini avec le même $r = u$ et $t = v$.

Tous les carrés premiers d'ordre 3 générés par G_v^u forment un groupe de carrés premiers cousins. De plus, chaque carré du groupe est un p-générateur qui génère tout le groupe.

Preuve :

Laissée au lecteur.

Soient deux groupes de carrés premiers cousins générés respectivement par G_v^u et $G_{v'}^{u'}$ avec $(u\ ;\ v) \neq (u';\ v')$. Alors les deux groupes sont disjoints.

Preuve :

Si un carré premier M est généré par G_v^u, alors $M = G_v^u + k = (a+k)C + u\,A + v\,B$. Si M est aussi généré par $G_{v'}^{u'}$, alors $M = G_{v'}^{u'} + k' = (a'+k')C + u'A + v'B$. Les coordonnées de M sont donc $(a+k\,;u\,;v)\,et\,(a'+k';\ u';\ v')$ ce qui est une contradiction puisque les coordonnées doivent être uniques. En effet, M est dans un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3. Les deux groupes sont donc disjoints.

Revoyons G_{30}^{12} et G_{30}^{42}.

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

1) C'est le plus petit p-générateur, lequel est défini avec $a = 29,\ r = 12\ et\ t = 30.$
2) Il génère **au moins** 116 carrés premiers dont les 20 carrés premiers parfaits de Nelson et les 10 carrés premiers parfaits de Claude Bégin trouvés en avril, mai et juin 2020. Voir le nouveau tableau 5 de l'annexe 18.1.
3) Il génère trois carrés premiers (compris dans les 116 ci-haut) entre les carrés premiers parfaits (1) et (2).

254 941	254 887	254 869
254 827	254 899	254 971
254 929	254 911	254 857

G_{30}^{42}

1) C'est le plus petit p-générateur, lequel est défini avec $a = 254\ 827,\ r = 42\ et\ t = 30.$
2) Il génère **au moins** 205 carrés premiers dont 6 carrés premiers parfaits soient les carrés (17), (20), (23), (25), (38) et (39) du nouveau tableau 5 de l'annexe 18.1.
3) Il génère un seul carré premier (compris dans les 205 ci-haut) entre les carrés premiers parfaits (1) et (2).

Exemple 1 : Comment G_{30}^{42} génère-t-il le carré (20)?

Il suffit de trouver $(20) - G_{30}^{42}$ et de s'assurer que ce carré est trivial de nombre k. C'est le cas ici. De $(20) - G_{30}^{42} = k$, nous trouvons $(20) = G_{30}^{42} + k$:

$$k = 74\ 220\ 519\ 433 - 254\ 941 = 74\ 220\ 264\ 492$$

Exemple 2 : Comment $G_{30}^{12}\ et\ G_{30}^{42}$ génèrent-ils les 4 carrés premiers situés entre (1) et (2)?

Nous avons vu plus haut que (1) génère 3 carrés premiers entre (1) et (2). Nous les appelons (a), (b) et (c). De plus, $(1) = G_{30}^{12} + 1\ 480\ 028\ 100.$ Nous avons donc :

$$(a) = G_{30}^{12} + 1\ 540\ 077\ 110$$
$$(b) = G_{30}^{12} + 1\ 586\ 031\ 018$$
$$(c) = G_{30}^{12} + 1\ 801\ 035\ 908$$

Le carré (d), situé entre (1) et (2), est un carré premier généré par G_{30}^{42}. C'est le seul entre (1) et (2). Nous avons : $(17) - 49\ 285\ 516\ 852 = G_{30}^{42}$ et $(d) = G_{30}^{42} + 2m$ avec $m = 877\ 977\ 555.$

$$(d) = G_{30}^{42} + 1\ 755\ 955\ 110$$

Résumons l'annexe 18.

Nous ne connaissions pas de carrés premiers parfaits d'ordre 3 avant la découverte d'Harry L. Nelson en 1988. Nelson en a trouvé 22 qui renferment 9 nombres premiers consécutifs de 10 à 11 chiffres. Le plus petit est de rang 73 780 392.

En 2018, Claude Bégin et Claude St-Hilaire trouvent le premier carré premier parfait d'ordre 3 avec le programme «Premiers parfaits-3». En regardant toutes les suites de 9 nombres premiers consécutifs, une par une, nous trouvons que la suite de rang 73 780 392 est la toute première qui nous donne un carré premier parfait. C'est le premier carré trouvé par Nelson. Nous savons qu'il n'y en a pas d'autres avant celui-ci. De façon indépendante de Nelson, nous avons trouvé les huit premiers carrés premiers parfaits d'ordre 3.

Nous avons ensuite réalisé que nos huit carrés premiers parfaits sont tous définis avec $r = 12 \ et \ t = 30.$ Après avoir reçu de Christian Boyer les 22 carrés premiers parfaits de Nelson, j'ai pu constater que ses huit premiers carrés sont les mêmes que les nôtres et que 20 d'entre eux sont définis avec $r = 12 \ et \ t = 30.$

Et là, une grande découverte!!!

Les carrés premiers parfaits cousins et les carrés premiers cousins. C'est extraordinaire de voir que si on ajoute un même entier pair à tous les nombres d'une suite de 9 nombres premiers, nous trouvions encore 9 nombres premiers!!!

Cela se produit déjà 20 fois avec les 20 carrés premiers parfaits de Nelson. Chaque carré est obtenu du plus petit en ajoutant le même entier pair dans toutes les cases de celui-ci.

Ce plus petit carré qui en génère 20 est un p-générateur noté G_{30}^{12} car les 20 carrés sont tous définis avec $r = 12 \ et \ t = 30.$

Nous savons maintenant que G_{30}^{12} génère au moins 116 carrés premiers dont 30 premiers parfaits et que G_{30}^{42} génère au moins 205 carrés premiers dont 6 premiers parfaits soient les carrés (17), (20), (23), (25), (38) et (39) du tableau 5.

$G_{30}^{12} \ et \ G_{30}^{42}$ génèrent 4 carrés premiers entre les carrés premiers parfaits (1) et (2) du tableau 5.

Les 27 premiers carrés premiers parfaits du tableau 5 ont été trouvés par Arkadiusz Wesolowski; ils sont sur le site http://oeis.org/A256891. Nous y retrouvons les 22 carrés de Nelson.

Deux grandes questions : existe-t-il des carrés premiers cousins pour les ordres $n \geq 4$? Pour l'ordre 3, G_v^u peut-il générer une infinité de carrés premiers cousins?

Jusqu'à maintenant, nos recherches ont été infructueuses. Des milliards d'essais n'ont rien donné pour l'ordre 4.

Nous terminerons avec G_{60}^{18}. Pour ce faire, nous partirons du carré (27) du tableau 5. Ce carré est défini avec a = 99 977 424 653, r = 18 et t = 60.

En ajoutant l'entier pair 2m (où m est entier) à tous les entiers du carré (27), nous obtenons huit carrés premiers en faisant varier m de 1 à 1 500 000 000. Ces huit carrés sont bien entendu des carrés magiques presque normaux. Ceux-ci sont obtenus avec :

$$m = 322\,174\,515$$
$$m = 632\,470\,410$$
$$m = 797\,672\,029$$
$$m = 995\,289\,405$$
$$m = 999\,951\,615$$
$$m = 1\,085\,875\,299$$
$$m = 1\,177\,914\,309$$
$$m = 1\,426\,929\,229$$

Pour trouver le plus petit p-générateur de la forme gen-(18 ; 60), nous avons d'abord enlevé 99 000 000 000 à tous les entiers du carré (27). Puis, avec le carré ainsi obtenu, nous avons enlevé l'entier pair 2m et nous avons trouvé 21 carrés premiers y compris G_{60}^{18}.

Le plus petit, G_{60}^{18}, est déterminé par m = 488 712 321 :

107	131	29
11	89	167
149	47	71

G_{60}^{18}

Le carré G_{60}^{18} génère, en ajoutant 2m avec m = 0, 1, 2, …, 1 000 000 000, un premier groupe de 31 carrés premiers. Puis il génère les 3 carrés premiers parfaits (27), (40) et (41) du tableau 5 de l'annexe 18.1 plus 177 autres carrés premiers au-delà du carré (27). Puisque notre p-générateur initial est le carré (27) qui est presque normal, alors il est clair que tous les carrés générés par G_{60}^{18} sont presque normaux et tous définis avec r = 18 et t = 60.

Le carré G_{60}^{18} génère donc au moins 211 carrés premiers dont les carrés premiers parfaits (27), (40) et (41). Ils sont tous presque normaux. (Voir annexe 18.1).

Remarque sur l'annexe 18 :

Nous venons de constater un phénomène très rare dans l'ensemble des nombres premiers et ce, grâce au tableau 5 et au fait que les vingt carrés de Nelson soient tous définis avec $r = \pm 12 \ et \ t = \pm 30 \ ou \ r = \pm 30 \ et \ t = \pm 12.$ Plus précisément, pour chaque carré de Nelson, nous pouvons trouver un équivalent qui est défini avec $r = 12 \ et \ t = 30.$

Regardons de plus près ce phénomène. Soient 13 et 19, deux nombres premiers. Si on ajoute l'entier 4 à chacun, nous obtenons deux nombres premiers 17 et 23.

Avec 11 et 19, en ajoutant 4, nous obtenons 15 et 23 donc un seul est premier.

Avec 11 et 29, en ajoutant 4, nous obtenons 15 et 33, deux nombres composés.

Prenons k nombres premiers différents et ajoutons le même entier pair > 0 à chacun. Les k nouveaux nombres obtenus peuvent-ils être tous premiers???

Voyons avec k = 9 : prenons les 9 nombres premiers consécutifs de 23 à 59 et ajoutons l'entier pair 2m à chacun.

Nous avons fait varier m de 1 à 600 000 000 et nous avons trouvé seulement 4 nouvelles suites de 9 nombres premiers (avec m = 808 290, m = 3 158 295, m = 167 194 125 et m = 558 226 305). Dans ces 4 suites, les 9 nombres premiers sont consécutifs. Dans certains cas, avec 600 000 000 de valeurs de m, nous ne trouvions qu'un seul carré premier.

Avec 16 nombres premiers, en ajoutant l'entier pair 2m à chacun, nous n'avons jamais trouvé 16 nombres premiers et ce, en donnant à m plusieurs milliards de valeurs!!!

Bien entendu, nous avons pris 16 nombres premiers au hasard et avons donné à m un très grand nombre de valeurs. Voici les 3 cas étudiés :

1) Nous avons pris les 16 nombres premiers consécutifs de 23 à 89. Cette suite ne peut pas nous donner un carré magique puisqu'elle n'est pas favorable (la somme des 16 nombres n'est pas divisible par 8).
   Nous avons ajouté un nombre pair 2m à chacun des 16 nombres premiers. En faisant varier m de **1 à 2 600 000 000**, nous n'avons jamais obtenu une nouvelle suite de 16 nombres premiers.
2) Nous avons pris les 16 nombres premiers consécutifs de 31 à 101. Cette suite favorable est magique. Nous avons ajouté un nombre pair 2m à chacun des 16 nombres premiers. En faisant varier m de **1 à 6 000 000 000**, nous n'avons jamais obtenu une nouvelle suite de 16 nombres premiers.
3) Nous avons pris les 16 nombres premiers de la page 24, dernière ligne. C'est aussi une suite magique. Nous avons ajouté un nombre pair 2m à chacun des 16 nombres premiers. En faisant varier m de **1 à 17 000 000 000**, nous n'avons jamais obtenu une nouvelle suite de 16 nombres premiers.

Que penser? Nous aimerions trouver un p-générateur G d'ordre 4 qui permettrait de générer au moins un nouveau carré premier et de préférence, plusieurs. Prendre au hasard une suite de 16 nombres premiers et ajouter 2m à chacun afin d'obtenir une nouvelle suite de 16 nombres premiers n'est probablement pas la meilleure approche. Voir 1), 2) et 3) ci-haut.

Puis je reçois de Christian Boyer une suite de couples de nombres premiers jumeaux $(p_i\,;\,p_i+2)$. Cette suite peut contenir une infinité de couples selon une conjecture très connue. Prenons les premières composantes de ces couples. Nous aurons ainsi une suite (1) de nombres premiers. En prenant les secondes composantes, nous aurons une autre suite (2) de nombres premiers. Il est clair que pour obtenir la suite (2), il suffit d'ajouter 2 à chaque nombre de la suite (1).

La suite (1) est magique si et seulement si la suite (2) est magique. Si la suite (1) est magique, alors nous trouverons deux carrés premiers cousins, chacun étant un p-générateur. Voyons la suite (1) :

(1) {3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 179, 191, 197, 227}

Celle-ci n'est pas une suite favorable puisque la somme n'est pas divisible par 8. Donc pas de carrés premiers cousins. Que se passe-t-il avec cette autre suite (3)?

(3) {5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 179, 191, 197, 227, 239}

Celle-ci est favorable car sa somme est divisible par 8. Mais est-elle magique?

Regardez dans l'annexe 8, page 4, l'encadré vert. Sur 1 388 015 suites favorables, seulement 12 sont magiques!!!

De plus, nous avons ajouté l'entier 2m aux 16 nombres de (1) et fait varier m de 1 à

1 000 000 000. Nous avons obtenu une seule suite de 16 nombres premiers soit la suite (2).

Nous avons fait de même avec la suite (3). En donnant à m les valeurs de 1 à 1 200 000 000, nous n'avons obtenu qu'une seule suite de 16 nombres premiers.

Si la suite (3) était magique, alors nous aurions un p-générateur qui donnerait, peut-être, un seul carré premier.

En utilisant l'annexe 7, «Excursion dans les nombres premiers», page 11, nous prendrons un quintuplet jumeau voisin soit un quintuplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\,;\ p+2\,;\ p+6\,;\ p+8\,;\ p+12)$$

Dans l'intervalle $[1\,;\,10^9]$, nous trouvons 3633 quintuplets jumeaux voisins. Ceux-ci ont tous la forme :

(*) $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23)$ où k est un entier ≥ 0.

Voici les trois premiers quintuplets jumeaux voisins avec $p \geq 11$.

$(11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23)$; $(101\ ;\ 103\ ;\ 107\ ;\ 109\ ;\ 113)$; $(1481\ ;\ 1483\ ;\ 1487\ ;\ 1489\ ;\ 1493)$

Le seul quintuplet jumeau voisin avec $p < 11$ est $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17)$.

Prenons 16 quintuplets générés par (*). Les 16 premières composantes des 16 quintuplets forment une suite (1) de 16 nombres premiers puis les 16 deuxièmes composantes forment une autre suite (2) de 16 nombres premiers. …d'où les 5 suites (1), (2), (3), (4), (5) formées de 16 nombres premiers.

Si une de ces 5 suites est magique, alors les 4 autres seront aussi magiques. Ainsi, nous pourrons construire 5 carrés premiers cousins.

Nous aurons alors construit un p-générateur d'ordre 4.

De même avec 25 quintuplets, nous pourrions construire un p-générateur d'ordre 5. Et ainsi de suite.

Revenons aux suites (1), (2), (3), (4), (5). La suite (1) est-elle magique? C'est la question que nous devrons nous poser très souvent!!!

Nous avons donc un procédé pour construire des p-générateurs d'ordre $n \geq 4$. Cependant, ce procédé est-il efficace?

Nous sommes confrontés au problème suivant :

Étant donnée une suite de n^2 nombres premiers, pouvons-nous construire un carré magique avec ceux-ci ???

Nous avons confiance que nous trouverons une telle suite!!! (Voir plus bas).

Du 20 avril 2020 au 26 juillet 2020, Claude Bégin trouve 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3.

Le tableau 5 de la page 14 de l'annexe 18 devient le nouveau tableau 5 situé dans l'annexe 18.1 et renferme maintenant (*) 50 carrés premiers parfaits.

G_{30}^{12} génère, à lui seul, au moins 124 carrés premiers dont 38 premiers parfaits!!!

J'arrête ici la recherche de carrés premiers parfaits d'ordre 3.

(*) Voir les résultats de l'annexe 18.1.

Le tableau suivant indique ce que chaque p-générateur a déjà trouvé et en rouge, les 23 nouveaux carrés premiers parfaits trouvés par Claude Bégin.

	G_{30}^{12}	G_{30}^{42}	G_{60}^{18}
Carrés premiers au moins	86	199	208
Carrés premiers parfaits	$20+18$	$4+2$	$1+3$

Celui-ci montre, par exemple, que G_{30}^{12} génère **au moins** 86 carrés premiers d'ordre 3 plus 38 carrés premiers parfaits d'ordre 3 parmi les 50 connus à ce jour (26 juillet 2020).

Pour faire suite à l'encadré de la page 38, voici, **enfin**, 4 couples de carrés premiers cousins d'ordre 4.

Pour ce faire, nous avons pris une table de nombres premiers à partir de p = 3 puis, pour chaque valeur de p, nous regardons si p + 30 est un nombre premier. Si c'est le cas, nous conservons p. Voici les 16 valeurs de p conservées :

{7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 67, 71, 73, 79}

Cependant, cette suite n'est pas favorable (elle ne permet pas de construire un carré magique car la somme des 16 nombres premiers n'est pas divisible par 8).

Nous avons remplacé 79 par 97 et la somme, 672, est devenue divisible par 8. De plus , 97 + 30 = 127, un nombre premier. La nouvelle suite est donc :

(*) {7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 67, 71, 73, 97}

Le programme 01 de l'Annexe 23 nous permet de trouver un carré magique, s'il existe, formé de 16 nombres donnés à l'avance :
La suite (*) nous a permis de construire 4 carrés premiers primitifs :

23	7	97	41
13	71	17	67
59	37	43	29
73	53	11	31

P_1

23	97	7	41
59	43	37	29
13	17	71	67
73	11	53	31

P_2

71	7	53	37
13	23	73	59
67	41	31	29
17	97	11	43

P_3

71	53	7	37
67	31	41	29
13	73	23	59
17	11	97	43

P_4

Ces 4 carrés premiers sont presque normaux; ils sont des p-générateurs d'ordre 4 et nous conduisent aux 4 couples de carrés premiers cousins suivants, chacun ayant la forme :

$$(P_i \; ; \; P_i + 30)$$

23	7	97	41
13	71	17	67
59	37	43	29
73	53	11	31

P_1

53	37	127	71
43	101	47	97
89	67	73	59
103	83	41	61

$P_1 + 30$

23	97	7	41
59	43	37	29
13	17	71	67
73	11	53	31

P_2

53	127	37	71
89	73	67	59
43	47	101	97
103	41	83	61

$P_2 + 30$

71	7	53	37
13	23	73	59
67	41	31	29
17	97	11	43

P_3

101	37	83	67
43	53	103	89
97	71	61	59
47	127	41	73

$P_3 + 30$

71	53	7	37
67	31	41	29
13	73	23	59
17	11	97	43

P_4

101	83	37	67
97	61	71	59
43	103	53	89
47	41	127	73

$P_4 + 30$

Notons que les P_i renferment les mêmes 16 entiers; de même pour les $P_i + 30$.

Par exemple, le carré premier P_1 génère le carré premier $P_1 + 30$. Bien entendu, P_1 se génère lui-même. À partir de P_1, nous avons construit au-delà de 4 000 000 000 carrés magiques en ajoutant 10m dans toutes ses cases pour ne trouver aucun nouveau carré premier.

Pourquoi ajouter 10m au lieu de 2m? Ce nombre entier 2m ne peut pas se terminer par 2, 4, 6 ou 8 car, dans notre nouveau carré, nous trouverions toujours un entier qui se termine par 5 donc non premier. L'entier 2m doit se terminer par 0 donc être un multiple de 10. C'est une condition nécessaire pour que P_1 puisse générer un carré premier.

Se pourrait-il que P_1 ne génère qu'un seul carré premier différent de lui-même?

Si oui, nous pourrions qualifier ce p-générateur de «très faible».

Annexe 18.1 : L'extraordinaire p-générateur G_{30}^{12} et deux autres

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

Le carré G_{30}^{12} est magique et contient 9 nombres premiers différents. Si nous ajoutons un même entier pair $2m$ (m entier ≥ 0) à tous les nombres premiers de G_{30}^{12}, alors, il se peut que nous obtenions un nouveau carré premier. Nous verrons que cela n'arrive que très rarement!!!

En effet, prenons la suite des 9 nombres premiers consécutifs qui vont de 23 à 59. Nous ajoutons 2m (m de 1 à 600 000 000) à chacun et espérons trouver 9 nouveaux nombres premiers. La première valeur de m qui nous donne 9 nouveaux nombres premiers est m = 808 290, la deuxième est m = 3 158 295, la troisième est m = 167 194 125 et la quatrième est m = 558 226 305. Donc, avec m allant de 1 à 600 000 000, nous trouvons seulement 4 valeurs de m qui conduisent à 9 nouveaux nombres premiers!!!

Notons ici que dans les 4 nouvelles suites de 9 nombres premiers, ceux-ci étaient tous consécutifs. Cependant, aucune de ces 5 suites ne permet la construction d'un carré magique.

Nous avons ensuite pris une suite de 16 nombres premiers consécutifs allant de 23 à 89. Avec m qui va de 1 à 2 600 000 000, nous n'avons obtenu aucune nouvelle suite de 16 nombres premiers.

Nous avons pris une suite de 16 nombres premiers consécutifs de 31 à 101 laquelle forme un carré magique. Avec m de 1 à 6 000 000 000, nous n'avons trouvé aucune suite de 16 nombres premiers.

Enfin, nous avons pris la suite magique (suite qui permet de construire un carré magique) de 16 nombres premiers qui se trouve au bas de la page 24 de l'annexe 18. Avec m de 1 à 17 000 000 000, nous n'avons rien trouvé!!! **D'où cette grande rareté!!!**

Mentionnons qu'il est possible de construire une suite (1) de 16 nombres premiers laquelle donnera au moins une nouvelle suite (2) de 16 nombres premiers en ajoutant 2m à tous les nombres de (1).

Seulement, cette suite doit être très convenablement choisie!!!

Nous pourrions trouver une telle suite formée de 25 nombres premiers ou 36, ou 49, ou 64, …

Pour ce faire, nous pouvons considérer les suites de quintuplets de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 6; p + 8 ; p + 12)

La première suite serait formée des nombres premiers p; la deuxième, des nombres premiers p + 2, la troisième, des nombres premiers p + 6; …

La grande question : ces 5 suites permettent-elles de construire un carré magique?

Nous pourrions aussi prendre des triplets de nombres premiers de la forme

(p ; p + 2 ; p + 6) ou (p ; p + 4 ; p + 6) ou autres…

Si en ajoutant 2m à tous les nombres premiers de G_{30}^{12}, nous obtenons un nouveau carré premier M, alors nous dirons que G_{30}^{12} génère M.

Si en ajoutant 2m à tous les nombres d'une suite (s) de nombres premiers, nous obtenons une nouvelle suite (s') de nombres premiers, alors nous dirons que (s) génère (s').

Rappelons qu'un carré premier est, par définition, un carré magique formé exclusivement de nombres premiers.

Voyons maintenant pourquoi G_{30}^{12} est un p-générateur extraordinaire. Il est vrai que G_{30}^{12} génère beaucoup de carrés premiers qui sont tous presque normaux puisque G_{30}^{12} est lui-même presque

normal. Mais G_{30}^{12} génère aussi des carrés premiers parfaits (formés de 9 nombres premiers consécutifs), ce qui est encore plus rare!!!

Nous savons que G_{30}^{12} génère au moins 124 carrés premiers dont 38 carrés premiers parfaits!!!
Voilà pourquoi G_{30}^{12} est extraordinaire!!!

Voyons cela de plus près.

1) Quand m varie de 0 à 740 014 049.

Nous trouvons 13 carrés premiers incluant G_{30}^{12} lorsque m = 0. Ils sont définis par :

$$m = 0$$
$$m = 70\ 449\ 379$$
$$m = 158\ 486\ 790$$
$$m = 193\ 969\ 215$$
$$m = 229\ 784\ 484$$
$$m = 247\ 053\ 114$$
$$m = 360\ 803\ 779$$
$$m = 410\ 547\ 445$$
$$m = 427\ 708\ 435$$
$$m = 463\ 328\ 019$$
$$m = 573\ 770\ 665$$
$$m = 618\ 580\ 710$$
$$m = 734\ 165\ 614$$

Les 27 carrés premiers parfaits du tableau 5, page 14 de l'annexe 18
sont notés de (1) à (27).

En date du 19 avril 2020, ce sont les seuls carrés premiers parfaits connus d'ordre 3.

2) Quand m varie de 740 014 050 (1) à 47 757 724 504 (26).

a) Les carrés premiers parfaits : nous en trouvons 20. Ils sont définis par :

(1) $m = 740\ 014\ 050$
(2) $m = 925\ 295\ 014$
(3) $m = 2\ 598\ 092\ 959$
(4) $m = 2\ 800\ 783\ 579$
(5) $m = 2\ 878\ 642\ 234$
(6) $m = 3\ 024\ 185\ 500$
(7) $m = 3\ 075\ 538\ 620$
(8) $m = 4\ 758\ 561\ 115$
(9) $m = 9\ 526\ 117\ 909$
(10) $m = 10\ 238\ 934\ 145$
(12) $m = 12\ 013\ 445\ 065$
(14) $m = 14\ 259\ 995\ 679$
(15) $m = 17\ 410\ 663\ 045$
(16) $m = 22\ 210\ 484\ 940$
(18) $m = 36\ 913\ 899\ 490$
(19) $m = 36\ 987\ 390\ 930$
(21) $m = 38\ 241\ 953\ 904$
(22) $m = 38\ 280\ 138\ 490$
(24) $m = 42\ 946\ 012\ 599$
(26) $m = 47\ 757\ 724\ 504$

b) Les carrés premiers : nous en trouvons 25 situés entre les carrés (1) et (10) :

Entre (1) et (2), nous en avons 3;

(2) et (3)	5
(5) et (6)	1
(7) et (8)	7
(8) et (9)	8
(9) et (10)	1

Nous n'avons pas cherché entre (10) et (26) sauf entre (18) et (19) puis entre (21) et (22) pour n'en trouver aucun.

3) Quand m > 47 757 724 504.

En faisant varier m de 47 757 724 505 à 202 900 000 000, nous avons trouvé 66 nouveaux carrés premiers dont 18 nouveaux carrés premiers parfaits!!!

Voici les valeurs de m qui définissent ces 66 carrés premiers :

48 210 986 445
48 724 916 730
48 892 457 389
48 978 369 930
49 062 108 024
51 993 546 759 : Nouveau carré premier parfait (28) trouvé le 20 avril 2020.
53 952 904 005
55 798 062 249
56 246 660 910
56 977 487 314
57 228 891 649
57 332 196 669
59 194 243 444
60 584 920 864
60 866 687 349 : Nouveau carré premier parfait (29) trouvé le 27 avril 2020.
61 299 614 530
62 417 077 030
62 611 387 300
63 818 616 609
64 470 371 559
64 642 809 699
67 106 035 464
67 986 530 079

68 136 676 075

68 667 942 679

71 270 486 469 : Nouveau carré premier parfait (30) trouvé le 12 mai 2020.

72 148 220 634

72 734 816 440

73 298 524 635 : Nouveau carré premier parfait (31) trouvé le 13 mai 2020.

73 327 586 800; 74 067 126 315; 74 826 184 054; 75 491 542 434; 75 503 357 419;

76 286 883 420; 77 614 546 785; 77 783 520 304; 77 924 659 995;

78 708 471 589 : Nouveau carré premier parfait (32) trouvé le 15 mai 2020.

79 231 442 884; 81 561 984 279; 82 599 245 190; 82 897 658 025.

83 337 065 559 : Nouveau carré premier parfait (33) trouvé le 17 mai 2020.

85 417 544 520; 86 393 271 894;

87 165 695 260 : Nouveau carré premier parfait (34) trouvé le 19 mai 2020.

88 060 392 349; 90 213 082 960;

90 426 956 395 : Nouveau carré premier parfait (35) trouvé le 20 mai 2020.

95 241 205 549; 95 310 757 135; 96 157 747 615;

97 187 795 040 : Nouveau carré premier parfait (36) trouvé le 22 mai 2020.

98 249 594 625; 99 538 443 934; 100 575 870 549;

100 871 615 620 : Nouveau carré premier parfait (37) trouvé le 23 mai 2020.

À partir de m = 100 900 000 001, nous n'avons retenu que les carrés premiers parfaits déterminés par les valeurs de m suivantes :

123 380 362 749 ; 126 257 341 210 ; 134 475 560 995 ; 140 141 073 534
170 206 666 069 ; 176 475 189 820 ; 195 257 527 905 ; 202 864 665 289

Ceux-ci sont notés (43) à (50).

Nous n'avons pas comptabilisé les carrés premiers obtenus au-delà de m = 100 900 000 000.

Utilisons maintenant le p-générateur G_{60}^{18}. Celui-ci nous donnera peut-être des nouveaux carrés premiers parfaits?!?!

107	131	29
11	89	167
149	47	71

G_{60}^{18}

C'est un carré magique qui renferme 9 nombres premiers différents. Il génère au moins 212 carrés premiers dont les carrés premiers parfaits (27), (40), (41) et (42) du tableau 5.

Il génère plus de carrés premiers que G_{30}^{12} mais ce dernier génère 37 carrés premiers parfaits tandis que G_{60}^{18} n'en génère que 4 lorsque m varie de 0 à 175 100 000 000.

1) **Quand m varie de 0 à 1 000 000 000.**
   Nous obtenons 31 carrés premiers.

2) **Quand m = 49 988 712 321.**
   Cette valeur détermine le carré premier parfait (27) du tableau 5.

3) **Quand m > 49 988 712 321.**
   En faisant varier m de 49 988 712 322 à 175 100 000 000, nous trouvons 177 carrés premiers plus les nouveaux carrés premiers parfaits (40), (41) et (42) :

$$(40) \quad m = 73\,829\,575\,290$$
$$(41) \quad m = 158\,326\,723\,641$$
$$(42) \quad m = 162\,905\,547\,891$$

Au-delà de m = 106 500 000 000, nous n'avons pas comptabilisé les nouveaux carrés premiers.

Enfin, prenons ce troisième p-générateur, G_{30}^{42}, qui peut-être, pourra nous donner des nouveaux carrés premiers parfaits plus facilement que le carré G_{60}^{18}. Pourquoi? Les 9 nombres premiers obtenus avec un certain m, se trouvent dans un intervalle fermé de différentes longueurs selon le p-générateur utilisé.

Avec G_{30}^{12}, les intervalles sont toujours de longueur 113 – 29 + 1 = 85. C'est le nombre d'entiers dans l'intervalle fermé [29 + 2m ; 113 + 2m].

Avec G_{30}^{42}, les intervalles sont toujours de longueur 254 971 – 254 827 + 1 = 145.

Avec G_{60}^{18}, les intervalles sont toujours de longueur 167 – 11 + 1 = 157.

Nous devrions trouver moins de nombres premiers dans un intervalle plus petit!??! D'où une meilleure chance d'en trouver seulement 9. Si l'intervalle est trop petit, nous n'aurons pas assez de nombres premiers alors que dans les intervalles plus longs, nous en aurons trop!!! C'est pourquoi nous allons maintenant travailler avec G_{30}^{42}.

254 941	254 887	254 869
254 827	254 899	254 971
254 929	254 911	254 857

G_{30}^{42}

C'est un carré magique formé de 9 nombres premiers différents.

Nous savons que G_{30}^{42} génère 6 carrés premiers parfaits soient ceux déterminés par :

$$m = 24\ 642\ 758\ 426$$
$$m = 37\ 110\ 132\ 246$$
$$m = 40\ 071\ 417\ 386$$
$$m = 44\ 566\ 335\ 455$$
$$m = 72\ 987\ 605\ 816$$
$$m = 90\ 780\ 413\ 625$$

Nous obtenons respectivement les carrés (17), (20), (23), (25), (38) et (39) du tableau 5.

1) Quand m varie de 0 à 1 000 000 000.

Nous obtenons 32 carrés premiers.

2) Quand m vaut :

$$m = 24\ 642\ 758\ 426 \qquad (17)$$
$$m = 37\ 110\ 132\ 246 \qquad (20)$$
$$m = 40\ 071\ 417\ 386 \qquad (23)$$
$$m = 44\ 566\ 335\ 455 \qquad (25)$$
$$m = 72\ 987\ 605\ 816 \qquad (38)$$
$$m = 90\ 780\ 413\ 625 \qquad (39)$$

Nous trouvons 6 carrés premiers parfaits; le premier est de Nelson, les 3 suivants de Wesolowski et les 2 derniers de Bégin.

3) Quand m varie de 49 988 500 000 à 100 900 000 000.

Nous trouvons 165 carrés premiers lorsque m varie de 49 988 500 000 à 100 900 000 000 plus les carrés premiers parfaits (38) et (39) du tableau 5.

Puis nous trouvons 2 carrés premiers entre 300 000 000 001 et 301 100 000 000.

Le tableau suivant indique ce que chaque p-générateur a déjà trouvé et en rouge, les 23 nouveaux carrés premiers parfaits trouvés par Claude Bégin du 20 avril 2020 au 26 juillet 2020.

	G_{30}^{12}	G_{30}^{42}	G_{60}^{18}
Carrés premiers au moins	86	199	208
Carrés premiers parfaits	$20+18$	$4+2$	$1+3$

Celui-ci montre que G_{30}^{12} génère **au moins** 86 carrés premiers d'ordre 3 plus 38 carrés premiers parfaits d'ordre 3 parmi les 50 connus à ce jour (26 juillet 2020).

Après avoir donné au-delà de 378 000 000 000 de valeurs entières à m, nous avons obtenu une seule fois une paire de carrés premiers exceptionnels. Voici cette paire $(A\ ;\ B)$ générée par G_{30}^{42}.

174 131 493 563	174 131 493 509	174 131 493 491
174 131 493 449	174 131 493 521	174 131 493 593
174 131 493 551	174 131 493 533	174 131 493 479

Carré A défini avec m = 87 065 619 311

174 131 493 593	174 131 493 539	174 131 493 521
174 131 493 479	174 131 493 551	174 131 493 623
174 131 493 581	174 131 493 563	174 131 493 509

Carré B défini avec m = 87 065 619 326

Nous avons $B = A + 30$.

A *et* B ont en commun 6 nombres premiers!!!

C'est la première fois que nous trouvons 2 carrés premiers dont l'un est déterminé par m et l'autre par m + 15 et ce, avec le même p-générateur!!!

Ces 2 carrés premiers cousins sont presque des frères!!!

Dans le nouveau tableau 5 qui suit, les lettres N, W et B signifient respectivement que la suite correspondante a été trouvée pour la première fois par Harry L. Nelson, Arkadiusz Wesolowski et Claude Bégin.

Nous avons trouvé, de façon indépendante de Nelson et de Wesolowski les 8 premiers carrés premiers parfaits du tableau 5 et ce, avec le programme «Premiers parfaits -3». Puis, les 23 derniers carrés premiers parfaits avec les p-générateurs $G_{30}^{12}, G_{30}^{42}\ et\ G_{60}^{18}$.

Ce nouveau tableau 5 présente les 50 carrés premiers parfaits d'ordre 3 connus à ce jour (le 26 Juillet 2020). Nous pourrions sûrement en trouver d'autres avec nos trois p-générateurs $G_{30}^{12}, G_{30}^{42}\ et\ G_{60}^{18}$.

Voici notre nouveau tableau 5 :

Rappelons que le nombre d de la dernière colonne est le nombre qu'il faut ajouter au plus petit carré de même couleur pour obtenir le carré correspondant à la ligne où nous sommes. Par exemple, pour obtenir le carré de la ligne 6, il faut ajouter 4 568 342 900 à 1 480 028 129 pour obtenir 6 048 371 029. Nous pourrions écrire :

(6) = 4 568 342 900 + (1)

Pour obtenir le carré de la ligne 25, il faut ajouter 39 847 154 058 à 49 285 771 679 pour obtenir 89 132 925 737 d'où :

(25) = 39 847 154 058 + (17)

Rang de la suite	a	r	t	d
(1) 73 780 392 N	1 480 028 129	12	30	
(2) 91 233 987 N	1 850 590 057	12	30	370 561 928
(3) 243 732 111 N	5 196 185 947	12	30	3 716 157 818
(4) 261 821 730 N	5 601 567 187	12	30	4 121 539 058
(5) 268 755 906 N	5 757 284 497	12	30	4 277 256 368
(6) 281 692 209 N	6 048 371 029	12	30	4 568 342 900
(7) 286 252 067 N	6 151 077 269	12	30	4 671 049 140
(8) 434 056 891 N	9 517 122 259	12	30	8 037 094 130
(9) 842 207 042 N	19 052 235 847	12	30	17 572 207 718
(10) 902 344 164 N	20 477 868 319	12	30	18 997 840 190
(11) 1 042 374 622 N	23 813 359 613	54	30	
(12) 1 051 311 615 N	24 026 890 159	12	30	22 546 862 030
(13) 1 164 898 483 W	26 748 150 199	84	30	
(14) 1 238 594 408 N	28 519 991 387	12	30	27 039 963 258
(15) 1 499 228 081 N	34 821 326 119	12	30	33 341 297 990
(16) 1 892 656 056 N	44 420 969 909	12	30	42 940 941 780
(17) 2 090 654 856 N	49 285 771 679	42	30	
(18) 3 078 816 357 N	73 827 799 009	12	30	72 347 770 880
(19) 3 084 687 241 N	73 974 781 889	12	30	72 494 753 760
(20) 3 094 505 961 W	74 220 519 319	42	30	24 934 747 640
(21) 3 184 881 661 N	76 483 907 837	12	30	75 003 879 708
(22) 3 187 929 454 N	76 560 277 009	12	30	75 080 248 880
(23) 3 330 758 121 W	80 143 089 599	42	30	30 857 317 920
(24) 3 559 417 516 N	85 892 025 227	12	30	84 411 997 098
(25) 3 688 049 402 W	89 132 925 737	42	30	39 847 154 058
(26) 3 940 838 317 N	95 515 449 037	12	30	94 035 420 908
(27) 4 117 163 273 W	99 977 424 653	18	60	
(28) 4 275 348 165 B	103 987 093 547	12	30	102 507 065 418
(29) 4 972 689 349 B	121 733 374 727	12	30	120 253 346 598
(30) 5 785 297 282 B	142 540 972 967	12	30	141 060 944 838
(31) 5 943 141 456 B	146 597 049 299	12	30	145 117 021 170
(32) 6 363 378 256 B	157 416 943 207	12	30	155 936 915 078
(33) 6 722 026 194 B	166 674 131 147	12	30	165 194 103 018

Rang de la suite	a	r	t	d
(34) 7 018 112 091 B	174 331 390 549	12	30	172 851 362 420
(35) 7 269 919 566 B	180 853 912 819	12	30	179 373 884 690
(36) 7 790 835 962 B	194 375 590 109	12	30	192 895 561 980
(37) 8 074 087 847 B	201 743 231 269	12	30	200 263 203 140
(38) 5 918 963 232 B	145 975 466 459	42	30	96 689 694 780
(39) 7 297 200 098 B	181 561 082 077	42	30	132 275 310 398
(40) 5 984 448 694 B	147 659 150 591	18	60	47 681 725 938
(41)12 447 955 801 B	316 653 447 293	18	60	216 676 022 640
(42)12 793 594 362 B	325 811 095 793	18	60	225 833 671 140
(43) 9 796 632 851 B	246 760 725 527	12	30	245 280 697 398
(44)10 015 876 678 B	252 514 682 449	12	30	251 034 654 320
(45)10 641 154 885 B	268 951 122 019	12	30	267 471 093 890
(46)11 071 365 442 B	280 282 147 097	12	30	278 802 118 968
(47)13 343 967 546 B	340 413 332 167	12	30	338 933 304 038
(48)13 815 783 070 B	352 950 379 669	12	30	351 470 351 540
(49)15 225 807 954 B	390 515 055 839	12	30	389 035 027 710
(50)15 795 414 830 B	405 729 330 607	12	30	404 249 302 478

Nouveau tableau 5 : suite trouvée par H. L. Nelson (N), A. Wesolowski (W), C. Bégin (B)

Voici les 18 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 générés par G_{30}^{12} :

103 987 093 601	103 987 093 607	103 987 093 559
103 987 093 547	103 987 093 589	103 987 093 631
103 987 093 619	103 987 093 571	103 987 093 577

Carré (28)

121 733 374 781	121 733 374 787	121 733 374 739
121 733 374 727	121 733 374 769	121 733 374 811
121 733 374 799	121 733 374 751	121 733 374 757

Carré (29)

142 540 973 021	142 540 973 027	142 540 972 979
142 540 972 967	142 540 973 009	142 540 973 051
142 540 973 039	142 540 972 991	142 540 972 997

Carré (30)

146 597 049 353	146 597 049 359	146 597 049 311
146 597 049 299	146 597 049 341	146 597 049 383
146 597 049 371	146 597 049 323	146 597 049 329

Carré (31)

157 416 943 261	157 416 943 267	157 416 943 219
157 416 943 207	157 416 943 249	157 416 943 291
157 416 943 279	157 416 943 231	157 416 943 237

Carré (32)

166 674 131 201	166 674 131 207	166 674 131 159
166 674 131 147	166 674 131 189	166 674 131 231
166 674 131 219	166 674 131 171	166 674 131 177

Carré (33)

174 331 390 603	174 331 390 609	174 331 390 561
174 331 390 549	174 331 390 591	174 331 390 633
174 331 390 621	174 331 390 573	174 331 390 579

Carré (34)

180 853 912 873	180 853 912 879	180 853 912 831
180 853 912 819	180 853 912 861	180 853 912 903
180 853 912 891	180 853 912 843	180 853 912 849

Carré (35)

194 375 590 163	194 375 590 169	194 375 590 121
194 375 590 109	194 375 590 151	194 375 590 193
194 375 590 181	194 375 590 133	194 375 590 139

Carré (36)

201 743 231 323	201 743 231 329	201 743 231 281
201 743 231 269	201 743 231 311	201 743 231 353
201 743 231 341	201 743 231 293	201 743 231 299

Carré (37)

Vous pourrez trouver le **Carré (43)** en utilisant la structure générale des carrés magiques d'ordre 3 ou le fichier «Ordre 3» d'EXCEL ou MATHEMATICA; il suffit de poser :

$$a = 246\ 760\ 725\ 527\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Notez que $a = 2m + 29$ et que le rang de (43) est $9\ 796\ 632\ 851$

Le **Carré (44)** est défini par m = 126 257 341 210 d'où :

$$a = 252\ 514\ 682\ 449\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (44) est $10\ 015\ 876\ 678$.

Le **Carré (45)** est défini par m = 134 475 560 995 d'où :

$$a = 268\ 951\ 122\ 019\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (45) est $10\ 641\ 154\ 885$.

Le carré **(46)** est défini par m = 140 141 073 534 d'où :

$$a = 280\ 282\ 147\ 097\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (46) est $11\ 071\ 365\ 442$.

Le carré **(47)** est défini par m = 170 206 666 069 d'où :

$$a = 340\ 413\ 332\ 167\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (47) est $13\ 343\ 967\ 546$.

Le carré **(48)** est défini par m = 176 475 189 820 d'où :

$$a = 352\ 950\ 379\ 669\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (48) est $13\ 815\ 783\ 070$.

Le carré **(49)** est défini par m = 195 257 527 905 d'où :

$$a = 390\ 515\ 055\ 839\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (49) est $15\ 225\ 807\ 954$.

Le carré **(50)** est défini par m = 202 864 665 289 d'où :

$$a = 405\ 729\ 330\ 607\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (50) est $15\ 795\ 414\ 830$.

Puis les 2 nouveaux carrés premiers parfaits suivants générés par G_{30}^{42} :

145 975 466 573	145 975 466 519	145 975 466 501
145 975 466 459	145 975 466 531	145 975 466 603
145 975 466 561	145 975 466 543	145 975 466 489

Carré (38)

181 561 082 191	181 561 082 137	181 561 082 119
181 561 082 077	181 561 082 149	181 561 082 221
181 561 082 179	181 561 082 161	181 561 082 107

Carré (39)

Enfin, les 3 nouveaux carrés premiers parfaits suivants générés par G_{60}^{18} :

147 659 150 687	147 659 150 711	147 659 150 609
147 659 150 591	147 659 150 669	147 659 150 747
147 659 150 729	147 659 150 627	147 659 150 651

Carré (40)

316 653 447 389	316 653 447 413	316 653 447 311
316 653 447 293	316 653 447 371	316 653 447 449
316 653 447 431	316 653 447 329	316 653 447 353

Carré (41)

Vous pourrez trouver le **Carré (42)** en utilisant le fichier «Ordre 3» d'EXCEL ou MATHEMATICA en posant :

$$a = 325\,811\,095\,793\ ;\ r = 18\ ;\ t = 60$$

Notez que $a = 2m + 11$ et que le rang de (42) est $12\,793\,594\,362$.

Selon le tableau 5 ci-haut, nous pourrions construire les p-générateurs $G_{30}^{54}\ et\ G_{30}^{84}$.

Nous avons trouvé 31 des 50 carrés premiers parfaits d'ordre 3 du tableau 5. Il s'agit des carrés de (1) à (8), trouvés avant nous par Harry L. Nelson en 1988 . Nous les avons trouvés de façon indépendante de Nelson et de Wesolowski. Quant aux 23 nouveaux, je les ai trouvés à l'aide de G_{30}^{12} ; $G_{30}^{42}\ et\ G_{60}^{18}$ du 20 avril 2020 au 26 juillet 2020.

Carrés premiers parfaits 3x3	a été le premier à en trouver	trouvés
Harry L. Nelson	22	22
Arkadiusz Wesolowski	5	27
Claude Bégin	23	23
C. Bégin, C. St-Hilaire		8
Total	50	50

Nelson a été le premier à trouver le premier carré premier parfait 3x3; il en a trouvé 22 en tout.

Arkadiusz Wesolowski a retrouvé, de façon indépendante de Nelson, les 22 carrés de Nelson plus 5 nouveaux soient les carrés (13), (20), (23), (25) et (27) du tableau 5.

Claude Bégin à été le premier à trouver les carrés (28) à (50) du tableau 5.

Claude Bégin et Claude St-Hilaire ont retrouvé de façon indépendante de Nelson et Wesolowski, les 8 premiers carrés du tableau 5.

Notons que ces 3 p-générateurs ont été construits à partir des carrés premiers parfaits (1), (17) et (27).

Le tableau suivant présente les 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 qui apparaissent, de haut en bas, dans l'ordre du plus petit au plus grand.

Nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3	Générés par
(28)	G_{30}^{12}
(29)	G_{30}^{12}
(30)	G_{30}^{12}
(38)	G_{30}^{42}
(31)	G_{30}^{12}
(40)	G_{60}^{18}
(32)	G_{30}^{12}
(33)	G_{30}^{12}
(34)	G_{30}^{12}
(35)	G_{30}^{12}
(39)	G_{30}^{42}
(36)	G_{30}^{12}
(37)	G_{30}^{12}
(43)	G_{30}^{12}
(44)	G_{30}^{12}
(45)	G_{30}^{12}
(46)	G_{30}^{12}
(41)	G_{60}^{18}
(42)	G_{60}^{18}
(47)	G_{30}^{12}
(48)	G_{30}^{12}
(49)	G_{30}^{12}
(50)	G_{30}^{12}

Le numéro attribué à chaque nouveau carré premier parfait indique dans quel ordre chacun a été découvert après le carré (27).

Soit M, un carré premier presque normal d'ordre 3. Son plus petit nombre est a et son plus est $a+2r+2t$. Le nombre d'entiers dans l'intervalle fermé I suivant est noté λ. C'est aussi la longueur de I.

$$I = [a\ ;\ a+2r+2t] \quad ; \quad \lambda = a+2r+2t-a+1 = 2r+2t+1$$

Théorème :

Soit M, un carré premier presque normal d'ordre 3 et $I = [a\ ;\ a+2r+2t]$, l'intervalle fermé formé du plus petit nombre premier de M à gauche et du plus grand à droite.

M possède 9 nombres premiers consécutifs ssi I contient exactement 9 nombres premiers.

En effet, les 9 nombres premiers de M sont dans I. Si I contient seulement 9 nombres premiers, alors ceux-ci sont ceux de M, donc forcément consécutifs. Les nombres premiers dans tout intervalle sont évidemment consécutifs!!!

Si les 9 nombres premiers de M sont consécutifs, alors I contient exactement 9 nombres premiers. En effet, si I renferme un dixième nombre premier, alors ceux de M ne peuvent pas être consécutifs puisque pour aller de a à $a+2r+2t$, nous devons obligatoirement sauter un nombre premier. En d'autres mots, si I renferme (9 + (k > 0)) nombres premiers, alors ces k nombres premiers devront se trouver entre ceux de M ce qui contredit que les 9 nombres premiers de M soient consécutifs.

Avec MATHEMATICA, nous pouvons trouver le nombre de nombres premiers dans un intervalle fermé [u ; v] en faisant

PrimePi [v] – PrimePi [u – 1]

Pour G_{30}^{12}, nous trouvons $\lambda = 85$.

Pour G_{30}^{42}, nous trouvons $\lambda = 145$.

Pour G_{60}^{18}, nous trouvons $\lambda = 157$.

De façon intuitive, nous pensons que plus λ est grand, plus il y aura de nombres premiers dans I. Donc, ce sera plus facile de trouver un carré premier et plus difficile de trouver un carré premier parfait. Le tableau de la page 9 indique que G_{30}^{12} donne 38 carrés premiers parfaits, G_{30}^{42} en donne 6 et G_{60}^{18} en donne 4.

En terminant, voici un carré premier, G_{42}^{12}, avec $\lambda = 109$. Celui-ci semble être un bon candidat pour générer des carrés premiers et premiers parfaits.

71	89	17
5	59	113
101	29	47

G_{42}^{12}

Nous avons ajouté 2m dans chaque case avec m qui varie de 1 à 1 900 000 000 et nous n'avons obtenu aucun carré premier!!! Ce carré est-il vraiment un bon candidat?

La réponse est non!!!

Théorème :

G_{42}^{12} ne génère aucun carré premier lorsque l'entier m varie de 1 à ∞.

Preuve :

Les carrés premiers générés par G_{42}^{12} ont la forme G_{42}^{12} + 2m avec m, un entier ≥ 1. Tous les entiers pairs se terminent par 0, 2, 4, 6, ou 8.

2m se termine par 0 d'où 5 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 2 d'où 113 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 4 d'où 71 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 6 d'où 29 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 8 d'où 17 + 2m se termine par 5.

Le carré ainsi généré sera magique, presque normal mais ne sera jamais premier puisqu'il contiendra toujours un entier multiple de 5, différent de 5. Notez que tous les multiples de 5 supérieurs à 5 ne sont pas premiers.

Pourquoi G_{30}^{12} peut-il générer des carrés premiers?

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

2m se termine par 0 et nous trouvons 9 nombres qui peuvent être premiers.

2m se termine par 2 d'où 113 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 4 d'où 71 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 6 d'où 29 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 8 et nous trouvons 9 nombres qui peuvent être premiers.

Le carré G_{30}^{12} peut donc générer des carrés premiers à la condition nécessaire que 2m se termine par 0 ou par 8. Nous vous laissons vérifier que G_{30}^{42} et G_{60}^{18} peuvent aussi générer des carrés premiers.

Petite histoire du carré premier parfait (41)

D'abord, avec le programme «Premiers parfaits-3», nous retrouvons, de façon indépendante, les 8 premiers carrés premiers parfaits d'ordre 3 trouvés par Nelson en 1988. Le carré (1) du tableau 5 est le plus petit carré premier parfait d'ordre 3.

Ensuite, je trouve trois p-générateurs avec lesquels je cherche des nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3. Ce sont des carrés premiers presque normaux notés $G_{30}^{12}, G_{30}^{42}\ et\ G_{60}^{18}$.

Dans chacun, j'ajoute l'entier 2m dans les 9 cases afin d'obtenir un nouveau carré formé de 9 nombres premiers, ce qui est très rare!!!

Déjà, le p-générateur G_{30}^{12} nous a donné 20 carrés premiers parfaits (ceux de Nelson) donc pour moi, c'est un bon p-générateur, voilà pourquoi je me suis dit que G_{30}^{12} devrait nous en donner d'autres. Effectivement, avec m allant jusqu'à 202 900 000 000, j'en ai obtenu 18 nouveaux.

Pour chaque valeur de m, nous pouvons associer un intervalle fermé [u ; v] de longueur 85 dans lequel nous trouvons les 9 nombres du carré généré par G_{30}^{12} dont u et v. Si les 9 nombres du carré sont premiers alors ils seront consécutifs ssi le nombre de nombres premiers dans [u ; v] est 9.

MATHEMATICA travaille par tranches de 200 000 000 de valeurs entières attribuées à m. Dès qu'une valeur de m donne 9 nombres premiers, celle-ci est affichée. Je regarde ensuite combien de nombres premiers se trouvent dans l'intervalle. **Le nombre tant attendu est 9, ce qui arrive que très rarement**!!! Dans l'intervalle, il y a de la place pour plus que 9 nombres premiers et le plus souvent, nous en trouvions 12, 13 et 14.

Avec G_{30}^{42}, nous en avions déjà 4 et avec m qui va jusqu'à 100 900 000 000, j'en trouve 2 autres. Ici, la longueur de l'intervalle est 145 ce qui fait qu'il sera plus difficile de trouver des carrés premiers parfaits. Il y aura très souvent plus que 9 nombres premiers dans cet intervalle plus long (de 85, nous passons à 145).

Enfin, avec G_{60}^{18}, nous n'avions qu'un seul premier parfait soit le carré (27) du tableau 5. Avec m allant jusqu'à 100 900 000 000, j'en trouve un seul autre soit le carré (40). Ici, l'intervalle est de longueur 157 donc encore plus difficile de trouver un premier parfait.

En principe, mon travail s'arrête ici. J'avais pour limite m = 100 900 000 000. Le nombre de carrés premiers parfaits d'ordre 3 passe donc de 27 à 40. Je pouvais me contenter des 13 nouveaux carrés premiers parfaits que je venais de trouver sur une période 6 semaines mais j'ai décidé d'en trouver un dernier de façon à avoir un nombre premier de carrés premiers parfaits soit 41.

Puisque G_{60}^{18} n'a donné que 2 carrés premiers parfaits, j'ai aussi décidé de continuer avec G_{60}^{18}. Ce fut un travail très long. Le carré (40) a été trouvé avec m = 73 829 575 290 tandis que (41) a été trouvé avec :

m = 158 326 723 641

Je n'ai pas comptabilisé les carrés premiers rencontrés; je voulais seulement trouver un dernier premier parfait.

Le travail, pour trouver (41), a duré environ 245 heures réparties sur 21 jours soit, en moyenne, un peu plus de 11 heures par jour. La dernière valeur de m a été m = 158 500 000 000.

21 jours à attendre, à l'écran, l'apparition du 9. Des déceptions et frustrations pendant 20 jours!!!

Surtout des 12, 13, 14, 15 mais pas de 9. À l'occasion, 10, 11, 16, 17 mais pas de 9.

Puis quelle grande joie le 22 juin 2020 lorsqu'enfin, je vois ce si beau 9 sur mon écran!!!!

Chaque valeur de m qui nous donne un carré premier parfait est extrêmement rare car elle doit à la fois nous donner seulement 9 nombres premiers dans l'intervalle et faire que les 9 nombres du carré soient premiers.

Ce procédé, très spécial, m'a permis de trouver 23 carrés premiers parfaits mais je ne doute pas, qu'entre les carrés (40) et (41), par exemple, nous puissions trouver d'autres premiers parfaits. Pour cela, il faudrait un autre p-générateur ou un tout autre procédé qui serait exhaustif donc qui regarderait toutes les suites consécutives de 9 nombres premiers consécutifs, ce que nous avons fait pour trouver les 8 premiers carrés du tableau 5.

Toujours avec G_{60}^{18}, je continue au-delà de m = 158 500 000 000 puis, **le 28 juin 2020**, je trouve le carré premier parfait **(42)** avec m = 162 905 547 891. Je ne m'attendais pas à trouver aussi rapidement un nouveau carré premier parfait; je voulais seulement voir, par curiosité, combien de nombres premiers se trouveraient dans l'intervalle associé à m (combien de 10, 11, 12, …). Voir page 18 pour les coordonnées du carré (42).

Je décide alors de continuer avec G_{30}^{12}, au-delà de m = 100 900 000 000 pour trouver, **le 7 juillet 2020**, le carré premier parfait **(43)** avec m = 123 380 362 749.

Nous avons vu plus haut qu'avec G_{30}^{12}, j'ai trouvé les carrés premiers parfaits (43) à (50). Pour trouver le carré (47), il a fallu environ 87 heures de travail. Pour le carré (48), environ 18 heures; pour le carré (49), environ 54 heures et finalement, pour le carré (50), environ 22 heures.

Note sur le travail de Wesolowski :

Wesolowski a trouvé les 27 premiers carrés premiers parfaits dont les 22 de Nelson. Il a procédé de façon exhaustive ce qui nous assure qu'entre 2 carrés premiers parfaits consécutifs parmi ses 27, il n'y en a pas d'autre et il n'y en a aucun avant le carré (1). **Ce travail est remarquable!!!** Voir le tableau 5, page 14 de l'annexe 18.

Il faut donc aller au-delà du carré (27) si nous voulons trouver un nouveau carré premier parfait.

Note sur le travail de Nelson :

Rappelons que Nelson a reçu le prix de $100 offert par Martin Gardner en 1987 à celui qui trouverait le premier carré premier parfait d'ordre 3 ou démontrerait qu'il n'en existe aucun. En 1988, Nelson en trouva 22 à l'aide d'un ordinateur CRAY et reçu son prix.

Nous savons maintenant que Nelson n'a pas travaillé de façon exhaustive puisqu'entre ses carrés, Wesolowski a réussi à en placer 4 nouveaux. Le dernier du tableau 5 de l'annexe 18 est le cinquième nouveau de Wesolowski.

Note sur le travail de Bégin :

La recherche de Bégin pour en trouver d'autres s'est faite au-delà du carré (27). Le nouveau tableau 5 de l'annexe 18.1 contient les nouveaux carrés premiers parfaits (28) à (50).

Avec le programme construit par Claude St-Hilaire, Bégin trouve, de façon exhaustive, les 8 premiers carrés premiers parfaits d'ordre 3, déjà trouvés par Nelson. De plus, nous savons alors que le carré (1) du tableau 5 de l'annexe 18 (ou 18.1) est le plus petit, ce que nous voulions démontrer (objectif atteint)!!!

Résumons :

Les carrés premiers parfaits d'ordre 3, au-delà du carré (27), sont trouvés à l'aide des 3 p-générateurs G_{30}^{12}, G_{30}^{42} et G_{60}^{18} qui sont des carrés premiers presque normaux.

Chaque carré trouvé avec ces 3 p-générateurs à la forme $G_v^u + 2m$ où m est un entier ≥ 0. Ce carré est évidemment magique et presque normal. Qu'il soit formé de 9 nombres premiers est déjà très rare.

Chaque fois que nous donnons une valeur entière à m, notre p-générateur nous donne un nouveau carré magique qui ne contient pas forcément 9 nombres premiers. Quand cela arrive, notre programme nous indique la valeur de m qui nous conduit à un carré premier.

À chaque valeur de m, nous associons l'intervalle fermé $I = [a\ ;\ a + 2r + 2t]$ où a et $a + 2r + 2t$ sont respectivement le plus petit entier du carré et le plus grand.

Si le carré obtenu avec m est premier et si l'intervalle I renferme exactement 9 nombres premiers, alors le carré premier est premier parfait.

Le nombre total de carrés premiers parfaits d'ordre 3 connus au 26 juillet 2020 est de 50.

Le tableau suivant indique, pour chaque p-générateur, la valeur de m qui conduit aux carrés premiers parfaits d'ordre 3 de (28) à (50) :

Rang du carré	G_{30}^{12}	G_{30}^{42}	G_{60}^{18}	Trouvé le
(28)	51 993 546 759			20 avril 2020
(29)	60 866 687 349			27 avril 2020
(30)	71 270 486 469			12 mai 2020
(31)	73 298 524 635			13 mai 2020
(32)	78 708 471 589			15 mai 2020
(33)	83 337 065 559			17 mai 2020
(34)	87 165 695 260			19 mai 2020
(35)	90 426 956 395			20 mai 2020
(36)	97 187 795 040			22 mai 2020
(37)	100 871 615 620			23 mai 2020
(38)		72 987 605 816		25 mai 2020
(39)		90 780 413 625		28 mai 2020
(40)			73 829 575 290	1 juin 2020
(41)			158 326 723 641	22 juin 2020
(42)			162 905 547 891	28 juin 2020
(43)	123 380 362 749			7 juillet 2020
(44)	126 257 341 210			8 juillet 2020
(45)	134 475 560 995			10 juillet 2020
(46)	140 141 073 534			11 juillet 2020
(47)	170 206 666 069			18 juillet 2020
(48)	176 475 189 820			19 juillet 2020
(49)	195 257 527 905			24 juillet 2020
(50)	202 864 665 289			26 juillet 2020

Les 3 p-générateurs $G_{30}^{12}, G_{60}^{18}\ et\ G_{30}^{42}$, nous donnent au moins 541 carrés premiers dont 48 carrés premiers parfaits.

Nous ne serions par surpris que certains rangs soient exacts; le rang de (28) par exemple.

Les carrés premiers parfaits (28) à (37) et (43) à (50) sont générés par G_{30}^{12}.

Le p-générateur G_{30}^{12} génère maintenant au moins 124 carrés premiers dont 38 carrés premiers parfaits parmi les 50 connus à ce jour (26 juillet 2020) soit 76 % du total des carrés premiers parfaits!!!

Ma recherche pour trouver des nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 a débuté le 20 avril 2020 pour se terminer le 26 juillet 2020.

Elle m'a permis de trouver 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3.

Carrés premiers parfaits 3x3	Nouveaux carrés trouvés	Total trouvé
Claude Bégin	23	31
Harry L. Nelson	22	22
Arkadiusz Wesolowski	5	27
Total	50	

Annexe 19 : Comment j'ai trouvé ALG-1?

Comment **l'algorithme ALG-1**, qui nous permet de construire des carrés arithmétiques (voir chapitre 11, Partie 2) et associatifs d'ordres impairs, a-t-il été trouvé?

Je pense qu'il est intéressant de montrer le cheminement qui m'a conduit à ALG-1.

1) D'abord, je constate que les carrés **super-Dürer-alpha** sont des carrés arithmétiques (voir section 5.6, Partie 2).
2) Également, je constate que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont arithmétiques.
3) D'où la question : **trouvons-nous des carrés arithmétiques pour tous les ordres?**
4) Regardons pour l'ordre 5. Pour cela, j'ai considéré le tableau arithmétique suivant :

$$(*)\quad \begin{matrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ 30 & 32 & 34 & 36 & 38 \\ 39 & 41 & 43 & 45 & 47 \end{matrix}$$

   et je me suis demandé si je pouvais construire un carré magique formé avec ces vingt-cinq nombres.
5) Pour cela, j'ai utilisé un procédé tiré de «Célèbres problèmes mathématiques» d'Edouard Callandreau, problème 8 sur les carrés magiques. Voir [4] de la bibliographie.
6) Ce procédé, pour les carrés d'ordres impairs, m'a permis de construire un carré magique. Donc, des carrés magiques arithmétiques existent pour les ordres 3, 4 et 5.
7) Voici ce carré magique de somme S = 125 : il est arithmétique et associatif (deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours 2S/n = 2x125/5 = 50).

21	45	14	38	7
9	23	47	16	30
32	11	25	39	18
20	34	3	27	41
43	12	36	5	29

8) J'ai repris le même procédé avec cette fois le tableau arithmétique suivant dans lequel $n = 5$.

$$
\begin{array}{ccccc}
a & a+r & a+2r & \dots & a+(n-1)r \\
a+t & a+t+r & a+t+2r & \dots & a+t+(n-1)r \\
a+2t & a+2t+r & a+2t+2r & \dots & a+2t+(n-1)r \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a+(n-1)t & a+(n-1)t+r & a+(n-1)t+2r & \dots & a+(n-1)t+(n-1)r
\end{array}
$$

J'ai obtenu le carré magique qui suit de somme $S = 5a + 10r + 10t$:

a + 2t	a + 3r + 4t	a + r + t	a + 4r + 3t	a + 2r
a + 3r	a + r + 2t	a + 4r + 4t	a + 2r + t	a + 3t
a + r + 3t	a + 4r	a + 2r + 2t	a + 4t	a + 3r + t
a + 4r + t	a + 2r + 3t	a	a + 3r + 2t	a + r + 4t
a + 2r + 4t	a + t	a + 3r + 3t	a + r	a + 4r + 2t

9) Maintenant, il est évident que ce carré magique M est la combinaison linéaire suivante :

$$M = r\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array} + t\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array} + a\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad\qquad C$$

$M = r\,A + t\,B + a\,C.$

Nous observons que dans A, chaque diagonale secondaire (*), grande ou brisée, renferme le même entier dans chacune de ses cases. Deux diagonales différentes, deux entiers différents.

Nous observons que B est la rotation de -90° (90° dans le sens des aiguilles d'une montre) de A.

Puis, C est un carré trivial formé du nombre 1. Enfin, $A, B\,et\,C$ sont linéairement indépendants.

Maintenant, tous les ingrédients pour passer à la démonstration générale sont en place (voir chapitre 11).

Voilà comment j'ai trouvé ALG-1. Plus précisément, pour construire A, j'ai utilisé les diagonales principales au lieu des diagonales secondaires (*) comme dans le A ci-haut.

J'ai ensuite construit le« Lemme sur les diagonales brisées». Voir annexe 6.

Ce lemme permet de démontrer que le carré $M = r\,A + t\,B + a\,C$ est toujours un carré magique arithmétique!!!

L'algorithme ALG-1 permet de construire une infinité de carrés magiques presque normaux et au moins un carré magique normal. Ces carrés sont tous associatifs.

L'algorithme ALG-2 permet de construire des carrés arithmétiques associatifs d'ordres pairs multiples de 4. (Voir chapitre 11).

L'algorithme ALG-3 permet de construire des carrés arithmétiques d'ordres pairs non multiples de 4. (Voir chapitre 11). Ce fut le plus difficile à trouver!!!

Annexe 20 : Applications des carrés magiques

1) Certains magiciens et mentalistes utilisent des carrés magiques dans leurs spectacles.
2) Dans certaines recherches en Biologie.
3) Ils nous aident dans la résolution de certains problèmes de mathématique.
4) Ils sont utilisés dans l'industrie du tissage.
5) Ils nous permettent de construire des familles de courbes remarquables.
6) Ce sont des exemples d'espaces vectoriels de dimensions finies.
7) Puis les carrés magiques servent à me (nous) faire plaisir!!!

Pour 1)

Voir la Partie 1, section 9 : Magie avec Dürer puis la Partie 2, chapitre 14 : Un tour de Magie (14.9).

Pour 3)

Voir Partie 2, chapitre 5, problème 51 de 5.18 et chapitre 6, problème 14 de 6.5.

Si vous connaissez d'autres applications des carrés magiques, alors il nous ferait plaisir de les placer dans cette annexe en indiquant le nom de l'auteur, bien entendu!!!

Annexe 21 : Les fichiers EXCEL

(Construits par Ginette Bégin)

Sur le site web « carres-magiques.com », vous trouverez, dans la Partie 3, un fichier de type EXCEL dans lequel nous présentons 30 onglets notés «Ordre 3» à «Ordre 32». Ainsi, l'onglet « Ordre 11» vous permet de construire une infinité de carrés magiques d'ordre 11.

Cliquez sur le lien proposé pour télécharger ce fichier en format compressé.

Par exemple, vous choisissez l'onglet «Ordre 9». Vous allez placer dans les cases t, r et a, les nombres que vous voulez. En cliquant sur «Entrée» pour valider ces choix, vous trouverez votre carré magique d'ordre 9.

Nous avons donné, au départ les valeurs : t = 9 ; r = 1 et a = 1. Cela vous assure que votre carré magique sera normal donc contiendra tous les entiers de 1 à 81. Vous voyez autour du carré, en rouge, la somme de chaque rangée et de chaque colonne puis en noir, la somme de chaque diagonale. Cette somme est la somme magique du carré Ici, 369.

Si toutes les cases de votre carré magique sont blanches, cela signifie que vous n'avez aucune répétition dans votre carré.

Posez t = 7, r = 2 et a = 3. Vous obtiendrez un carré magique de somme 351. Dans une case blanche, le nombre qui s'y trouve ne se répète pas. Dans une case rouge, le nombre qui s'y trouve se trouvera aussi dans une autre case rouge.

Pour éviter les répétitions, il suffit de donner à t, une valeur supérieure à 8r où (8 = 9 – 1). D'une façon générale, il suffit de prendre t > (n – 1) r ou r > (n – 1) t. Si vous ne respectez pas cette condition, alors soit vous aurez des répétitions, soit vous n'en aurez pas. Si vous respectez la condition, alors vous êtes certain qu'il n'y aura aucune répétition.

Par exemple, prenez r = 7. Pour t > 8x7, vous êtes assuré d'aucune répétition. Vous pourriez prendre : t = 57 ou 58 ou 59 ou…

Pour obtenir un carré normal d'ordre n, donc un carré qui contiendra tous les entiers de 1 à n^2, il suffit de poser t = n, r = 1, a = 1 ou t = 1, r = n, a = 1.

Par exemple, pour avoir un carré magique normal d'ordre 12, il suffit de poser t = 12, r = 1 et a = 1 ou t = 1, r = 12 et a = 1. Vous aurez alors dans votre carré, tous les entiers de 1 à $12^2 = 12 \times 12 = 144$.

Quant aux répétitions, le nombre a ne joue aucun rôle.

Dans chaque onglet, vous trouvez 4 carrés. Celui de droite est toujours une combinaison linéaire des 3 autres. C'est celui-ci qui vous donne votre carré magique en précisant la valeur de a, r et t.

Tous les carrés construits avec ces 30 onglets sont des carrés arithmétiques (voir chapitre 11). Pour les ordres impairs et pairs multiples de 4, les carrés sont en plus associatifs (voir 14.10 du chapitre 14). Vous pouvez aussi consulter 7, 38 et 12 du glossaire de la Partie 1.

Pour construire un carré magique presque normal, il suffit de donner à a, r et t des valeurs entières positives (> 0) en respectant $t > (n - 1)\, r$ ou $r > (n - 1)\, t$.

Par exemple, pour un carré d'ordre $n = 7$: $a = 5$; $r = 3$ et $t > 6 \times 3 = 18$. Vous pourriez prendre $t = 19$ ou 20 ou 21 ou…

Si vous ne respectez pas la règle $t > (n - 1)\, r$ ou $r > (n - 1)\, t$, alors il peut y avoir répétitions ou pas.

Annexe 22 : Les fichiers MATHEMATICA

(Construits par Claude Bégin)

Nous vous présentons quelques fichiers et programmes construits avec MATHEMATICA :

1) **Les fichiers « Ordre 3 » jusqu'à « Ordre 24 »** vont pour permettre de construire une infinité de carrés magiques d'ordres de 3 à 24. Vous trouverez ces mêmes fichiers dans EXCEL (nous vous suggérons de lire l'annexe 21).
   a Pour trouver un carré magique, il vous suffit de remplacer a, r et t par les nombres que vous voulez. Vous pouvez même les remplacer par des fonctions. Par exemple, voir « Ordre 3 » de MATHEMATICA; vous y trouverez deux carrés magiques et les courbes des 9 fonctions de chaque carré.
   b Tous les carrés d'ordres impairs sont construits avec l'algorithme ALG-1 (voir chapitre 11) et sont tous associatifs. Il en est de même pour les carrés d'ordres pairs multiples de 4 construits avec ALG-2.

2) Le fichier **« Le compte »** vous permet de trouver le nombre de figures magiques dans un carré magique dont l'ordre n'est pas trop grand (3, 4, 5, 6, 7). Vous pourrez aussi trouver le nombre de figures magiques dans un carré multiplicatif (voir l'exemple 4).

3) Le fichier **« Penta-magique-36 »** vous présente un carré magique presque normal d'ordre 36 qui est 5-multi-magique (Voir chapitre 13, page 18). Il a été construit par Li Wen en 2008. Pour le trouver, allez sur le site Multimagie.com, le plus petit pentamagique possible. Vous pourrez alors télécharger ce carré.

4) Ce fichier **« Huit équivalents »** vous permet de trouver les huit équivalents d'un carré magique d'ordre $n \geq 3$. Vous n'avez qu'à poser A = votre carré d'ordre n.

5) Ce fichier **« Table de nombres premiers »,** vous permet de construire une table de nombres premiers du nombre de rang k au nombre de rang m. Nous vous suggérons de vous fabriquer une table des 15 000 premiers nombres premiers!!!

6) Le fichier **« Suites favorables »** vous permet de trouver les suites favorables formées de 9 nombres premiers consécutifs et celles formées de 16 nombres premiers consécutifs. Une suite formée de 9 nombres premiers consécutifs est favorable si la somme des 9 nombres est divisible par 9. Une suite formée de 16 nombres premiers consécutifs est favorable si la somme des 16 nombres est divisible par 8.

7) Le programme **« Carrés premiers parfaits-3 »** cherche des carrés premiers parfaits d'ordre 3 à l'aide d'un p-générateur (carré premier presque normal G qui génère, en ajoutant l'entier 2m dans toutes ses cases, un nouveau carré premier, parfait ou non). (Voir l'annexe 18.1).

   Si vous changez de p-générateur, alors vous devrez changer les 9 nombres dans Seq9 pour les 9 nouveaux nombres premiers de votre nouveau p-générateur. Nous vous suggérons de les écrire comme vous les lisez de gauche à droite et de haut en bas.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (a, b, c, d, e, f, g, h, i)$$

   Quand vous aurez la réponse, vous obtiendrez les 9 nombres premiers du carré magique dans cet ordre : $(a+2m, b+2m, \ldots, i+2m)$ et la construction du carré premier avec ces 9 nombres premiers obtenus sera immédiate.

   Vous pouvez changer la valeur de m1 et celle de Ncount. Le programme regardera toutes les valeurs de m allant de m1 à m2 = m1 + Ncount.

   Quand vous aurez la valeur de m, reportez-la plus bas. Vous verrez apparaitre 9 fois True ce qui confirme que les 9 nombres obtenus sont bien premiers (nous le savions déjà). Si le dernier résultat est 9, alors vos 9 nombres premiers obtenus sont consécutifs. Autrement, ceux-ci ne sont pas consécutifs.

8) Le fichier **« 6 × 6 associatif »** nous conduit à la structure générale des ultra-magiques-bêta. Tout en haut, nous partons de la structure générale des carrés magiques d'ordre 6 (en rouge) dans laquelle nous trouvons 24 variables libres (incluant S). La structure générale suivante en rouge est celle des carrés magiques associatifs (13 variables) puis la troisième structure en rouge est celle des ultra-magiques (9 variables). Enfin la quatrième structure en rouge est celle des ultra-magiques-bêta.

   Pour construire un nouveau ultra-magique-bêta, il suffit de donner vos valeurs aux 6 variables placées juste au-dessus de la dernière structure générale en rouge. L'objectif : trouver d'autres ultra-magiques-bêta presque normaux.

9) Le fichier **« Carré multiplicatif d'ordre 3 »** vous permet de construire des carrés multiplicatifs qui contiennent 9 entiers premiers entre eux. Le premier carré est la

structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 3 à produits non nuls. Les variables a, c et d prennent des valeurs entières non nulles. Le « facteur correcteur » u/r nous donnera un carré avec 9 entiers premiers entre eux.

10) Le fichier **« m-Dürer-1 »** vous permet de construire des carrés multiplicatifs d'ordre 4 qui possède les mêmes figures magiques que les Dürer (le produit des 4 cases de la figure donne P). Le dernier carré en rouge en est une structure générale. Pour obtenir un tel carré, il suffit d'attribuer une valeur aux 7 variables situées au-dessus du carré rouge.

11) Le fichier « **Pandiagonaux ordre 6** » vous présente une structure générale des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6. Ceux-ci proviennent tous de cette structure générale. Deux conditions sont nécessaires pour que le carré soit formé uniquement d'entiers. La première est que toutes les variables libres prennent des valeurs entières. La seconde est que S soit un entier multiple de 6 soit S = 6 k où k est un entier > 0.

12) Le fichier « Nombre de premiers » nous permet de trouver le nombre de nombres premiers dans un intervalle fermé [*a* ; *b*].

Annexe 23 : Les programmes MAPLE

(Construits par Claude St-Hilaire)

01 – Le programme 01-CM4x4-7040-880.mw

Le programme 1) crée et affiche les 7040 carrés magiques 4 × 4 normaux pour les 16 nombres de 1 à 16. Note : Un carré magique avec ses 3 rotations de 90 degrés et ses 4 transposées forment un groupe de 8 carrés magiques dits équivalents.

On peut donc regrouper les 7040 en 880 (7040/8) groupes de 8. Chaque carré magique d'un groupe des 8 équivalents peut représenter son groupe des 8 équivalents, il est alors appelé primitif. Deux carrés magiques sont par conséquent primitifs si l'un n'est pas un équivalent de l'autre.

Le programme 2) donne 880 primitifs.

Pour savoir si on peut construire des carrés magiques avec 16 nombres quelconques, remplacez dans le programme 1) les nombres de 1 à 16 dans N par les 16 nombres de votre choix. Si ces carrés existent, le programme vous les donnera (le nombre de carrés magiques obtenus sera toujours un multiple de 8). Si ces carrés n'existent pas, vous recevrez l'ensemble vide { }.

Note : la transposée d'un carré magique est le carré magique obtenu lorsque l'on change les lignes en colonnes (première ligne devient première colonne, deuxième colonne, etc).

02 – CM4x4-7040.mw

Le programme qui donne le nombre de figures magiques de certaines structures comme les Durer, A-Durer, Super-Durer et Super-Durer Alpha, etc.

03 – Le programme Illustration-Figures.mw

Les programmes 1 et 2 comptent et affichent les figures magiques » d'un carré magique $A_{n \times n,}$ $3 \leq n \leq 5$ (avec ou sans répétition dans A).
Pour n = 6, le programme 3 affiche les figures magiques de la a ième figure magique à la b ième.

04 – Le programme MUM-5.mw concerne des carrés m-ultra-magiques d'ordre 5

Le programme 1 trouve les m-ultra-magiques presque normaux de produit magique P.
Le programme 2 donne les m-ultra-magiques presque normaux primitifs.
Le programme 3 affiche les primitifs en groupes ne contenant que des primitifs ayant les mêmes nombres et donne le minimum et le maximum que possèdent tous les primitifs du groupe.

05 – Le programme MHM-6.mw concerne des carrés m-hyper-magiques d'ordre 6

Le premier programme trouve les 576 carrés m-hyper-magiques de produit magique $P = 120^6$.
Le deuxième programme regroupe les m-hyper-magiques, chacun étant un primitif représentant 8 équivalents.
Le programme ne trouve aucune solution pour $P < 120^6$. Posant $P = k^6$, il n'y a donc aucune solution pour $k < 120$.

06 – Le programme <Premiers parfaits-3.mw>

Le programme cherche sur l'intervalle [a, b], 9 nombres premiers consécutifs avec lesquels on peut former un carré magique 3 × 3.

Programme 1 : montre un exemple
Une solution pour a = 73780392 , b = 73780392 .
Exécution de plusieurs heures si on veut a=3 à b =73780392 pour montrer qu'il n'y a qu'une solution.

Programme 2 : On extrait les primitifs du programme 1.

06a – Le programme <Premiers parfaits-3.mw>

Le programme cherche sur l'intervalle [a, b] des carrés magiques 3 × 3 formés de 9 nombres premiers consécutifs.

Programme 1 : montre un exemple
Une solution pour une variable 73780392 , Exécution de
plusieurs heures si on veut a=3 à b =73780392 pour montrer qu'il n'y a qu'une solution.

07 – Le programme <Premiers parfaits-4.mw>

Le programme recherche de carrés magiques 4 × 4 formés de 16 nombres premiers consécutifs et celui de somme magique minimale.

08 – UltraMaj.mw : Les 16 meilleurs ultra-magiques d'ordre 5

Le premier programme donne les 128 CM normaux (formés des nombres de 1 à 25) qui sont des UltraMagiques 5 × 5. La somme magique est 65.
Le second programme les regroupe en 16 représentants de 8 équivalents.
Le programme troisième programme associera à chacun des 16 CM primitifs, ses 7 autres équivalents.
Le quatrième programme 4a-4b montre les 362 figures magiques de tout UltraMagique.

09 – HyperMagiques.mw : Les 36 meilleurs hyper-magiques d'ordre 6

Le programme 1 montre qu'il existe 288 hyper-magiques de somme 150.
Le programme 2 en extrait 36 représentants de 8 équivalents. Ils sont appelés « les 36 meilleurs hyper-magiques »

Le programme 37-CM6x6-Hyper-Magiques.mv montre qu'il n'existe pas d'hyper-magiques de somme inférieure à 150 et formés d'entiers positifs, tous différents.

10 – CM6x6-HyperMagiques-Permutations.mw

À partir d'un hyper-magique A particulier de somme 150, le premier programme construit les 36 permutations circulaires des lignes et des colonnes de A.
Le deuxième programme montre que ce sont des hyper-magiques qui font partie des 288 hyper-magiques de somme 150 et formés d'entiers positifs tous différents.
Le troisième programme montre que les 36 permutations circulaires qui sont des hyper-magiques sont des primitifs.

11 – CM-arith-2k+1.mw

Pour *n* impair, dans la partie A, on construit des CM normaux d'ordre *n* où *n* = 2k+1 et dans la partie B, on construit des CM presque normaux.

11b – CM-arith-2k+1-manuellement.mw

Comment construire à la main un CM normal M n × n où n est impair.

12 – CM-4k.mw

Pour *n* = 2*pair, multiple de 4, dans la partie A, on construit des CM normaux et dans la partie B, on construit des CM presque normaux.

12b – CM-4K-normal-manuellement.mw

La partie A donne un CM normal pour n multiple de 4.
La partie B explique comment construire ce CM normal n × n manuellement.

13 – CM-arith-4k+2.mw

Pour un nombre de la forme n = 4k+2= 2(2k+1)=2 (impair) dans la partie A, on construit des CM_{nxn} normaux(formés des nombres 1 à n^2) et dans la partie B, on construit des CM_{nxn} presque normaux (entiers positifs tous différents).

14 – CM-3x3—NP.mw

Le programme trouve des carrés magiques 3 × 3 formés de nombres premiers différents parmi les 29 premiers nombres premiers. 177 est la somme magique minimale.

15 – CM-3 × 3-Ncomposés.mw

Le programme crée des CM 3 × 3 formés de nombres composés (non premiers) et trouve la somme minimale s=36.

16 – CM4x4-NP-consécutifs.mw

Le programme recherche des carrés magiques 4 × 4 formés de 16 nombres premiers consécutifs et celui de somme magique minimale.

17 – CM4x4-NP-NONconsécutifs.mw

Le programme recherche des carrés magiques 4 × 4 formés de 16 nombres non consécutifs.

18 – CM4x4-Ncomposés.mw

Le programme recherche la somme minimale pour des carrés magiques 4 × 4 formés de 16 nombres composés différents (non premiers et différents de 1) est s = 63.

19 – CM-4 × 4-Structuures-Normaux.mw

Le programme 1 crée d'abord les 7040 carrés magiques 4 × 4 normaux et les affiche.
Le programme 2 affiche les 24 différentes structures.

20 – CM4x4-indépendants-intro.mw

Le programme donne le nombre de figures magiques communes à 2 carrés magiques et les affiche.
Si le nombre de figures magiques communes est 14, on dit que les 2 carrés magiques sont indépendants.

20a – CM4x4-indépendants-880.mw

Le programme donne tous les couples de carrés magiques indépendants parmi les 880 carrés magiques primitifs des 7040 carrés magiques 4 × 4 normaux.

Le Programme 1 trouve les 86 figures magiques de chacun des 880 carrés magiques primitifs.
Le Programme 2 trouve, pour les 880, tous les couples de carrés magiques indépendants. Il y en a 29 494.
Le programme 3 affiche les 14 figures magiques d'un exemple de couple indépendants.

20b – CM4x4-indépendants-7040.mw

Les programmes trouvent des couples de carrés magiques indépendants (ayant seulement 14 figures magiques communes) parmi les 7040 carrés magiques 4 × 4 normaux.

Le Programme 1, en 2 parties, crée les 7040 carrés magiques 4 × 4 normaux.
Le Programme 2 trouve les 86 figures magiques de chacun des 7040 CM.
Le Programme 3 donne un exemple de couple de normaux indépendants.
Le Programme 4 trouve des couples de CM d'ordre 4 normaux indépendants (qui ont chacun 86 figures magiques mais seulement 14 figures magiques communes).

21 – CM4x4-Diag-Pair-Impair.mw

Le programme 1 crée les 7040 CM normaux. Pour chacune des 2 grandes diagonales des 7040 CM normaux 4 × 4, le programme 2 compte combien chacune contient de nombres pairs et de nombres impairs.
Remarque : La somme magique des CM normaux 4 × 4 est 34, un nombre pair alors une grande diagonale ne peut contenir un nombre pair et 3 nombres impairs, car la somme serait impair. Il en est de même pour 3 nombres pairs et un nombre impair. Une grande diagonale ne peut contenir, 4 nombres pairs ou 4 nombres impairs ou 2 pairs et 2 impairs.

22 – CM4x4-Durer-24 fig mag.mw

Trouver des CM Durer ayant 24 figures magiques et formés de 16 entiers positifs différents.
Tous les Durer formés de 16 entiers positifs différents ont au moins 24 figures magiques, mais on en cherche qui en ont exactement 24, la plus petite somme possible.

23 – CM-5 × 5-NPconsécutifs.mw

Programme qui donne des CM 5 × 5 formés de 25 nombres premiers consécutifs de somme minimale s=313 qui est un nombre premier.
s=313 est la somme minimale connue pour les CM 5 × 5 formés de nombres premiers consécutifs. Le programme en trouve avec comme centre 13.

24 – CM5x5-NP-NONConsécutifs.mw

Programme qui donne des CM 5 × 5 formés de 25 nombres premiers différents non consécutifs et de somme minimale s=233.

25 – CM 5 × 5-NONPremiers.mw

Programme qui donne des CM 5 × 5 formés de 25 nombres non-premiers différents et de somme magique=102

26 – CM 5 × 5-Composés.mw
Programme qui donne des CM 5 × 5 formés de 25 nombres composés différents et de somme minimale s=109

27 – compte-fig-6 × 6-10 × 10.mw

Les 5 programmes A, B, C, D, E calculent le nombre de figures magiques de CM normaux 6 × 6, 7 × 7, 8 × 8, 9 × 9,9, 10 × 10 sans répétitions.
Pour les CM 3 × 3, 4 × 4, 5 × 5, le programme 03-illustration-figures compte et affiche les figures magiques.

28 – CM5x5-ArianeCasParticulier.mw

Le but des programmes suivants est de trouver les 109 figures magiques d'un carré magique Ariane **particulier** et de les afficher. Onze de ces 109 figures magiques sont des « fusées Ariane ».

29 – MHM-4.mw vous présente les meilleurs m-hyper-magiques d'ordre 4.

Le programme trouve 384 m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 du plus petit produit P = 14 400. Il nous donne ensuite les 48 primitifs qui sont les 48 meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4. Rappelons que, pour l'ordre 4, m-hyper-magique = m-super-Dürer = m-pandiagonal.

30 – CM5x5-Ariane2.mw

Le but du programme est de trouver des carrés magiques Ariane formés de 25 nombres entiers positifs, sans répétition. Après quelques essais, on a choisi de faire varier les sommes de 120 à 140 et les variables a, b, h dans les intervalles ci-bas. On trouve S=123 comme minimum

31 – CM5x5-Ariane3.mw

On a déjà trouvé des carrés magiques Ariane formés de nombres entiers positifs, tous différents, et la plus petite somme était 123. (voir le programme Maple Ariane2).
Le but du programme est de prouver que S =123 est la somme minimale pour les carrés magiques Ariane formés de nombres entiers positifs, tous différents.

32 – CM6x6-Hyper-Magiques.mw.

Le programme montre qu'il n'existe pas d'hyper-magiques de somme inférieure à 150 et formés d'entiers positifs, tous différents.
Le programme 09-CM6x6-Les meilleurs hyper-magiques montre qu'il en existe 288 de somme 150 et en extrait 36 primitifs représentants de 8 équivalents. A représente la structure générale des hyper-magiques.

33 – CM8x8-Hyper-Magique-alpha.mw

Le but du programme est de trouver la somme minimale pour les carrés magiques 8 × 8 vérifiant la structure A des carrés magiques 8 × 8 hyper-magiques-alpha ci-bas.

34 – CM8x8-Gauss

Le but du programme est de trouver la somme magique minimale pour les carrés magiques 8 × 8 vérifiant la structure A des carrés magiques Gauss.

35 – n-uplets-premiers.mw

Le programme affiche les types de nombres premiers, Nombres premiers, Nombres premiers jumeaux, Couples jumeaux voisins de nombres premiers, etc.
Pour chacun le programme parcourt des intervalles et compte les nombres premiers qui nous intéresse.

36 – CM-avec k nombres premiers.mw

Le programme donne des CM d'ordre *n* formés de nombres naturels consécutifs avec k nombres premiers. Le programme trouve les valeurs de k possibles parmi les 150 000 premières suites de n^2 nombres. Il affiche un CM avec aucun nombre premier, un CM avec un nombre premier, un CM avec deux nombres premiers, etc.

37 – CM6x6-perfection

Programme pour obtenir des CM 6 × 6 presque normaux (formés de nombres entiers ≥ 1, sans répétition), de toutes les sommes magiques 111+ k. S = 111 est la somme d'un CM normal 6 × 6 (formé des nombres 1 à 36).

38 – CM4x4extrait primitifs.mw

Le programme extrait un groupe de primitifs de la liste de carrés magiques A 4 × 4. A[i] est un primitif dans A si A contient les 8 CM qui caractérisent A[i] comme primitif, (A[i],ses 3 rotations et ses 4 transposées).

39 – ChaqueCM-avecSes7équivalents.mw

Le programme suivant prend chaque CM placé dans l'ensemble K et lui associe ses 7 équivalents (ses 3 rotations et ses 4 transposés.

40 – nxn-construireGr8.mw

Pour un carré magique A, le programme donne les 8 carrés magiques équivalents, c'est-à-dire A et ses 3 rotations de 90 degrés horaires (ou anti-horaires) et les 4 transposées.

41 – Décomp-5maniéres.mw

Comment décomposer de 5 manières différentes un carré magique A en la somme B + C où B est un CM avec symétrie et C est un CM avec antisymétrie.

42 – décomp-infinitéSol.mw

Comment décomposer un CM A de somme S en 3 CM tel que A = AntiSymétrie Centrale + somme nulle + somme S. On a une infinité de solutions.

43 – CM-5 × 5-miroirs-vraisMiroir.mw

Construire des carrés magiques miroirs et vrais miroirs.

44 – CM-supermiroir.mw

Construire un CM super miroir

45 – CM-base-S fixe.mw

On crée une structure CM de nxn générant tous des CM de même somme magique *s* fixe.
On génère ensuite n(n-2) – 1 carrés magiques de CM, linéairement indépendants. Ils forment une base pour l'ensemble de leurs combinaisons linéaires.

46 – CM-Base-S non fixe.mw

Créer une structure CM n × n. On génère n*(n-2) carrés magiques de CM, linéairement indépendants et de différentes sommes magiques. Ces n*(n-2) carrés magiques de CM forment une base pour les CM d'ordre *n*.

Annexe 24 : Le procédé $\pm r \pm t$ *et* $\pm t \pm r$ pour construire les équivalents

L'objectif de l'annexe 24 n'est pas de proposer une nouvelle façon de construire les équivalents d'un carré magique mais bien de présenter une approche très intéressante pour obtenir les équivalents d'un carré arithmétique d'ordre impair fabriqué avec ALG-1 et les équivalents d'un carré arithmétique d'ordre pair multiple de 4 fabriqué avec ALG-2.

Avec MATHEMATICA, nous avons construit le fichier «Huit équivalents» qui nous donne les huit équivalents d'un carré magique de façon très efficace. Il suffit de remplacer le carré A par votre carré, de cliquer et les huit équivalents vous apparaissent.

ORDRE 3 :

Considérons ici une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 3. Nous prendrons la structure du fichier «Ordre 3» de MATHEMATICA ou d'EXCEL. Cette structure est aussi une structure générale pour les carrés magiques d'ordre 3 donc nous permet de construire tous les carrés magiques d'ordre 3 lesquels sont tous arithmétiques.

La structure générale des carrés magiques d'ordre 3 est elle-même un carré arithmétique. Ces carrés sont obtenus avec 3 variables $A, R et T$.

Soit M, un carré magique d'ordre 3 défini avec $A, R et T$. Il est facile de vérifier que chaque équivalent est défini, en attribuant à R et à T les valeurs :

$$(r\ ;\ t)\ \ (r\ ;\ -t)\ \ (-r\ ;\ t)\ \ (-r\ ;\ -t)\ \ (t\ ;\ r)\ \ (t\ ;\ -r)\ \ (-t\ ;\ r)\ \ (-t\ ;\ -r)$$

En est-il de même si $n \geq 4$? Nous y reviendrons un peu plus bas.

Voici une structure générale des carrés magiques d'ordre 3; celle-ci les génère tous. Elle est construite avec ALG-1 :

$$M = \begin{pmatrix} A+2R+T & A+2T & A+R \\ A & A+R+T & A+2R+2T \\ A+R+2T & A+2R & A+T \end{pmatrix}$$

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+2t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+2r+2t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+2r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+2r+2t$	$-t$	$-r$
$R_*^1(M)$	$a+2t$	r	$-t$
$R_*^2(M)$	a	t	r
$R_*^3(M)$	$a+2r$	$-r$	t

Tableau 1 des équivalents-3

Les équivalents de M proviennent donc de la structure ci-haut. De plus, le tableau vous indique comment construire les huit équivalents. (Voir Partie 2, chapitre 4, page 15).

Voyons maintenant ce qui se passe si $n = 4, 5, 6\ et\ 8.$ Nous allons prendre les structures générales de carrés arithmétiques que nous trouvons dans «Ordre 4», «Ordre 5», «Ordre 6» et «Ordre 8». Ces quatre structures se retrouvent dans les fichiers MATHEMATICA et EXCEL.

ORDRE 4 :

La structure générale de carrés arithmétiques que nous trouvons dans «Ordre 4» génère une infinité de carrés presque normaux mais ne les génère pas tous. Voici cette structure M, construite avec ALG-2 :

$$M = \begin{matrix} A & A+3R+2T & A+3R+T & A+3T \\ A+2R+3T & A+R+T & A+R+2T & A+2R \\ A+R+3T & A+2R+T & A+2R+2T & A+R \\ A+3R & A+2T & A+T & A+3R+3T \end{matrix}$$

Prenons un carré normal M' d'ordre 4 qui est super-Dürer-alpha; il est donc arithmétique :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour que ce carré provienne de la structure M, nous devons prendre $A = 1; R = 8; T = 2.$ Nous obtenons alors :

1	29	27	7
23	11	13	17
15	19	21	9
25	5	3	31

lequel n'est pas le carré M'.

Nous allons trouver les huit équivalents de la structure générale M ci-haut et, s'il y a lieu, construire le tableau correspondant, semblable au tableau 1.

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+3t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+3r+3t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+3r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+3t$	r	$-t$
$R_*^1(M)$	a	t	r
$R_*^2(M)$	$a+3r$	$-r$	t
$R_*^3(M)$	$a+3r+3t$	$-t$	$-r$

Tableau 2 des équivalents-4

Il nous reste à vérifier que ce deuxième tableau nous donne bien les huit équivalents. Pour cela, il suffit de placer les coordonnées du tableau dans M et de vérifier que nous avons bien les huit équivalents. Nous trouvons effectivement les huit équivalents.

ORDRE 5 :

La structure générale de carrés arithmétiques que nous trouvons dans «Ordre 5» génère une infinité de carrés presque normaux mais ne les génère pas tous.

Par exemple, un carré normal d'ordre 5 qui ne possède pas le nombre 13 dans sa case centrale est un carré arithmétique mais ne provient de la structure «Ordre 5». En effet, avec ALG-1, tous les carrés obtenus sont associatifs d'où S/n dans la case centrale; ici, S/n = 65/5 = 13.

Voici cette structure générale M construite avec ALG-1 :

$$M = \begin{matrix} A+4R+2T & A+R+4T & A+3R+T & A+3T & A+2R \\ A+R & A+3R+2T & A+4T & A+2R+T & A+4R+3T \\ A+3R+3T & A & A+2R+2T & A+4R+4T & A+R+T \\ A+T & A+2R+3T & A+4R & A+R+2T & A+3R+4T \\ A+2R+4T & A+4R+T & A+R+3T & A+3R & A+2T \end{matrix}$$

Avec $A=1; R=5; T=1$, nous obtenons :

$$M' = \begin{matrix} 23 & 10 & 17 & 4 & 11 \\ 6 & 18 & 5 & 12 & 24 \\ 19 & 1 & 13 & 25 & 7 \\ 2 & 14 & 21 & 8 & 20 \\ 15 & 22 & 9 & 16 & 3 \end{matrix}$$

Pour obtenir la rotation de 90° de M', **nous devons** prendre $A=5; R=-1; T=5$, ce qui donne :

$$\begin{matrix} 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \end{matrix}$$

lequel est bien la rotation de 90° de M'.

Pour obtenir la rotation de 180° de M', **nous devons** prendre $A=25; R=-5; T=-1$, ce qui donne :

$$\begin{matrix} 3 & 16 & 9 & 22 & 15 \\ 20 & 8 & 21 & 14 & 2 \\ 7 & 25 & 13 & 1 & 19 \\ 24 & 12 & 5 & 18 & 6 \\ 11 & 4 & 17 & 10 & 23 \end{matrix}$$

lequel est bien la rotation de 180° de M'.

Nous allons trouver les huit équivalents de la structure générale M ci-haut et, s'il y a lieu, construire le tableau correspondant, semblable au tableau 1. Les deux cas particuliers que nous venons de voir nous incitent à partir de M.

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+4t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+4r+4t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+4r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+4r+4t$	$-t$	$-r$
$R_*^1(M)$	$a+4t$	r	$-t$
$R_*^2(M)$	a	t	r
$R_*^3(M)$	$a+4r$	$-r$	t

Tableau 3 des équivalents-5

Il nous reste à vérifier que ce troisième tableau nous donne bien les huit équivalents. Pour cela, il suffit de placer les coordonnées du tableau dans M et de vérifier que nous avons bien les huit équivalents. Nous trouvons effectivement les huit équivalents. Comparez les tableaux 1 et 3.

Nous pensons qu'il en sera toujours ainsi si l'ordre $n \geq 3$ est impair!!!

À la condition que les structures générales soient construites avec ALG-1.

Projet de recherche : montrez ce résultat.

ORDRE 6 :

La structure générale de carrés arithmétiques que nous trouvons dans «Ordre 6» génère une infinité de carrés presque normaux mais ne les génère pas tous.

Voici cette structure générale (2) construite avec ALG-3 :

$$(2)\quad \begin{array}{cccccc}
a & a+4t & a+5r+2t & a+5r+3t & a+5r+t & a+5t \\
a+4r+5t & a+r+t & a+4r+3t & a+r+2t & a+r+4t & a+4r \\
a+3r+5t & a+3r+t & a+2r+2t & a+2r+3t & a+3r+4t & a+2r \\
a+2r+5t & a+2r+4t & a+3r+2t & a+3r+3t & a+2r+t & a+3r \\
a+r & a+4r+t & a+r+3t & a+4r+2t & a+4r+4t & a+r+5t \\
a+5r & a+5r+4t & a+3t & a+2t & a+t & a+5r+5t
\end{array}$$

Voyons un exemple avec $a = 1; r = 1; t = 6.$

$$M = \begin{matrix} 1 & 25 & 18 & 24 & 12 & 31 \\ 35 & 8 & 23 & 14 & 26 & 5 \\ 34 & 10 & 15 & 21 & 28 & 3 \\ 33 & 27 & 16 & 22 & 9 & 4 \\ 2 & 11 & 20 & 17 & 29 & 32 \\ 6 & 30 & 19 & 13 & 7 & 36 \end{matrix}$$

Si la rotation de 90°de M provient de (2), alors **nous devons** prendre $a = 31; r = -6; t = -29$ d'où :

$$\begin{matrix} 31 & -85 & -57 & -86 & -28 & -114 \\ -138 & -4 & -80 & -33 & -91 & 7 \\ -132 & -16 & -39 & -68 & -103 & 19 \\ -126 & -97 & -45 & -74 & -10 & 13 \\ 25 & -22 & -62 & -51 & -109 & -120 \\ 1 & -115 & -56 & -27 & 2 & -144 \end{matrix}$$

Ce carré n'est évidemment pas un équivalent de M!!! Les équivalents de M ne proviennent donc pas tous de la structure (2)!!!

Pour l'ordre 6, nous ne pourrons pas reproduire les tableaux ci-haut. La rotation de 90° de M ne provient pas de la structure générale (2). Il en est de même de la rotation de 180° de M.

ORDRE 8 :

La structure générale de carrés arithmétiques que nous trouvons dans «Ordre 8» génère une infinité de carrés presque normaux mais ne les génère pas tous. Voici cette structure M, construite avec ALG-2 :

$$M = \begin{matrix} A & A+T & A+7R+5T & A+7R+4T \\ A+R & A+R+T & A+6R+5T & A+6R+4T \\ A+5R+7T & A+5R+6T & A+2R+2T & A+2R+3T \\ A+4R+7T & A+4R+6T & A+3R+2T & A+3R+3T \\ A+3R+7T & A+3R+6T & A+4R+2T & A+4R+3T \\ A+2R+7T & A+2R+6T & A+5R+2T & A+5R+3T \\ A+6R & A+6R+T & A+R+5T & A+R+4T \\ A+7R & A+7R+T & A+5T & A+4T \end{matrix}$$

Ce sont les quatre premières colonnes de gauche à droite.

$$
\begin{array}{cccc}
A+7R+3T & A+7R+2T & A+6T & A+7T \\
A+6R+3T & A+6R+2T & A+R+6T & A+R+7T \\
A+2R+4T & A+2R+5T & A+5R+T & A+5R \\
A+3R+4T & A+3R+5T & A+4R+T & A+4R \\
A+4R+4T & A+4R+5T & A+3R+T & A+3R \\
A+5R+4T & A+5R+5T & A+2R+T & A+2R \\
A+R+3T & A+R+2T & A+6R+6T & A+6R+7T \\
A+3T & A+2T & A+7R+6T & A+7R+7T
\end{array}
$$

Ce sont les quatre dernières colonnes de gauche à droite.

Le carré M' suivant est magique et normal donc arithmétique.

1	63	3	61	12	54	10	56
16	50	14	52	5	59	7	57
17	47	19	45	28	38	26	40
32	34	30	36	21	43	23	41
53	11	55	9	64	2	62	4
60	6	58	8	49	15	51	13
37	27	39	25	48	18	46	20
44	22	42	24	33	31	35	29

M'

Pour être généré par M, **nous devons** prendre : $A=1; R=15; T=62$ ce qui nous donne :

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 63 & 416 & 354 & 292 & 230 & 373 & 435 \\
16 & 78 & 401 & 339 & 277 & 215 & 388 & 450 \\
510 & 448 & 155 & 217 & 279 & 341 & 138 & 76 \\
495 & 433 & 170 & 232 & 294 & 356 & 123 & 61 \\
480 & 418 & 185 & 247 & 309 & 371 & 108 & 46 \\
465 & 403 & 200 & 262 & 324 & 386 & 93 & 31 \\
91 & 153 & 326 & 264 & 202 & 140 & 463 & 525 \\
106 & 168 & 311 & 249 & 187 & 125 & 478 & 540
\end{array}
$$

lequel n'est évidemment pas le carré M'.

Donc M, qui génère que des carrés arithmétiques, ne génère pas le carré arithmétique M'.

Nous allons trouver les huit équivalents de la structure générale M ci-haut et, s'il y a lieu, construire le tableau correspondant, semblable au tableau 2.

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+7t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+7r+7t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+7r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+7t$	r	$-t$
$R_*^1(M)$	a	t	r
$R_*^2(M)$	$a+7r$	$-r$	t
$R_*^3(M)$	$a+7r+7t$	$-t$	$-r$

Tableau 4 des équivalents-8

Il nous reste à vérifier que ce quatrième tableau nous donne bien les huit équivalents. Pour cela, il suffit de placer les coordonnées du tableau dans M et de vérifier que nous avons bien les huit équivalents. Nous trouvons effectivement les huit équivalents. Comparez les quatre tableaux.

Nous pensons qu'il en sera toujours ainsi si l'ordre $n = 4k$.

À la condition que les structures générales soient construites avec ALG-2.

Projet de recherche : montrez ce résultat.

Remarque :

Je ne considère pas ce procédé comme étant meilleur que «Huit équivalents»; ce dernier est quant à moi le plus efficace!!!

Dans MATHEMATICA, le fichier «Huit équivalents» nous donne les huit équivalents de tout carré d'ordre $n \geq 3$. Il suffit de remplacer le carré A par votre carré.

Pour les ordres impairs et pairs multiples de 4, il semble que nous ayons une autre façon de faire.

Ici, l'objectif n'était pas de trouver une autre façon de construire les huit équivalents d'un carré magique mais plutôt d'observer ceci :

1) Chaque carré possède 8 équivalents.
2) Il n'y a que 8 couples, chacun renfermant une fois $\pm r$ et une fois $\pm t$, les voici :

$$(r\,;t)\quad(r\,;-t)\quad(-r\,;t)\quad(-r\,;-t)\quad(t\,;r)\quad(t\,;-r)\quad(-t\,;r)\quad(-t\,;-r)$$

3) Il existe une bijection entre l'ensemble des 8 équivalents et celui des 8 couples. Ce qui est vérifié avec les structures générales engendrées par ALG-1 et ALG-2 pour les ordres 3 et 5 et pour les ordres 4 et 8.

Comparez les tableaux1 et 3 pour les ordres 3 et 5 puis les tableaux 2 et 4 pour les ordres 4 et 8.

Soit W, un carré qui provient d'une structure générale M; ses équivalents ne proviennent pas nécessairement de cette même structure générale M.

Par exemple, si W est un diabolique (voir 5.10 de la Partie 2), alors un seul parmi ses 7 équivalents est un diabolique. Il s'agit de la rotation de 180° de W. Donc la structure générale des diaboliques ne nous donne pas tous les équivalents d'un diabolique W.

Nous conjecturons le résultat suivant :

Pour les ordres impairs générés par ALG-1, le tableau des équivalents renferme les mêmes colonnes $R et T$ soit celles du tableau 1.
Pour les ordres pairs multiples de 4 générés par ALG-2, le tableau des équivalents renferme les mêmes colonnes $R et T$ soit celles du tableau 2.

Qu'en est-il de la colonne A?

$a+4r+2t$	$a+r+4t$	$a+3r+t$	$a+3t$	$a+2r$
$a+r$	$a+3r+2t$	$a+4t$	$a+2r+t$	$a+4r+3t$
$a+3r+3t$	a	$a+2r+2t$	$a+4r+4t$	$a+r+t$
$a+t$	$a+2r+3t$	$a+4r$	$a+r+2t$	$a+3r+4t$
$a+2r+4t$	$a+4r+t$	$a+r+3t$	$a+3r$	$a+2t$

Dans le cas impair, nous trouverons, de haut en bas, $a, a+4t, a+4r+4t, a+4r$ en tournant autour du centre dans le sens négatif à partir de a puis $a+4r+4t, a+4t, a, a+4r$ en tournant autour du centre dans le sens positif à partir de $a+4r+4t$.

En fait, nous tournons dans le sens négatif autour du centre à partir de a et une fois arrivé à $a+4r$, nous changeons de sens pour repartir sur $a+4r+4t$ et terminer sur $a+4r$.

Dans le cas pair multiple de 4, considérons les quatre coins de la structure générale, d'ordre 7 par exemple :

a $\qquad$ $a+7t$

$a+7r$ $\qquad$ $a+7r+7t$

Nous trouverons, de haut en bas : $a, a+7t, a+7r+7t, a+7r$ en tournant dans le sens négatif à partir de a. Pour continuer, une fois arrivé à $a+7r$, nous retournons sur $a+7t$ en suivant la diagonale puis, dans le sens positif, nous trouvons $a+7t, a, a+7r, a+7r+7t$.

Pour terminer, selon la conjecture, le tableau des équivalents-7 **devrait être** :

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+6t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+6r+6t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+6r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+6r+6t$	$-t$	$-r$
$R_*^1(M)$	$a+6t$	r	$-t$
$R_*^2(M)$	a	t	r
$R_*^3(M)$	$a+6r$	$-r$	t

Tableau 5 des équivalents-7

Quant au tableau des équivalents-12, nous **devrions** trouver :

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+11t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+11r+11t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+11r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+11t$	r	$-t$
$R_*^1(M)$	a	t	r
$R_*^2(M)$	$a+11r$	$-r$	t
$R_*^3(M)$	$a+11r+11t$	$-t$	$-r$

Tableau 6 des équivalents-12

Il nous reste à vérifier que ces deux derniers tableaux sont exacts. Voici comment procéder : par exemple, prenons le tableau 6. Nous allons dans le fichier «Ordre 12» dans MATHEMATICA et nous posons dans la structure générale (S) : $a = A, r = R, t = T$. Appelons cette nouvelle

structure (S*). Nous construirons les 8 équivalents à l'aide des coordonnées du tableau 6 que nous placerons dans (S*).

Puis, plaçons (S) dans le fichier «Huit équivalents» et trouvons-les. Ceux-ci apparaissent dans le même ordre que dans la colonne de gauche, de haut en bas, du tableau 6. Nous allons ensuite prendre, par exemple, le deuxième équivalent obtenu avec (S) soit M et le deuxième équivalent obtenu avec (S*) soit M'.

Enfin, nous trouvons M – M'. Si le résultat donne le carré nul, alors M = M'. De cette façon, nous montrerons que les 8 équivalents du tableau 6 sont bien les véritables équivalents obtenus avec «Huit équivalents».

Nous avons suivi ce procédé et montré que les tableaux 5 et 6 sont exacts.

Pour terminer, nous conjecturons que les deux tableaux suivants sont exacts :

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+(n-1)t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+(n-1)r+(n-1)t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+(n-1)r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+(n-1)r+(n-1)t$	$-t$	$-r$
$R_*^1(M)$	$a+(n-1)t$	r	$-t$
$R_*^2(M)$	a	t	r
$R_*^3(M)$	$a+(n-1)r$	$-r$	t

Tableau général pour les équivalents d'ordres impairs $n \geq 3$

L'équivalent	A	R	T
$M = R^0(M)$	a	r	t
$R^1(M)$	$a+(4k-1)t$	$-t$	r
$R^2(M)$	$a+(4k-1)r+(4k-1)t$	$-r$	$-t$
$R^3(M)$	$a+(4k-1)r$	t	$-r$
$R_*(M)$	$a+(4k-1)t$	r	$-t$
$R_*^1(M)$	a	t	r
$R_*^2(M)$	$a+(4k-1)r$	$-r$	t
$R_*^3(M)$	$a+(4k-1)r+(4k-1)t$	$-t$	$-r$

Tableau général des équivalents d'ordres pairs multiples de 4; $k \geq 1$ est un entier.

Vérifiez pour les ordres $n = 9$ et $n = 16$.

Annexe 25 : Suite arithmétique dans un carré magique

Rappelons comment construire un carré magique M* d'ordre $n \geq 3$ à partir d'une suite arithmétique de premier terme A et de raison $R \neq 0$, formée de n^2 nombres :

$$A\ ;\ A+R\ ;\ A+2R\ ;\ A+3R\ ;\ \ldots\ ;\ A+(n^2-1)R$$

1) Vous construisez un carré magique normal M d'ordre n. (Voir le chapitre 11)
2) Vous enlevez le nombre 1 dans chaque case du carré M pour obtenir le carré M' :

   M' = M – 1
3) Vous multipliez ensuite M' par la raison R pour obtenir le carré M'' :

   M'' = R M' = R M – R
4) Vous ajoutez le nombre A dans chaque case du carré M'' :

5) Finalement, nous avons :

$$\text{M*} = (A-R) + R\,\text{M}$$

De façon équivalente, dans les fichiers «Ordre 3» à «Ordre 24» de MATHEMATICA ou «Ordre 3» à «Ordre 32» d'EXCEL, vous pouvez poser :

$$a = A\ ;\ r = R\ ;\ t = nR$$

Soit donnée une suite arithmétique non triviale de premier terme A et de raison R formée de n^2 nombres. Si M est un carré magique normal d'ordre n, alors le carré magique

$$(A-R) + RM$$

renferme les n^2 nombres de la suite.

Exemple 1 :

La suite arithmétique est : 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26; 29 donc $A = 5 \, et \, R = 3$. Le carré normal est :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ d'où } (A-R) + RM = (5-3) + 3M = \begin{pmatrix} 14 & 29 & 8 \\ 11 & 17 & 23 \\ 26 & 5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 :

La suite arithmétique est : 20; 18; 16; 14; 12; 10; 8; 6; 4 donc $A = 20 \; et \; R = -2$. Le carré normal est le même que dans l'exemple précédent.

Le carré cherché est :

$$(A-R) + RM = 22 - 2M = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 18 \\ 16 & 12 & 8 \\ 6 & 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Annexe 26 : L'espace vectoriel des m-Dürer (MD*)

Considérons F, l'ensemble des m-Dürer formés exclusivement de nombres réels > 0. Celui-ci forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 7. Voyons comment se construit cet espace.

Soient U et V, deux m-Dürer de F. Nous allons définir la multiplication $*$, l'opération du groupe, comme suit :

A	B	C	D
E	F	G	H
K	M	N	P
Q	R	S	T

U

a	b	c	d
e	f	g	h
k	m	n	p
q	r	s	t

V

Aa	Bb	Cc	Dd
Ee	Ff	Gg	Hh
Kk	Mm	Nn	Pp
Qq	Rr	Ss	Tt

$U * V$

C'est la multiplication terme à terme, notée U $*$ V qui se distingue du produit matriciel noté UV.

Quant à la multiplication par un scalaire, notée $\circ$, elle se définit comme suit :

A^W	B^W	C^W	D^W
E^W	F^W	G^W	H^W
K^W	M^W	N^W	P^W
Q^W	R^W	S^W	T^W

$W \circ U$

Ici, la multiplication par un scalaire est une exponentiation où W est un nombre réel et U, un carré m-Dürer de F.

L'élément neutre pour la multiplication est le trivial formé de 1. Nous le notons T.

Vérifions que F est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Si U et V sont dans F, alors U $*$ V est dans F. Évident!
2) Il existe un élément neutre dans F soit le trivial formé de 1. Évident!

3) Si U est dans F, alors il existe dans F un carré U' tel que U ∗ U' = T. En effet, chaque réel > 0 est inversible.
4) La multiplication ∗ est associative et commutative car la multiplication des réels est associative et commutative.
5) Donc {F, ∗ } est un groupe abélien.
6) Si U est dans F, alors W ∘ U est dans F puisqu'un nombre réel > 0 affecté d'un exposant réel, ici W, est toujours bien défini.
7) W ∘ (U ∗ V) = (W ∘ U) ∗ (W ∘ V). Les nombres u *et* v occupent la même position respectivement dans U et V. Le membre de gauche est $(u\,v)^W$. Le membre de droite est $u^W v^W = (uv)^W$.
8) (W + W') ∘ U = (W ∘ U) ∗ (W' ∘ U). Le membre de gauche est $u^{W+W'}$. Le membre de droite est $u^W u^{W'} = u^{W+W'}$.
9) W ∘ (W' ∘ U) = (WW') ∘ U. Le membre de gauche est $(u^{W'})^W = u^{W'W}$. Le membre de droite est $u^{WW'}$. Puisque $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, nous avons $u^{W'W} = u^{WW'}$.
10) 1 U = U. En effet, si u est un nombre réel, alors $u^1 = u$.

Au chapitre 15, nous avons établi une structure générale (MD) des m-Dürer puis une seconde structure (MD*). La première possède sept variables libres mais la seconde en possède 8.

(MD)

a	b	c	$\frac{P}{a\,b\,c}$
d	$\frac{P}{a\,b\,d}$	f	$\frac{a\,b}{f}$
g	$\frac{a^2 b\,c\,d\,g}{f\,P}$	$\frac{P}{a\,c\,g}$	$\frac{f\,P}{a\,b\,d\,g}$
$\frac{P}{a\,d\,g}$	$\frac{f\,P}{a\,b\,c\,g}$	$\frac{a\,g}{f}$	$\frac{a\,b\,c\,d\,g}{P}$

En posant $a = mn; b = uv; c = xy; d = yr;\ f = mu; g = us; P = mnuvxyrs$ dans (MD), nous trouvons (MD*).

(MD*)

mn	uv	xy	rs
ry	sx	mu	nv
su	ny	rv	mx
vx	mr	ns	uy

Si nous prenons tous les carrés issus de (MD), ceux-ci ne forment pas nécessairement un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Par contre, si nous exigeons que tous les nombres du carré soient > 0, alors nous aurons un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et ce, avec les deux opérations définies plus haut.

(MD) représente l'ensemble de tous les m-Dürer à produits non nuls. Si nous prenons que les carrés m-Dürer formés de nombres > 0, alors ceux-ci forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qui est représenté par (MD) et qui est de dimension 7 car dans (MD), le nombre minimum de variables libres est 7.

Mais dans (MD*), nous avons huit variables!!!

Les structures (MD) et (MD*) sont équivalentes lorsque toutes leurs variables sont non nulles.

En effet, pour retrouver (MD) à partir de (MD*), nous prendrons :

$$u = \frac{abc}{P} \; ; \; y = dg \; ; \; m = \frac{fP}{abc} \; ; \; n = \frac{a^2bc}{fP} \; ; \; v = \frac{P}{ac} \; ; \; x = \frac{c}{dg} \; ; \; r = \frac{1}{g} \; ; \; s = \frac{gP}{abc}$$

Prenons tous les m-Dürer formés de nombres > 0 qui sont issus de (MD). Ils forment un espace vectoriel. Prenons tous les m-Dürer formés de nombres > 0 qui sont issus de (MD*). Ils forment le même espace vectoriel.

Voyons maintenant ce qu'est une combinaison linéaire. Nous prendrons ici une structure générale de carrés multiplicatifs d'ordre 3 (voir annexe 30):

$$(\%) \quad \begin{pmatrix} uv^2w & u & uvw^2 \\ uw^2 & uvw & uv^2 \\ uv & uv^2w^2 & uw \end{pmatrix}$$

L'ensemble des carrés formés de nombres réels positifs issus de (%) forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Trouvons une base de cet espace vectoriel. D'abord, décomposons (%) en un produit puis illustrons la base :

$$M = \begin{pmatrix} u\,v^2 w & u & u\,v\,w^2 \\ u\,w^2 & u\,v\,w & u\,v^2 \\ u\,v & u\,v^2 w^2 & u\,w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & u & u \\ u & u & u \\ u & u & u \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v^2 & 1 & v \\ 1 & v & v^2 \\ v & v^2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{\left\{(\log_b u) \circ \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\right\}}_{A} * \underbrace{\left\{(\log_b v) \circ \begin{pmatrix} b^2 & 1 & b \\ 1 & b & b^2 \\ b & b^2 & 1 \end{pmatrix}\right\}}_{B} * \underbrace{\left\{(\log_b w) \circ \begin{pmatrix} b & 1 & b^2 \\ b^2 & b & 1 \\ 1 & b^2 & b \end{pmatrix}\right\}}_{C}$$

Les coordonnées du carré multiplicatif sont, relativement à la base ordonnée $\{A\ ,\ B\ ,\ C\}$:

$$(\log_b u,\ \log_b v,\ \log_b w)$$

Nous pouvons donc écrire : $M = \{(\log_b u) \circ A\} * \{(\log_b v) \circ B\} * \{(\log_b w) \circ C\}$; c'est la **combinaison linéaire** qui donne M. Nous pourrions aussi écrire notre combinaison linéaire comme suit :

$$M = A^{\log_b u} * B^{\log_b v} * C^{\log_b w}$$

L'ensemble $\{A, B, C\}$ est clairement un système de générateurs. Pour être une base, il faut l'indépendance linéaire. Or il est facile de montrer que ni $A, ni\ B, ni\ C$ n'est une combinaison linéaire des deux autres.

En effet, supposons que $A = (x \circ B) * (y \circ C)$. Nous aurions alors $b = b^y$ d'où $y = 1$. Mais nous aurions aussi $b = b^{2y}$ d'où $y = \frac{1}{2}$. Contradiction!!!

Si $B = (x \circ A) * (y \circ C)$, alors nous aurions $b^2 = b^x$ d'où $x = 2$. Mais nous aurions aussi $b = b^x$ d'où $x = 1$. Contradiction!!!

Si $C = (x \circ A) * (y \circ B)$, alors nous aurions $b^x = 1$ d'où $x = 0$. Mais nous aurions aussi $b^x = b^2$ d'où $x = 2$. Contradiction!!!

Nous venons de montrer l'indépendance linéaire de $\{A, B, C\}$.

Notez que la base $\{A, B, C\}$ dépend du choix de la base b du logarithme.

Voyons un exemple en posant $u = 1,\ v = 2,\ w = 3$ dans le carré M. Nous obtenons :

$$F = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 18 \\ 9 & 6 & 4 \\ 2 & 36 & 3 \end{pmatrix}$$

Retrouvons ce carré à l'aide des coordonnées de F :

$$F = \left(\log_b 1,\ \log_b 2,\ \log_b 3\right)$$

$$F = \left\{(\log_b 1) \circ \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 2\right) \circ \begin{pmatrix} b^2 & 1 & b \\ 1 & b & b^2 \\ b & b^2 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 3\right) \circ \begin{pmatrix} b & 1 & b^2 \\ b^2 & b & 1 \\ 1 & b^2 & b \end{pmatrix}\right\}$$

$$F = \left\{(0) \circ \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 2\right) \circ \begin{pmatrix} b^2 & 1 & b \\ 1 & b & b^2 \\ b & b^2 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 3\right) \circ \begin{pmatrix} b & 1 & b^2 \\ b^2 & b & 1 \\ 1 & b^2 & b \end{pmatrix}\right\}$$

$$F = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 18 \\ 9 & 6 & 4 \\ 2 & 36 & 3 \end{pmatrix}$$

Le carré F est un carré géométrique et son tableau géométrique est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \end{pmatrix}$.

Tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 sont des carrés géométriques.

Une conséquence du théorème fondamental des carrés magiques est qu'il est possible de construire une infinité de carrés multiplicatifs presque normaux pour tous les ordres $n \geq 3$ et ce, toujours à l'aide de 3 variables seulement. Ceux-ci seront tous géométriques et si l'ordre est impair ou pair multiple de 4, alors ils seront associatifs!!!

Poursuivons en montrant une autre façon de vérifier l'indépendance linéaire. Si $A = B^x * C^y$, alors $A, B\, et\, C$ sont linéairement dépendants. Il s'ensuit que $A^{-1} * A = A^{-1} * B^x * C^y = T$ où T est l'élément neutre pour la multiplication $*$ (le trivial formé du nombre 1). Nous avons donc une combinaison linéaire, avec des coefficients non tous nuls, qui donne T.

Si nous avons $A^w * B^x * C^y = T$ avec au moins un des exposants non nul, alors $A, B\, et\, C$ sont linéairement dépendants. En effet, supposons $w \neq 0$. Nous aurons : $A^w = B^{-x} * C^{-y}$ et puisque $w \neq 0$, alors $\left(A^w\right)^{\frac{1}{w}} = B^{\frac{-x}{w}} * C^{\frac{-y}{w}} = A$ ce qui montre que A est une combinaison linéaire de $B\, et\, C$.

De plus, nous avons toujours : $A^0 * B^0 * C^0 = T$

Les carrés multiplicatifs $A, B\, et\, C$ formés de nombres réels > 0 sont linéairement dépendants si et seulement si :
$A^w * B^x * C^y = T \Leftrightarrow$ au moins qu'un des exposants (scalaires) est non nul.

Les carrés multiplicatifs $A, B\, et\, C$ formés de nombres réels > 0 sont linéairement indépendants si et seulement si :
$A^w * B^x * C^y = T \Leftrightarrow w = x = y = 0.$

Considérons une structure générale des carrés Dürer donc d'ordre 4.

a) Trouvons la structure des m-Dürer.
b) Trouvons une base pour l'espace vectoriel des m-Dürer formés de nombres réels positifs.

a) Nous allons procéder à l'exponentiation en base B de la structure générale des Dürer :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & f & a+b-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & a+b+d-f-g & a+c-g \\ a+b+c-f-g & a+d-g & S-a-b-c-d+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Nous posons : $B^S = P,\ B^a = m,\ B^b = n,\ B^c = p,\ B^d = r,\ B^f = v,\ B^g = w$

Il est clair que toutes ces quantités sont des nombres réels positifs (> 0).

Nous trouvons :

$$\text{(MD**)} \qquad \begin{pmatrix} m & n & p & \dfrac{P}{m\,n\,p} \\ r & \dfrac{P}{m\,n\,r} & v & \dfrac{m\,n}{v} \\ \dfrac{P\,v\,w}{m^2 n\,p\,r} & w & \dfrac{m\,n\,r}{v\,w} & \dfrac{m\,p}{w} \\ \dfrac{m\,n\,p}{v\,w} & \dfrac{m\,r}{w} & \dfrac{P\,w}{m\,n\,p\,r} & \dfrac{v\,w}{m} \end{pmatrix}$$

Voilà la structure des m-Dürer formés de nombres réels positifs. Il est bien entendu que les variables de (MD**), tout comme celles de (MD), peuvent prendre des valeurs négatives (< 0) mais cela ne nous intéresse pas!!! Pourquoi? Dès qu'une case de (MD**) renferme 0 ou un nombre < 0, alors le carré ne peut pas faire partie d'un espace vectoriel défini avec les opérations décrites au début de l'annexe 26 ($*$ *et* $\circ$).

b) Trouvons la base

$$MD^{**} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k^{-1} \\ 1 & k^{-1} & 1 & k \\ k^{-2} & 1 & k & k \\ k & k & k^{-1} & k^{-1} \end{pmatrix}^{\log_k m} * \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k^{-1} \\ 1 & k^{-1} & 1 & k \\ k^{-1} & 1 & k & 1 \\ k & 1 & k^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{\log_k n} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ k^{-1} & 1 & 1 & k \\ k & 1 & k^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{\log_k p} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k^{-1} & 1 & 1 \\ k^{-1} & 1 & k & 1 \\ 1 & k & k^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{\log_k r} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & k^{-1} \\ k & 1 & k^{-1} & 1 \\ k^{-1} & 1 & 1 & k \end{pmatrix}^{\log_k v} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k & k^{-1} & k^{-1} \\ k^{-1} & k^{-1} & k & k \end{pmatrix}^{\log_k w} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}^{\log_k P}$$

Il est clair que ces sept carrés forment un système de générateurs pour l'espace vectoriel qui contient tous les m-Dürer formés de nombres réels positifs.

Montrons qu'ils sont linéairement indépendants. Il est facile de constater qu'une combinaison linéaire de ces sept carrés qui donne T implique que les sept scalaires soient nuls d'où l'indépendance linéaire de ces sept carrés.

Ceux-ci forment donc une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En terminant, prenons une structure générale des carrés Ariane :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 2b & -57a+54h+S & 84a-2b-80h & -29a+26h+S \\ -110a+2b+110h & S-3a & 42a-40h & 2h & 71a-2b-72h+S \\ 43a-46h+S & 40h-38a & 18a-16h & -13a+10h+S & 12h-10a \\ 74a-2b-70h & 20a-18h & -33a+30h+S & -23a+20h+S & -38a+2b+38h \\ -9a+6h+S & 21a-2b-22h+S & 30a-28h & -48a+2b+48h & 6a-4h \end{pmatrix}$$

Nous allons faire l'exponentiation en base B de celle-ci puis nous poserons :

$$B^S = P \qquad B^a = u \qquad B^b = v \qquad B^h = t$$

Nous allons ensuite renommer nos nouvelles variables comme suit : $u = a$; $v = b$; $t = h$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} a & b & \frac{h^{27}\sqrt{P}}{a^{57/2}} & \frac{a^{42}}{b\,h^{40}} & \frac{h^{13}\sqrt{P}}{a^{29/2}} \\ \frac{b\,h^{55}}{a^{55}} & \frac{\sqrt{P}}{a^{3/2}} & \frac{a^{21}}{h^{20}} & h & \frac{a^{71/2}\sqrt{P}}{b\,h^{36}} \\ \frac{a^{43/2}\sqrt{P}}{h^{23}} & \frac{h^{20}}{a^{19}} & \frac{a^{9}}{h^{8}} & \frac{h^{5}\sqrt{P}}{a^{13/2}} & \frac{h^{6}}{a^{5}} \\ \frac{a^{37}}{b\,h^{35}} & \frac{a^{10}}{h^{9}} & \frac{h^{15}\sqrt{P}}{a^{33/2}} & \frac{h^{10}\sqrt{P}}{a^{23/2}} & \frac{b\,h^{19}}{a^{19}} \\ \frac{h^{3}\sqrt{P}}{a^{9/2}} & \frac{a^{21/2}\sqrt{P}}{b\,h^{11}} & \frac{a^{15}}{h^{14}} & \frac{b\,h^{24}}{a^{24}} & \frac{a^{3}}{h^{2}} \end{pmatrix}$$

où cette fois, les variables a, b, h sont > 0. Nous pouvons donc poser $a = m^2$ afin de rendre entier chaque exposant rationnel. Voici notre version finale :

$$\begin{pmatrix} m^{2} & b & \frac{h^{27}\sqrt{P}}{m^{57}} & \frac{m^{84}}{b\,h^{40}} & \frac{h^{13}\sqrt{P}}{m^{29}} \\ \frac{b\,h^{55}}{m^{110}} & \frac{\sqrt{P}}{m^{3}} & \frac{m^{42}}{h^{20}} & h & \frac{m^{71}\sqrt{P}}{b\,h^{36}} \\ \frac{m^{43}\sqrt{P}}{h^{23}} & \frac{h^{20}}{m^{38}} & \frac{m^{18}}{h^{8}} & \frac{h^{5}\sqrt{P}}{m^{13}} & \frac{h^{6}}{m^{10}} \\ \frac{m^{74}}{b\,h^{35}} & \frac{m^{20}}{h^{9}} & \frac{h^{15}\sqrt{P}}{m^{33}} & \frac{h^{10}\sqrt{P}}{m^{23}} & \frac{b\,h^{19}}{m^{38}} \\ \frac{h^{3}\sqrt{P}}{m^{9}} & \frac{m^{21}\sqrt{P}}{b\,h^{11}} & \frac{m^{30}}{h^{14}} & \frac{b\,h^{24}}{m^{48}} & \frac{m^{6}}{h^{2}} \end{pmatrix}$$

Annexe 27 : Carrés magiques vers carrés multiplicatifs

Nous allons construire des structures générales de carrés multiplicatifs à partir de structures générales de carrés magiques. Le théorème 15.17 nous sera très utile.

Commençons par un exemple.

Prenons la structure générale des super-Dürer (hyper-magiques d'ordre 4).

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

Pour construire la structure générale des m-super-Dürer, S devient P, les variables ne changent pas, la somme devient un produit, la soustraction devient un quotient et ½ devient la racine carrée. Ainsi nous trouvons la structure cherchée :

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & \frac{P}{abc} \\ d & \frac{P}{abd} & \frac{ad}{c} & \frac{bc}{d} \\ \frac{\sqrt{P}}{c} & \frac{abc}{\sqrt{P}} & \frac{\sqrt{P}}{a} & \frac{\sqrt{P}}{b} \\ \frac{c\sqrt{P}}{ad} & \frac{d\sqrt{P}}{bc} & \frac{\sqrt{P}}{d} & \frac{abd}{\sqrt{P}} \end{pmatrix}$$

Cette structure est un m-super-Dürer.

Voyons cela de plus près.

Nous allons faire l'exponentiation de (*) en base A où $A \neq 1$ est > 0.

Nous obtenons alors :

$$(\%) \qquad \begin{pmatrix} A^a & A^b & A^c & A^{S-a-b-c} \\ A^d & A^{S-a-b-d} & A^{a-c+d} & A^{b+c-d} \\ A^{\frac{S}{2}-c} & A^{a+b+c-\frac{S}{2}} & A^{\frac{S}{2}-a} & A^{\frac{S}{2}-b} \\ A^{\frac{S}{2}-a+c-d} & A^{\frac{S}{2}-b-c+d} & A^{\frac{S}{2}-d} & A^{a+b+d-\frac{S}{2}} \end{pmatrix}$$

Ce carré (%) est un carré multiplicatif de produit $P = A^S$. Les carrés (*) et (%) sont donc associés et selon le théorème 15.17 de la partie 2, les deux carrés ont les mêmes figures magiques. Nous concluons que si (*) est un super-Dürer alors (%) est un m-super-Dürer. De plus, les 16 nombres de (%) sont > 0 puisque $A^x > 0, \forall x \, dans \, \mathbb{R}$. Le carré (%) génère donc tous les m-super-Dürer formés de 16 nombres réels > 0.

Simplifions le carré (%) en posant :

$$(1) \qquad A^a = r \; ; \; A^b = t \; ; \; A^c = u \; ; \; A^d = v \; ; \; A^S = P$$

Le carré (%) devient :

$$(\%\%) \qquad \begin{pmatrix} r & t & u & \frac{P}{r\,t\,u} \\ v & \frac{P}{r\,t\,v} & \frac{r\,v}{u} & \frac{t\,u}{v} \\ \frac{\sqrt{P}}{u} & \frac{r\,t\,u}{\sqrt{P}} & \frac{\sqrt{P}}{r} & \frac{\sqrt{P}}{t} \\ \frac{u\sqrt{P}}{r\,v} & \frac{v\sqrt{P}}{t\,u} & \frac{\sqrt{P}}{v} & \frac{r\,t\,v}{\sqrt{P}} \end{pmatrix}$$

Les variables dans (%) prennent des valeurs réelles quelconques mais dans (%%), elles prennent des valeurs réelles > 0 selon (1).

Si nous renommons les variables de (%%) ainsi :

$$r = a \; ; \; t = b \; ; \; u = c \; ; \; v = d$$

alors, nous retrouvons (**) :

$$(**) \quad \begin{pmatrix} a & b & c & \frac{P}{abc} \\ d & \frac{P}{abd} & \frac{ad}{c} & \frac{bc}{d} \\ \frac{\sqrt{P}}{c} & \frac{abc}{\sqrt{P}} & \frac{\sqrt{P}}{a} & \frac{\sqrt{P}}{b} \\ \frac{c\sqrt{P}}{ad} & \frac{d\sqrt{P}}{bc} & \frac{\sqrt{P}}{d} & \frac{abd}{\sqrt{P}} \end{pmatrix}$$

Dans le carré (**), les variables doivent prendre des valeurs réelles > 0. Dans (*), les mêmes variables peuvent prendre des valeurs réelles quelconques. ATTENTION à la confusion!!!

C'est pourquoi nous avons changé le nom des variables dans (%%).

Remarque 1:

Pour l'exponentiation, le choix de la base est arbitraire. Ainsi, avec la base 2, le carré magique M nous donnera le carré multiplicatif W. Pour obtenir W avec la base 3, ce sera un autre carré magique M' qui nous conduira à W.

Remarque 2 :

Dans le chapitre 15, nous avons construit des structures générales de carrés multiplicatifs de la même façon que pour les carrés magiques. Les nombreuses observations faites nous montrent une grande ressemblance entres les carrés magiques et les multiplicatifs. Lorsqu'un carré magique est associé à un multiplicatif, alors ces deux carrés ont les mêmes figures magiques!!!

Maintenant, l'exemple ci-haut nous montre qu'à partir d'une structure générale de carrés magiques, nous trouvons facilement une structure générale de carrés multiplicatifs. La réciproque est aussi vraie.

Rappelons notre définition de carrés associés :

Soit A, un carré magique d'ordre n et B, un carré multiplicatif d'ordre n tel que tous ses nombres soient > 0. Nous dirons que A et B sont associés si B est obtenu par exponentiation de A ou A est obtenu en prenant le logarithme de chaque nombre de B.

Y a-t-il vraiment une différence entre carré magique et carré multiplicatif?

Considérons E, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ formé de tous les carrés magiques d'ordre n qui sont caractérisés par une famille F de propriétés. Nous allons appliquer l'exponentiation sur chaque

carré de E afin d'obtenir un ensemble G de carrés multiplicatifs formés de nombres réels positifs (> 0). G est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. (Voir annexe 26).

Toutes les propriétés des carrés de E sont alors transmises aux carrés de G.

Si M est un carré multiplicatif qui possède toutes les propriétés de F, alors en logarithmant M, nous obtenons un carré magique dans E. Donc M est dans G. En logarithmant tous les carrés de G, nous obtenons tous les carrés de E et les propriétés des carrés de G sont transmises aux carrés de E. (Voir le théorème 15.17).

L'exponentiation est une fonction bijective de E dans G.
De plus, E et G sont isomorphes.
E et G ont donc la même dimension.

Voyons un exemple :

E est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés ultra-magiques d'ordre 5. Ici, la famille F renferme les propriétés suivantes :

1) Le carré est associatif.
2) Le carré est pandiagonal.

Nous allons faire l'exponentiation en base b.

1) Soient u et v, deux nombres situés dans des cases symétriques par rapport au centre d'un carré de E. Alors u + v = 2S/5. Par exponentiation, nous trouvons dans le carré multiplicatif les nombres $b^u et\ b^v$ situés dans des cases symétriques par rapport au centre du carré. Le produit est $b^{u+v} = b^{2S/5} = (b^S)^{2/5} = P^{2/5}$ puisque $b^S = P.$ Ceci correspond bien à la définition des carrés m-ultra-magiques.
2) Considérons une diagonale quelconque, grande ou brisée, qui renferme les nombres r, t, w, x, y. Dans le carré multiplicatif, nous trouvons dans la diagonale correspondante, les nombres b^r, b^t, b^w, b^x, b^y d'où $b^r b^t b^w b^x b^y = b^{r+t+w+x+y} = b^S = P.$
   Donc, si M et N sont deux carrés différents de E, alors par exponentiation, nous obtenons évidemment deux carrés multiplicatifs distincts M' et N' puisque la fonction exponentielle b^x est injective. Selon le théorème 15.17, si un carré multiplicatif vérifie

les propriétés de la famille F, alors en le logarithmant en base b, nous obtenons un carré de E.

Annexe 28 : Une autre structure générale pour les Dürer

Nous avons présenté au chapitre 5, section 5.4, une structure générale pour les carrés Dürer.

$$(2.1)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & f & a+b-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & a+b+d-f-g & a+c-g \\ a+b+c-f-g & a+d-g & S-a-b-c-d+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Structure générale des Dürer

Celle-ci est un Dürer et tout carré Dürer provient de cette structure. Mais cette structure générale n'est pas unique. Suite à un spectacle d'un certain magicien, nous avons construit une autre structure générale pour les Dürer que voici :

$$(*)\quad \begin{pmatrix} A & B & C & T-A-B-C \\ E+F-A & T-B-E-F & A+B-D & D \\ T-C-D-F & E & D+F-A & A+C-E \\ C+D-E & F & T-B-C-F & B-D+E \end{pmatrix}$$

Autre structure générale des Dürer

Dans (2.1), la somme magique est S et dans (*), la somme magique est T. Nous allons montrer que ces deux structures sont équivalentes c'est-à-dire que chacune génère les mêmes carrés Dürer. Notons ici que la structure (*) a été construite de façon à obtenir les variables A, B, C, D, E et F dans des cases choisies à l'avance. Nous les voulions là où elles sont!!!

Si dans (2.1), nous posons :

$a=A,\ b=B,\ c=C,\ d=E+F-A,\ f=A+B-D,\ g=E,\ S=T$, alors nous obtenons (*).

Si dans (*), nous posons :

$A=a,\ B=b,\ C=c,\ D=a+b-f,\ E=g,\ F=a+d-g,\ T=S$, alors nous obtenons (2.1).

Les structures générales (2.1) et (*) sont équivalentes; chacune génère tous les Dürer.

Voici une observation très intéressante :

La structure (*) est plus simple que la structure (2.1)!!!

Dans toutes les cases de (*), nous trouvons des expressions linéaires de 1, 3 et 4 variables alors que dans toutes les cases de (2.1), nous trouvons des expressions linéaires de 1, 3, 4, 5, 6 et 7 variables.

49 lettres dans (2.1) versus 40 lettres dans (*)!!!

Revenons à notre magicien qui nous présente ce carré 4x4 dans lequel il placera 16 entiers.

A	B	C	W
(1)	X	(3)	D
Y	E	(4)	(5)
(2)	F	Z	(6)

a) Le magicien doit obtenir du public et ce, de façon aléatoire, les valeurs de A, B, C, D, E, F et T, la somme magique. Ces sept valeurs déterminent de façon unique, le carré Dürer.

b) Le magicien peut trouver immédiatement les valeurs de W, X, Y et Z. En effet :

$$W = T - A - B - C\ ;\quad X = T - B - E - F\ ;\quad Y = T - C - D - F\ ;\quad Z = T - B - C - F$$

Voir les propriétés des Dürer section 5.4 du chapitre 5, Partie 2.

c) Le magicien peut aussi trouver les valeurs de (1), (2), (3), (4), (5) et (6). En effet :
(1) $= T - A - B - X$; (2) $= T - Y - E - F$; etc…

d) L'assistant du magicien peut aussi calculer les valeurs de c) puis les placer discrètement dans les cases notées de (1) à (6). Cela donne l'impression que les valeurs de (1) à (6) étaient déjà dans le carré depuis le début, ce qui est évidemment faux!!!

Annexe 29 : Problèmes supplémentaires

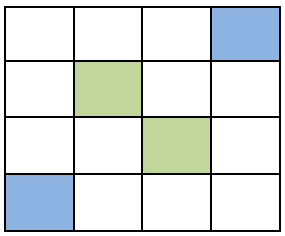
Vous pouvez nous proposer de nouveaux problèmes (solutions comprises) sur les carrés magiques et multiplicatifs. Nous les ajouterons à l'annexe 29 tout en indiquant l'auteur de chaque problème.

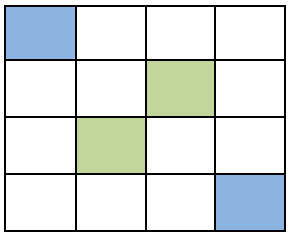
1) Nous voulons construire un m-hyper-magique (m-super-Dürer) presque normal d'ordre 4. La structure générale nous indique que nous avons besoin de cinq variables soient a, b, c, f et g. Je choisis de donner une valeur à c et à g et vous, à a, b et f. Je vous propose de donner des nouvelles valeurs à vos variables a, b et f et ce, dix fois. Quant à moi, je conserve les mêmes valeurs pour mes variables c et g. Qu'observons-nous avec les dix carrés ainsi construits?

2) Montrez qu'il est impossible de construire un carré magique d'ordre 4 avec les quatre entiers suivants :

9			
		12	
	20		
			21

3) Voici une autre propriété des carrés magiques d'ordre 4 : dans chaque carré ci-dessous, la somme des cases vertes = la somme des cases bleues.





4) Soit donné un carré magique presque normal M d'ordre $n \geq 3$. Vous savez que vous obtiendrez un carré multiplicatif M' par exponentiation de M. Est-il possible d'obtenir un carré magique M''en logarithmant M?

5) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$. De plus, M est un ultra-magique de somme S. Montrez que si l'entier m est dans M, alors m vérifie :

$$1 \leq m \leq \frac{2S - n}{n}.$$

6) Considérons le p-générateur G_{30}^{12} (voir annexes 18 et 18.1):

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

Si $G_{30}^{12} + 2m$ est un carré premier, alors l'entier $m \geq 1$ se termine par $0, 4, 5 ou\ 9$.

a) Montrez-le.

b) $G_{30}^{12} + 274728436$ est-il un carré premier?

7) Soit M, un carré premier presque normal qui renferme les nombres 3, 5 et 7.

a) M peut-il être un p-générateur?

b) Pourquoi M est-il d'ordre $n \geq 4$?

8) Soit G, un carré premier presque normal d'ordre $n \geq 3$. De plus, G est le plus petit carré premier et cela signifie que si nous enlevons 2 m dans toutes les cases de G, celui-ci ne sera plus jamais un carré premier sachant que m prend toutes les valeurs entières ≥ 1. Si G génère au moins un nouveau carré premier en ajoutant 2 m dans toutes ses cases avec $m \geq 1$, un entier, alors G sera un p-générateur.

Nous avons observé que dans G, il y a au moins un nombre premier qui se termine par 1, au moins un nombre premier > 3 qui se termine par 3, au moins un nombre premier qui se termine par 7, au moins un nombre premier qui se termine pat 9 et aucun 5.

Trouvez une condition nécessaire pour que G soit un p-générateur.

9) Le nombre $10^{30000} + 10^{3000} + 10^{300} + 10^{30} + 10^{3} + 7$ est-il premier?

10) Le nombre $10^{30000} + 10^{3000} + 10^{300} + 10^{30} + 7$ est-il premier?

11) Soit donnée, une suite de n^2 nombres entiers tous ≥ 1 et différents deux à deux. De plus, ces n^2 entiers sont tous impairs ou tous pairs. Nous voulons former un carré magique d'ordre $n \geq 3$ avec ceux-ci. Appelons S* la somme de ces n^2 entiers. Montrez :

a) que si tous les entiers sont pairs, alors S* doit être divisible par 2 n.
b) que si tous les entiers sont impairs, alors S* doit être divisible par n si n est impair et S* doit être divisible par 2 n si n est pair.

12) Quelle doit être la valeur de W si nous voulons que le carré suivant soit magique ?

			6
	14		
		W	
20			

13) Trouvez 4 carrés magiques presque normaux d'ordre 4 dont les sommes magiques sont les nombres premiers 37, 43, 109 et 151.

14) Le carré M presque normal suivant est un carré super-premier puisque sa somme magique, 313, est un nombre premier :

M =

113	31	53	19	97
41	17	107	101	47
59	109	13	89	43
71	73	79	67	23
29	83	61	37	103

a) En changeant les nombres dans les cases vertes de M, trouvez un nouveau carré super-premier presque normal?
b) Montrez qu'il est possible d'en construire au moins 856?
c) Le carré M peut donc être vu comme un nouveau type de p-générateur.

Nous pourrions l'appeler : p-générateur-5 si l'ordre du carré M est 5.

15) Le carré M presque normal suivant est un carré super-premier d'ordre 7 puisque sa somme magique 797, est un nombre premier :

109	29	151	211	157	13	127
197	229	83	23	103	31	131
67	11	89	227	163	233	7
113	139	61	107	37	239	101
191	47	179	167	17	137	59
79	149	181	19	97	73	199
41	193	53	43	223	71	173

M

a) En changeant les nombres dans les cases vertes de M, trouvez un nouveau carré super-premier presque normal?
b) Montrez qu'il est possible d'en construire au moins 56?
c) Le carré M peut donc être vu comme un nouveau type de p-générateur. Nous pourrions l'appeler: p-générateur-7 si l'ordre du carré M est 7.

16) Les deux carrés précédents sont des super-premiers et de plus, ils sont premiers parfaits. Ce sont des p-générateurs-n avec $n = 5 \; et \; n = 7$. Le carré qui suit est un carré premier parfait de somme 703 mais n'est pas un super-premier.

M =

107	163	167	109	157
193	103	131	139	137
179	89	113	173	149
127	197	101	199	79
97	151	191	83	181

a) Montrez que c'est un p-générateur-5.
b) En ajoutant 2m dans toutes les cases vertes, combien de super-premiers trouverez-vous si m varie de 1 à 100 000 000?

17) Construisez M, un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ formé exclusivement d'entiers tous différents dont la somme magique égale l'ordre du carré.
   a) Donnez deux exemples avec $n = 9 \; et \; n = 10.$
   b) La somme magique peut-elle être un nombre premier?
   c) M peut-il être presque normal?

18) Construisez M, un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ formé exclusivement d'entiers tous différents dont la somme magique est un nombre premier.
   a) Donnez un exemple avec $n = 5, \; n = 14 \; et \; n = 4.$
   b) Que se passe-t-il si $n = 8$?
   c) Que se passe-t-il si $n = 4k$ où $k \geq 1$ est un entier?
   d) M peut-il être presque normal?

19) Quelle doit être la valeur de G si nous voulons que le carré suivant soit magique ?

12			21
	13	G	

20) Si nous voulons construire un carré arithmétique presque normal d'ordre $n \geq 3,$ alors nous avons au chapitre 11, Partie 2, une condition suffisante à savoir :

$$t > (n-1)r \; ou \; r > (n-1)t$$

Considérons les entiers $a, \; r \, et \, t,$ tous > 0. Montrez que nous avons :
   a) $t > (n-1)r$ implique $r < (n-1)t.$
   b) $r > (n-1)t$ implique $t < (n-1)r.$

21) Soit M, un carré magique d'ordre 4 formé de nombres réels tous différents. Quelles sont les conditions pour que M reste magique si nous permutons sa deuxième rangée avec sa quatrième?

22) Soit donnée la suite de 16 entiers distincts suivante :

$$\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots\ ;12\ ;\ 13+k\ ;\ 14+k\ ;\ 15+k\ ;\ 16+k\}\ ;\ k \geq 0 \text{ est un entier.}$$

a) Montrez qu'il existe un carré magique presque normal pour chaque valeur de k dont la somme magique est $34+k$.

b) Montrez que si $k \geq 5$, alors les 4 plus grands nombres sont obligatoirement dans une figure complète.

c) Nous avons un programme dans MAPLE qui nous a permis de trouver le nombre de carrés magiques de somme $34+k$. Voici quelques résultats :

(0 ; 7040) (1 ; 1696) (2 ; 2016) (3 ; 1504) (4 ; 1824)
(5 ; 1408) (6 ; 1408) (7 ; 1408) (8 ; 1408) (9 ; 1408)
(10 ; 1408) (11 ; 1408) (19 ; 1408) (119 ; 1408) (1119 ; 1408)
(2210 ; 1408) (72210 ; 1408)

Chaque couple a la forme (valeur de k ; nombre de carrés).

Montrez que pour $k \geq 5$, le nombre de carrés magiques de somme $34+k$ est toujours 1408.

Annexe 29.1 : solutions des problèmes de l'annexe 29

1) Les dix carrés ainsi construits auront le même produit magique $P = c^2 g^2$ car celui-ci est indépendant des variables a, b et f. Voir chapitre 15, page 39.

2) Supposons que le carré soit magique. Sur la grande diagonale principale, placez les nombres a et b dans les cases vides. La somme magique est donc S = a + b + 30. Nous savons que le carré central d'ordre 2 est toujours une figure magique dans un carré magique d'ordre 4 d'où S = a + b + 32. Cela conduit à une contradiction (30 = 32). Il est donc impossible de construire un carré magique avec ces 4 entiers.

3) Dans le carré de gauche, placez a et b dans les cases vides de la diagonale secondaire. Ainsi, nous trouvons a + b + les 2 cases bleues = a + b + les 2 cases vertes puisque le carré central d'ordre 2 est toujours une figure magique dans un carré magique d'ordre 4. D'où le résultat annoncé. De la même façon avec le carré de droite; nous placerons a et b dans les cases vides de la diagonale principale.

4) La réponse est oui. Il suffit que M soit à la fois magique et multiplicatif ce qui est possible. Voir chapitre 13, pages 8, 9 et 10. De plus, précisons que carré magique multiplicatif = carré magique additif-multiplicatif.

5) Puisque M est ultra-magique, il est donc associatif. Si m est dans M, alors il existe r dans M tel que $m + r = \frac{2S}{n}$ $d'où$ $m = \frac{2S}{n} - r \leq \frac{2S}{n} - 1$ car M est presque normal. Il s'ensuit que $1 \leq m \leq \frac{2S-n}{n}$. Remarquez que si 1 est dans M, alors le plus grand entier de M est $\frac{2S-n}{n}$ et tout autre entier de M est $< \frac{2S-n}{n}$. Si r est le plus petit entier de M, alors $\frac{2S}{n} - r = \frac{2S-nr}{n}$ est le plus grand et tout entier de M est $< \frac{2S-nr}{n}$.

6) G_{30}^{12} est un carré premier presque normal et $m \geq 1$ est un entier.

a) $2m$ est un entier pair donc se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8. Cependant, $2m$ ne peut pas se terminer par 2 car 83 + 2 m se terminerait par 5 donc ne serait pas un nombre premier. De la même façon, $2m$ ne peut pas se terminer ni par 4 ni par 6 à cause de 41 + 2 m et 29 + 2 m qui se termineraient par 5. Il reste que $2m$ peut se terminer soit par 0, soit par 8. Donc m se termine par 0 ou 5 ou 4 ou 9.

b) Ce n'est pas un carré premier car $2m$ se termine par 6 (ici m se termine par 8).

7) M est premier presque normal et renferme 3, 5 et 7.

a) M ne peut pas être un p-générateur car il n'existe qu'un seul triplet de nombres premiers jumeaux (de la forme (p ; p + 2 ; p + 4)) soit {3 ; 5 ; 7}. Pour être un p-générateur, il faut que M + 2m soit un carré premier pour au moins une valeur entière non nulle de m. Or, {3 + 2m ; 5 + 2m ; 7 + 2m} ne sera jamais un triplet de nombres premiers jumeaux si m est non nul. Il s'ensuit que M contiendra toujours un entier qui n'est pas un nombre premier soit un des entiers du triplet. Vous trouverez un carré premier presque normal d'ordre 4 qui renferme les nombres 3, 5 et 7 à la page 9 du chapitre 10.

b) Nous savons, annexe 18, page 17, théorème 4, que M ne peut pas contenir le nombre 3. C'est pourquoi la question se pose seulement si $n \geq 4$.

8) Si 2m se termine par 2, 4, 6 ou 8, alors nous obtiendrons un carré magique qui contiendra toujours un entier différent de 5 qui se termine par 5, donc qui n'est pas un nombre premier. Le carré premier n'est donc pas possible sauf si 2m se termine par 0.

Que 2m se termine par 0 est notre condition nécessaire (donc m se termine par 0 ou 5). Il reste à chercher un carré premier avec 2m qui se termine par 0.

9) Ce nombre n'est pas premier car il se divise par 3 puisque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

10) Ce nombre n'est pas premier car il se divise par 11. En effet, la somme des chiffres de rangs impairs moins la somme des chiffres de rangs pairs est divisible par 11.

11)

a) S*doit être divisible par n si nous voulons que le carré soit magique. De plus, la somme magique sera paire donc divisible par 2 d'où S* divisible par 2n.

b) S* doit être divisible par n si nous voulons que le carré soit magique. Si n est pair, alors la somme magique sera paire et S* divisible par 2n. Si n est impair, alors la somme magique sera impaire et S* ne sera pas divisible par 2n.

Par exemple, si tous les entiers sont pairs, que S* soit divisible par 2n ne garantit pas l'existence d'un carré magique. S* divisible par 2n est une condition nécessaire mais non suffisante.

12) Pour que ce carré soit magique, il est nécessaire, selon le problème 3, que 20 + 6 = 14 + w d'où w = 12.

13) Prenons M, un carré normal idéal d'ordre 4 et sa figure complète en vert (voir 34 et 52 du glossaire de la Partie 2) :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

La somme magique de M est 34. En ajoutant dans les cases vertes le nombre 3, nous obtiendrons un nouveau carré magique presque normal de somme S = 34 + 3 = 37. Pour les trois autres carrés, il suffira d'ajouter dans les cases vertes, les nombres 9, 75 et 117 respectivement.

14) Le carré M est premier presque normal et sa somme magique est un nombre premier.

a) Les cases vertes forment une figure complète et nous allons remplacer les 5 nombres premiers qu'elles contiennent par 5 autres nombres premiers. De plus, nous voulons que la nouvelle somme magique soit aussi un nombre premier. Pour ce faire, nous allons chercher la valeur de 2m qui fera du 6-uplet de nombres premiers :

{53 ; 41 ; 89 ; 73 ; 103; 313}

un nouveau 6-uplet de nombres premiers :

(*) {53 + 2m ; 41 + 2m ; 89 + 2m ; 73 + 2m ; 103 + 2m; 313 + 2m}

Avec MATHEMATICA, nous allons utiliser :

```
Count[Table[PrimeQ[ {53 + 2m , 41 + 2m , 89 + 2m , 73 + 2m , 103 + 2m, 313 + 2m}],
{m,1,5000}], {True,True,True,True,True,True}]
```

Nous trouvons le nombre 1 donc cela signifie qu'il y a une valeur de m, entre 1 et 5000 qui fait que (*) est un 6-uplet de nombres premiers. Il est facile de trouver m = 4899. Nous trouverons, dans la figure complète, de haut en bas, les nombres premiers : 9851 ; 9839 ; 9887 ; 9871 ; 9901 et la somme magique 10 111, aussi un nombre premier.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 856.

c) Le carré M s'appelle p-générateur-5.

15) Le carré M est premier presque normal et sa somme magique est un nombre premier.

a) Nous procéderons comme au problème 14).

Count[Table[PrimeQ[{13 + 2m , 197 + 2m , 89 + 2m , 37 + 2m , 59 + 2m, 149 + 2m, 43 + 2m, 797 + 2m}], {m,1,200}], {True,True,True,True,True,True,True,True}].

Nous trouvons m = 147 d'où 2m = 294. Nous aurons alors notre premier nouveau super-premier presque normal.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 56.

c) Le carré M s'appelle p-générateur-7.

16) Nous procéderons de la même façon qu'avec le problème 14).

a) Count[Table[PrimeQ[{167 + 2m , 193 + 2m , 173 + 2m , 197 + 2m, 181 + 2m, 703 + 2m}], {m,1,300}], {True,True,True,True,True,True}].
Nous trouvons m = 210 et M est donc un p-générateur-5 puisqu'il génère au moins un carré super-premier presque normal.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 782.

c) **REMARQUE** : nous n'avons pas réellement défini ce qu'est un p-générateur-n. Nous pourrions dire que c'est **un carré premier presque normal M d'ordre** $n \geq 4$, qui peut générer un nouveau carré premier presque normal dont la somme magique est un nombre premier. Pour générer un nouveau carré premier, nous ajoutons 2m dans toutes les cases de la figure complète que possède M.

17) Rappelons que la somme S d'un carré arithmétique de coordonnées $(a;r;t)$ est :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}(r+t)$$

Nous voulons $S = n$. Il s'ensuit que :

$$r + t = \frac{2-2a}{n-1}$$

a) $S = n = 9 \ et \ a = 5$. Nous trouvons $r + t = -1$. Par exemple, prenons $r = 9 \ et \ t = -10$.
$S = n = 10 \ et \ a = 19$. Nous trouvons $r + t = -4$. Prenons $r = 7 \ et \ t = -11$.
Les deux carrés arithmétiques sont donc :

37	−48	38	−47	39	−46	40	−45	41
32	28	−57	29	−56	30	−55	31	27
18	23	19	−66	20	−65	21	17	22
13	9	14	10	−75	11	7	12	8
−1	4	0	5	1	−3	2	−2	3
−6	−10	−5	−9	77	−8	−12	−7	−11
−20	−15	−19	67	−18	68	−17	−21	−16
−25	−29	57	−28	58	−27	59	−26	−30
−39	47	−38	48	−37	49	−36	50	−35

19	−69	60	−14	38	27	−47	5	71	−80
−24	15	4	9	20	31	−7	−51	−62	75
−31	22	11	2	13	24	35	−44	−55	33
61	50	−16	7	−4	−15	−26	39	−27	−59
−45	−34	−23	14	3	−8	−19	32	43	47
−52	−41	−30	21	10	−1	−12	25	36	54
40	−48	−37	28	17	6	−5	18	29	−38
−66	57	46	−33	−22	−11	0	−9	−20	68
26	64	53	−40	−29	−18	42	−2	−13	−73
82	−6	−58	16	−36	−25	49	−3	8	−17

Ces deux carrés arithmétiques ne sont pas presque normaux car ils renferment des entiers négatifs. Cependant, il n'y a aucune répétition dans chacun.

b) Évidemment si n est un nombre premier!!!

c) M ne peut pas être presque normal puisque dans ce cas, nous aurions :

$$S \geq \frac{n(n^2+1)}{2} > n$$

L'égalité $S = n$ n'est donc pas possible.

18) Soit p, un nombre premier. Nous voulons avoir :

a) $$S = na + \frac{n(n-1)}{2}(r+t) = p$$ L'entier a est ≥ 1.

Il s'ensuit que :

$$r + t = \frac{2(p-na)}{n(n-1)}$$ Les nombres r et t sont des entiers.

Aussi, nous avons :

$$(1) \qquad p = n\left(a + \frac{(n-1)}{2}(r+t)\right) \qquad si\ n\ impair$$

$$(2) \qquad p = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)(r+t)\right) \qquad si\ n\ pair$$

Puisque p est un nombre premier, il faut qu'avec (1) nous ayons :

n = nombre premier et $\left(a + \frac{(n-1)}{2}(r+t)\right) = 1$ donc $r+t = \frac{2-2a}{n-1}$.

Puis, avec (2), $\frac{n}{2}$ = nombre premier et $\left(2a + (n-1)(r+t)\right)$ = 1 donc $r+t = \frac{1-2a}{n-1}$.

Exemple 1 :

$n=5$; $p=5$; $a=3$; $r+t=-1$; $r=4$; $t=-5$. Nous trouvons le carré suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 9 & -13 & 10 & -12 & 11 \\ 7 & 5 & -17 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 19 & -3 & -5 \\ -9 & 14 & -8 & 15 & -7 \end{array}$$

Sa somme magique est le nombre premier 5. Il n'y a aucune répétition.

Exemple 2 :

$n=14$; $p=7$; $a=7$; $r+t=-1$; $r=13$; $t=-14$. Nous trouvons un carré de somme 7 sans aucune répétition (avec MATHEMATICA ou EXCEL ou MAPLE).

Exemple 3 :

$n=4$; $p=2$; $a=2$; $r+t=-1$; $r=3$; $t=-4$. Carré sans répétition de somme 2.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 7 & -10 \\ -4 & 1 & -3 & 8 \\ -7 & 4 & 0 & 5 \\ 11 & -6 & -2 & -1 \end{array}$$

b) Si $n = 8$, alors $\frac{n}{2} = 4$ qui n'est pas un nombre premier.

c) Si $n = 4k$, alors $\frac{n}{2} = 2k$ qui est premier si et seulement $k = 1$. Cela signifie qu'un carré arithmétique d'ordre pair multiple de 4 aura pour somme un nombre premier si et seulement si $n = 4$.

d) Si M est presque normal, alors $p \geq \frac{n(n^2+1)}{2}$ ce qui n'est pas possible si $p = n$ ou $p = \frac{n}{2}$. En effet, nous avons $n \geq 3$. M ne peut donc pas être presque normal.

19) Dans les cases vides de la dernière rangée, plaçons a et b. Nous avons donc :

S = a + b + 13 + G = 12 + 21 + a + b

En effet, la somme des 4 coins de tout carré magique d'ordre 4 est une figure magique. Il est facile de trouver G = 20.

20)
$$t > (n-1)r \;\Rightarrow\; r < \frac{t}{n-1} < \frac{t}{n-1}(n-1)^2 = (n-1)t$$
$$r > (n-1)t \;\Rightarrow\; t < \frac{r}{n-1} < \frac{r}{n-1}(n-1)^2 = (n-1)r$$

ou encore, de façon évidente :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & r & (n-1)r & t & (n-1)t \\ 0 & t & (n-1)t & r & (n-1)r \end{array}$$

montre clairement que $r < (n-1)t \;\; et \;\; t < (n-1)r$.

Notez que $r \neq t$ car si nous avions $r = t$, alors les nombres $a + r \;\; et \;\; a + t$ du carré nous conduiraient à une répétition.

21) Considérons le carré magique M à gauche et M', à droite, après la permutation :

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
T	N	P	Q

A	B	C	D
T	N	P	Q
I	J	K	L
E	F	G	H

Pour que M' soit magique, il faut et il suffit que :

A + F + K + Q = A + N + K + H et D + G + J + T = D + P + J + E d'où :

F + Q = H + N et G + T = P + E

F + Q = H + N

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
T	N	P	Q

E + P = G + T

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
T	N	P	Q

Il est clair que M et M'ont la même somme magique.

22) Le carré suivant est magique, presque normal et de somme magique $S = 34 + k$. Il provient d'un carré magique normal idéal :

1	8	15+k	10
14+k	11	4	5
12	13+k	6	3
7	2	9	16+k

a) Les cases vertes forment une figure complète (Partie 1, numéro 27 du glossaire). Il est clair que ce carré magique génère des carrés magiques presque normaux de sommes consécutives 34, 35, 36, 37, …

b) Nous avons $k \geq 5$ donc la somme magique $S \geq 39$. Nous plaçons les nombres du carré dans deux groupes (1) *et* (2) :

$$(1) = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\,;\,11\,;\,12\} \;\; et \;\; (2) = \{13+k\,;\,14+k\,;\,15+k\,;\,16+k\}.$$

La somme de (1) est 78 et la somme de (2) est 58 + 4k. Pour que le carré formé des nombres de (1) et (2) soit magique, il faut que les nombres de (2) soient situés dans une figure complète donc un seul par rangée, un seul par colonne et un seul par grande diagonale. Pour montrer cela, nous devons :

i) Montrer que dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, nous ne pouvons pas avoir deux nombres de (2).

ii) Montrer que dans chaque rangée et chaque colonne, nous devons avoir un seul nombre de (2).

iii) Montrer que dans chaque grande diagonale, il faut un seul nombre de (2).

Preuve de i) :

Prenons une rangée qui contient les deux plus petits nombres entiers de (2), 13 + k et 14 + k pour un total de 27 + 2k puis ajoutons les deux plus petits de (1) pour un nouveau total de 30 + 2k qui doit être la somme magique 34 + k. Nous voyons bien que 30 + 2k > 34 + k est vérifiée dès que k > 4. Donc pour k > 4, il est impossible d'avoir deux nombres de (2) sur une même rangée car la somme serait plus grande que la somme magique. De même, impossible d'avoir deux nombres de (2) sur une même colonne et sur une même grande diagonale.

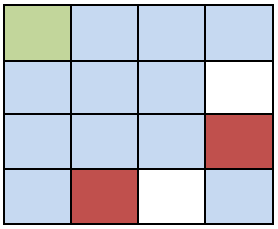
Preuve de ii) :

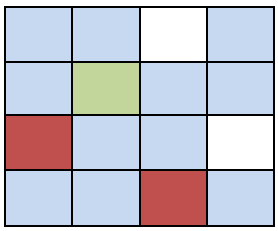
Si dans une rangée (colonne), nous n'avons aucun nombre de (2), alors il est certain que dans une autre rangée (colonne), nous en trouverons au moins deux ce qui n'est pas possible lorsque k > 4. **Il faut donc dans chaque rangée et dans chaque colonne, un seul nombre de (2).**

Preuve de iii) :

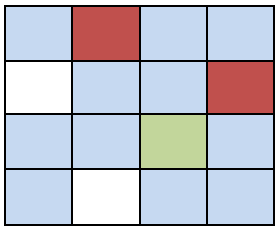
Est-il possible que sur les deux grandes diagonales, nous ne trouvions aucun nombre de (2)? La réponse est non. En effet, si c'était le cas, alors la somme des nombres en dehors des deux grandes diagonales serait $\geq 68 + 4k$. Il resterait donc un total de 68 pour remplir les deux grandes diagonales, ce qui n'est pas possible dès que k > 0.

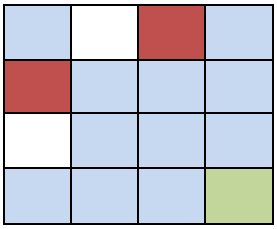
Enfin, pourrions-nous avoir un nombre de (2) sur une grande diagonale mais pas sur l'autre? La réponse est toujours non. En effet, il est facile de montrer que si nous avons un nombre de (2) sur une grande diagonale et aucun nombre de (2) sur l'autre grande diagonale, alors il sera impossible de placer les trois autres nombres de (2) dans le carré afin qu'il soit magique.





La case verte contient un nombre de (2). Les cases bleues ne peuvent pas recevoir un nombre de (2). Les cases rouges contiennent un nombre de (2). Impossible d'avoir un nombre de (2) dans une case blanche. **Nous pouvons donc placer seulement trois nombres de (2).**





Il est facile de constater que le quatrième nombre de (2) ne peut se placer que sur la diagonale secondaire.

Nous avions choisi de placer un seul nombre de (2) sur la diagonale principale et aucun sur la diagonale secondaire. Nous aurions le même résultat en plaçant un seul nombre de (2) sur la diagonale secondaire et aucun sur la principale.

Donc, il faut dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale un seul nombre de (2). Ceux-ci forment alors une figure complète.

c) Nous savons maintenant qu'à partir de k = 5, les quatre nombres de (2) forment une figure complète.

W	a	b	c
d	e	f	Z
g	X	h	m
p	q	Y	r

k = 5 S = 39

W+1	a	b	c
d	e	f	Z+1
g	X+1	h	m
p	q	Y+1	r

k = 6 S = 40

Soit A, l'ensemble des carrés magiques définis avec k = 5 et B, l'ensemble des carrés magiques définis avec k = 6. Nous allons montrer qu'il existe une bijection de A sur B.

Le carré de gauche est dans A et dans B, nous allons lui faire correspondre celui de droite. Notez que W, X, Y et Z sont dans le groupe (2) pour A et que W+1, X+1, Y+1 et Z+1 sont dans le groupe (2) pour B. Puis (1) = {a, b, c, d, e, f, g, h, m, p, q, r}. **La bijection est évidente!!! Il en résulte que si A contient 1408 carrés, B en contient également 1408**. Notez que la figure complète ci-haut est l'une des huit possibles. Ainsi, pour k = 5, 6, 7, 8, 9, …, nous aurons toujours 1408 carrés magiques. Pourquoi des nombres différents pour k = 0, 1, 2, 3 et 4? Dans tous ces cas, nous

trouvons des carrés magiques tels que leurs quatre plus grands nombres ne sont pas dans une figure complète.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

k = 0 ; S = 34

5	14	7	9
15	3	16	1
11	6	10	8
4	12	2	17

k = 1 ; S = 35

10	16	4	6
2	11	5	18
7	8	12	9
17	1	15	3

k = 2 ; S = 36

18	4	3	12
16	5	7	9
2	17	8	10
1	11	19	6

k = 3 ; S = 37

12	6	19	1
5	11	2	20
4	18	7	9
17	3	10	8

k = 4 ; S = 38

Pour k = 0, 1, 2, 3, 4, nous trouvons un nombre de carrés magiques supérieur à 1408. Il est facile de montrer que pour ces valeurs de k, nous aurons toujours 1408 carrés qui contiennent leurs quatre plus grands nombres (ceux de (2)) dans une figure complète. Par exemple, le tableau suivant montre que pour k = 2, il y a 608 carrés tels que leurs quatre plus grands nombres ne soient pas dans une figure complète.

Voici ce tableau :

	Nombre de carrés
k = 0 ; S = 34	1408 + 5632 = 7040
k = 1 ; S = 35	1408 + 288 = 1696
k = 2 ; S = 36	1408 + 608 = 2016
k = 3 ; S = 37	1408 + 96 = 1504
k = 4 ; S = 38	1408 + 416 = 1824

Nous avons pris les 1504 carrés magiques définis avec k = 3, S = 37 puis nous avons éliminé tous ceux qui avaient leurs quatre plus grands nombres dans une figure complète. Les carrés restants étaient au nombre de 96.

Résumons :

Considérons les 16 nombres suivants avec l'entier $k \geq 0$:

(*) $\{1,2,3,\ldots,11,12,13+k,14+k,15+k,16+k\}$

Nous pouvons construire une infinité de carrés magiques de sommes consécutives à partir de 34 et ce, grâce au carré magique normal idéal suivant (celui de gauche) :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

1	8	15+k	10
14+k	11	4	5
12	13+k	6	3
7	2	9	16+k

Nous trouvons en plus les résultats suivants :

Dès que $k \geq 5$, tous les carrés magiques qui contiennent (*) ont leurs quatre plus grands entiers situés dans une figure complète.

Quand $k \geq 5$, le nombre de carrés magiques qui contiennent (*) est toujours de 1408.

Avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$, nous trouvons 1408 carrés magiques qui ont leurs quatre plus grands entiers situés dans une figure complète plus un certain nombre de carrés magiques qui n'ont pas leurs quatre plus grands entiers situés dans une figure complète (voir le tableau de la page 12).

Annexe 30 : Les carrés géométriques

Nous connaissons les carrés arithmétiques présentés au chapitre 11. Avec ceux-ci, trois variables suffisent pour construire un carré magique d'ordres $n \geq 3$. En est-il de même avec les carrés multiplicatifs. La réponse est oui!!!

Voyons d'abord un exemple.

Considérons la structure générale des carrés magiques d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

Nous allons faire l'exponentiation en base B. Posons :

$$(*) \qquad B^a = r,\ B^b = t\ et\ B^S = P$$

Ainsi,

$$B^{4S/3-2a-b} = \frac{\left(B^S\right)^{4/3}}{\left(B^a\right)^2 B^b} = \frac{P^{4/3}}{r^2 t}$$

Puis en posant $P^{1/3} = w$, le carré multiplicatif obtenu est :

$$\begin{pmatrix} r & t & \frac{w^3}{r\,t} \\ \frac{w^4}{r^2 t} & w & \frac{r^2 t}{w^2} \\ \frac{r\,t}{w} & \frac{w^2}{t} & \frac{w^2}{r} \end{pmatrix}$$

Ce dernier carré est multiplicatif et renferme 9 nombres positifs selon (*).

Cependant, si nous prenons la seconde structure générale des carrés magiques d'ordre 3, nous voyons clairement que celle-ci est un carré arithmétique. L'exponentiation nous conduit encore plus facilement au carré multiplicatif et son tableau géométrique.

$$\begin{pmatrix} a+2r+t & a & a+r+2t \\ a+2t & a+r+t & a+2r \\ a+r & a+2r+2t & a+t \end{pmatrix}$$

Faisons l'exponentiation en base B. Posons :

$$(**) \qquad B^a = u,\ B^r = v,\ B^t = w.$$

Ainsi, $B^{a+2r+t} = B^a (B^r)^2 B^t = u\,v^2 w.$ Le carré multiplicatif obtenu est :

$$(\%) \qquad \begin{pmatrix} u\,v^2 w & u & u\,v\,w^2 \\ u\,w^2 & u\,v\,w & u\,v^2 \\ u\,v & u\,v^2 w^2 & u\,w \end{pmatrix}$$

Ce dernier carré est multiplicatif et il est géométrique dont voici son tableau géométrique :

$$\begin{pmatrix} u & u\,v & u\,v^2 \\ u\,w & u\,v\,w & u\,v^2 w \\ u\,w^2 & u\,v\,w^2 & u\,v^2 w^2 \end{pmatrix}$$

Lemme 1 :

L'exponentiation d'une suite arithmétique nous donne une suite géométrique formée de nombres positifs.
Logarithmer une suite géométrique de nombres réels positifs nous donne une suite arithmétique.

Preuve :

Prenons deux termes consécutifs d'une suite arithmétique : $a+n\,r\ \ et\ \ a+(n+1)\,r.$

L'exponentiation en base B donne $B^{a+nr} et\ B^{a+(n+1)r}$ d'où :

$$B^a (B^r)^n\ \ et\ \ B^a (B^r)^n B^r$$

Et la suite géométrique de raison B^r s'ensuit. Tous les nombres de cette suite sont positifs.

Prenons deux termes positifs consécutifs d'une suite géométrique : $a\,r^n et\ \ a\,r^{n+1}$ avec $a>0\ \ et\ \ r>0.$ En logarithmant en base B, nous trouvons :

$$\log_B a + n\log_B r \ \ et \ \ \log_B a + n\log_B r + \log_B r$$

Et la suite arithmétique de raison $\log_B r$ s'ensuit.

Corollaire 1 :

> L'exponentiation d'un carré arithmétique nous donne un carré géométrique.
> Logarithmer un carré géométrique nous donne un carré arithmétique.

Prenons maintenant une structure de carrés arithmétiques d'ordre 5 de somme $S = 5a + 10r + 10t.$

$$\text{(A)} \qquad \begin{pmatrix} a+4r+2t & a+r+4t & a+3r+t & a+3t & a+2r \\ a+r & a+3r+2t & a+4t & a+2r+t & a+4r+3t \\ a+3r+3t & a & a+2r+2t & a+4r+4t & a+r+t \\ a+t & a+2r+3t & a+4r & a+r+2t & a+3r+4t \\ a+2r+4t & a+4r+t & a+r+3t & a+3r & a+2t \end{pmatrix}$$

Nous allons faire l'exponentiation en base $B.$ Par exemple, $a+4r+2t$ nous donne :

$$B^{a+4r+2t} = B^a (B^r)^4 (B^t)^2$$

Puis en posant $B^a = m,\ B^r = u,\ B^t = v,$ nous obtenons $mu^4v^2.$ Les variables dans (A) sont $a, r\ et\ t$ et dans le carré multiplicatif, $m, u\ et\ v.$ Ces dernières ne prennent que des valeurs positives. Le passage de (A) au carré multiplicatif nous montre que l'addition se change en multiplication et que les coefficients deviennent des exposants. Ainsi, la première rangée de (A) nous donne la première rangée du carré multiplicatif :

$$mu^4v^2 \quad muv^4 \quad mu^3v \quad mv^3 \quad mu^2$$

Ou encore : $$ar^4t^2 \quad art^4 \quad ar^3t \quad at^3 \quad ar^2$$

Nous pouvons maintenant écrire la structure correspondante des carrés géométriques sans effectuer le moindre calcul :

$$(M) \qquad \begin{pmatrix} a r^4 t^2 & a r t^4 & a r^3 t & a t^3 & a r^2 \\ a r & a r^3 t^2 & a t^4 & a r^2 t & a r^4 t^3 \\ a r^3 t^3 & a & a r^2 t^2 & a r^4 t^4 & a r t \\ a t & a r^2 t^3 & a r^4 & a r t^2 & a r^3 t^4 \\ a r^2 t^4 & a r^4 t & a r t^3 & a r^3 & a t^2 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons dans ce carré 25 expressions différentes. Si a est un entier positif et $r \, et \, t$ sont des nombres premiers distincts, alors les 25 nombres obtenus sont distincts deux à deux, quelle que soit la valeur de a. En effet, si deux expressions différentes donnent le même entier, alors nous aurons deux décompositions en facteurs premiers pour un même entier. D'où la contradiction.

Les propriétés de (A) sont transmises à (M). (M) est donc associatif et géométrique. Le produit P de (M) est :

$$P = a^5 r^{10} t^{10} = (a r^2 t^2)^5$$

Avec $a = 1, r = 2 \, et \, t = 3$, nous avons un carré géométrique associatif de produit

$$P = 36^5 = 60\ 466\ 176$$

Le nombre de figures magiques dans (A) est 934 de même que dans (M). Avec $a = 1, r = 2, t = 9$, nous trouvons 940 figures magiques dans (A). Par exponentiation en base 2, nous trouvons $P = 2^{115}$. Le carré multiplicatif possède lui aussi 940 figures magiques.

Prenons ici une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 6. La somme est : $S = 6a + 15r + 15t$. Le produit du carré géométrique obtenu est :

$$P = a^6 r^{15} t^{15} = (a^2 r^5 t^5)^3$$

Avec $a = 1, r = 2, t = 3$, nous trouvons $P = 470\ 184\ 984\ 576$.

Nous allons attribuer que des valeurs entières positives à nos trois variables. En procédant ainsi, nous trouverons que le plus petit produit pour un carré géométrique presque normal d'ordre n est :

$$\boxed{P = 6^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Qu'arriverait-il si nous procédions autrement? Pour l'ordre 6, pourrions-nous trouver un produit plus petit que 470 184 984 576? Pourrions-nous donner des valeurs rationnelles à nos variables $r \, et \, t$? La réponse est oui!!!

Voyons un exemple : posons $u = 625,\ v = \frac{2}{5},\ w = \frac{3}{5}$ dans la structure (%) vue plus haut. Nous obtenons le carré géométrique presque normal suivant de produit $P = 3\ 375\ 000$.

$$\begin{pmatrix} 60 & 625 & 90 \\ 225 & 150 & 100 \\ 250 & 36 & 375 \end{pmatrix}$$

Nous ne trouverons pas tous les carrés géométriques presque normaux avec (%) si nous attribuons aux trois variables que des valeurs entières!!! (Voir le carré de la page 15, section 15.2 du chapitre 15).

Il est faux de croire que pour avoir un carré géométrique presque normal d'ordre 3, les variables doivent absolument prendre des valeurs entières. Le carré ci-haut le montre bien!!!

Pouvons-nous obtenir un plus petit produit pour un carré presque normal si certaines variables peuvent prendre des valeurs rationnelles non entières?

Nous vous proposons d'entreprendre une recherche afin de répondre à cette question.

Nous savons qu'il existe une structure générale de carrés arithmétiques pour tous les ordres $n \geq 3$.

Donc il existe une structure générale de carrés multiplicatifs (géométriques)
pour tous les ordres $n \geq 3$.

En effet, il suffit de faire l'exponentiation d'une structure générale de carrés arithmétiques pour obtenir une structure générale de carrés multiplicatifs géométriques.

QUESTION 1:

Je vous donne un carré magique M d'ordre 5 et un carré multiplicatif N
formé de nombres réels positifs (> 0), aussi d'ordre 5.
Existe-t-il une base B telle que par exponentiation en base B
du carré M, nous obtenions le carré N?

En général, la réponse est non. Si M et N sont donnés au hasard, alors la probabilité que M et N soient associés est nulle. En base B, un seul carré magique peut donner N soit le carré magique obtenu en logarithmant N en base B. Était-ce M???

QUESTION 2 :

Soit M, un carré magique d'ordre n. Est-il possible en logarithmant M en base B,
d'obtenir un carré magique?

La réponse est non en général mais si M est à la fois magique et multiplicatif, alors la réponse est oui. La section 13.3 nous présente 5 carrés à la fois magiques et multiplicatifs.

Tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 sont des carrés géométriques.

Une conséquence du théorème fondamental des carrés magiques est qu'il est possible de construire une infinité de carrés multiplicatifs presque normaux pour tous les ordres $n \geq 3$ et ce, toujours à l'aide de 3 variables seulement. Ceux-ci seront tous géométriques et si l'ordre est impair ou pair multiple de 4, alors ils seront associatifs!!!

Annexe 31 : Carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 avec les centres de 1 à 49

Nous vous présentons ici 49 carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 construits avec le procédé 1-3-5-7-2-4-6.

De plus, en ajoutant le nombre premier 9551 dans toutes les cases de chacun des 49 carrés, nous obtiendrons un carré magique pandiagonal presque normal qui contiendra un seul nombre premier soit 9587. Notons que 36 + 9551 = 9587. Donc, dans chaque carré normal, en ajoutant 9551, la case qui contient 36 contiendra alors 9587.

En nous servant des 49 carrés avec les centres de 1 à 49 et leurs équivalents, nous pourrons construire un carré magique pandiagonal presque normal qui contiendra le seul nombre premier 9587 dans la case de notre choix!!! Chaque carré sera un intrus. Nous vous présenterons le bel intrus-9587 à la toute fin de cette annexe.

49	23	11	33	3	21	35
31	36	30	45	18	8	7
5	20	14	19	43	42	32
17	39	27	1	15	29	47
6	37	46	24	38	22	2
41	16	34	9	10	25	40
26	4	13	44	48	28	12

Carré de centre 1

17	31	26	6	5	49	41
27	30	13	46	14	11	34
15	18	48	38	43	3	10
47	7	12	2	32	35	40
39	36	4	37	20	23	16
1	45	44	24	19	33	9
29	8	28	22	42	21	25

Carré de centre 2

44	4	12	48	13	26	28
24	37	2	38	46	6	22
19	20	32	43	14	5	42
33	23	35	3	11	49	21
9	16	40	10	34	41	25
1	39	47	15	27	17	29
45	36	7	18	30	31	8

Carré de centre 3

7	40	32	12	47	35	2
30	34	14	13	27	11	46
8	25	42	28	29	21	22
36	16	20	4	39	23	37
18	10	43	48	15	3	38
31	41	5	26	17	49	6
45	9	19	44	1	33	24

Carré de centre 4

9	34	16	41	40	25	10
24	46	37	6	2	22	38
1	27	39	17	47	29	15
19	14	20	5	32	42	43
45	30	36	31	7	8	18
33	11	23	49	35	21	3
44	13	4	26	12	28	48

Carré de centre 5

47	15	27	17	29	1	39
7	18	30	31	8	45	36
12	48	13	26	28	44	4
2	38	46	6	22	24	37
32	43	14	5	42	19	20
35	3	11	49	21	33	23
40	10	34	41	25	9	16

Carré de centre 6

4	20	16	36	37	23	39
28	42	25	8	22	21	29
13	14	34	30	46	11	27
12	32	40	7	2	35	47
44	19	9	45	24	33	1
26	5	41	31	6	49	17
48	43	10	18	38	3	15

Carré de centre 7

26	5	41	31	6	49	17
48	43	10	18	38	3	15
4	20	16	36	37	23	39
28	42	25	8	22	21	29
13	14	34	30	46	11	27
12	32	40	7	2	35	47
44	19	9	45	24	33	1

Carré de centre 8

29	28	42	25	8	22	21
27	13	14	34	30	46	11
47	12	32	40	7	2	35
1	44	19	9	45	24	33
17	26	5	41	31	6	49
15	48	43	10	18	38	3
39	4	20	16	36	37	23

Carré de centre 9

47	12	32	40	7	2	35
1	44	19	9	45	24	33
17	26	5	41	31	6	49
15	48	43	10	18	38	3
39	4	20	16	36	37	23
29	28	42	25	8	22	21
27	13	14	34	30	46	11

Carré de centre 10

47	32	7	35	12	40	2
17	5	31	49	26	41	6
39	20	36	23	4	16	37
27	14	30	11	13	34	46
1	19	45	33	44	9	24
15	43	18	3	48	10	38
29	42	8	21	28	25	22

Carré de centre 11

36	8	30	7	45	31	18
16	25	34	40	9	41	10
20	42	14	32	19	5	43
4	28	13	12	44	26	48
39	29	27	47	1	17	15
23	21	11	35	33	49	3
37	22	46	2	24	6	38

Carré de centre 12

18	36	8	30	7	45	31
10	16	25	34	40	9	41
43	20	42	14	32	19	5
48	4	28	13	12	44	26
15	39	29	27	47	1	17
3	23	21	11	35	33	49
38	37	22	46	2	24	6

Carré de centre 13

38	37	22	46	2	24	6
18	36	8	30	7	45	31
10	16	25	34	40	9	41
43	20	42	14	32	19	5
48	4	28	13	12	44	26
15	39	29	27	41	1	17
3	23	21	11	35	33	49

Carré de centre 14

24	44	45	1	9	33	19
37	4	36	39	16	23	20
2	12	7	47	40	35	32
38	48	18	15	10	3	43
46	13	30	27	34	11	14
6	26	31	17	41	49	5
22	28	8	29	25	21	42

Carré de centre 15

35	2	7	40	32	12	42
11	46	30	34	14	13	27
21	22	8	25	42	28	29
23	37	36	16	20	4	39
3	38	18	10	43	48	15
49	6	31	41	5	26	17
33	24	45	9	19	44	1

Carré de centre 16

2	12	7	47	40	35	32
38	48	18	15	10	3	43
46	13	30	27	34	11	14
6	26	31	17	41	49	5
22	28	8	29	25	21	42
24	44	45	1	9	33	19
37	4	36	39	16	23	20

Carré de centre 17

13	28	4	48	26	44	12
14	42	20	43	5	19	32
34	25	16	10	41	9	40
30	8	36	18	31	45	7
46	22	37	38	6	24	2
11	21	23	3	49	33	35
27	29	39	15	17	1	47

Carré de centre 18

41	6	17	5	31	49	26
16	37	39	20	36	23	4
34	46	27	14	30	11	13
9	24	1	19	45	33	44
10	38	15	43	18	3	48
25	22	29	42	8	21	28
40	2	47	32	7	35	12

Carré de centre 19

2	7	40	32	12	47	35
46	30	34	14	13	27	11
22	8	25	42	28	29	21
37	36	16	20	4	39	23
38	18	10	43	48	15	3
6	31	41	5	26	17	49
24	45	9	19	44	1	33

Carré de centre 20

9	40	34	25	16	10	41
45	7	30	8	36	18	31
24	2	46	22	37	38	6
33	35	11	21	23	3	49
1	47	27	29	39	15	17
44	12	13	28	4	48	26
19	32	14	42	20	43	5

Carré de centre 21

15	27	17	29	1	39	47
18	30	31	8	45	36	7
48	13	26	28	44	4	12
38	46	6	22	24	37	2
43	14	5	42	19	20	32
3	11	49	21	33	23	35
10	34	41	25	9	16	40

Carré de centre 22

29	42	8	21	28	25	22
47	32	7	35	12	40	2
17	5	31	49	26	41	6
39	20	36	23	4	16	37
27	14	30	11	13	34	46
1	19	45	33	44	9	24
15	43	18	3	48	10	38

Carré de centre 23

15	18	48	38	43	3	10
47	7	12	2	32	35	40
39	36	4	37	20	23	16
1	45	44	24	19	33	9
29	8	28	22	42	21	25
17	31	26	6	5	49	41
27	30	13	46	14	11	34

Carré de centre 24

1	47	27	29	39	15	17
44	12	13	28	4	48	26
19	32	14	42	20	43	5
9	40	34	25	16	10	41
45	7	30	8	36	18	31
24	2	46	22	37	38	6
33	35	11	21	23	3	49

Carré de centre 25

C’est un ultra-magique

35	32	2	12	7	42	40
3	43	38	48	18	15	10
11	14	46	13	30	27	34
49	5	6	26	31	17	41
21	42	22	28	8	29	25
33	19	24	44	45	1	9
23	20	37	4	36	39	16

Carré de centre 26

12	40	2	47	32	7	35
26	41	6	17	5	31	49
4	16	37	39	20	36	23
13	34	46	27	14	30	11
44	9	24	1	19	45	33
48	10	38	15	43	18	3
28	25	22	29	42	8	21

Carré de centre 27

6	49	17	26	5	41	31
38	3	15	48	43	10	18
37	23	39	4	20	16	36
22	21	29	28	42	25	8
46	11	27	13	14	34	30
2	35	47	12	32	40	7
24	33	1	44	19	9	45

Carré de centre 28

41	10	16	25	34	40	9
5	43	20	42	14	32	19
26	48	4	28	13	12	44
17	15	39	29	27	47	1
49	3	23	21	11	35	33
6	38	37	22	46	2	24
31	18	36	8	30	7	45

Carré de centre 29

48	43	10	18	38	3	15
4	20	16	36	37	23	39
28	42	25	8	22	21	29
13	14	34	30	46	11	27
12	32	40	7	2	35	47
44	19	9	45	24	33	1
26	5	41	31	6	49	17

Carré de centre 30

38	15	43	18	3	48	10
22	29	42	8	21	28	25
2	47	32	7	35	12	40
6	17	5	31	49	26	41
37	39	20	36	23	4	16
46	27	14	30	11	13	34
24	1	19	45	33	44	9

Carré de centre 31

44	48	28	12	26	4	13
33	3	21	35	49	23	11
45	18	8	7	31	36	30
19	43	42	32	5	20	14
1	15	29	47	17	39	27
24	38	22	2	6	37	46
9	10	25	40	41	16	34

Carré de centre 32

48	38	43	3	10	15	18
12	2	32	35	40	47	7
4	37	20	23	16	39	36
44	24	19	33	9	1	45
28	22	42	21	25	29	8
26	6	5	49	41	17	31
13	46	14	11	34	27	30

Carré de centre 33

3	23	21	11	35	33	49
38	37	22	46	2	24	6
18	36	8	30	7	45	31
10	16	25	34	40	9	41
43	20	42	14	32	19	5
48	4	28	13	12	44	26
15	39	29	27	47	1	17

Carré de centre 34

26	6	5	49	41	17	31
13	46	14	11	34	27	30
48	38	43	3	10	15	18
12	2	32	35	40	47	7
4	37	20	23	16	39	36
44	24	19	33	9	1	45
28	22	42	21	25	29	8

Carré de centre 35

12	13	28	4	48	26	44
32	14	42	20	43	5	19
40	34	25	16	10	41	9
7	30	8	36	18	31	45
2	46	22	37	38	6	24
35	11	21	23	3	49	33
47	27	29	39	15	17	1

Carré de centre 36

12	47	35	2	7	40	32
13	27	11	46	30	34	14
28	29	21	22	8	25	42
4	39	23	37	36	16	20
48	15	3	38	18	10	43
26	17	49	6	31	41	5
44	1	33	24	45	9	19

Carré de centre 37

1	39	47	15	27	17	29
45	36	7	18	30	31	8
44	4	12	48	13	26	28
24	37	2	38	46	6	22
19	20	32	43	14	5	42
33	23	35	3	11	49	21
9	16	40	10	34	41	25

Carré de centre 38

48	44	13	4	26	12	28
10	9	34	16	41	40	25
38	24	46	37	6	2	22
15	1	27	39	17	47	29
43	19	14	20	5	32	42
18	45	30	36	31	7	8
3	33	11	23	49	35	21

Carré de centre 39

6	5	49	41	17	31	26
46	14	11	34	27	30	13
38	43	3	10	15	18	48
2	32	35	40	47	7	12
37	20	23	16	39	36	4
24	19	33	9	1	45	44
22	42	21	25	29	8	28

Carré de centre 40

2	38	46	6	22	24	37
32	43	14	5	42	19	20
35	3	11	49	21	33	23
40	10	34	41	25	9	16
47	15	27	17	29	1	39
7	18	30	31	8	45	36
12	48	13	26	28	44	4

Carré de centre 41

24	45	9	19	44	1	33
2	7	40	32	12	47	35
46	30	34	14	13	27	11
22	8	25	42	28	29	21
37	36	16	20	4	39	23
38	18	10	43	48	15	3
6	31	41	5	26	17	49

Carré de centre 42

46	30	34	14	13	27	11
22	8	25	42	28	29	21
37	36	16	20	4	39	23
38	18	10	43	48	15	3
6	31	41	5	26	17	49
24	45	9	19	44	1	33
2	7	40	32	12	47	35

Carré de centre 43

3	35	23	33	21	49	11
43	32	20	19	42	5	14
38	2	37	24	22	6	46
48	12	4	44	28	26	13
18	7	36	45	8	31	30
15	47	39	1	29	17	27
10	40	16	9	25	41	34

Carré de centre 44

2	22	38	24	46	37	6
47	29	15	1	27	39	17
32	42	43	19	14	20	5
7	8	18	45	30	36	31
35	21	3	33	11	23	49
12	28	48	44	13	4	26
40	25	10	9	34	16	41

Carré de centre 45

43	10	18	38	3	15	48
20	16	36	37	23	39	4
42	25	8	22	21	29	28
14	34	30	46	11	27	13
32	40	7	2	35	47	12
19	9	45	24	33	1	44
5	41	31	6	49	17	26

Carré de centre 46

6	46	38	2	37	24	22
26	13	48	12	4	44	28
31	30	18	7	36	45	8
17	27	15	47	39	1	29
41	34	10	40	16	9	25
49	11	3	35	23	33	21
5	14	43	32	20	19	42

Carré de centre 47

33	19	24	44	45	1	9
23	20	37	4	36	39	16
35	32	2	12	7	47	40
3	43	38	48	18	15	10
11	14	46	13	30	27	34
49	5	6	26	31	17	41
21	42	22	28	8	29	25

Carré de centre 48

1	27	39	17	47	29	15
19	14	20	5	32	42	43
45	30	36	31	7	8	18
33	11	23	49	35	21	3
44	13	4	26	12	28	48
9	34	16	41	40	25	10
24	46	37	6	2	22	38

Carré de centre 49

9563	9564	9579	9555	9599	9577	9595
9583	9565	9593	9571	9594	9556	9570
9591	9585	9576	9567	9561	9592	9560
9558	9581	9559	9587	9569	9582	9596
9553	9597	9573	9588	9589	9557	9575
9586	9562	9572	9574	9554	9600	9584
9598	9578	9580	9590	9566	9568	9552

Le bel-intrus-9587

Ce carré magique presque normal d'ordre 7 est pandiagonal de somme S = 67 032. Il renferme un seul nombre premier soit 9587 dans sa case centrale. Les 48 autres entiers sont composés.

Fait intéressant :

Dans les 49 carrés magiques normaux pandiagonaux ci-haut, de centres 1 à 49, nous trouvons toujours les entiers carrés parfaits 9, 16 et 25 soit sur une même rangée, soit sur une même colonne. Ces trois entiers sont reliés au célèbre triplet pythagoricien (3 ; 4 ; 5) puisque nous avons 9 + 16 = 25.

Les entiers 9, 16 et 25 se trouvent dans trois cases consécutives situées sur une même colonne, 7 fois et sur une même rangée, 5 fois.

Parmi les 49 carrés, 23 présentent 9, 16 et 25 sur une même rangée et 26 les présentent sur une même colonne.

Dans 6.1 du chapitre 6, observez les 25 carrés magiques normaux et pandiagonaux d'ordre 5, de centres 1 à 25. Les entiers 9 et 16 se retrouvent toujours sur une même rangée ou sur une même colonne!!!

Annexe 32 : carrés m-ultra-magiques presque normaux

Ordres impairs :

Voici une rangée du tableau de la page 70 du chapitre 15. Elle se rapporte au m-ultra-magique d'ordre 5, de produit $36^5 = 60\ 466\ 176$.

36 ; 60 466 176	128	16	1	1296	16

Cette rangée nous indique qu'il existe 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 16 primitifs. Ils contiennent tous 1 comme plus petit entier et 1296 comme plus grand entier. De plus, ils renferment tous les mêmes 25 entiers!!!

Selon le théorème 15.13.1, page 73, tous les entiers du carré sont des diviseurs de $k^2 = 36^2 = 1296$. Or 1296 possède exactement 25 diviseurs entiers positif!!! Donc, si on a un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5, alors celui-ci renfermera les 25 diviseurs de 1296. Nous avons ici 16 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et ceux-ci renferment tous les 25 diviseurs de 1296. Ils renferment donc les mêmes 25 entiers.

Soit donné M, un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 de produit $P = k^5$. Si le nombre de diviseurs entiers positifs de k^2 est < 25, alors M n'existe pas.

Une condition nécessaire pour que M existe est que le nombre de diviseurs entiers positifs de k^2 soit ≥ 25.

Voyons ce qui se passe si l'ordre est impair ≥ 7.

Le problème 47) de 15.7 nous montre qu'un m-ultra-magique presque normal d'ordre impair $n \geq 5$ aura dans sa case centrale le nombre $P^{\frac{1}{n}}$. Puisque ce carré est presque normal, alors nous pouvons poser $P^{\frac{1}{n}} = k$, un entier ≥ 1. D'où $P = k^n$ et le théorème suivant :

Théorème 1 :

Si M est un m-ultra-magique presque normal d'ordre impair $n \geq 5$, alors sa case centrale contient l'entier $P^{\frac{1}{n}}$. De plus, $P = k^n$ où $k \geq 1$ est un entier.

Théorème 2 :

Si M est un m-ultra-magique presque normal d'ordre impair $n \geq 5$, alors tous les entiers de M sont des diviseurs de k^2.

Selon le problème 28) de 15.7, un m-ultra-magique presque normal d'ordre 3 n'existe pas.

Pourquoi un m-ultra-magique presque normal d'ordre 7 et de produit $P = 196^7$ n'existe pas?

Réponse : Il faut que $196^2 = 38\ 416$ possède au moins 49 diviseurs entiers positifs. Malheureusement, cet entier n'en possède que 25. Si le carré m-ultra-magique existe, alors il ne sera pas presque normal.

Nous avons construit un m-ultra-magique d'ordre 5 avec (UM*), page 65 du chapitre 15. Nous avons pris : $a = 1$; $d = 18$; $e = 162$; $m = 729$; $P = 54^5$. Voici ce carré :

1	972	36	18	729
162	81	9	324	12
2916	4	54	729	1
243	9	324	36	18
4	162	81	3	2916

Les cinq nombres soulignés se trouvent une seule fois dans le carré.

Ce carré est formé d'entiers ≥ 1 mais il y a des répétitions. En effet, tous les entiers du carré sont des diviseurs de $k^2 = 54^2 = 2916$ mais 2916 ne possède que 21 diviseurs entiers positifs. Certains diviseurs doivent donc se répéter et ainsi, ce carré ne peut pas être presque normal.

Et si nous prenions tous les diviseurs de 2916 dans $\mathbb{Z}$. Il y en aurait alors 42 :

$$(\pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ ...;\ \pm 1458\ ;\ \pm 2916)$$

Voilà pourquoi le carré sans répétition devient possible si nous acceptons les entiers négatifs. Notre m-ultra-magique n'est toujours pas presque normal mais il contient 25 entiers non nuls différents deux à deux!!! Le voici : $a = 1$; $d = -18$; $e = 162$; $m = 729$; $P = 54^5$:

1	972	36	-18	-729
162	-81	-9	324	12
-2916	4	54	729	-1
243	9	-324	-36	18
-4	-162	81	3	2916

En valeur absolue, les deux carrés contiennent les mêmes entiers dans les mêmes cases.

Puisque 54^2 ne possède que 21 diviseurs entiers positifs (il en faut au moins 25), alors nous ne pouvons pas construire un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit $P = 54^5$.

Mais 54^2 possède 42 diviseurs entiers d'où la possibilité de construire un m-ultra-magique d'ordre 5 et de produit $P = 54^5$ qui ne sera pas presque normal mais qui contiendra aucune répétition. Son seul défaut : 40% d'entiers négatifs.

Comment fabriquer un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5?

Étape 1 : Nous prendrons la structure générale (UM*) d'ordre 5 de la page 65 du chapitre 15. Celle-ci génère tous les m-ultra-magiques d'ordre 5 formés de nombres non nuls. Pour cela, les cinq variables a, d, e, m et P doivent prendre des valeurs entières positives non nulles. En particulier, elle génère tous les m-ultra-magiques formés de nombres > 0.

Étape 2 : Nous voulons 25 entiers ≥ 1 dans notre carré. La case centrale doit donc renfermer un entier $k \geq 1$ et alors $P^{\frac{1}{5}} = k$ d'où $P = k^5$. $P = k^5$ devient une condition nécessaire.

Étape 3 : Puisque notre carré doit être un m-ultra-magique donc associatif, alors tous les entiers du carré doivent être des diviseurs de k^2. Dans MATHEMATICA, par exemple, la commande Divisors [k^2] nous donne la liste des diviseurs entiers positifs de k^2. Si nous voulons un carré qui contient 25 entiers ≥ 1, alors la liste Divisors [k^2] contiendra tous les entiers du carré. Cette liste est nécessaire.

Étape 4 : Si nous voulons un m-ultra-magique presque normal, alors k sera un entier ≥ 1. Les entiers du carré seront dans Divisors [k^2] et il est nécessaire que le nombre de diviseurs entiers positifs soit ≥ 25.

Étape 5 : Maintenant il faut choisir la valeur de $k \geq 1$ afin de trouver le produit $P = k^5$ et la valeur de k^2 qui détermine la liste des entiers qui sont susceptibles de former le carré.

Si la liste contient moins que 25 diviseurs, alors il faudra chercher une autre valeur de k.

Étape 6 : Nous avons construit dans MAPLE un programme, appelé MUM-5, qui donne les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 à partir de la liste des diviseurs entiers positifs de k^2 et du produit $P = k^5$.

Exemple : Prenons $k = 196$ d'où $k^2 = 38416$ et $P = 196^5 = 289\ 254\ 654\ 976$. Voici les 25 diviseurs entiers positifs de $38\ 416$:

$$\{1,2,4,7,8,14,16,28,49,56,98,112,196,343,392,686,784,1372,2401,2744,4802,5488,9604,19208,38416\}$$

Notre programme, MUM-5, trouve 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 de produit $P = 196^5$. Puis, il nous donne les 16 primitifs qui renferment les mêmes 25 entiers soient les 25 diviseurs de $38\ 416$. Le carré qui suit est l'un des 16 primitifs dont 1 est le plus petit entier et 38 416, le plus grand entier du carré.

16	9 604	343	392	14
49	56	2	38 416	1 372
4 802	5 488	196	7	8
28	1	19 208	686	784
2 744	98	112	4	2 401

m-ultra-magique presque normal de produit $P = 196^5$

Ordres pairs :

Soit M, un m-ultra-magique de produit P, presque normal d'ordre pair $n \geq 4$. Si a et b sont deux entiers situés dans des cases symétriques par rapport au centre du carré, alors nous avons :

$$a\,b = P^{2/n} = \sqrt[n]{P^2} = k$$

où $k \geq 2$ est un entier.

Puisque $P^{2/n} = k$, il s'ensuit que $P = k^{n/2}$.

De plus, tous les entiers de M sont des diviseurs de k.

Par exemple, pour $n = 4$, les valeurs de k qui peuvent nous conduire à un m-ultra-magique presque normal sont celles qui possèdent au moins 16 diviseurs. L'entier $k = 120$ est le plus petit entier qui possède 16 diviseurs. Il pourrait nous conduire à un m-ultra-magique presque normal de produit $P = 120^2 = 14\,400$, si celui-ci existe. Pour $n = 6$, $k = 1260$ possède 36 diviseurs d'où

la possibilité de trouver un m-ultra-magique presque normal de produit $P = 1260^3 = 2\ 000\ 376\ 000$, si celui-ci existe.

Exemple : le carré suivant est un ultra-magique presque normal d'ordre 6, de somme $S = 252$.

39	62	26	13	81	31
25	83	32	21	77	14
17	78	16	40	65	36
48	19	44	68	6	67
70	7	63	52	1	59
53	3	71	58	22	45

Selon le théorème 15.17, en faisant l'exponentiation en base 2, nous obtenons un m-ultra-magique de produit $P = 2^{252}$.

Ici, $k = 2^{84}$ et $P = k^{n/2} = k^3 = \left(2^{84}\right)^3 = 2^{252}$. De plus, il est facile de constater que chaque entier du m-ultra-magique est un diviseur de k. Ainsi, $\frac{2^{84}}{2^{67}} = 2^{17}$ et 83 est le plus grand entier du carré.

Annexe 33 : 24 permutations d'où 24 carrés d'ordre 10

Voici un très bel ensemble formé de vingt-quatre carrés magiques qui possèdent tous des propriétés remarquables!

1. Ce sont des carrés magiques d'ordre 10.
2. Ils sont tous différents.
3. Ils sont tous presque normaux.
4. Tous ces carrés sont formés d'entiers de quatre chiffres; nous conviendrons, par exemple, que l'entier 497 doit s'écrire 0497 et que l'entier 17 doit s'écrire 0017. Dans chaque carré, nous trouvons dix tels entiers (un par rangée).
5. Ces vingt-quatre carrés magiques ont tous la même somme magique soit 49 995.
6. Dans tous ces carrés, sur chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, on retrouve quatre fois chaque chiffre de 0 à 9.
7. Si nous choisissons deux carrés quelconques F et G, alors deux nombres qui occupent la même position dans F et dans G, possèdent exactement les mêmes quatre chiffres.
8. Si nous choisissons deux carrés quelconques F et G, alors on peut toujours trouver une permutation de quatre chiffres qui appliquée aux cent entiers de F donnera G.
9. On peut partager ces vingt-quatre carrés magiques en trois groupes disjoints de huit carrés. Dans le **groupe 1**, les huit carrés ont la propriété suivante : si deux entiers sont symétriques par rapport au centre du carré alors, si l'un s'écrit abcd, l'autre s'écrit cdab. Dans le **groupe 2**, les huit carrés ont la propriété suivante : si deux entiers sont symétriques par rapport au centre du carré, alors, si l'un s'écrit abcd, l'autre s'écrit dcba. Le centre du carré joue donc le rôle de parfait miroir. Enfin dans le **groupe 3**, les huit carrés ont la propriété suivante : si deux entiers sont symétriques par rapport au centre du carré, alors, si l'un s'écrit abcd, l'autre s'écrit badc.
10. Dans chaque groupe, on trouve deux carrés magiques primitifs H et K, chacun étant accompagné de trois équivalents soit celui obtenu par une rotation de 90° de H, une rotation de 180° de H et une rotation de 270° de H. Il en est de même pour K.

Quels sont donc ces vingt-quatre carrés magiques? Comment pouvons-nous les fabriquer?

D'abord, nous avons construit un carré d'ordre 10 à l'aide de dix variables différentes, dans lequel toutes les variables apparaissent une et une seule fois dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale. Ce carré, appelé **carré latin diagonal**, est donc magique. Appelons A ce carré. Nous avons obtenu B par une rotation de A de 90°, M par une rotation de A de 180° et P par une rotation de A de 270°. Puis, nous avons construit le carré :

$$1000A+100B+10M+P$$

lequel est magique. Nous avons observé que ce carré magique d'ordre 10 renferme cent entiers positifs différents. C'est le premier carré du groupe 1, page 5.

Voici A : pour le trouver, nous avons d'abord rempli les deux grandes diagonales puis nous avons complété le carré ligne par ligne avec une grande prudence. Nous avons obtenu $B, M\ et\ P$ avec les rotations de A de 90°,180° et 270° :

$$A = \begin{matrix} a & f & g & h & b & c & m & p & k & n \\ c & b & h & p & f & a & n & g & m & k \\ f & n & c & m & p & b & a & k & g & h \\ g & m & k & f & c & n & h & a & p & b \\ h & k & m & n & g & p & b & c & a & f \\ k & g & n & b & a & h & p & f & c & m \\ m & a & p & g & n & f & k & b & h & c \\ n & p & f & k & h & g & c & m & b & a \\ p & c & b & a & k & m & f & h & n & g \\ b & h & a & c & m & k & g & n & f & p \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} n & k & h & b & f & m & c & a & g & p \\ k & m & g & p & a & c & h & b & n & f \\ p & g & k & a & c & f & b & m & h & n \\ m & n & a & h & b & p & k & c & f & g \\ c & a & b & n & p & h & f & g & m & k \\ b & f & p & c & g & a & n & h & k & m \\ h & p & m & f & n & b & g & k & a & c \\ g & h & c & k & m & n & p & f & b & a \\ f & b & n & m & k & g & a & p & c & h \\ a & c & f & g & h & k & m & n & p & b \end{matrix}$$

$$M = \begin{matrix} p & f & n & g & k & m & c & a & h & b \\ g & n & h & f & m & k & a & b & c & p \\ a & b & m & c & g & h & k & f & p & n \\ c & h & b & k & f & n & g & p & a & m \\ m & c & f & p & h & a & b & n & g & k \\ f & a & c & b & p & g & n & m & k & h \\ b & p & a & h & n & c & f & k & m & g \\ h & g & k & a & b & p & m & c & n & f \\ k & m & g & n & a & f & p & h & b & c \\ n & k & p & m & c & b & h & g & f & a \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} b & p & n & m & k & h & g & f & c & a \\ h & c & p & a & g & k & m & n & b & f \\ a & b & f & p & n & m & k & c & h & g \\ c & a & k & g & b & n & f & m & p & h \\ m & k & h & n & a & g & c & p & f & b \\ k & m & g & f & h & p & n & b & a & c \\ g & f & c & k & p & b & h & a & n & m \\ n & h & m & b & f & c & a & k & g & p \\ f & n & b & h & c & a & p & g & m & k \\ p & g & a & c & m & f & b & h & k & n \end{matrix}$$

En posant : $a = 0; f = 1; g = 2; h = 3; b = 4; c = 5; m = 6; p = 7; k = 8; n = 9$, nous obtenons :

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 0 & 9 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 9 & 5 & 6 & 7 & 4 & 0 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 1 & 5 & 9 & 3 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 9 & 2 & 7 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 9 & 4 & 0 & 3 & 7 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 2 & 9 & 1 & 8 & 4 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 1 & 8 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 0 & 8 & 6 & 1 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 6 & 8 & 2 & 9 & 1 & 7 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 0 & 2 & 7 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 0 & 5 & 3 & 4 & 9 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 0 & 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 9 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 9 & 7 & 3 & 1 & 2 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 5 & 2 & 0 & 9 & 3 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 6 & 9 & 7 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 6 & 8 & 2 & 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 9 & 7 & 4 \end{matrix}$$

$$M = \begin{matrix} 7 & 1 & 9 & 2 & 8 & 6 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 1 & 6 & 8 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 8 & 1 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 1 & 9 & 2 & 7 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 7 & 3 & 0 & 4 & 9 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 7 & 2 & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 3 & 9 & 5 & 1 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 0 & 4 & 7 & 6 & 5 & 9 & 1 \\ 8 & 6 & 2 & 9 & 0 & 1 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$P = \begin{matrix} 4 & 7 & 9 & 6 & 8 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 8 & 6 & 9 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 7 & 9 & 6 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 2 & 4 & 9 & 1 & 6 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 9 & 0 & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 2 & 1 & 3 & 7 & 9 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 8 & 7 & 4 & 3 & 0 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 0 & 8 & 2 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 5 & 0 & 7 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 0 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Suivent les vingt-quatre carrés en trois groupes de huit, voir la propriété 9 ci-haut :

GROUPE 1 :

$ab\ cd \rightarrow cd\ ab$

1000A + 100B + 10M + P
1000A + 100P + 10M + B
1000B + 100A + 10P + M
1000B + 100M + 10P + A
1000M + 100B + 10A + P
1000M + 100P + 10A + B
1000P + 100A + 10B + M
1000P + 100M + 10B + A

GROUPE 2 :

$ab\ cd \rightarrow dc\ ba$

1000A + 100B + 10P + M
1000A + 100P + 10B + M
1000B + 100A + 10M + P
1000B + 100M + 10A + P
1000M + 100B + 10P + A
1000M + 100P + 10B + A
1000P + 100A + 10M + B
1000P + 100M + 10A + B

GROUPE 3 :

$ab\ cd \rightarrow ba\ dc$

1000A + 100M + 10B + P
1000A + 100M + 10P + B
1000B + 100P + 10A + M
1000B + 100P + 10M + A
1000M + 100A + 10B + P
1000M + 100A + 10P + B
1000P + 100B + 10A + M
1000P + 100B + 10M + A

GROUPE 1

974	1817	2399	3426	4188	5663	6552	7001	8235	9740
5823	4695	3237	7710	1062	588	9306	2449	6954	8171
1700	9244	5861	6057	7529	4136	488	8615	2373	3992
2655	6930	8048	1382	5414	9799	3821	576	7107	4263
3566	8058	6413	9979	2730	7302	4145	5297	621	1884
8418	2106	9752	4541	273	3027	7999	1364	5880	6635
6342	771	7605	2138	9997	1454	8213	4880	3069	5526
9239	7323	1586	8804	3641	2975	5760	6158	4492	17
7181	5469	4924	693	8805	6210	1077	3732	9546	2358
4097	3582	170	5265	6356	8841	2634	9923	1718	7409

479	1718	2993	3624	4881	5366	6255	7100	8532	9047
5328	4596	3732	7017	1260	885	9603	2944	6459	8171
1007	9442	5168	6750	7925	4631	884	8516	2373	3299
2556	6039	8840	1283	5414	9997	3128	675	7701	4362
3665	8850	6314	9979	2037	7203	4541	5792	126	1488
8814	2601	9257	4145	372	3720	7999	1463	5088	6536
6243	177	7506	2831	9799	1454	8312	4088	3960	5625
9932	7323	1685	8408	3146	2579	5067	6851	4294	710
7181	5964	4429	396	8508	6012	1770	3237	9645	2853
4790	3285	71	5562	6653	8148	2436	9329	1817	7904

9047	8171	3299	4362	1488	6536	5625	710	2853	7904
8532	6459	2373	7701	126	5088	3960	4294	9645	1817
7100	2944	8516	675	5792	1463	4088	6851	3237	9329
6255	9603	884	3128	4541	7999	8312	5067	1770	2436
5366	885	4631	9997	7203	3720	1454	2579	6012	8148
4881	1260	7925	5414	2037	372	9799	3146	8508	6653
3624	7017	6750	1283	9979	4145	2831	8408	396	5562
2993	3732	5168	8840	6314	9257	7506	1685	4429	71
1718	4596	9442	6039	8850	2601	177	7323	5964	3285
479	5328	1007	2556	3665	8814	6243	9932	7181	4790

9740	8171	3992	4263	1884	6635	5526	17	2358	7409
8235	6954	2373	7107	621	5880	3069	4492	9546	1718
7001	2449	8615	576	5297	1364	4880	6158	3732	9923
6552	9306	488	3821	4145	7999	8213	5760	1077	2634
5663	588	4136	9799	7302	3027	1454	2975	6210	8841
4188	1062	7529	5414	2730	273	9997	3641	8805	6356
3426	7710	6057	1382	9979	4541	2138	8804	693	5265
2399	3237	5861	8048	6413	9752	7605	1586	4924	170
1817	4695	9244	6930	8058	2106	771	7323	5469	3582
974	5823	1700	2655	3566	8418	6342	9239	7181	4097

7904	1817	9329	2436	8148	6653	5562	71	3285	4790
2853	9645	3237	1770	6012	8508	396	4429	5964	7181
710	4294	6851	5067	2579	3146	8408	1685	7323	9932
5625	3960	4088	8312	1454	9799	2831	7506	177	6243
6536	5088	1463	7999	3720	372	4145	9257	2601	8814
1488	126	5792	4541	7203	2037	9979	6314	8850	3665
4362	7701	675	3128	9997	5414	1283	8840	6039	2556
3299	2373	8516	884	4631	7925	6750	5168	9442	1007
8171	6459	2944	9603	885	1260	7017	3732	4596	5328
9047	8532	7100	6255	5366	4881	3624	2993	1718	479

7409	1718	9923	2634	8841	6356	5265	170	3582	4097
2358	9546	3732	1077	6210	8805	693	4924	5469	7181
17	4492	6158	5760	2975	3641	8804	1586	7323	9239
5526	3069	4880	8213	1454	9997	2138	7605	771	6342
6635	5880	1364	7999	3027	273	4541	9752	2106	8418
1884	621	5297	4145	7302	2730	9979	6413	8058	3566
4263	7107	576	3821	9799	5414	1382	8048	6930	2655
3992	2373	8615	488	4136	7529	6057	5861	9244	1700
8171	6954	2449	9306	588	1062	7710	3237	4695	5823
9740	8235	7001	6552	5663	4188	3426	2399	1817	974

4097	7181	9239	6342	8418	3566	2655	1700	5823	974
3582	5469	7323	771	2106	8058	6930	9244	4695	1817
170	4924	1586	7605	9752	6413	8048	5861	3237	2399
5265	693	8804	2138	4541	9979	1382	6057	7710	3426
6356	8805	3641	9997	273	2730	5414	7529	1062	4188
8841	6210	2975	1454	3027	7302	9799	4136	588	5663
2634	1077	5760	8213	7999	4145	3821	488	9306	6552
9923	3732	6158	4880	1364	5297	576	8615	2449	7001
1718	9546	4492	3069	5880	621	7107	2373	6954	8235
7409	2358	17	5526	6635	1884	4263	3992	8171	9740

4790	7181	9932	6243	8814	3665	2556	1007	5328	479
3285	5964	7323	177	2601	8850	6039	9442	4596	1718
71	4429	1685	7506	9257	6314	8840	5168	3732	2993
5562	396	8408	2831	4145	9979	1283	6750	7017	3624
6653	8508	3146	9799	372	2037	5414	7925	1260	4881
8148	6012	2579	1454	3720	7203	9997	4631	885	5366
2436	1770	5067	8312	7999	4541	3128	884	9603	6255
9329	3237	6851	4088	1463	5792	675	8516	2944	7100
1817	9645	4294	3960	5088	126	7701	2373	6459	8532
7904	2853	710	5625	6536	1488	4362	3299	8171	9047

GROUPE 2

947	1871	2399	3462	4188	5636	6525	7010	8253	9704
5832	4659	3273	7701	1026	588	9360	2494	6945	8117
1700	9244	5816	6075	7592	4163	488	8651	2337	3929
2655	6903	8084	1328	5441	9799	3812	567	7170	4236
3566	8085	6431	9997	2703	7320	4154	5279	612	1848
8481	2160	9725	4514	237	3072	7999	1346	5808	6653
6324	717	7650	2183	9979	1445	8231	4808	3096	5562
9293	7332	1568	8840	3614	2957	5706	6185	4429	71
7118	5496	4942	639	8850	6201	1077	3723	9564	2385
4079	3528	107	5256	6365	8814	2643	9932	1781	7490

497	1781	2939	3642	4818	5366	6255	7100	8523	9074
5382	4569	3723	7071	1206	858	9630	2944	6495	8117
1070	9424	5186	6705	7952	4613	848	8561	2337	3299
2565	6093	8804	1238	5441	9979	3182	657	7710	4326
3656	8805	6341	9997	2073	7230	4514	5729	162	1488
8841	2610	9275	4154	327	3702	7999	1436	5088	6563
6234	177	7560	2813	9799	1445	8321	4088	3906	5652
9923	7332	1658	8480	3164	2597	5076	6815	4249	701
7118	5946	4492	369	8580	6021	1707	3273	9654	2835
4709	3258	17	5526	6635	8184	2463	9392	1871	7940

9074	8117	3299	4326	1488	6563	5652	701	2835	7940
8523	6495	2337	7710	162	5088	3906	4249	9654	1871
7100	2944	8561	657	5729	1436	4088	6815	3273	9392
6255	9630	848	3182	4514	7999	8321	5076	1707	2463
5366	858	4613	9979	7230	3702	1445	2597	6021	8184
4818	1206	7952	5441	2073	327	9799	3164	8580	6635
3642	7071	6705	1238	9997	4154	2813	8480	369	5526
2939	3723	5186	8804	6341	9275	7560	1658	4492	17
1781	4569	9424	6093	8805	2610	177	7332	5946	3258
497	5382	1070	2565	3656	8841	6234	9923	7118	4709

9704	8117	3929	4236	1848	6653	5562	71	2385	7490
8253	6945	2337	7170	612	5808	3096	4429	9564	1781
7010	2494	8651	567	5279	1346	4808	6185	3723	9932
6525	9360	488	3812	4154	7999	8231	5706	1077	2643
5636	588	4163	9799	7320	3072	1445	2957	6201	8814
4188	1026	7592	5441	2703	237	9979	3614	8850	6365
3462	7701	6075	1328	9997	4514	2183	8840	639	5256
2399	3273	5816	8084	6431	9725	7650	1568	4942	107
1871	4659	9244	6903	8085	2160	717	7332	5496	3528
947	5832	1700	2655	3566	8481	6324	9293	7118	4079

7940	1871	9392	2463	8184	6635	5526	17	3258	4709
2835	9654	3273	1707	6021	8580	369	4492	5946	7118
701	4249	6815	5076	2597	3164	8480	1658	7332	9923
5652	3906	4088	8321	1445	9799	2813	7560	177	6234
6563	5088	1436	7999	3702	327	4154	9275	2610	8841
1488	162	5729	4514	7230	2073	9997	6341	8805	3656
4326	7710	657	3182	9979	5441	1238	8804	6093	2565
3299	2337	8561	848	4613	7952	6705	5186	9424	1070
8117	6495	2944	9630	858	1206	7071	3723	4569	5382
9074	8523	7100	6255	5366	4818	3642	2939	1781	497

7490	1781	9932	2643	8814	6365	5256	107	3528	4079
2385	9564	3723	1077	6201	8850	639	4942	5496	7118
71	4429	6185	5706	2957	3614	8840	1568	7332	9293
5562	3096	4808	8231	1445	9979	2183	7650	717	6324
6653	5808	1346	7999	3072	237	4514	9725	2160	8481
1848	612	5279	4154	7320	2703	9997	6431	8085	3566
4236	7170	567	3812	9799	5441	1328	8084	6903	2655
3929	2337	8651	488	4163	7592	6075	5816	9244	1700
8117	6945	2494	9360	588	1026	7701	3273	4659	5832
9704	8253	7010	6525	5636	4188	3462	2399	1871	947

4079	7118	9293	6324	8481	3566	2655	1700	5832	947
3528	5496	7332	717	2160	8085	6903	9244	4659	1871
107	4942	1568	7650	9725	6431	8084	5816	3273	2399
5256	639	8840	2183	4514	9997	1328	6075	7701	3462
6365	8850	3614	9979	237	2703	5441	7592	1026	4188
8814	6201	2957	1445	3072	7320	9799	4163	588	5636
2643	1077	5706	8231	7999	4154	3812	488	9360	6525
9932	3723	6185	4808	1346	5279	567	8651	2494	7010
1781	9564	4429	3096	5808	612	7170	2337	6945	8253
7490	2385	71	5562	6653	1848	4236	3929	8117	9704

4709	7118	9923	6234	8841	3656	2565	1070	5382	497
3258	5946	7332	177	2610	8805	6093	9424	4569	1781
17	4492	1658	7560	9275	6341	8804	5186	3723	2939
5526	369	8480	2813	4154	9997	1238	6705	7071	3642
6635	8580	3164	9799	327	2073	5441	7952	1206	4818
8184	6021	2597	1445	3702	7230	9979	4613	858	5366
2463	1707	5076	8321	7999	4514	3182	848	9630	6255
9392	3273	6815	4088	1436	5729	657	8561	2944	7100
1871	9654	4249	3906	5088	162	7710	2337	6495	8523
7940	2835	701	5652	6563	1488	4326	3299	8117	9074

GROUPE 3

794	1187	2939	3246	4818	5663	6552	7001	8325	9470
5283	4965	3327	7170	1602	858	9036	2449	6594	8711
1070	9424	5681	6507	7259	4316	848	8165	2733	3992
2565	6390	8408	1832	5144	9979	3281	756	7017	4623
3656	8508	6143	9799	2370	7032	4415	5927	261	1884
8148	2016	9572	4451	723	3207	7999	1634	5880	6365
6432	771	7065	2318	9997	1544	8123	4880	3609	5256
9329	7233	1856	8084	3461	2795	5670	6518	4942	107
7811	5649	4294	963	8085	6120	1707	3372	9456	2538
4907	3852	710	5625	6536	8481	2364	9293	1178	7049

749	1178	2993	3264	4881	5636	6525	7010	8352	9407
5238	4956	3372	7107	1620	885	9063	2494	6549	8711
1007	9442	5618	6570	7295	4361	884	8156	2733	3929
2556	6309	8480	1823	5144	9997	3218	765	7071	4632
3665	8580	6134	9799	2307	7023	4451	5972	216	1848
8184	2061	9527	4415	732	3270	7999	1643	5808	6356
6423	717	7056	2381	9979	1544	8132	4808	3690	5265
9392	7233	1865	8048	3416	2759	5607	6581	4924	170
7811	5694	4249	936	8058	6102	1770	3327	9465	2583
4970	3825	701	5652	6563	8418	2346	9239	1187	7094

9407	8711	3929	4632	1848	6356	5265	170	2583	7094
8352	6549	2733	7071	216	5808	3690	4924	9465	1187
7010	2494	8156	765	5972	1643	4808	6581	3327	9239
6525	9063	884	3218	4451	7999	8132	5607	1770	2346
5636	885	4361	9997	7023	3270	1544	2759	6102	8418
4881	1620	7295	5144	2307	732	9979	3416	8058	6563
3264	7107	6570	1823	9799	4415	2381	8048	936	5652
2993	3372	5618	8480	6134	9527	7056	1865	4249	701
1178	4956	9442	6309	8580	2061	717	7233	5694	3825
749	5238	1007	2556	3665	8184	6423	9392	7811	4970

9470	8711	3992	4623	1884	6365	5256	107	2538	7049
8325	6594	2733	7017	261	5880	3609	4942	9456	1178
7001	2449	8165	756	5927	1634	4880	6518	3372	9293
6552	9036	848	3281	4415	7999	8123	5670	1707	2364
5663	858	4316	9979	7032	3207	1544	2795	6120	8481
4818	1602	7259	5144	2370	723	9997	3461	8085	6536
3246	7170	6507	1832	9799	4451	2318	8084	963	5625
2939	3327	5681	8408	6143	9572	7065	1856	4294	710
1187	4965	9424	6390	8508	2016	771	7233	5649	3852
794	5283	1070	2565	3656	8148	6432	9329	7811	4907

7094	1187	9239	2346	8418	6563	5652	701	3825	4970
2583	9465	3327	1770	6102	8058	936	4249	5694	7811
170	4924	6581	5607	2759	3416	8048	1865	7233	9392
5265	3690	4808	8132	1544	9979	2381	7056	717	6423
6356	5808	1643	7999	3270	732	4415	9527	2061	8184
1848	216	5972	4451	7023	2307	9799	6134	8580	3665
4632	7071	765	3218	9997	5144	1823	8480	6309	2556
3929	2733	8156	884	4361	7295	6570	5618	9442	1007
8711	6549	2494	9063	885	1620	7107	3372	4956	5238
9407	8352	7010	6525	5636	4881	3264	2993	1178	749

7049	1178	9293	2364	8481	6536	5625	710	3852	4907
2538	9456	3372	1707	6120	8085	963	4294	5649	7811
107	4942	6518	5670	2795	3461	8084	1856	7233	9329
5256	3609	4880	8123	1544	9997	2318	7065	771	6432
6365	5880	1634	7999	3207	723	4451	9572	2016	8148
1884	261	5927	4415	7032	2370	9799	6143	8508	3656
4623	7017	756	3281	9979	5144	1832	8408	6390	2565
3992	2733	8165	848	4316	7259	6507	5681	9424	1070
8711	6594	2449	9036	858	1602	7170	3327	4965	5283
9470	8325	7001	6552	5663	4818	3246	2939	1187	794

4907	7811	9329	6432	8148	3656	2565	1070	5283	794
3852	5649	7233	771	2016	8508	6390	9424	4965	1187
710	4294	1856	7065	9572	6143	8408	5681	3327	2939
5625	963	8084	2318	4451	9799	1832	6507	7170	3246
6536	8085	3461	9997	723	2370	5144	7259	1602	4818
8481	6120	2795	1544	3207	7032	9979	4316	858	5663
2364	1707	5670	8123	7999	4415	3281	848	9036	6552
9293	3372	6518	4880	1634	5927	756	8165	2449	7001
1178	9456	4942	3609	5880	261	7017	2733	6594	8325
7049	2538	107	5256	6365	1884	4623	3992	8711	9470

4970	7811	9392	6423	8184	3665	2556	1007	5238	749
3825	5694	7233	717	2061	8580	6309	9442	4956	1178
701	4249	1865	7056	9527	6134	8480	5618	3372	2993
5652	936	8048	2381	4415	9799	1823	6570	7107	3264
6563	8058	3416	9979	732	2307	5144	7295	1620	4881
8418	6102	2759	1544	3270	7023	9997	4361	885	5636
2346	1770	5607	8132	7999	4451	3218	884	9063	6525
9239	3327	6581	4808	1643	5972	765	8156	2494	7010
1187	9465	4924	3690	5808	216	7071	2733	6549	8352
7094	2583	170	5265	6356	1848	4632	3929	8711	9407

Annexe 34 : Projets de recherches ; Divers

Voici quelques projets de recherches :

1) Les conjectures de l'annexe 2.
2) Voir les pages 5 et 8 de l'annexe 24.
3) Voir la page 24 du chapitre 8, Partie 2.
4) Voir le chapitre 7, page 27, problème 25, la conjecture.
5) Dans l'annexe 5, démontrez la conjecture de la page 15.
6) Dans l'annexe 9, page 4, la conjecture.
7) Trouvez la structure générale des hyper-magiques d'ordre 14 puis voir le problème 25 de 7.4 et la conjecture qui s'y trouve.
8) Les 10 propriétés, page 1 de l'annexe 33.
9) Pouvons-nous affirmer qu'il existe un carré super-premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 5$?
10) Dans l'annexe 29, les problèmes 14, 15 et 16. Que se passe-t-il si l'ordre du carré est pair? M peut-il générer une infinité de carrés super-premiers? Etc…
11) Dans la Partie 2, chapitre 15, page 102, les problèmes 43 et 44.
12) Chapitre 10, page 8, la question de l'encadré.
13) Chapitre 10, page 28, problème 17.
14) Annexe 18, page 13, «La grande question».
15) Annexe 18, page 42, l'encadré.
16) Annexe 18, les questions de la page 25.
17) Les diverses questions tout au long des chapitres et annexes.
18) Soit M, un carré d'ordre $n \geq 4$. Un **recouvrement de M** est un groupe de n figures complètes disjointes qui recouvrent toutes les cases de M. Le carré M, magique ou non, qui possède un recouvrement est dit **compact**.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

1	6	2	3	5	4
2	4	5	6	1	3
3	1	6	5	4	2
4	5	3	2	6	1
5	2	1	4	3	6
6	3	4	1	2	5

1	2	3	4	5	6	7
6	3	5	2	7	4	1
5	1	6	7	2	3	4
4	7	2	5	3	1	6
7	5	1	6	4	2	3
2	6	4	3	1	7	5
3	4	7	1	6	5	2

1	2	3	4	5	6	7	8
8	3	5	2	4	7	1	6
7	1	2	3	6	4	8	5
6	4	8	7	2	3	5	1
5	7	1	6	8	2	4	3
4	6	7	8	1	5	3	2
2	5	4	1	3	8	6	7
3	8	6	5	7	1	2	4

Les cinq carrés précédents montrent que tous les carrés d'ordres 4, 5, 6, 7 et 8 sont compacts. Dans ces cinq carrés, chaque couleur illustre une figure complète!!!

Tous les carrés d'ordres $n \geq 9$ sont-ils compacts?

À un carré compact correspond un carré latin diagonal et réciproquement.

Si nous démontrons qu'il existe un carré compact pour tous les ordres $n \geq 4$, alors nous aurons démontré qu'il existe un carré latin diagonal pour tous les ordres $n \geq 4$.

Théorème :

Un carré d'ordre 3 n'est jamais compact.

Preuve :

Nous avons déjà démontré qu'un carré d'ordre 3 ne possède pas de figure complète. (Voir Partie 2, chapitre 4, page 32, problème 4). Il en résulte que celui-ci ne peut pas être compact car s'il l'était, il possèderait 3 figures complètes disjointes qui le recouvrent.

19) Avons-nous eu de la chance?

Nous avons construit un carré premier à partir d'un carré normal d'ordre 4, lequel est un Dürer. Pour ce faire, nous avons utilisé le recouvrement du problème 18).
Voici d'abord ce Dürer normal M ainsi que 3M, un autre Dürer :

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

M

12	45	42	3
15	30	33	24
27	18	21	36
48	9	6	39

3M

Voyons le recouvrement de 3M; dans chaque figure complète, les nombres sont choisis dans chaque rangée, de haut en bas :

Figure complète 1 : 12, 24,18, 6
Figure complète 2 : 45, 33, 27, 39
Figure complète 3 : 42, 30, 36, 48
Figure complète 4 : 3, 15, 21, 9

Nous allons maintenant chercher la valeur de m afin que les 4 nombres suivants soient premiers : 12 + 2m + 1 ; 24 + 2m + 1; 18 + 2m + 1 ; 6 + 2m + 1. Avec MATHEMATICA, nous utiliserons :

```
Count[Table[PrimeQ[ {12 + 2m + 1 , 24 + 2m + 1 , 18 + 2m + 1, 6 + 2m + 1}], {m,1,500}],
{True,True,True,True}]   (*)
```

Nous avons trouvé m = 27 pour obtenir les 4 nombres premiers : 67, 79, 73, 61 qui seront dans la figure complète 1 de 3M. La somme magique passe donc de 3x34 = 102 à 102 + 55.

De la même façon, avec la figure complète 3, nous avons trouvé m = 110 pour obtenir les nombres premiers 263, 251, 257, 269.

Quant aux figures complètes 2 et 4, nous avons remplacé dans (*) 2m + 1 par 2m. Nous avons trouvé m = 7 et m = 1. Finalement, le carré premier obtenu est :

67	59	263	5
17	251	47	79
41	73	23	257
269	11	61	53

Carré-1

Ce carré premier est un Dürer presque normal de somme magique S = 394.

De façon semblable, nous avons trouvé le carré premier suivant, un Dürer presque normal de somme 400. Notez que (29 – 5)/4 = 400 – 394. Dans l'intersection de Carré-1 avec Carré-2, les seuls nombres qui n'y sont pas sont 5 et 29.

17	79	53	251
263	41	67	29
61	23	269	47
59	257	11	73

Carré-2

Les carré-1 et carré-2 ont en commun 15 nombres premiers.

Pouvez-vous, en utilisant ce procédé, trouver un autre carré premier d'ordre 4? Un carré premier d'ordre 5?

Pouvez-vous généraliser pour tous les ordres $n \geq 4$?

Une grande difficulté est la suivante :

Le travail fait plus haut pour trouver un carré premier à l'aide d'un recouvrement d'un carré d'ordre n n'est pas toujours aussi simple que ce que nous venons de voir.

Ajouter 2m à une liste de n entiers afin d'obtenir n nombres premiers est parfois très difficile. Il arrive qu'avec 1 500 000 000 de valeurs attribuées à m, aucune ne conduise à n nombres premiers.

Ajoutez 2m aux entiers (*) 51, 63, 57, 77 puis aux entiers (**) 91, 133, 35, 69.

Avec (*) et m de 1 à 5 000 000, nous trouvons 2559 valeurs de m qui conduisent à 4 nombres premiers.

Avec (**) et m de 1 à 50 000 000, nous trouvons aucune valeur de m qui donne 4 nombres premiers.

Avec les entiers 35, 63, 57, 59 et m de 1 à 5 000 000, nous trouvons 1345 valeurs de m qui conduisent à 4 nombres premiers.

20) Un recouvrement idéal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 & 8 & 19 \\ 23 & 9 & 16 & 5 & 12 \\ 20 & 2 & 13 & 24 & 6 \\ 14 & 21 & 10 & 17 & 3 \\ 7 & 18 & 4 & 11 & 25 \end{pmatrix}$$

Ce carré magique normal est d'ordre 5 donc compact. Que trouvons-nous dans les figures complètes du recouvrement du carré d'ordre 5 du problème 18 ci-haut?

Figure complète 1 : 1, 2, 3, 4, 5
Figure complète 2 : 11, 12, 13, 14, 15
Figure complète 3 : 21, 22, 23, 24, 25
Figure complète 4 : 6, 7, 8, 9, 10
Figure complète 5 : 16, 17, 18, 19, 20

Nous appelons «**recouvrement idéal**» d'un carré magique normal, un tel recouvrement. Celui-ci nous permet de dire que le carré est un **carré normal idéal** puisqu'il existe une figure complète qui renferme les 5 plus grands entiers du carré. Un carré magique normal est dit **compact idéal** s'il possède un recouvrement idéal.

Le carré magique normal suivant possède aussi un recouvrement idéal. **Montrez-le.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 10 \\ 14 & 11 & 4 & 5 \\ 12 & 13 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

C'est un carré normal idéal et ce même carré nous permet de trouver un carré de somme 33 qui renferme 16 entiers différents ≥ 0. **Montrez-le**. (Voir Sagrada Familia, Barcelone, Espagne).

Utilisez le recouvrement du problème 18 ci-haut pour les 25 carrés normaux d'ordre 5 du chapitre 6, pages 2 et 3. **Qu'observez-vous** dans les 5 figures complètes de chaque carré?

21) Pourquoi s'intéresser aux recouvrements et aux figures complètes?

1) Cela est déjà très intéressant en soi!!! De plus, un recouvrement nous donne n figures complètes disjointes dans notre carré.
2) Un recouvrement est équivalent à un carré latin diagonal.
3) Un recouvrement permet dans certains cas, à partir d'un carré normal, de construire un carré **premier** presque normal.

Nous avons pris le Dürer normal M suivant et avons construit 6 M + 1. Nous avons utilisé un recouvrement de 6 M + 1 pour rendre premiers tous les entiers de chaque figure complète.

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

M

Ainsi, nous avons obtenu le carré premier qui suit :

59	103	421	467
491	397	79	83
127	131	443	349
373	419	107	151

Ce carré premier est un Dürer presque normal de somme $S = 1050$.

Pourquoi avons-nous construit 6 M + 1?

4) Il a permis de construire l'intrus-1235 et l'intrus-95-275.

929	383	601	439	181	1 217	419
1 235	811	139	347	257	397	983
229	911	1 229	431	467	631	271
211	269	593	157	859	1 031	1 049
443	151	887	1 013	373	449	853
503	1 223	331	673	881	317	241
619	421	389	1 109	1 151	127	353

L'intrus-1235

Pour construire ce carré, nous avons pris un carré magique normal M d'ordre 7 puis nous avons fait 6 M + 1. À l'aide d'un recouvrement de 6 M + 1, nous avons remplacé les nombres de 6 figures complètes par des nombres premiers. Quant à l'autre, nous avons réussi à obtenir 6 nombres premiers sur 7. La raison était que les nombres de cette autre figure complète étaient :

(*) 259 ; 277 ; 271 ; 91 ; 55 ; 265 ; 193

Or, en ajoutant 2m aux 7 entiers de (*), il est impossible d'obtenir 7 nombres premiers. Si m < 0, alors MATHEMATICA donne des négatifs comme nombres premiers (-61 par exemple), ce que nous n'acceptons pas puisque nous voulons obtenir un carré presque normal.

Vous trouverez le carré M dans la Partie 2, chapitre 14, page 96.

L'intrus-1235 est un carré magique presque normal d'ordre 7, de somme $S = 4\,169$. Il contient **48 nombres premiers** et **un seul nombre composé** soit 1235. Le plus petit nombre du carré est 127 et le plus grand 1235.

929	47	601	439	181	263	15 889
281	811	139	11	15 727	397	983
229	911	275	15 901	131	631	271
211	15 739	257	157	859	1 031	95
15 913	151	887	59	373	113	853
167	269	331	673	881	15 787	241
619	421	15 859	1 109	197	127	17

L'intrus-95-275

Le carré précédent est un carré magique presque normal d'ordre 7 et de somme magique S = 18 349. Il renferme 47 nombres premiers et 2 multiples de 5, nos deux intrus!!!

Retrouvez l'intrus-1235 ou un tout autre intrus-? à partir de M.

Pourriez-vous trouver un carré premier d'ordre 7 à partir d'un autre carré M'?

Pourquoi les 7 entiers de (*) ne peuvent pas devenir tous premiers?

5) Une figure complète permet de trouver une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives.

6) Elle a permis d'enlever les répétitions dans le carré magique de la Sagrada Familia, Barcelone, Espagne. Sans répétition, la somme demeure 33.

7) Elle permet de transformer un carré premier presque normal en un carré super-premier presque normal.

8) Elle permet de réduire, si possible, le produit d'un carré multiplicatif.

Donnez des exemples.

Pouvons-nous toujours réaliser 7) ?

9) Pourrions-nous construire un carré magique d'ordre n tel que celui-ci possède n figures magiques disjointes qui le recouvrent? Les n rangées ainsi que les n colonnes sont exclues.
10) Une condition nécessaire :

Considérons une suite de n entiers impairs tous > 3. Dans cette suite, nous trouvons 5 entiers qui se terminent respectivement par 1, 3, 5, 7 et 9.

Si nous ajoutons 2m (m entier > 0) aux n entiers de la suite, alors nous allons toujours trouver un entier > 5 qui se terminera par 5 donc qui ne sera pas un nombre premier.

Si nous voulons n nombres premiers, alors il sera **nécessaire,** dans les n entiers impairs, de ne pas avoir 5 entiers qui se terminent respectivement par 1, 3, 5, 7 et 9.

Si la condition nécessaire est respectée, alors il n'est pas certain d'obtenir n nombres premiers. Celle-ci n'est pas suffisante.

Les n entiers pourront peut-être être premiers si n < 5.

Voyons le tableau suivant dans lequel m est un entier > 0. Dans les cases grises, nous trouvons le chiffre des unités de 2m.

Dans les cases vertes, nous trouvons le chiffre des unités des n entiers impairs > 3.

2m	1	3	5	7	9
0	1	3	5	7	9
2	3	5	7	9	1
4	5	7	9	1	3
6	7	9	1	3	5
8	9	1	3	5	7

Si un entier w se termine par 3 et 2m se termine par 8, alors, à l'intersection de la rangée 8 avec la colonne 3, nous trouvons un entier w + 2m = entier qui se termine par 1 donc qui peut être premier.

Si un entier w se termine par 9 et 2m se termine par 6, alors, à l'intersection de la rangée 6 avec la colonne 9, nous trouvons un entier w + 2m = entier qui se termine par 5 donc qui n'est pas un nombre premier.

Rappelons que tout nombre premier impair différent de 5 se termine par 1, 3, 7 ou 9. De plus, tout entier > 5 qui se termine par 5 n'est jamais un nombre premier.

Si aucun des n entiers impairs > 3 ne se termine par un des chiffres choisi parmi 1, 3, 5, 7, 9, alors en ajoutant 2m aux n entiers impairs > 3, il se peut que ceux-ci deviennent tous premiers. Par exemple, aucun entier ne se termine par 7. Donc avec 2m qui se termine par 8, il sera possible d'obtenir n nombres premiers. Mais cela n'est pas certain!!!

Plus n est grand, plus les chances sont grandes de trouver au moins cinq entiers qui se terminent respectivement par 1, 3, 5, 7, 9.
Dans ce cas, nous n'arriverons jamais à avoir n nombres premiers.

22) Les fréquences.

Considérons un carré magique normal d'ordre $n \geq 4$ qui possède une figure complète idéale F. Ajoutons le nombre k dans toutes les cases de F et appelons G, la structure générale ainsi obtenue. Puis donnons à k les valeurs entières de 0 à l'infini. Pour k = 0, le carré est normal de fréquence f(S).

a) Observez la décroissance stricte de la fréquence du carré magique lorsque k augmente et ce, pour $n = 4, 5, 6 et 7.$
b) La fréquence deviendra constante et égale à f(G) pour k = u.
c) Juste avant d'atteindre f(G), la fréquence du carré prendra deux fois la valeur 1 + f(G). Plus précisément, la fréquence du carré sera 1 + f(G) pour k = u – 1 et u – 2.
d) Voyons un exemple avec $n = 4.$
e) En sera-t-il ainsi pour tous les ordres?

Divers :

1) J'ai construit, pour une certaine personne, un carré magique dans lequel nous trouvons sa date de naissance sur la première rangée. J'ai répété l'opération au moins une cinquantaine de fois. Tous ces carrés sont des Dürer presque normaux excepté, par exemple, le carré d'une personne née le 3 mars (nous aurions alors une répétition soit deux 3).

2) Lyne s'est envolée vers la «Voie Céleste» à l'âge de 51 ans. Voici son carré :

Le «LYNE ROCHEFORT»

23	6	19	60
51	28	20	9
30	24	36	18
4	50	33	21

$S = 108$

J'ai eu l'honneur de construire ce carré magique pour ma cousine Lyne, née le 23 juin 1960. Sa somme magique 108 est obtenue de 32 façons différentes (32 choix de 4 cases qui totalisent 108; les 4 coins par exemple).

3) Voici le carré de Dame Kathleen Ollerenshaw, exceptionnellement un hyper-magique d'ordre 4 puisqu'elle a beaucoup travaillé sur ce type de carrés.

1	10	16	15
19	12	4	7
5	6	20	11
17	14	2	9

S = 42

Kathleen Ollerenshaw est née le 1 octobre 1912 à Withington, Manchester, Royaume-Uni. Mathématicienne, sa contribution aux carrés magiques est remarquable. Elle a été conseillère à l'éducation auprès de Margaret Thatcher. Elle est décédée le 10 août 2014 à l'âge vénérable de 101 ans!!!

ISBN 978-2-9820239-0-1