

Annexe 15 : Polynômes rationnels à valeurs entières

Théorème :

Soit donné un polynôme $p(x)$ de degré n à coefficients rationnels dont m est le plus petit dénominateur commun; nous pouvons donc écrire :

$$p(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{m}$$

où les a_i sont des entiers et m , un entier ≥ 1 . Si les nombres $p(0), p(1), p(2), \dots, p(m-1)$ sont des entiers, alors $p(x)$ est un entier quel que soit l'entier x .

preuve :

Nous savons que tout entier peut s'écrire sous la forme :

$$mr + k \quad \text{où } r \text{ parcourt } \mathbb{Z} \text{ et } k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

$$\begin{aligned} p(mr + k) &= \frac{a_0 + a_1(mr + k) + a_2(mr + k)^2 + \dots + a_n(mr + k)^n}{m} = \frac{a_0 + a_1k + a_2k^2 + \dots + a_nk^n + Em}{m} = \\ &= p(k) + E \quad \text{où } E \text{ est un entier.} \end{aligned}$$

Ainsi, nous voyons que $p(mr + k)$ est entier **si et seulement si** $p(k)$ est entier. Enfin, nous pouvons affirmer que si $p(0), p(1), p(2), \dots, p(m-1)$ sont entiers, alors $p(x)$ est entier pour tout entier x .

Ce théorème nous fournit donc un moyen de connaître les entiers x qui feront de $p(x)$ un entier.

Enfin, le nombre de cas à regarder est au plus m . Nous verrons dans les exemples qui suivent.

Exemple 1 :

Pour quelles valeurs entières de x , le polynôme $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ prend-il des valeurs entières?

Nous trouvons $m = 12$. Les valeurs de $p(0), p(1), p(2), \dots, p(11)$ sont respectivement :

$$-\frac{1}{2}; \frac{11}{12}; \frac{11}{3}; \frac{31}{4}; \frac{79}{6}; \frac{239}{12}; 28; \frac{449}{12}; \frac{289}{6}; \frac{241}{4}; \frac{221}{3}; \frac{1061}{12}$$

Donc $p(x)$ est entier si et seulement si $x = 12r + 6$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$x = \dots; -42; -30; -18; -6; 6; 18; 30; 42; \dots$$

Exemple 2 :

Quel que soit l'entier x , montrez que le polynôme $\frac{x^3}{5} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$ ne sera jamais un entier.

Ici, $m = 30$ et $p(0); p(1); p(2); \dots; p(29)$ ne sont pas entiers. Donc, si x est entier, $p(x)$ ne sera jamais entier.

Exemple 3 :

L'extraordinaire polynôme :

$$p(x) = -1769 + \frac{121409}{28}x - \frac{161307}{40}x^2 + \frac{56981}{30}x^3 - \frac{3981}{8}x^4 + \frac{881}{12}x^5 - \frac{57}{10}x^6 + \frac{19}{105}x^7$$

prend une valeur entière quel que soit l'entier x .

En effet, ici $m = 840$ et $p(0); p(1); p(2); \dots; p(839)$ sont tous entiers d'où $p(x)$ est entier dès que x est entier.