

11. Les carrés arithmétiques

11.1 Introduction

Considérons l'espace vectoriel sur le corps des nombres réels, des carrés magiques d'ordre n . La structure générale qui représente cet espace renferme $n(n-2)$ variables libres et pour construire un tel carré magique, il nous faut attribuer une valeur réelle à chacune de ces variables. Pour $n = 12$, par exemple, nous avons 120 variables libres (dont la somme S). Si nous voulons construire un carré magique formé de 144 entiers positifs différents, le travail ne sera pas simple. D'abord, il nous faut trouver 120 entiers positifs différents et les attribuer aux 120 variables. Les autres entiers seront déterminés par des expressions linéaires (à coefficients entiers) renfermant des variables parmi les 120. De plus, nous n'avons que très peu de contrôle sur ces nouveaux entiers. Certains peuvent être négatifs et il peut y avoir des répétitions. Il n'y a pas de problème à faire disparaître les entiers négatifs mais pendant que nous faisons disparaître une répétition, d'autres peuvent apparaître ailleurs. Si nous désirons un carré magique normal d'ordre 12, le travail sera encore plus compliqué.

Bien entendu, nous pouvons utiliser des méthodes connues depuis longtemps et celles-ci nous permettront d'en obtenir un. Mais en trouver à partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 12 est un peu inquiétant!

Vous nous demandez de construire un carré magique normal d'ordre 12 et 200 carrés magiques presque normaux (formés de 144 entiers positifs différents) d'ordre 12. Votre commande est énorme!!! Quelle méthode devrions-nous utiliser? Quelle qu'elle soit, la tâche sera considérable!!!

C'est ici que les **carrés arithmétiques** vont intervenir. Ceux-ci vont nous permettre de remplir la commande ci-haut d'une façon extrêmement simple!!! Vous les aurez vos 201 carrés magiques!!

11.2 Carrés arithmétiques d'ordre n

Considérons les n^2 expressions différentes suivantes :

	a	$a+r$	$a+2r$...	$a+(n-1)r$
	$a+t$	$a+t+r$	$a+t+2r$...	$a+t+(n-1)r$
	$a+2t$	$a+2t+r$	$a+2t+2r$...	$a+2t+(n-1)r$
(*)

	$a+(n-1)t$	$a+(n-1)t+r$	$a+(n-1)t+2r$...	$a+(n-1)t+(n-1)r$

Celles-ci forment n suites arithmétiques de raison r (ce sont les n suites arithmétiques horizontales) et n suites arithmétiques de raison t (ce sont les n suites arithmétiques verticales). Le tableau (*) est appelé **tableau arithmétique d'ordre n** .

Ces n^2 expressions différentes ont donc la forme :

$$a + k_1 r + k_2 t$$

où k_1 et k_2 doivent prendre toutes les valeurs entières allant de 0 à $n-1$ inclusivement.

Définition :

Un **carré arithmétique** est un carré magique tel que ses n^2 nombres peuvent être disposés sous la forme d'un tableau arithmétique.

Le carré magique M ci-dessous est un carré arithmétique de somme 297; à sa droite, un tableau arithmétique correspondant.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 66 & 49 & 65 & 33 & 82 \\ 94 & 21 & 62 & 37 & 69 & 14 \\ 91 & 27 & 40 & 56 & 75 & 8 \\ 88 & 72 & 43 & 59 & 24 & 11 \\ 5 & 30 & 53 & 46 & 78 & 85 \\ 17 & 81 & 50 & 34 & 18 & 97 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 18 & 21 & 24 & 27 & 30 & 33 \\ 34 & 37 & 40 & 43 & 46 & 49 \\ 50 & 53 & 56 & 59 & 62 & 65 \\ 66 & 69 & 72 & 75 & 78 & 81 \\ 82 & 85 & 88 & 91 & 94 & 97 \end{matrix}$$

carré arithmétique *tableau arithmétique de M*

Les trente-six nombres de M se retrouvent dans un tableau arithmétique; nous y voyons les six suites arithmétiques horizontales de raison 3 et les six suites arithmétiques verticales de raison 16. Par contre, le carré magique suivant, un Dürer de somme 79, n'est pas un carré arithmétique. Nous verrons, plus bas, que cela est dû au fait que sa somme est un entier impair :

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 19 & 51 \\ 60 & 10 & 1 & 8 \\ 2 & 15 & 53 & 9 \\ 12 & 50 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Il est donc impossible de trouver un tableau arithmétique correspondant. Notons que le tableau arithmétique correspondant à un carré arithmétique n'est pas unique. Par exemple, le carré M que nous venons de voir plus haut admet plusieurs tableaux arithmétiques. D'abord, celui à sa droite puis les sept équivalents de ce dernier. Ainsi, une rotation de 90° du tableau arithmétique ci-haut donne un tableau défini par $a = 17; r = 16; t = -3$.

Si la structure générale d'un sous-espace de dimension 3 de carrés magiques est un carré arithmétique, alors tous les carrés magiques issus de cette structure générale seront des carrés arithmétiques.

Par contre, si la structure générale n'est pas un carré arithmétique, alors les carrés magiques issus de celle-ci pourront être aussi bien arithmétiques que non arithmétiques.

Nous allons construire des sous-espaces de dimension 3 dont les structures générales seront des carrés arithmétiques et ce, quel que soit l'espace vectoriel E_n des carrés magiques d'ordre $n \geq 3$. Ce sera l'objet du théorème fondamental des carrés magiques.

Quels sont les avantages d'avoir comme structure générale un carré arithmétique?

- 1) Lorsque a, r et t sont des entiers positifs (> 0), cela nous assure que les n^2 nombres du carré sont tous des entiers positifs.
- 2) Lorsque $a = 1; r = 1; t = n$ ou $a = 1; r = n; t = 1$, les n^2 entiers du carré sont consécutifs de 1 à n^2 . Le carré magique est alors normal.
- 3) Lorsque a, r et t sont des entiers positifs avec $t > (n-1)r$ ou $r > (n-1)t$, les n^2 entiers sont tous positifs et différents deux à deux. Le carré magique est alors presque normal.
- 4) Pour construire ces carrés magiques, trois variables suffisent (a, r et t).
- 5) Si $t = nr$ alors les n^2 nombres du carré magique forment une suite arithmétique; il en est de même si $r = nt$.
- 6) Nous pourrons construire des carrés magiques exceptionnels!!!

Si nous n'avons pas $t > (n-1)r$ ou $r > (n-1)t$, alors il se peut que tous les nombres du carré soient différents mais cela n'est pas certain. Cependant, ces conditions sont suffisantes pour avoir que des nombres différents dans notre carré magique.

Considérons la structure générale des super Dürer-alpha :

$$\begin{pmatrix} a+3r & a+t & a+3r+3t & a+2t \\ a+2r+3t & a+r+2t & a+2r & a+r+t \\ a & a+3r+t & a+3t & a+3r+2t \\ a+r+3t & a+2r+2t & a+r & a+2r+t \end{pmatrix}$$

Cette structure générale est bien un carré arithmétique. Donc tous les super Dürer-alpha sont des carrés arithmétiques.

Avec $a = 1, r = 1, t = 4$ puis $a = 1, r = 4, t = 1$, nous obtenons les deux carrés normaux suivants :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 2 & 16 & 3 \\ 12 & 7 & 9 & 6 \\ 1 & 14 & 4 & 15 \\ 8 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$a = 1; r = 1; t = 4$ $a = 1; r = 4; t = 1$

Ce sont des carrés magiques normaux primitifs.

Avec $a = 2, r = 5, t = 16$, nous obtenons le carré magique presque normal suivant :

$$\begin{pmatrix} 17 & 18 & 65 & 34 \\ 60 & 39 & 12 & 23 \\ 2 & 33 & 50 & 49 \\ 55 & 44 & 7 & 28 \end{pmatrix}$$

$a = 2; r = 5; t = 16$

Tous les entiers sont différents puisque la condition suffisante $t > (n-1)r$ est respectée : en effet, $16 > 3 \times 5$. Voici un tableau arithmétique de ce carré :

2	7	12	17
18	23	28	33
34	39	44	49
50	55	60	65

Considérons maintenant la structure générale des Dürer. Ce n'est pas simple d'affirmer que celle-ci n'est pas un carré arithmétique. Nous allons le montrer de façon indirecte. Si elle est un carré arithmétique, sa somme magique est $S = 4a + 6r + 6t$. De plus, si les seize nombres sont des entiers, alors a, r et t sont des entiers et la somme magique est un entier pair. Or, nous connaissons un Dürer formé de seize entiers dont la somme magique est un entier impair (voir le carré ci-dessous). On doit conclure que la structure générale des Dürer n'est pas un carré arithmétique.

Le carré suivant est un Dürer formé d'entiers dont la somme magique est $S = 111$; il n'est donc pas arithmétique. On connaît aussi 3456 Dürer normaux, qui sont tous des carrés arithmétiques.

Une structure générale qui n'est pas un carré arithmétique peut donc générer des carrés arithmétiques et des carrés qui ne le sont pas!! Voyons ce Dürer, de somme $S = 111$:

$$\begin{pmatrix} 21 & 10 & 19 & 61 \\ 50 & 30 & 11 & 20 \\ 13 & 12 & 58 & 28 \\ 27 & 59 & 23 & 2 \end{pmatrix}$$

Enfin, nous pouvons affirmer :

- 1) Tous les carrés magiques d'ordre 3 sont arithmétiques.
- 2) Un carré magique d'ordre 4 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique est impaire.
- 3) Un carré magique d'ordre 5 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 5.
- 4) Un carré magique d'ordre 6 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 3.
- 5) Un carré magique d'ordre 7 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 7.
- 6) Un carré magique d'ordre 8 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 4.
- 7) Un carré magique d'ordre 9 formé d'entiers ne peut pas être arithmétique si sa somme magique n'est pas un multiple de 9.
- 8) Et ainsi de suite...

En effet, si un carré magique d'ordre n est arithmétique, alors sa somme magique est :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n(n-1)}{2}t = na + \frac{n(n-1)(r+t)}{2} \text{ d'où le :}$$

Théorème 11.1 :

Si un carré magique d'ordre n formé de n^2 entiers est arithmétique, alors sa somme magique est un multiple de n si n est impair et un multiple de $\frac{n}{2}$ si n est pair.

Ce théorème nous permet, par exemple, d'affirmer qu'un carré magique d'ordre 5 formé d'entiers dont la somme magique est 74, n'est pas arithmétique. Si la somme est un multiple de 5, alors le théorème ne nous apprend rien. Il faut pousser l'étude plus loin.

Nous allons maintenant présenter le théorème fondamental des carrés magiques.

11.3 Théorème fondamental des carrés magiques; nouveau procédé de construction

Théorème 11.2 :

Soit E_n , l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des carrés magiques d'ordre $n \geq 3$, formés de n^2 nombres réels. Alors, il existe un **sous-espace S_n de dimension 3**, dont la structure générale est un carré arithmétique. Nous trouvons donc dans S_n que des carrés arithmétiques dont au moins un normal et une infinité de presque normaux. De plus, $S_3 = E_3$.

Pour démontrer ce théorème, il nous faut trouver une base du sous-espace S_n qui soit formée de trois carrés arithmétiques A, B, C , linéairement indépendants. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de A, B, C est un espace vectoriel de dimension 3.

Nous voulons maintenant que la structure générale de S_n soit un carré arithmétique. Pour y arriver, il ne suffit pas que A, B, C soient des carrés arithmétiques linéairement indépendants. Il faudra que ceux-ci soient convenablement choisis. Mais comment?

Nous verrons, dans la remarque 1, un exemple où A, B, C sont des carrés arithmétiques linéairement indépendants tel que la structure générale de S_n ne soit pas un carré arithmétique.

Pour que la structure générale de S_n soit un carré arithmétique, il est nécessaire, si nous superposons B sur A , que les cases qui se superposent forment des couples distincts de la forme $(u ; v)$ où u est dans A et v est dans B . Par exemple, les carrés suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

une fois superposés, donnent les neuf couples distincts :

$$(1 ; a), (2 ; b), (3 ; c), (4 ; d), \dots, (8 ; h), (9 ; i)$$

Nous dirons que M et N sont **orthogonaux**. Il est évident que M et N sont orthogonaux si et seulement si N et M le sont. Nous pouvons donc aussi mettre A sur B au lieu de B sur A .

Revenons à la base formée des carrés arithmétiques A, B, C . Le carré A contiendra dans chacune de ses rangées, les entiers $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, une et une seule fois. Le carré B sera obtenu du carré A par une rotation de ce dernier de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (rotation de -90°). Le carré C sera le carré trivial formé du nombre 1.

Le problème consiste à construire A de sorte que A et B soient orthogonaux. Puisque A renferme seulement les entiers $0, 1, 2, \dots, (n-1)$, chacun apparaissant n fois, alors il en sera de même de B . Par superposition, nous devons obtenir n^2 couples distincts de la forme $(u ; v)$ où u prend toutes les valeurs de 0 à $(n-1)$ de même que v .

Il y aura alors une **bijection** entre ces n^2 couples et les n^2 expressions du tableau arithmétique.

Le tableau suivant devrait nous convaincre de cette bijection :

$(0 ; 0)$	$a + 0r + 0t$
$(0 ; 1)$	$a + 0r + 1t$
$(0 ; 2)$	$a + 0r + 2t$
...	
$(3 ; 4)$	$a + 3r + 4t$
...	
$(4 ; 3)$	$a + 4r + 3t$
...	
$(n-1 ; n-1)$	$a + (n-1)r + (n-1)t$

La colonne de gauche renferme les n^2 couples distincts obtenus des carrés orthogonaux A et B . Dans la colonne de droite, nous retrouvons les n^2 expressions d'un tableau arithmétique.

Si nous pouvons construire A et B orthogonaux avec A arithmétique, alors la structure générale de S_n sera un carré arithmétique et tous les carrés issus de cette structure générale seront des carrés arithmétiques.

Voyons maintenant comment trouver A qui sera arithmétique donc magique. L'algorithme pour construire A varie selon que l'ordre est impair (ALG-1), pair multiple de 4 (ALG-2) ou pair non multiple de 4 (ALG-3).

Premier cas : $n \geq 3$ est impair (ALG-1) (lire le chapitre 6 de la partie 1 avant de continuer)

$(n-1)/2$	$n-1$...		2		1		0
0	$(n-1)/2$	$n-1$			2		1	
	0	...	$n-1$			2		1
1		0	$(n-1)/2$	$n-1$...		2	
	1		0	$(n-1)/2$	$n-1$			2
2		1	...	0	$(n-1)/2$	$n-1$		
	2	...	1		0	...	$n-1$	
	...	2		1		0	$(n-1)/2$	$n-1$
$n-1$			2		1		0	$(n-1)/2$

Le carré A précédent est construit en remplissant d'abord la grande diagonale secondaire avec les entiers consécutifs de 0 à $n-1$, dans cet ordre, comme dans le carré ci-haut. Puis, nous remplissons chaque diagonale principale, grande ou brisée, avec le même entier soit celui qui s'y trouve déjà. Donc, toutes les cases d'une diagonale principale contiennent le même entier et deux diagonales principales différentes contiennent deux entiers différents (Voir partie 1, chapitre 6).

Puisque chaque diagonale principale (grande ou brisée) rencontre chaque rangée en une seule case et chaque colonne en une seule case, alors le carré précédent sera arithmétique. En effet, nous aurons la même somme dans chaque rangée, chaque colonne et dans la grande diagonale secondaire (voir plus bas) soit :

$$0+1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

La grande diagonale principale a pour somme $n \times \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Le carré A est donc magique et il est aussi arithmétique avec $a=0$, $r=1$, $t=0$.

Il est évident que B est un carré arithmétique avec $a=0$, $r=1$, $t=0$ de même que C , avec $a=1$, $r=0$, $t=0$.

Il reste à montrer que A et B sont orthogonaux. Les observations suivantes sont très importantes pour y arriver :

- 1) Le lemme sur les diagonales brisées (Partie 3, annexe 6) nous apprend que dans un carré d'ordre impair $n \geq 3$, chaque diagonale principale, grande ou brisée, rencontre chaque diagonale secondaire, grande ou brisée, en une seule case située à l'intérieur du carré.
- 2) Chaque diagonale principale renferme le même entier dans toutes ses cases.
- 3) Deux diagonales principales quelconques n'ont jamais de case en commun. Il en est de même pour deux diagonales secondaires quelconques.
- 4) Une conséquence du lemme des diagonales brisées est que chaque diagonale secondaire renferme tous les entiers consécutifs de 0 à $n-1$.
- 5) Toute diagonale principale rencontre chaque rangée et chaque colonne en une seule case.

Cela nous permet de conclure :

- a) Chaque rangée de A renferme tous les entiers de 0 à $n-1$. Il en est de même pour chaque colonne. C'est une conséquence de 5).
- b) Par construction, la grande diagonale secondaire de A renferme aussi tous les entiers de 0 à $n-1$. La grande diagonale principale est aussi magique.
- c) Le carré A est magique de somme $\frac{n(n-1)}{2}$ et il est arithmétique.
- d) **Les carrés A et B sont orthogonaux.** En effet, B est le résultat de la rotation de A de -90° . Les diagonales principales de A deviennent les diagonales secondaires de B et les diagonales secondaires de A deviennent les diagonales principales de B . Superposons B sur A et considérons une diagonale principale de A , laquelle renferme l'entier u tel que $0 \leq u \leq n-1$. La diagonale principale de B qui se superposera sur la diagonale principale de A renferme tous les entiers de 0 à $n-1$. Nous obtiendrons alors n couples différents de la forme $(u ; v)$ où u est l'entier de la diagonale principale de A et où v prend toutes les valeurs entières de 0 à $n-1$. Il est clair que cette superposition donnera n^2 couples différents de la forme $(u ; v)$ où u et v prennent toutes les valeurs entières de 0 à $n-1$.
- e) La combinaison linéaire $tA + rB + aC$ est la structure générale du sous-espace S_n . Celle-ci est un carré arithmétique!!! Rappelons que C est le trivial formé du nombre 1.
- f) A, B et C sont linéairement indépendants. En effet, C n'est pas une combinaison linéaire de A et B et B n'est pas une combinaison linéaire de A donc A, B et C sont linéairement indépendants. Pour voir cela, il suffit de constater que dans A , sur la rangée centrale, immédiatement à gauche de la case centrale, nous trouvons le nombre 0 et de même dans B d'où $0 + 0 = 1$ montre que C ne peut pas être une combinaison linéaire de A et B . Puis dans la colonne centrale de A , juste en-dessous de la case centrale, nous trouvons 0 alors que nous trouvons $n-1$ dans B d'où $0 = n-1$ montre que B n'est pas une combinaison linéaire de A .
- g) S_n est bien un sous-espace de dimension 3 représenté par une structure générale qui est un carré arithmétique.

Nous trouvons les propriétés suivantes pour les carrés arithmétiques construits avec notre nouveau procédé appelé ALG-1:

- 1) Tous les carrés magiques d'ordres impairs construits avec ALG-1 ont pour centre le nombre $\frac{S}{n}$. En effet, nous avons vu plus haut que la somme magique est donnée par $S = na + \frac{n(n-1)}{2}r + \frac{n(n-1)}{2}t$. Il est facile d'observer, à partir de A et B, que le centre du carré arithmétique est $a + \frac{n-1}{2}r + \frac{n-1}{2}t$ soit $\frac{S}{n}$.
- 2) Les nombres de la grande diagonale principale forment, de bas en haut, une suite arithmétique de raison r. Voir le problème 37 de 11.4.
- 3) Les nombres de la grande diagonale secondaire forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison t. Voir le problème 37 de 11.4.
- 4) Dans la rangée centrale, A et B nous permettent de voir que dans la case juste à gauche de la case centrale, nous trouvons le plus petit nombre du carré, soit a, et dans la case juste à droite de la case centrale, nous trouvons le plus grand nombre du carré, soit $a + (n-1)r + (n-1)t$. Ceci est vrai dès que r et t sont positifs. Voir 37 de 11.4.
- 5) Voir le théorème suivant.

Théorème 11.3 :

Tous les carrés arithmétiques d'ordres impairs $n \geq 3$ qui proviennent de la structure générale de S_n (construite avec ALG-1), sont **associatifs**.

Preuve :

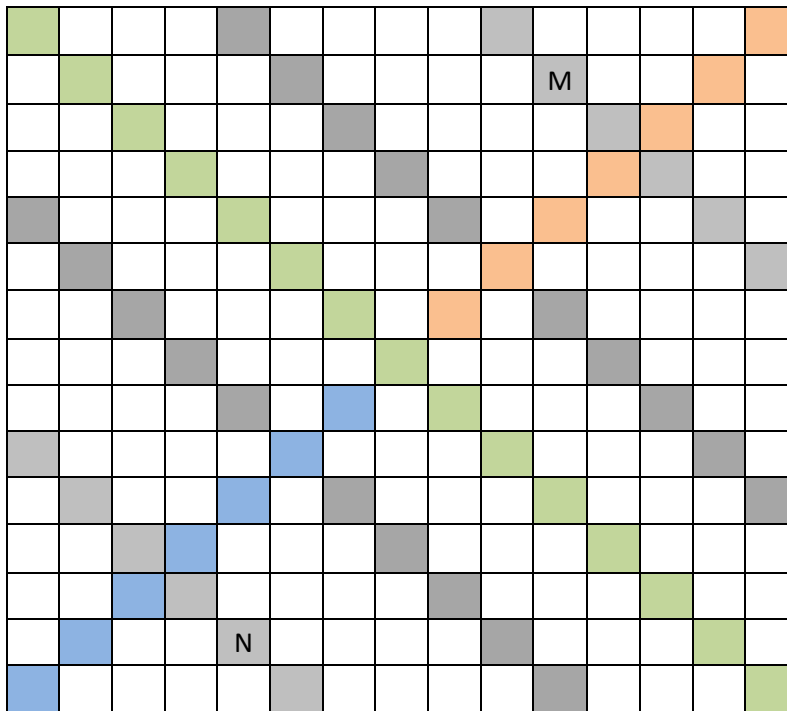
Pour démontrer ce théorème, il suffira de montrer que A est associatif. Nous devons aussi montrer qu'une combinaison linéaire de trois carrés associatifs est aussi un carré associatif (voir problème 35 de 11.4). Nous allons maintenant poser $n = 2k + 1$ et passer au carré suivant.

k	2k	k-1	2k-1	2	k+2	1	k+1	0
0	k												1	
k+1												2		
1											...			
k+2										...				
2									k-2					
...						k		k-1						
...							k							
...						k+1		k						
...					k+2									
2k-2				...										
k-2			...											
2k-1		...												
k-1	2k-1													
2k														k

La grande diagonale principale est formée des cases vertes lesquelles renferment l'entier k .

La grande diagonale secondaire renferme, de haut en bas, les cases jaunes qui contiennent les entiers consécutifs de 0 à $k - 1$, la case centrale verte qui contient k et enfin les cases bleues qui contiennent les entiers consécutifs de $k + 1$ à $2k$. Cela implique :

- 1) Que nous retrouvons sur la première rangée du haut, de droite à gauche, les cases jaunes qui renferment les entiers consécutifs de 0 à $k - 1$ et la case verte qui renferme k . Puis les cases bleues qui renferment les entiers consécutifs de $k+1$ à $2k$.
- 2) Que nous retrouvons sur la première colonne à gauche, de haut en bas, les cases bleues qui contiennent les entiers consécutifs de $k+1$ à $2k$, k dans la case verte puis les cases jaunes qui contiennent les entiers consécutifs de 0 à $k-1$.
- 3) Que deux cases situées sur une grande diagonale, principale ou secondaire, symétriques par rapport à la case centrale, ont pour somme $2k$.
- 4) Que deux diagonales parallèles à la grande diagonale principale, situées, l'une en haut et l'autre en bas de celle-ci, renferment le même nombre de cases si ces deux diagonales sont symétriques par rapport à la grande diagonale principale.



Les diagonales grises sont symétriques par rapport à la grande diagonale principale et renferment le même nombre de cases.

- 5) Que toutes les cases d'une diagonale grise ont leurs cases symétriques par rapport à la case centrale, sur l'autre diagonale grise.
- 6) Que les deux diagonales grises rencontrent la grande diagonale secondaire en deux cases symétriques par rapport à la case centrale, ou ne la rencontrent pas.

- 7) Que si les deux diagonales grises rencontrent la grande diagonale secondaire en deux cases symétriques par rapport à la case centrale, alors la somme de ces deux cases est $2k$.

Voici donc un premier résultat :

Si dans le carré A , deux cases quelconques M et N sont symétriques par rapport à la case centrale alors, elles sont situées sur deux diagonales parallèles et symétriques par rapport à la grande diagonale principale. De plus, si ces deux diagonales rencontrent la grande diagonale secondaire, alors la somme des cases M et N est $2k = n-1$.

- 8) Que si les deux diagonales grises ne rencontrent pas la grande diagonale secondaire, alors la somme d'une case d'une diagonale grise avec une case de l'autre diagonale grise est de la forme :

$$(k + 1 + v) + (k - 1 - v)$$

où v est un entier qui varie de 0 à $k-1$.

Puis un second résultat :

Deux cases symétriques par rapport à la case centrale dans le carré A , ont toujours pour somme $2k = n-1$. Le carré arithmétique A est donc associatif. Il s'ensuit que le carré arithmétique $tA + rB + aC$ est associatif.

En effet, la somme de deux cases symétriques par rapport à la case centrale est toujours égale

à :

$$2a + (n-1)r + (n-1)t = \frac{2S}{n} = 2 \times \text{centre}$$

Ce nouveau procédé de construction de carrés magiques d'ordres impairs $n \geq 3$ nous permet de construire des carrés magiques extraordinaires. Ils sont tous arithmétiques, ils sont tous

associatifs, ils ont tous pour centre le nombre $\frac{S}{n}$,

Revoyons l'exemple de la partie 1, un carré d'ordre 7 :

3	6	2	5	1	4	0
0	3	6	2	5	1	4
4	0	3	6	2	5	1
1	4	0	3	6	2	5
5	1	4	0	3	6	2
2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3

A

6	2	5	1	4	0	3
2	5	1	4	0	3	6
5	1	4	0	3	6	2
1	4	0	3	6	2	5
4	0	3	6	2	5	1
0	3	6	2	5	1	4
3	6	2	5	1	4	0

B

Le carré A est arithmétique. Il a été construit avec le procédé décrit plus haut. Nous appellerons ce procédé, «**procédé des diagonales brisées**». Vérifiez que le carré A est associatif.

Le carré B est obtenu par une rotation de -90° du carré A. Quant au carré C, c'est un trivial formé du nombre 1. Constatez que B et C sont aussi associatifs.

Par exemple, $a = 3, r = 2, t = 15$, donne un carré magique d'ordre 7 et de somme $S = 378$.

60	97	43	80	26	63	9
7	58	95	41	78	24	75
73	5	56	93	39	90	22
20	71	3	54	105	37	88
86	18	69	15	52	103	35
33	84	30	67	13	50	101
99	45	82	28	65	11	48

Carré magique qui renferme 536 000 figures magiques!!!

Ce carré est arithmétique et associatif. Son centre est le nombre $\frac{378}{7} = 54$. Le plus petit nombre 3, est situé juste à gauche du centre et le plus grand nombre 105, juste à droite du centre. Les nombres de la grande diagonale principale forment, de bas en haut, une suite arithmétique de raison $r = 2$ et les nombres de la grande diagonale secondaire forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison $t = 15$.

Puisque $tA + rB + aC$ est un carré arithmétique, alors il est clair que pour construire un carré presque normal, il suffit de prendre $t > (n-1)r$ ou $r > (n-1)t$ avec a, r, t des entiers positifs. Le carré sera normal avec $a = 1, r = 1$ et $t = n$ ou $a = 1, r = n$ et $t = 1$. Pour démontrer ce

résultat, voir le tableau arithmétique de 11.2. Le carré ci-haut est donc presque normal puisque nous avons $15 > 6 \times 2$.

Deuxième cas : $n \geq 4$ est pair multiple de 4 (ALG-2) (lire le chapitre 6 de la partie 1 avant de continuer)

Ici, la construction du carré A est beaucoup plus simple. Nous allons le subdiviser comme suit :

Carré A

0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1
0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1
0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1
0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
4k-1	...	3k+1	3k	k	k+1	k+2	3k-1	k-1	...	1	0
0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1
0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1
0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1
0	1	...	k-1	3k-1	k+2	k+1	k	3k	3k+1	...	4k-1

Posons $n = 4k$ et avec les k rangées du haut, déterminons un carré $k \times k$ (en orangé), un

rectangle $k \times 2k$ (en bleu) et un autre carré $k \times k$ (en vert). Nous allons faire de même avec les k rangées du bas.

Avec les $2k$ rangées centrales, déterminons un rectangle $2k \times k$ (en blanc), un carré $2k \times 2k$ (en gris) et un autre rectangle $2k \times k$ (en blanc).

Dans chaque carré ou rectangle, toutes les rangées sont identiques. Les carrés et rectangles sont numérotés, de gauche à droite et de haut en bas par (1), (2), ..., (8) et (9).

Dans les carrés (1) et (7), en orangé, les rangées sont formées des entiers consécutifs $0, 1, 2, \dots, k-1$.

Dans les carrés (3) et (9), en vert, les rangées sont formées des entiers consécutifs $3k, 3k+1, \dots, 4k-1$.

Dans les carrés (2) et (8), en bleu, les rangées sont formées des entiers consécutifs $3k-1, 3k-2, \dots, k+1, k$.

Dans le carré (5), le carré central en gris, les rangées sont formées des entiers consécutifs $k, k+1, \dots, 3k-2, 3k-1$.

Dans le rectangle (4), en blanc, les rangées sont formées des entiers consécutifs $4k-1, 4k-2, \dots, 3k+1, 3k$.

Dans le rectangle (6), en blanc, les rangées sont formées des entiers consécutifs $k-1, \dots, 2, 1, 0$.

Le carré A est arithmétique. En effet, il est magique et renferme dans toutes ses rangées, les entiers consécutifs de 0 à $n-1$.

Il est magique car la somme des cases de chaque rangée est $0+1+2+\dots+4k-1 = 8k^2 - 2k$. De même pour les deux grandes diagonales. Quant aux colonnes, le carré ci-haut montre que la somme des cases de la première colonne à gauche est $2k(4k-1) = 8k^2 - 2k$, la somme des cases de la colonne $(k+1)$ à partir de la gauche, est $2k \times k + 2k(3k-1) = 8k^2 - 2k$ et enfin, la somme des cases de la colonne $(3k+1)$ à partir de la gauche est $2k(k-1) + 2k \times 3k = 8k^2 - 2k$. Il s'ensuit que toutes les colonnes ont pour somme le nombre $8k^2 - 2k$.

Montrons maintenant que A et B sont orthogonaux. Pour y arriver, utilisons les carrés A et B afin de retrouver tous les $n^2 = 16k^2$ couples distincts de la forme $(u ; v)$ où u et v prennent toutes les valeurs de 0 à $4k-1$. Nous vous invitons à trouver ces n^2 couples différents à partir du carré A ci-haut et de sa rotation de -90° soit le carré B (voir problème 1 de 11.4).

La construction du carré A est d'une grande simplicité. Nous pouvons observer que celui-ci renferme, d'une certaine façon, qu'une seule et même rangée qui se répète $4k$ fois. Plus précisément, considérons la rangée :

$$0, 1, 2, \dots, k-1 \quad 3k-1, 3k-2, \dots, k+2, k+1, k \quad 3k, 3k+1, \dots, 4k-1$$

laquelle apparaît en trois parties. Les k premières rangées et les k dernières rangées sont la rangée ci-haut que nous lisons de gauche à droite. Quant aux $2k$ rangées centrales, elles sont la rangée ci-haut renversée, c'est-à-dire que nous lisons de droite à gauche (voir le carré A ci-haut et celui qui suit).

Par exemple :

0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
7	6	2	3	4	5	1	0
0	1	5	4	3	2	6	7
0	1	5	4	3	2	6	7

Carré A

0	0	7	7	7	7	0	0
1	1	6	6	6	6	1	1
5	5	2	2	2	2	5	5
4	4	3	3	3	3	4	4
3	3	4	4	4	4	3	3
2	2	5	5	5	5	2	2
6	6	1	1	1	1	6	6
7	7	0	0	0	0	7	7

Carré B

Puisque A et B sont orthogonaux, le carré $tA + rB + aC$ est arithmétique. C'est la structure générale du sous-espace S_n .

Les carrés A , B et C sont linéairement indépendants (voir le problème 2 de 11.4). Nous pouvons résumer ainsi :

- 1) Le carré A est arithmétique.
- 2) Les carrés A et B sont orthogonaux.
- 3) Les carrés A , B et C sont linéairement indépendants.
- 4) S_n est bien un sous-espace de dimension 3 représenté par une structure générale qui est un carré arithmétique.

Nous trouvons les propriétés suivantes pour les carrés arithmétiques d'ordres pairs multiples de 4, construits avec notre nouveau procédé ALG-2:

En observant les carrés A et B , il est facile de constater: (voir le problème 38 de 11.4).

- 1) Que A soit associatif. La somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $4k - 1 = n - 1$. Tous les carrés magiques issus de la structure générale S_n sont donc associatifs.

- 2) Que les nombres situés sur la grande diagonale principale du carré $tA + rB + aC$, de haut en bas, forment une suite arithmétique de raison $r + t$.
- 3) Que les nombres situés sur la grande diagonale secondaire, de haut en bas, forment une suite arithmétique de raison $r - t$.
- 4) Dans chaque colonne, nous trouvons, de haut en bas, $\frac{n}{4}$ nombres qui forment une suite arithmétique de raison $\pm r$, $\frac{n}{2}$ nombres qui forment une autre suite arithmétique de raison $\mp r$, $\frac{n}{4}$ nombres qui forment une suite arithmétique de raison $\pm r$.
- 5) Sur les rangées, les trois suites arithmétiques sont de raison $\pm t$.
- 6) Si a, r et t sont positifs, le plus petit nombre et le plus grand nombre du carré sont situés aux extrémités de la grande diagonale principale, le plus petit étant en haut soit a .

Théorème 11.4 :

Tous les carrés arithmétiques d'ordres pairs multiples de 4, $n \geq 4$, qui proviennent de la structure générale de S_n , (construite avec ALG-2) sont associatifs.

Observons maintenant ces résultats à travers l'exemple qui suit :

3	18	92	77	62	47	93	108
5	20	90	75	60	45	95	110
118	103	37	52	67	82	28	13
116	101	39	54	69	84	26	11
114	99	41	56	71	86	24	9
112	97	43	58	73	88	22	7
15	30	80	65	50	35	105	120
17	32	78	63	48	33	107	122

$$a = 3 ; r = 2 ; t = 15$$

1. Le carré magique ci-haut est associatif puisque A est associatif. Ici, la somme de deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours égale à 125.

2. Les nombres situés sur la grande diagonale principale forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison $r + t = 2 + 15 = 17$.
3. Les nombres situés sur la grande diagonale secondaire forment, de haut en bas, une suite arithmétique de raison $r - t = 2 - 15 = -13$.
4. Nous pouvons lire, dans la première colonne de gauche, 3 suites arithmétiques de raison $r = 2$ soient : 3, 5 ; 118, 116, 114, 112 ; 15, 17. Sur la deuxième colonne de gauche, nous avons : 18, 20 ; 103, 101, 99, 97 ; 30, 32. De même pour toutes les autres colonnes. Toutes ces suites arithmétiques sont de même raison $r = 2$.
5. Sur les rangées, les suites arithmétiques sont de raison $t = 15$.
6. Ici, a , r et t sont positifs donc aux extrémités de la grande diagonale principale, nous retrouvons le plus petit nombre (3) et le plus grand (122).

Troisième cas : $n \geq 6$ est pair non multiple de 4 (ALG-3) (lire le chapitre 6 de la partie 1)

La construction du carré A s'avère un peu plus difficile. Si l'ordre du carré que nous voulons construire est $4k + 2$, alors nous construirons d'abord un carré magique d'ordre $4k$.

Plus précisément, nous fabriquerons le carré A que nous trouvons dans le deuxième cas et ensuite, nous lui ajouterons le carré trivial C formé du nombre 1. Le carré qui en résulte se retrouve dans le premier carré ci bas, soit le carré d'ordre $4k$ qui renferme sur sa première rangée, les entiers de 1 à k , de $3k$ à $k + 1$ et de $3k + 1$ à $4k$.

Ensuite, nous ajouterons à ce carré, une bordure qui permettra de passer d'un carré d'ordre $4k$ à un carré d'ordre $4k + 2$. La première rangée de ce dernier renfermera, de gauche à droite, tous les entiers consécutifs de 0 à $4k + 1$. La dernière rangée renfermera, de droite à gauche, tous les entiers consécutifs de 1 à $4k + 1$.

Enfin, il reste à compléter la colonne de gauche et celle de droite. À partir de la droite horizontale qui passe par le centre du carré, plaçons dans les cases de la colonne de gauche, les entiers $4k + 1, 0, 4k + 1, 0, \dots$ de bas vers le haut puis les entiers $4k + 1, 0, 4k + 1, 0, \dots$ du haut vers le bas.

Nous ferons de même dans la colonne de droite mais cette fois avec les entiers $0, 4k + 1, 0, 4k + 1, \dots$

De cette façon, si une extrémité d'une rangée renferme 0, l'autre extrémité renferme $4k + 1$ et inversement. Voici donc construit le premier carré (carré M) qui va nous conduire au carré magique A .

0	1	...	k	k+1	k+2	3k-1	3k	3k+1	...	4k	4k+1
0	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	4k+1
4k+1	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	0
0	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	4k+1
4k+1	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	0
0	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	4k+1
4k+1	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	0
4k+1	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	0
0	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	4k+1
4k+1	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	0
0	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	4k+1
4k+1	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	0
0	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	4k+1
4k+1	4k	...	3k+1	3k	3k-1	k+2	k+1	k	...	1	0

Carré M

La somme des rangées et des colonnes de M est toujours le nombre $(2k+1)(4k+1)$, ce qui n'est pas le cas des deux grandes diagonales. M est semi-magique d'où les modifications qui suivent :

1. Nous allons permuter les cases extrêmes des deuxième et dernière rangées. Ainsi, les deux grandes diagonales auront pour sommes le nombre $(2k+1)(4k+1)$. De plus, les colonnes extrêmes conserveront la même somme. M deviendra alors un nouveau carré M' qui est maintenant magique.

2. Si nous ne faisons pas d'autres permutations, alors en superposant la rotation de -90° de M' sur M' , nous obtiendrons deux fois le couple $(4k; 4k+1)$. C'est pourquoi nous allons effectuer les deux dernières permutations suivantes dans M' : nous allons permuter le 1 avec le $4k$ dans la première rangée et le 1 avec le $4k$ dans la rangée $\frac{n+6}{4}$. Rappelons de nouveau que les rangées sont numérotées, du haut vers le bas : 1, 2, 3, ..., $n-1$, n .

Voilà donc le carré A :

0	4k	...	k	k+1	k+2	3k	3k+1	...	1	4k+1
4k+1	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	0
4k+1	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	0
0	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	4k+1
4k+1	1	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	4k	0
0	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	4k+1
4k+1	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	0
4k+1	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	0
0	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	4k+1
4k+1	4k	...	3k+1	k+1	k+2	3k-1	3k	k	...	1	0
0	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	4k+1
4k+1	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	0
0	1	...	k	3k	3k-1	k+2	k+1	3k+1	...	4k	4k+1
0	4k	...	3k+1	3k	k+1	k	...	1	4k+1

Carré A

Le carré A est un carré magique de même que le carré B qui est la rotation de -90° de A . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que A et B sont orthogonaux donc de s'assurer qu'en superposant B sur A , nous obtiendrons tous les n^2 couples différents $(u ; v)$ où u varie de 0 à $n-1$ et v varie de 0 à $n-1$. Ici, $n-1 = 4k+1$. De plus, le lecteur montrera que A, B et C sont linéairement indépendants (voir les problèmes 3 et 4 de 11.4).

Donc $tA + rB + aC$ est un carré arithmétique, structure générale de S_n .

Avec A et B , nous pouvons déjà observer : (voir le problème 39 de 11.4).

- 1) Les grandes diagonales du carré A renferment, dans l'ordre, les entiers de 0 à $n - 1$, de haut en bas pour la diagonale principale, de bas en haut pour la diagonale secondaire.
- 2) Les deux grandes diagonales sont formées de n nombres qui forment une suite arithmétique de raison $(r + t)$ pour la grande diagonale principale et de raison $(r - t)$ pour la grande diagonale secondaire.
- 3) Si a, r et t sont positifs, le plus petit nombre et le plus grand nombre du carré sont situés aux extrémités de la grande diagonale principale, le plus petit étant en haut soit a .
- 4) $a = 1, r = 1, t = n$ ou $a = 1, r = n, t = 1$ donnent des **carrés magiques normaux primitifs**.

Voyons un exemple :

Nous allons construire un carré magique d'ordre 14. Voici d'abord le carré M :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Pour obtenir le carré magique A à partir du carré M précédent, il suffit d'effectuer dans M les quatre permutations suivantes (en rouge) :

0	12	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	12	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	13
13	12	11	10	4	5	6	7	8	9	3	2	1	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
13	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	0
0	1	2	3	9	8	7	6	5	4	10	11	12	13
0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	13

Carré A

Voilà le carré A qui est arithmétique donc magique. Le carré B est la rotation de -90° du carré A . Le carré C est toujours le trivial formé de 1.

Nous allons construire deux carrés magiques normaux en posant $a = 1; r = 14; t = 1$ puis $a = 1, r = 1, t = 14$. **Ceux-ci seront primitifs.**

Il en sera toujours ainsi dès que $a = 1, r = 4k + 2, t = 1$ *ou* $a = 1, r = 1, t = 4k + 2$ (voir le problème 5 de 11.4).

1	13	185	4	187	6	189	190	9	192	11	194	184	14
182	16	17	18	178	177	176	175	174	19	25	26	27	169
168	30	31	32	164	163	162	161	160	159	39	40	41	29
141	44	45	46	150	149	148	147	146	145	53	54	55	56
140	128	138	137	61	62	63	64	65	66	130	129	139	57
113	125	124	123	75	76	77	78	79	80	116	115	114	84
112	111	110	109	89	90	91	92	93	94	102	101	100	85
98	97	96	95	103	104	105	106	107	108	88	87	86	99
71	83	82	81	117	118	119	120	121	122	74	73	72	126
70	69	68	67	131	132	133	134	135	136	60	59	58	127
43	142	143	144	52	51	50	49	48	47	151	152	153	154
42	156	157	158	38	37	36	35	34	33	165	166	167	155
15	170	171	172	24	23	22	21	20	173	179	180	181	28
183	195	12	193	10	191	8	7	188	5	186	3	2	196

$$A+14B+C$$

1	169	42	43	70	71	98	112	113	140	141	168	28	183
195	16	30	44	139	125	111	97	83	58	142	156	170	13
194	17	31	45	138	124	110	96	82	68	143	157	171	3
11	18	32	46	137	123	109	95	81	67	144	158	172	186
192	24	164	150	61	75	89	103	117	131	52	38	178	5
9	177	163	149	62	76	90	104	118	132	51	37	23	188
190	176	162	148	63	77	91	105	119	133	50	36	22	7
189	175	161	147	64	78	92	106	120	134	49	35	21	8
6	174	160	146	65	79	93	107	121	135	48	34	20	191
187	173	159	145	66	80	94	108	122	136	47	33	19	10
4	25	39	53	130	116	102	88	74	60	151	165	179	193
185	26	40	54	129	115	101	87	73	59	152	166	180	12
2	27	41	55	128	114	100	86	72	69	153	167	181	184
14	182	155	154	127	126	99	85	84	57	56	29	15	196

$$14A+B+C$$

Ces deux carrés magiques sont **arithmétiques, normaux et primitifs**. Ils ne sont cependant pas **associatifs**.

Nous avons maintenant un **nouveau procédé** pour construire des carrés magiques de tous les ordres $n \geq 3$. Vous voulez des carrés magiques presque normaux ou un carré normal, c'est devenu très simple!!! Les répétitions ne nous inquiètent plus!!!

Vous voulez construire deux cents carrés magiques d'ordre 16 presque normaux et un carré magique normal, il n'y a plus de problème.

Pour le normal, prenez : $a = 1, r = 16, t = 1$.

Pour les deux cents presque normaux, prenez $a = 3, r = 2, t = 31, 32, 33, \dots$ par exemple.

Donc, vous pouvez maintenant construire un carré magique presque normal et même normal pour tous les ordres $n \geq 3$. En utilisant le nouveau procédé, vous pouvez construire votre carré magique à la main lorsque l'ordre de celui-ci n'est pas trop grand.

Construire un carré magique d'ordre 23 455, à la main, ne serait tout simplement pas raisonnable. Techniquement très difficile à faire mais réalisable avec beaucoup de temps!!!

Cependant, dans la Partie 3, annexe 22, nous vous proposons vingt deux fichiers dans **MATHEMATICA**, appelés « Ordre 3 » jusqu'à « Ordre 24 ». Par exemple, le fichier « Ordre 18 » vous permet, en utilisant seulement trois variables, de construire une infinité de carrés magiques d'ordre 18. Ceux-ci seront tous arithmétiques et vous pourrez construire une infinité de presque normaux et deux normaux primitifs.

Pour les ordres impairs et pairs multiples de 4, vous pourrez construire une infinité de presque normaux et un normal. Pour les ordres pairs non multiples de 4, vous pourrez construire une infinité de presque normaux et deux normaux primitifs. Tous ces carrés, peu importe l'ordre, sont arithmétiques (donc magiques) et sont associatifs pour les ordres impairs et pour les ordres pairs multiples de 4.

Toujours dans la Partie 3, annexe 21, vous trouverez, dans **EXCEL**, les mêmes fichiers « Ordre 3 » jusqu'à « Ordre 24 » mais en plus, les fichiers « Ordre 25 » jusqu'à « Ordre 32 ».

Enfin, dans la Partie 3, annexe 23, vous trouverez les programmes notés 11, 12 et 13, appelés CM-arith- $2k+1$, CM-arith- $4k$ et CM-arith- $4k+2$. Le premier permet de construire des carrés arithmétiques (donc magiques) d'ordres impairs jusqu'à l'ordre 31. Le deuxième permet de construire des carrés arithmétiques d'ordres pairs multiples de 4 jusqu'à l'ordre 28. Le troisième permet de construire des carrés arithmétiques d'ordres pairs non multiples de 4 jusqu'à l'ordre 30.

Avant de résumer ce chapitre, voyons **quatre remarques très importantes** :

Remarque 1:

Il est très important de mentionner que toutes les combinaisons linéaires de A , B et C sont des carrés magiques mais pas forcément des carrés arithmétiques, même si A , B et C sont arithmétiques. Il faut que A soit convenablement choisi!!! Ce qui a été fait plus haut!!!

Par exemple, les carrés suivants sont arithmétiques et linéairement indépendants mais ils ne conduisent pas à une structure générale qui soit arithmétique.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La structure générale obtenue ici est : $tA+rB+aC$ et elle renferme deux expressions identiques soit deux fois $a+5t+2r$ puis deux autres soit deux fois $a+3r$. Cette structure générale n'est donc pas celle d'un carré arithmétique.

En fait, nous aurons un sous-espace de dimension 3 de carrés magiques et ceux-ci renfermeront tous au moins deux couples de nombres identiques.

Remarque 2 :

La construction du carré A n'est pas unique. Nous pouvons donc construire A d'une autre façon mais celle-ci ne sera qu'une **variante** de celle présentée dans ce chapitre.

Par exemple, dans le cas des pairs multiples de 4, la construction de A exige de connaître qu'une seule rangée. Si $n = 12$, celle-ci sera :

$$(*) \quad 0 \ 1 \ 2 \quad 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \quad 9 \ 10 \ 11$$

laquelle apparaîtra dans les trois premières rangées et dans les trois dernières rangées. Dans les six rangées centrales, nous trouverons cette rangée mais renversée; en fait nous verrons dans ces six rangées :

$$11 \ 10 \ 9 \quad 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \quad 2 \ 1 \ 0$$

Maintenant, nous pourrions prendre à la place de (*) :

$$0 \ 1 \ 2 \quad 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \quad 9 \ 10 \ 11$$

ce qui rend la construction de A encore plus facile!!! Le carré $tA+rB+aC$ est encore arithmétique et associatif.

Dans le cas des impairs, pour obtenir B , nous avons fait subir à A , une rotation de -90° . Une rotation de 90° est aussi un bon choix. Le carré $tA+rB+aC$ est encore arithmétique et associatif.

Dans chacun de ces deux cas (pairs multiples de 4 et impairs), nous aurons deux carrés différents et les propriétés citées plus haut seront légèrement modifiées pour les deux nouveaux carrés.

Remarque 3 :

Une structure générale de carrés arithmétiques ne génère pas tous les carrés arithmétiques. Par exemple, la structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 5 (voir fichier «Ordre 5») ne génère que des carrés arithmétiques associatifs. Or, il existe des carrés normaux d'ordre 5 dont les centres sont différents de 13 et ceux-ci sont arithmétiques mais ne sont pas associatifs donc ils ne peuvent pas être obtenus de la structure générale.

Remarque 4 :

Si deux carrés magiques A et B sont arithmétiques et ne proviennent pas d'une même structure générale arithmétique, alors il se peut que $(A + B)$ ne soit pas arithmétique. C'est ce qui se passe avec les carrés A et B ci-haut. Le problème 33 de 11.4 vous demande de montrer que $A + B$ n'est pas arithmétique. Vous aurez quelques indices!!!

Résumé :

Nous venons de voir un tout **nouveau procédé** pour construire des carrés magiques. Ceux-ci, en plus d'être magiques, sont tous arithmétiques et pour les ordres impairs et pairs multiples de 4, **ils sont tous associatifs**.

Que l'ordre du carré soit impair $(2k + 1)$, pair multiple de 4 $(4k)$ ou pair non multiple de 4 $(4k + 2)$, nous devons toujours trouver trois carrés arithmétiques linéairement indépendants A, B, C tels que A et B soient orthogonaux. Il suffit de trouver convenablement A , ce que nous avons fait plus haut.

Le procédé pour trouver A varie selon que l'ordre est impair (méthode des diagonales brisées), pair multiple de 4 et pair non multiple de 4.

Le carré B est toujours obtenu par une rotation du carré A de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre, soit de -90° .

Le carré C est toujours le carré trivial formé de 1.

S_n , l'ensemble des combinaisons linéaires $tA + rB + aC$, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 3. Tous les carrés ainsi obtenus sont arithmétiques.

$tA + rB + aC$ est aussi la structure générale de S_n .

Avec ce procédé, la construction d'un carré magique se fait toujours à l'aide de trois variables (t, r, a) et ce, quel que soit l'ordre du carré plus grand ou égal à 3.

À partir d'un tableau arithmétique d'ordre n , nous pouvons toujours construire un carré magique d'ordre n (évidemment arithmétique).

Les algorithmes que nous venons de présenter pour construire des carrés arithmétiques d'ordres impairs, pairs multiples de 4 et pairs non multiples de 4 sont appelés respectivement ALG-1, ALG-2 et ALG-3. Cependant, ces algorithmes ne permettent pas de construire tous les carrés arithmétiques d'un ordre donné $n \geq 4$.

Tous les carrés magiques construits avec ALG-1 et ALG-2 sont associatifs. Nous vous suggérons de lire la section 14.10 du chapitre 14 intitulé : «Varia».

Le problème 30 de 11.4 présente un corollaire du théorème 11.2.

11.4 Problèmes

- 1) Dans le cas $n = 4k$, vérifiez que A et B sont orthogonaux.
- 2) Dans le cas $n = 4k$, montrez que A, B et C sont linéairement indépendants.
- 3) Dans le cas $n = 4k + 2$, vérifiez que A et B sont orthogonaux.
- 4) Dans le cas $n = 4k + 2$, montrez que A, B et C sont linéairement indépendants.
- 5) Dans le cas $n = 4k + 2$, montrez que les carrés $A + nB + C$ et $nA + B + C$ sont primitifs.
- 6) Soit la structure générale $tA + rB + aC$ qui renferme deux expressions identiques. Alors celle-ci n'est pas arithmétique. Pourquoi?
- 7) Vous venez de construire un carré magique M d'ordre 19 formé de 361 entiers. Vous me dites que sa somme magique est 3449 et que M est arithmétique. Je vérifie que M est bien magique, d'ordre 19 et qu'il contient que des entiers. Je vous confirme alors qu'une erreur il y a. Expliquez.
- 8) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 15 en utilisant ALG-1. Nous voulons que le plus petit entier du carré soit 4. Sur la grande diagonale principale, les 15 entiers forment, de bas en haut, une suite arithmétique de raison 3. Sur la grande diagonale secondaire, de haut en bas, les 15 entiers forment une suite arithmétique de raison 45. De plus, donnez le plus grand entier du carré ainsi que sa somme magique.
- 9) Sans l'aide de l'ordinateur, construisez, à la main, trois carrés magiques presque normaux respectivement d'ordres 9, 10 et 12 qui possèdent 5 comme plus petit entier.
- 10) Considérons un carré magique de somme S construit avec ALG-1 ou ALG-2. Quelle est la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré?
- 11) Un carré arithmétique d'ordre 7, construit avec ALG-1, a pour somme magique 385. Trouvez la somme des deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré.
- 12) Soit M , un carré magique d'ordre 12 et de somme 870. Les deux cases aux extrémités de la grande diagonale secondaire renferment respectivement les entiers 10 et 140. Pourquoi pouvons-nous dire que ce carré ne peut pas être associatif?
- 13) Construisez avec ALG-3, un carré magique presque normal d'ordre 6 formé :
 - a) Que d'entiers impairs.
 - b) Que d'entiers pairs.
 - c) Que d'entiers multiples de 3.
 - d) Que d'entiers qui ont la forme $3k+2$.
 - e) Avec autant de pairs divisibles par 3 que d'impairs divisibles par 3.
 - f) Avec autant de pairs divisibles par 3 que d'impairs divisibles par 7.
- 14) Vous avez un tableau arithmétique formé de n^2 nombres, $n \geq 3$. Pouvez-vous construire un carré magique avec ces nombres?
- 15) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 5 à partir du tableau arithmétique suivant :

5	8	11	14	17
20	23	26	29	32
35	38	41	44	47
50	53	56	59	62
65	68	71	74	77

16) Voici une structure de carrés arithmétiques d'ordre 4 que nous retrouvons dans le fichier « Ordre 4 » soit dans EXCEL ou MATHEMATICA :

$$\begin{pmatrix} a & a+3r+2t & a+3r+t & a+3t \\ a+2r+3t & a+r+t & a+r+2t & a+2r \\ a+r+3t & a+2r+t & a+2r+2t & a+r \\ a+3r & a+2t & a+t & a+3r+3t \end{pmatrix}$$

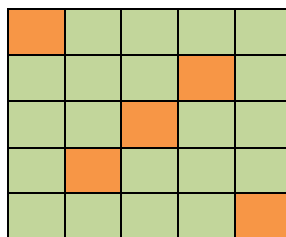
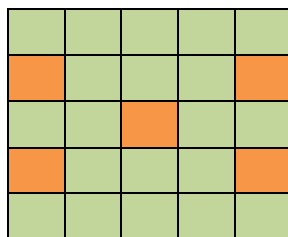
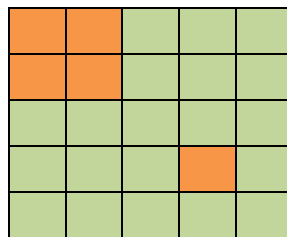
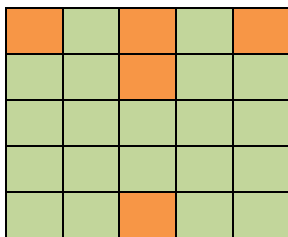
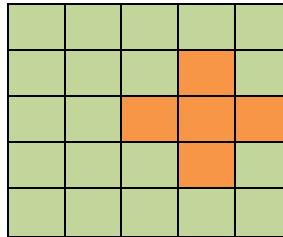
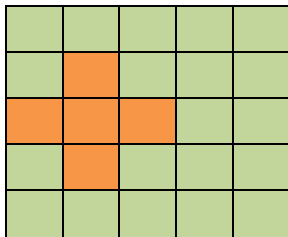
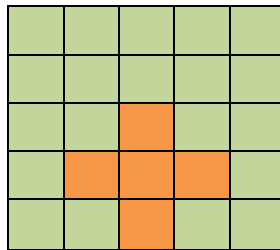
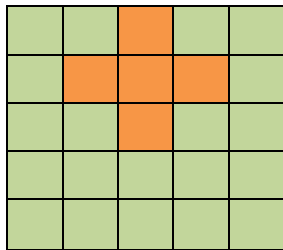
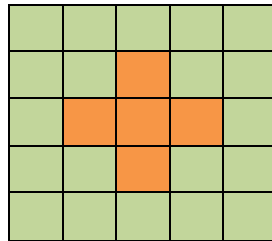
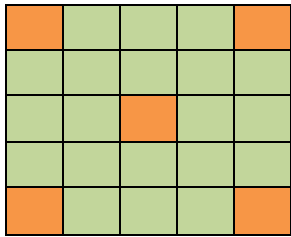
- a) Montrez que tous les carrés issus de cette structure générale sont des A-Dürer.
- b) Montrez qu'ils forment un sous-espace de dimension 3 de l'espace des A-Dürer.
- c) Retrouvez $f(S) = 68$.

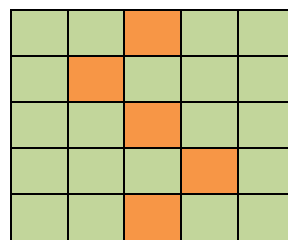
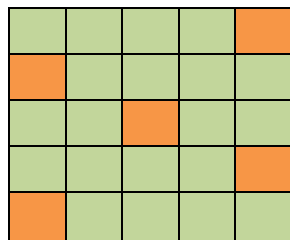
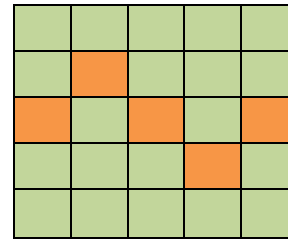
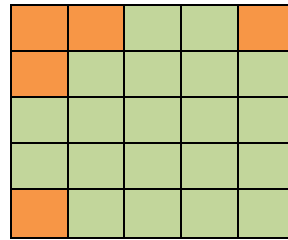
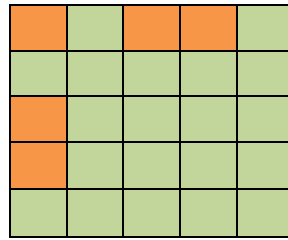
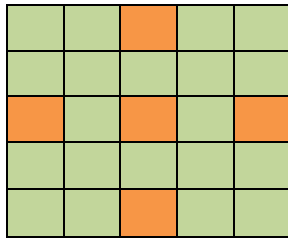
17) Soit donnée, une structure générale qui est un carré arithmétique. Montrez que deux carrés arithmétiques issus de cette structure générale ont pour somme un carré arithmétique issu de la même structure générale. De même, un carré issu de cette structure multiplié par un scalaire est aussi un carré arithmétique qui provient de la même structure.

18) Voici une structure de carrés arithmétiques d'ordre 5 que nous retrouvons dans le fichier « Ordre 5 » soit dans EXCEL ou MATHEMATICA :

$$\begin{pmatrix} a+4r+2t & a+r+4t & a+3r+t & a+3t & a+2r \\ a+r & a+3r+2t & a+4t & a+2r+t & a+4r+3t \\ a+3r+3t & a & a+2r+2t & a+4r+4t & a+r+t \\ a+t & a+2r+3t & a+4r & a+r+2t & a+3r+4t \\ a+2r+4t & a+4r+t & a+r+3t & a+3r & a+2t \end{pmatrix}$$

- a) Montrez que les seize figures suivantes sont des figures magiques de cette structure :





b) Quelles sont les super-figures?

- 19) Montrez que le nombre de figures magiques dans la structure du problème précédent est 934. Les seize figures magiques du problème 18) font donc partie de ces 934 figures magiques. Pour résoudre ce problème, utilisez le fichier « Le compte » de MATHEMATICA ou le fichier « Illustration-figures » de MAPLE (voir la Partie 3).
- 20) Montrez qu'avec ALG-1, nous pouvons construire tous les carrés magiques d'ordre 3.
- 21) Montrez qu'avec ALG-1, ALG-2 et ALG-3, nous ne pouvons pas construire tous les carrés magiques d'ordres $n \geq 4$.
- 22) Soit M , un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ tel que $r = (n-1)t$. Montrez que M ne peut pas être presque normal. Et si $t = (n-1)r$?
- 23) Soit M , un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$, fabriqué avec ALG-1 ou ALG-2. Si M est tel que $t \leq (n-1)r$ ou $r \leq (n-1)t$, alors en utilisant les fichiers d'EXCEL, des cases rouges apparaissent s'il y a des répétitions. Dans les cases blanches, nous trouvons donc des

nombres qui ne se répètent pas. Montrez que l'ensemble des cases blanches forme une figure symétrique par rapport au centre du carré et qu'il en est de même pour l'ensemble des cases rouges.

- 24) À partir de la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 6, construite avec ALG-3, trouvez quatre carrés arithmétiques normaux primitifs. Voici huit carrés normaux parmi lesquels vous pourrez trouver les quatre primitifs :

$$a = 1 \quad r = 1 \quad t = 6$$

$$a = 6 \quad r = 6 \quad t = -1$$

$$a = 36 \quad r = -1 \quad t = -6$$

$$a = 31 \quad r = -6 \quad t = 1$$

$$a = 6 \quad r = -1 \quad t = 6$$

$$a = 36 \quad r = -6 \quad t = -1$$

$$a = 31 \quad r = 1 \quad t = -6$$

$$a = 1 \quad r = 6 \quad t = 1$$

Voir dans la Partie 3 le fichier « Ordre 6 » créé dans MATHEMATICA (annexe 22) ou EXCEL (annexe 21). Vous le trouverez aussi dans le programme 13 de l'annexe 23, Partie 3.

- 25) Soit M un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$. Donnez une condition nécessaire afin qu'il n'y ait aucune répétition.

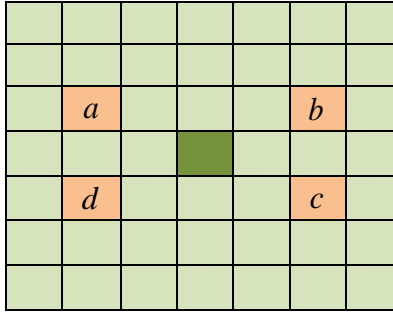
- 26) Soit M , un carré magique d'ordre $n \geq 2$.

- a) Si l'ordre d'un carré magique est $n = 2, 3$ ou 4 , alors la somme des quatre coins du carré est toujours $\frac{4S}{n}$.
- b) Si le carré magique est d'ordre $n \geq 2$ et s'il est associatif, alors la somme des quatre coins du carré est $\frac{4S}{n}$.
- c) Pour les ordres $n \geq 5$, si le carré magique est fabriqué avec ALG-1, ALG-2 ou ALG-3, alors la somme des quatre coins du carré est $\frac{4S}{n}$.
- d) Donc pour chaque ordre $n \geq 2$, il existe une infinité de carrés magiques qui ont pour somme des quatre coins, le nombre $\frac{4S}{n}$.

- 27) Soit M , un carré arithmétique d'ordre $n \geq 2$ et soient k et m , deux nombres réels. Montrez que le carré $kM + m$ est arithmétique. Notons que l'addition d'un carré magique M avec un nombre m revient à additionner m avec chaque nombre de M . Cela est équivalent à l'addition $M + mC$ où C est un carré magique trivial formé de l'entier 1.

- 28) Montrez que pour tous les ordres $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés magiques presque normaux qui renferment n^2 entiers se terminant tous par les mêmes k chiffres.

- 29) Considérons tous les carrés arithmétiques fabriqués avec ALG-1 et ALG-2. Montrez que la somme des quatre coins de tout rectangle dont le centre se situe au centre du carré et qui a ses côtés parallèles aux côtés du carré, donne toujours $\frac{4S}{n}$.



$$a + b + c + d = \frac{4S}{n}$$

- 30) Corollaire du théorème 11.2.

Soit S_n , le sous-espace de dimension 3 décrit dans l'énoncé du théorème 11.2. Ce sous-espace renferme que des carrés arithmétiques (mais pas tous en général).

- Montrez qu'il existe un sous-espace W de S_n , de dimension 2, tel que tous les nombres d'un carré quelconque de W forment une suite arithmétique.
 - Illustrez avec $n = 3$ et $n = 4$.
- 31) Démontrez qu'un carré arithmétique d'ordre $n \geq 2$ est formé exclusivement d'entiers si et seulement si a, r, t sont des entiers.
- 32) Pouvons-nous affirmer qu'un carré arithmétique d'ordre $n \geq 2$ est formé exclusivement d'entiers > 0 si et seulement si a, r, t sont des entiers > 0 ?
- 33) Prenez les carrés arithmétiques A et B de la remarque 1 à la fin de 11.3.
- Montrez qu'ils sont bien arithmétiques.
 - Montrez que $A + B$ n'est pas arithmétique.

Pour montrer que $A + B$ n'est pas arithmétique, nous vous suggérons de prendre le tableau arithmétique présenté au début de 11.2. Ensuite, identifiez les nombres qui sont dans $A + B$ ainsi que le nombre de fois que chacun apparaît.

Regardez chacun des cas suivants : $a = 0$ jusqu'à $a = 10$ et pour chacun de ces cas, les valeurs possibles de r et ensuite, les valeurs possibles de t . Vous verrez alors que...

- 34) Si un carré magique M provient d'une structure générale, alors ses équivalents proviennent-ils de la même structure générale?
- 35) Montrez qu'une combinaison linéaire de trois carrés magiques associatifs est un carré magique associatif.

- 36) Un carré magique M d'ordre $n \geq 2$ renferme n^2 nombres qui forment une suite arithmétique $a; a+r; a+2r; \dots$ avec $a > 0, r > 0$. Si s_1 est la plus petite somme de n cases distinctes et s_2 , la plus grande somme de n cases distinctes, alors montrez que la somme magique S de M est donnée par :

$$S = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

- 37) Démontrez les propriétés 2), 3) et 4) (ALG-1) au-dessus du théorème 11.3, page 10. (**)
- 38) Démontrez les six propriétés (ALG-2) au-dessus du théorème 11.4, pages 17 et 18. (**)
- 39) Démontrez les quatre propriétés (ALG-3) qui se trouvent après le carré A du troisième cas : $n \geq 6$, page 22. (**)

(**) Nous vous suggérons de faire deux photocopies du carré A dont l'une sera le carré B après une rotation de -90° de celle-ci.