Solutions des problèmes de la Partie 2

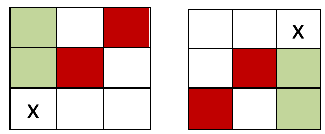
Introduction

En général, les solutions sont complètes. Dans certains cas, nous vous donnons le matériel nécessaire afin que vous complétiez vous-même la preuve.

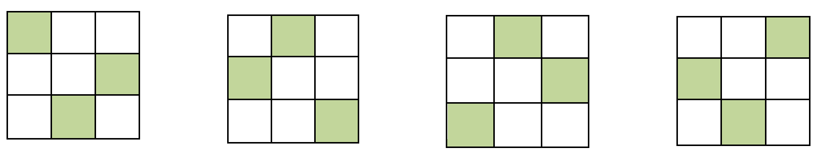
Solutions des problèmes de la Partie 2

4.3.8 Chapitres 1-2-3-4

1) Dans les deux cas, nous avons : somme des 2 cases vertes = S – x et somme des deux cases rouges = S – x.



2) $B+D=2S-A-E-G-H=(S-A-E)+(S-G-H)=K+K=2K.$ Même procédé pour les 3 autres.
3) Donc la somme magique S = 3x80 = 240. La somme des 9 cases est 3x240 = 720 d'où la somme des 8 cases est 720 – 80 = 640. (Voir problème 4 de la Partie 1, page 66).
4)



Ce sont les seules dispositions possibles et aucune n'est une figure complète.

5) La somme des cases bleues = 2S – 2E. La somme des cases vertes = 2S – 2E. La somme des cases vertes est donc 2S – 2S/3 = 4S/3.
6) Un carré magique d'ordre 2 est toujours trivial d'où :
La somme magique est donc S = 38.

19	19
19	19

7) Nous pouvons constater que 2 cases symétriques par rapport au centre du carré forment avec la case centrale soit une diagonale, soit une rangée, soit une colonne. Donc, la somme de 2 cases symétriques est S – centre = S – S/3 = 2S/3. De plus, puisque la case centrale et sa case symétrique sont les mêmes, nous avons S/3 + S/3 = 2S/3.
8) Voir le problème 4 de la Partie 1, page 66. Puis, pour les 2 autres propriétés,

A	B	C
D	E	F
G	H	K

Selon le problème 7), nous avons (A + K) + (C + G) = 2S/3 + 2S/3 = 4S/3. De la même façon, (B + H) + (D + F) = 2S/3 + 2S/3 = 4S/3.

9) Puisque 3 + 17 = 20 = 2S/3, alors S = 30 et le centre est 10. Le nombre Y est 30 – 12 = 18 et non 19. Le carré M est donc :

3	18	9
16	10	4
11	2	17

10) Prenons un carré normal d'ordre 3. Multiplions tous ses entiers par 2 puis ajoutons 1 dans toutes les cases. Les 9 entiers sont donc impairs. Terminons en multipliant tous les nombres du carré par 7.

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 18 & 4 \\ 6 & 10 & 14 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 19 & 5 \\ 7 & 11 & 15 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 63 & 133 & 35 \\ 49 & 77 & 105 \\ 119 & 21 & 91 \end{pmatrix}$$

Le dernier carré est magique presque normal et contient 9 entiers tous divisibles par 7.

11) La réponse est non. En effet, le centre du carré sera un nombre premier $p \geq 2$ et la somme magique sera $3p$. Il est clair que $3p$ n'est jamais un nombre premier :

$$3\times2\ ;\ 3\times3\ ;\ 3\times5\ ;\ 3\times7\ ;\ 3\times11\ ;\ ...$$

12) Consultez les pages 15 et 16 de la Partie 2.
   a) Notez les variables de la même façon : $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, b_1$ pour la première rangée…
   b) Trouvez les b_i et les c_i en utilisant la nouvelle variable S, la somme magique.
   c) Trouvez $A\, et\, d$.
   d) Posez les équations (**).
   e) Trouvez les équations (***) et exprimez les variables $a_{12} et\, a_{23}$ en fonctions des 15 autres variables $(S\, et\, les\ 14 a_{ij}\ puisque\, a_{12}\ et\ a_{23}\ n'y\, sont\ plus)$.
   f) Avec l'ordinateur et un bon logiciel de mathématiques, vous pourrez vous simplifier la tâche.

13) Puisque c est un multiple de 7, alors S = 3c est un multiple de 7. La somme et la différence de multiples de 7 sont toujours des multiples de 7. En complétant le carré, vous trouverez que des entiers multiples de 7.

a	b	x
	c	

14) La somme magique d'un presque normal d'ordre 3 est toujours ≥ 15. De plus, c'est le carré normal qui a 15 pour somme. Le centre d'un presque normal est donc toujours un

entier ≥ 5. Avec 5, 6, 7, 8, …comme centre, il est clair que les sommes sont $3\times$centre donc 15, 18, 21, 24, … . Toutes ces sommes sont atteintes car nous connaissons un normal de somme 15. Pour avoir une somme de 18, il suffit d'ajouter 1 dans toutes les cases. Le carré normal devient presque normal si nous ajoutons l'entier $k \geq 1$ dans toutes les cases du normal. La somme magique du presque normal sera $15+3k$.

15) Soit donné un carré magique normal d'ordre 3. Son centre est donc 5 et S = 15. Montrons qu'une case en coin ne peut pas contenir un entier impair. Supposons un impair i dans un coin, ici dans la case (1 ; 1). En rouge : nos déductions. Nous avons deux possibilités (impair i ou pair p) pour la case (3 ; 1) comme indiquées dans les carrés suivants :

$$\begin{pmatrix} i & & \\ & 5 & \\ i & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & & i \\ & 5 & \\ i & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & i & i \\ i & 5 & i \\ i & i & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & & \\ & 5 & \\ p & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & & p \\ & 5 & \\ p & & i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & p & p \\ p & 5 & p \\ p & p & i \end{pmatrix}$$

Nous voyons que dans le premier cas, il nous faut 9 impairs (nous n'en avons que 5) et dans le second, il nous faut 6 pairs (nous n'en avons que 4). La case (1 ; 1) ne peut donc pas contenir un impair. De même pour les 3 autres cas.

16) Prenons M, un carré magique normal d'ordre 3.Le carré 2M + 1 est presque normal et renferme 9 entiers impairs. Nous avons donc des impairs dans les 4 coins. Rappelons que le carré 2M + 1 est obtenu en multipliant tous les entiers de M par 2 puis en ajoutant 1 dans toutes les cases du carré 2M.

17) M est magique presque normal d'ordre $n \geq 3$. Sa somme magique est S. M' est obtenu de M en multipliant tous ses entiers par $2k$ puis en ajoutant h dans toutes les cases du carré $2kM$.

a) Le résultat est un carré magique presque normal (voir pages 7 et 8).
b) M' renferme que des entiers impairs car ceux-ci ont tous la forme $2km+h$ où h est un entier impair ≥ 1 et m, un entier ≥ 1 de M.
c) La somme magique du carré $2kM$ est $2kS$ et celle du carré M' est $2kS+nh$.
d) La somme magique de M' est impaire si n est impair; elle est pair si n est pair.

e) Avec les conditions énoncées ci-haut, M' contient que des impairs. Pour que M' contienne que des entiers pairs, il nous faut modifier les conditions. Par exemple, accepter que $h = 0$ ou que h soit pair.

18) Il est évident que tous les nombres du carré (voir page 23) sont des entiers dès que A, r et t le sont. Si tous les nombres du carré sont des entiers, alors il est évident que A est un entier. A + r est un entier d'où r est entier. De même, A + t est entier d'où t est entier.
Avec la structure générale (1) de la page 20, un carré renferme que des entiers si et seulement si $a\; et\; b$ sont des entiers et $S/3$, un entier.

19)

a) Le carré A est toujours magique presque normal et tous ses entiers se terminent par les mêmes k chiffres, les k chiffres de r.

b) La somme magique du carré M est S et celle du carré A est le nombre $10^k S + nr$.

20) Construisez un carré magique normal M d'ordre 6 avec ALG-3 ou encore avec le fichier «Ordre 6» de MATHEMATICA ou d'EXCEL. Sa somme magique est $S = 111.$ Le carré $10^5 M + 11111$ est le carré cherché dont la somme magique est :
$10^5 \times 111 + 66666 = 11\,166\,666.$

21) Considérons les structures générales (1) et (1.1) :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

$$(1.1) \qquad \begin{pmatrix} A+t+2r & A & A+2t+r \\ A+2t & A+t+r & A+2r \\ A+r & A+2t+2r & A+t \end{pmatrix}$$

Dans (1.1), posons $A = b\ ;\ r = a - \frac{S}{3}\ ;\ t = \frac{2S}{3} - a - b.$ Nous obtenons (1).

Dans (1), posons $b = A\ ;\ a = A + 2r + t\ ;\ S = 3A + 3r + 3t.$ Nous obtenons (1.1).

Les structures (1) et (1.1) sont donc équivalentes. Tout carré généré par (1) est généré par (1.1) et réciproquement.

Montrons maintenant que la structure générale (1.1) est équivalente à la structure générale du fichier «Ordre 3» que nous noterons ici (1*) :

$$(1^*) \qquad \begin{pmatrix} a+2R+T & a+2T & a+R \\ a & a+R+T & a+2R+2T \\ a+R+2T & a+2R & a+T \end{pmatrix}$$

Dans (1.1), posons $A=a+2T\,;\ r=R\ ;\ t=-T.$ Nous obtenons (1*).

Dans (1*), posons $a=A+2t\ ;\ R=r\ ;\ T=-t.$ Nous obtenons (1.1).

Les structures (1*) et (1.1) sont donc équivalentes. Tout carré généré par (1*) est généré par (1.1) et réciproquement.
Les structures générales des carrés magiques d'ordre 3, (1), (1.1) et (1*) sont donc équivalentes 2 à 2.

22) Nous allons nous servir du résultat du problème 15. Dans un carré magique normal d'ordre 3, un impair ne peut pas se trouver dans une case en coin. Nous aurons donc un entier pair dans toutes les cases en coin. Il n'y a que 4 pairs de 1 à 9.

$$\begin{pmatrix} 2 & & 6 \\ & 5 & \\ 4 & & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & 4 \\ & 5 & \\ 6 & & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & & 8 \\ & 5 & \\ 2 & & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & & 2 \\ & 5 & \\ 8 & & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & 8 \\ & 5 & \\ 2 & & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & 2 \\ & 5 & \\ 8 & & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & & 6 \\ & 5 & \\ 4 & & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & & 4 \\ & 5 & \\ 6 & & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Ces 8 carrés sont les seuls possibles. Ils sont tous les équivalents du carré situé entre les deux flèches $\rightarrow \leftarrow$ lequel sera notre primitif.

23) Revoici la première structure générale des carrés magiques d'ordre 3 :

6	1	8
7	5	3
2	9	4

A

a	b	S – a – b
4S/3 – 2a – b	S/3	2a + b – 2S/3
a + b – S/3	2S/3 – b	2S/3 – a

B

Le tableau arithmétique (voir chapitre 11) du carré A est :

1 2 3
4 5 6 A = 1; r = 2 – 1 = 1; t = 4 – 1 = 3
7 8 9

Dans B,
A = b
r = a + b – S/3 – b = a – S/3
t = 2S/3 – a – b

5.18 Chapitre 5

1) Les cases de la figure magique sont notées A, B, C et D et celles-ci contiennent les nombres A, B, C et D respectivement. Nous avons donc A + B + C + D = S. Notons A', la case symétrique de la case A par rapport au centre du carré, laquelle contient le nombre A' d'où A + A' = S/2 puisque nous avons un A-Dürer. Il s'ensuit que :
A + A' + B + B' + C + C' + D + D' = S/2 + S/2 + S/2 + S/2 = 2S d'où A' + B' + C' + D' = S puisque A + B + C + D = S.
2) Le nombre de figures dans un carré d'ordre n est :
$$C_n^{n^2} = \frac{\left(n^2\right)!}{n!\,(n^2-n)!} = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)...(n^2-(n-1))}{n(n-1)(n-2)...3.2.1} = n(n+1)\frac{(n^2-2)...(n^2-(n-1))}{(n-2)....3.2.1}$$
$$= n(n+1)\,m.$$
Il reste à montrer que m est un entier et alors $C_n^{n^2}$ sera un entier pair. Le nombre m a la forme $\dfrac{produit\ de\ (n-2)\ entiers\ consécutifs}{(n-2)!}$. Ce qui suit nous montre que m est toujours un entier. En effet :
$$C_n^{k+n} = \frac{(k+n)!}{n!k!} = \frac{1.2.3....k(k+1)....(k+n)}{k!n!} = \frac{(k+1)...(k+n)}{n!}$$ qui est un entier puisque C_n^{k+n} est évidemment un entier.
3) La réponse est non puisque les nombres d'un diabolique aussi bien qu'un diabolique-alpha forment toujours une suite arithmétique. Il est clair que 1, 2 et 5 ne font pas partie d'une suite arithmétique. Dans un diabolique non trivial, il n'y a jamais de répétition. Il en est de même pour un diabolique-alpha.
4) Oui s'il est trivial. Non s'il n'est pas trivial. Les nombres 3, 5 et 5 ne font pas partie d'une suite arithmétique et le carré ne peut pas être un diabolique.
5)

$$\begin{pmatrix} 17 & 72 & 67 & 2 \\ 22 & 47 & 52 & 37 \\ 42 & 27 & 32 & 57 \\ 77 & 12 & 7 & 62 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 62 & 7 & 12 & 77 \\ 57 & 32 & 27 & 42 \\ 37 & 52 & 47 & 22 \\ 2 & 67 & 72 & 17 \end{pmatrix}$$

Les deux diaboliques

$$\begin{pmatrix} 77 & 12 & 7 & 62 \\ 22 & 47 & 52 & 37 \\ 42 & 27 & 32 & 57 \\ 17 & 72 & 67 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 67 & 72 & 17 \\ 57 & 32 & 27 & 42 \\ 37 & 52 & 47 & 22 \\ 62 & 7 & 12 & 77 \end{pmatrix}$$

Les deux diaboliques – alpha

6) Voici un A-Dürer et un cerf-volant vertical (a, b, c, d). Nous avons :
$a + b + c + d + m + n + r + s = 2S$. Puisque $a + b + c + d = S$, alors
$m + n + r + s = S$. Nous avons donc le cerf-volant bleu.

	b	n	
a	m	c	r
	d	s	

Remarque : dire qu'un carré magique possède un cerf-volant sous-entend que le cerf-volant est une figure magique.

	b	x	
a		c	
m	u	r	w
	d	v	

Montrons maintenant que (m, d, r, b) est une figure magique. La structure générale (2.8) des A-Dürer nous montre que $\underline{a + c = m + r}$ d'où $m + r + b + d = a + c + b + d = S$.

Enfin, le cerf-volant blanc est aussi une figure magique puisque nous avons :

$m + u + r + w + b + x + d + v = 2S = (m + d + r + b) + (u + v + w + x)$. Nous concluons que $u + v + w + x = S$ puisque $(m + d + r + b) = S$. Nous venons de montrer que si le carré possède un cerf-volant vertical, alors il en possède quatre. De même si le A-Dürer possède un cerf-volant horizontal, alors il en possède quatre.

7) Voici un Dürer qui possède le cerf-volant (a, b, c, d). La fusée, en bleu, est une figure magique. Une des propriétés des Dürer est que la somme des 4 coins de tous les sous-carrés d'ordre 3 est une figure magique.
Nous avons donc : $(a + c + s + t) + (b + m + r + d) = (m + r + s + t) + (a + b + c + d) = 2S$.
Nous concluons que $m + r + s + t = S$ puisque $a + b + c + d = S$.

	b		
a	m	c	
	r		
s	d	t	

8) Cette disposition n'est pas possible. Puisque le carré est normal, sa somme magique est 34 donc paire. La seule façon de compléter le carré nous conduit au carré :

i	i	i	i
i	p	p	i
p	i	i	p
p	p	p	p

Les 8 impairs totalisent 64. Puisque nous supposons que le carré soit magique, les 4 impairs de la première rangée totalisent 34. La somme des 4 autres est donc 30. Selon le théorème 5.32, la somme des 2 impairs de la deuxième rangée est égale à la somme des 2 impairs de la troisième rangée. Nous voyons alors que la somme des 2 impairs de la deuxième rangée est 15 d'où la contradiction. Un carré magique normal d'ordre 4 ne peut donc pas avoir cette disposition.

9) a. Prenez M, un carré normal d'ordre 4. Le carré 2M + 1 sera presque normal et contiendra 16 impairs.
b. 2M fera l'affaire.
c. Prenez M, 3M, 5M, …
d. 3M fera l'affaire.
e. Prenez un carré magique normal M d'ordre 4 et enlevez 1 dans chaque case. Multipliez le carré M'ainsi obtenu par R, la raison non nulle de la suite arithmétique. Enfin, ajoutez dans toutes les cases le nombre A, le premier terme de la suite A, A + R, A + 2R, A + 3R, …, A + 15R. La somme magique est S = 2 (2A + 15R). Pour qu'elle soit nulle, nous pourrions prendre, par exemple, R = 2 et A = -15. Le carré obtenu possède l'antisymétrie centrale et tout comme M, c'est un diabolique.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} -9 & 13 & 11 & -15 \\ -7 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -5 & -3 & 7 \\ 15 & -11 & -13 & 9 \end{pmatrix}$$

10) Consultez la section 14.14 du chapitre 14.

1	6	7	4
4	7	6	1
8	3	2	5
5	2	3	8

4	1	5	8
7	6	2	3
6	7	3	2
1	4	8	5

Le carré de gauche, appelé M, est un Dürer de somme S = 18. Il renferme les entiers de 1 à 8, chacun apparaissant deux fois. Le carré de droite, appelé N, est la rotation de 90° de M; c'est aussi un Dürer de somme S = 18. Nous allons construire 10M + N et 10N + M. Ces carrés sont des permutés de même somme puisque M et N sont de même somme. De plus, ils sont des Dürer presque normaux.

14	61	75	48
47	76	62	13
86	37	23	52
51	24	38	85

10M + N ; S = 198

41	16	57	84
74	67	26	31
68	73	32	25
15	42	83	58

10N + M ; S = 198

Tous les entiers de ces deux carrés sont formés avec les chiffres de 1 à 8. Pour avoir des entiers formés avec les chiffres de 2 à 9, il suffit d'ajouter 1 dans toutes les cases de M et de reprendre la même démarche.

11) Le carré M du numéro précédent est aussi un A-Dürer. Il en résulte que les deux permutés sont aussi des A-Dürer de somme S = 198.
Pour avoir des permutés de sommes différentes, nous prendrons N de somme différente de celle de M. Pour cela, ajoutons 1 dans toutes les cases de N du numéro précédent.

1	6	7	4
4	7	6	1
8	3	2	5
5	2	3	8

M

5	2	6	9
8	7	3	4
7	8	4	3
2	5	9	6

N --> N'

Trouvons maintenant les permutés 10M + N' et 10N' + M. Les sommes sont différentes, ici 202 et 238, mais les deux permutés sont toujours des A-Dürer.

15	62	76	49
48	77	63	14
87	38	24	53
52	25	39	86

10M + N ; S = 202

51	26	67	94
84	77	36	41
78	83	42	35
25	52	93	68

10N + M ; S = 238

12) Nous avons un carré magique non trivial M, d'ordre $n \geq 3$. Puisque celui-ci est non trivial, alors il existe au moins deux nombres différents. Nous savons qu'alors il existe un plus petit nombre (pas nécessairement unique) et un plus grand nombre (pas nécessairement unique). Appelons ces deux nombres u et v avec u < v. Ordonnons les n^2 nombres du carré magique du plus petit au plus grand, de gauche à droite et appelons s, la somme de ceux-ci. De plus, nous avons $S = \frac{s}{n}$.
Considérons maintenant la somme des n plus petits nombres notée a et la somme des n plus grand nombres notée b.

_______u______u'______________________________v'_______v________________

a b

a est donc la somme des nombres de u à u' et b, la somme des nombres de v' à v.
Nous devons montrer que $a < b$. N'oublions pas que la suite des n^2 nombres du carré forme une suite croissante.
Si u' < v', alors il est clair que $a < b$.
Si u' = v', alors tous les nombres de u' à v' sont égaux à u', y compris v'. D'où entre u' = v' et v, nous trouvons au moins un nombre > u' si u = u'. Nous trouvons au moins un nombre < u' entre u et u' si v = u'. Si u et v sont différents de u', alors il existe au moins un nombre > u' entre u' et v et au moins un nombre < u' entre u et u'. Dans tous les cas, il est clair que $a < b$.
Maintenant, nous avons :

(*) $$s > na \text{ et } s < nb \Rightarrow \frac{s}{n} > a \text{ et } \frac{s}{n} < b \Rightarrow S > a \text{ et } S < b.$$

Finalement, $$a < S < b$$

Si le carré magique est presque normal, alors le résultat est presque évident. En effet, la suite sera strictement croissante d'où $a < b$ de façon évidente et avec (*), nous trouvons $a < S < b$.

13) Nous voulons ici trois super-Dürer pythagoriciens. Nous avons choisi M, un super-Dürer normal. Nos trois carrés super-Dürer sont : 3M, 4M et 5M.

3	42	12	45
24	33	15	30
39	6	48	9
36	21	27	18

3M

4	56	16	60
32	44	20	40
52	8	64	12
48	28	36	24

4M

5	70	20	75
40	55	25	50
65	10	80	15
60	35	45	30

5M

$$48^2 + 64^2 = 80^2 \quad 42^2 + 56^2 = 70^2$$

14) Pour construire ce sous-espace, partez de la structure générale des carrés magiques d'ordre 4. Puis imposez les deux figures EBCH et BEJQ (voir (*) de 5.1). Vous perdrez alors deux variables et le sous-espace sera de dimension 6. Avec MATHEMATICA, vous pourrez trouver la fréquence du sous-espace en utilisant le fichier «Le compte». Avec MAPLE, vous pourrez aussi trouver la fréquence de la structure générale ainsi que les figures magiques de celle-ci en utilisant le programme «Total-combin». Parmi les 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4, 384 sont dans le sous-espace. Avec la liste des 7040 carrés magiques normaux d'ordre 4, vous pourriez trouver les 384 du sous-espace ou encore, vous faire un programme pour les trouver.

15) Nous devons compléter le carré magique suivant dont la somme est 40 (somme des 4 nombres centraux). Les 4 cases centrales forment toujours une figure magique pour l'ordre 4.

5	b	4	31-b
a	8	7	25-a
3	16	9	12
32-a	16-b	20	18

Pour que ce carré soit magique, il faut 86 – a – b = 40, équation que nous

retrouvons 3 fois d'où a + b = 46 et b = 46 – a. Ce qui donne :

5	46-a	4	a-15
a	8	7	25-a
3	16	9	12
32-a	a-30	20	18

a) Puisque nous avons la variable a, nous pouvons trouver une infinité de carrés magiques.
b) Il suffit de donner à a trois valeurs entières différentes.
c) Il est facile de vérifier avec un tableau des valeurs que le carré contient 1, 2 ou 3 entiers négatifs pour chaque valeur entière de a.
d) La seule façon d'avoir un zéro est de donner à a les valeurs 0, 15, 25, 30, 32 et 46. Nous aurons 1 seul entier négatif a = 15, 25, 30, 32, 31 et de 16 à 24. Nous aurons 2 entiers négatifs pour a = 0, 46, de 1 à 14, de 26 à 29, de 33 à 45.Enfin, 3 entiers négatifs pour a de -1 à $-\infty$ et pour a de 47 à ∞.
e) Ce carré ne peut pas être un Dürer car le sous-carré 2x2 dans le coin bas-droite doit être une figure magique ce qui n'est pas le cas ici puisque la somme est 59 alors que la somme magique est 40. Ce n'est pas non plus un super-Dürer-alpha car ce dernier est avant tout un Dürer.

16) Évident selon les théorèmes 5.19 et 5.21. Si le diabolique est trivial, alors il possède 1820 soit C_4^{16} figures magiques d'où une quatre-vingt-septième.
17) Tous les nombres premiers sont impairs excepté 2. Si 2 était dans le carré, la somme de la rangée qui contient 2 aurait une parité différente d'une autre rangée. Si le carré est magique, alors il ne peut pas contenir 2.
18) Nous aurons une somme magique paire > 2 qui n'est donc pas un nombre premier.
19) La structure générale (2.8) des A-Dürer nous montre clairement que la somme magique doit être paire si nous voulons que des entiers dans le carré.
20) Nous devons ici préciser que si nous avons une suite arithmétique de raison non nulle, alors elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Dans les deux cas, nous avons un plus petit nombre (unique) et un plus grand nombre (unique). Nous affirmons qu'avec les mêmes k nombres, nous ne pouvons pas construire une troisième suite arithmétique qui devra être soit strictement croissante, soit strictement décroissante et nous avons déjà ces deux suites!!
21) Soit donné un diabolique. Oui, comme tous les carrés magiques, une rangée est une super-figure. Nous pourrions les appeler des super-figures triviales. De même pour les colonnes. S'il est trivial, alors toutes ses figures sont des super-figures.

22) Regardons la section 5.14. Tout carré magique normal d'ordre 4 appartient à un des 24 groupes. Pour chaque figure qui caractérise les carrés magiques d'ordre 4, nous allons voir dans chacun des 24 groupes ce que nous trouvons.
Prenons **les 4 rangées** et **les 4 colonnes** dans chaque groupe. Nous trouvons toujours 2 pairs et 2 impairs dans chacune.
Prenons **les 4 coins**. Dans tous les groupes, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs.
Prenons **les 4 cases centrales**. Nous trouvons 2 pairs et 2 impairs dans tous les groupes.
Prenons **les 2 cases centrales de la première rangée et les 2 cases centrales de la quatrième rangée**. Dans les 24 groupes, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs.
Prenons **les 2 cases centrales de la première colonne et les 2 cases centrales de la quatrième colonne**. Dans les 24 groupes, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs.
Quant aux 2 grandes diagonales, certaines renferment 2 pairs et 2 impairs, d'autres renferment 4 pairs et les autres renferment 4 impairs.
23) Nous venons de voir que dans tous les carrés magiques normaux d'ordre 4, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs dans 12 des 14 figures magiques qui caractérisent les carrés magiques d'ordre 4. Dans tous les groupes notés de 9 à 24, nous trouvons 2 pairs et 2 impairs dans chacune des grandes diagonales. Le tableau juste en dessous des 24 groupes indique le nombre de carrés dans chaque groupe. Le total pour les groupes de 9 à 24 est 5696. Nous avons donc environ 80,909% des carrés magiques normaux d'ordre 4 qui possèdent 2 pairs et 2 impairs dans les 14 figures magiques qui les caractérisent soit 5696/7040.
24) Les carrés magiques d'ordre 2 sont tous triviaux. Nous pouvons donc avoir un tel carré qui contient 4 pairs aussi bien que 4 impairs. Pour $n \geq 3$, nous pouvons toujours construire un carré magique normal M. Le carré 2M renferme que des entiers pairs tandis que 2M + 1 renferme que des entiers impairs.
25) Oui. Les carrés magiques normaux d'ordres pairs par exemple.
26) Il est évident que parmi tous les carrés magiques presque normaux, le carré normal ait la plus petite somme soit $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.
27) Tous les entiers s'écrivent $4k \; ou \; 4k+1 \; ou \; 4k+2 \; ou \; 4k+3$ avec k qui parcourt $\mathbb{Z}$.
Nous allons trouver $\dfrac{n^3+n}{2}$ lorsque $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ respectivement.

D'où :

$$32k^3 + 2k \quad PAIR$$
$$32k^3 + 24k^2 + 8k + 1 \quad IMPAIR$$
$$32k^3 + 48k^2 + 26k + 5 \quad IMPAIR$$
$$32k^3 + 72k^2 + 56k + 15 \quad IMPAIR$$

28) La réponse est non. En effet, si M est normal, alors 2M est presque normal et renferme que des entiers pairs.
29) Voir les problèmes 22 et 23 ci-haut.

30) Soit A un carré magique avec f(A) = k. Si nous multiplions A par b, une figure magique dans A reste magique dans b A et une figure non magique dans A reste non magique dans b A. De même si nous additionnons un même nombre dans toutes les cases de A. Il s'ensuit que f(M) = k et f(N) = k.
31) Le problème 30 nous permet de conclure que tous les diaboliques ont la même fréquence c'est-à-dire le même nombre de figures magiques. En effet, tout diabolique non trivial D s'écrit D = u X + r Y où X est trivial, Y un diabolique non trivial et r non nul (voir 5.10). De même, tous les diaboliques-alpha (voir 5.11) ont la même fréquence et tous les super-Dürer-bêta (voir 5.7) ont la même fréquence.
32) La réponse est oui. Si les deux carrés A et B renferment les même nombres, alors la somme de ceux-ci est la même, disons s. Les deux sommes magiques sont S = s/n, donc les mêmes. Si F est une figure magique dans A, alors les nombres de cette figure, qui se retrouvent dans B, vont constituer une figure magique dans B laquelle n'aura probablement pas la même forme que F. De même si F est une figure magique dans B.
33) La réponse est oui. Enlevons 1 dans toutes les cases de A. Selon le problème 30, nous avons f(A) = f(A – 1). A renferme tous les entiers de 1 à n^2 et A – 1 renferme tous les entiers de 0 à $n^2 - 1$. Considérons maintenant la suite arithmétique :

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ ...,\ a+(n^2-1)r$$

qui forme le carré B. Nous pouvons écrire B comme suit :

$$B = a + r\begin{pmatrix} \textit{carré magique} \\ \textit{avec les entiers de} \\ 0\,\grave{a}\,n^2-1 \end{pmatrix} = a + r\,M$$

Selon le problème 32, nous avons f(M) = f(A – 1) d'où f(B) = f(A).
34) Selon le théorème 9.6, le produit (matriciel) AB est un trivial de somme 60×80. Nous trouvons donc dans chaque case de AB le nombre 4800/4 = 1200.
35) Selon le théorème 9.5, le produit AB est un trivial de somme k n T. Le carré AB renferme donc le nombre kT dans chacune de ses cases.
36) Selon le théorème 9.7, A^{2018} est un trivial de somme S^{2018}. Nous trouvons donc dans chaque case de A^{2018}, le nombre $\frac{S^{2018}}{4}$.
37) Dans la section 5.6, vous verrez qu'il n'existe que 8 super-Dürer-alpha normaux. Choisissez M, un des huit puis trouvez 7M. Ce dernier carré contiendra 16 multiples de 7 dont 8 pairs et 8 impairs.
38) Il suffit de prendre un Dürer normal M. Il en existe 3456 et vous en trouverez un dans 5.4. Trouvez ensuite A = M + 1 et B = M + 4. Le carré cherché est A + Bi.

39) Ce carré est magique de somme 6 modulo 7. C'est un Dürer car le total des nombres dans le carré vert est 6 modulo 7. Ce n'est pas un super-Dürer puisque le carré d'ordre 2 formé des 2 cases centrales des première et deuxième rangées n'est pas une figure magique (la somme est 2 modulo 7).

2	3	4	4
5	3	6	6
4	1	3	5
2	6	0	5

40) $S = \dfrac{n^3+n}{2} = \dfrac{10^{3k}+10^k}{2} = \dfrac{(1000^k+10^k)5}{10}$. Évaluons d'abord la parenthèse.

$1000^k = 10000...000 = 1000...000\,0\,000...000$ où il y a $2k-1$ zéros rouges entre le 1 et le 0 noir et k zéros rouges après le 0 noir. En tout, $3k$ zéros après le 1.

$10^k = 1000...000$ où il y a k zéros après le 1.

$1000^k + 10^k = 1000...0001000...000$ où il y a $2k-1$ zéros entre les 1 et k zéros après le second 1.

Il reste à multiplier la parenthèse par 1/2 donc par 5/10 ce qui donne :

$$S = 5000...0005000...000$$

avec $2k-1$ zéros entre les deux 5 et $k-1$ zéros après de second 5.

Pour un carré magique normal d'ordre 10, la somme est 505 puisque $k=1$.
Pour l'ordre 100, la somme est 500050 puisque $k=2$.
Pour l'ordre 1000, la somme est 500000500 puisque $k=3$.
Pour l'ordre 1 000 000, la somme est $5\ 000\ 000\ 000\ 00500\ 000$ puisque $k=6$.

41) Il faut montrer qu'un carré magique associatif est un Dürer.

a	e		
g	c		
		d	h
		f	b

Supposons que le carré magique soit associatif. Nous avons alors :

$a + b = S/2$; $c + d = S/2$; $e + f = S/2$; $g + h = S/2$. Nous savons donc que la somme $a + b + c + d + e + f + g + h = 2S$ puis que $a + c + e + g = b + d + f + h$. En effet, $a + c + e + g = 2S$ – la somme des 4 cases rouges. Également, $b + d + f + h = 2S$ – la somme des 4 cases rouges. Il s'ensuit que $a + c + e + g = S$ et que le carré associatif est un Dürer.

42) C'est une conséquence immédiate du problème 41.
Carré magique M associatif $\Rightarrow$ Dürer $\Rightarrow$ A-Dürer puisque par définition, un A-Dürer est un Dürer associatif.
Carré magique M est un A-Dürer $\Rightarrow$ associatif par définition.

43) Soit M, un carré magique d'ordre 4 qui est pandiagonal. C'est donc un super-Dürer selon le théorème 5.9. Nous voulons montrer que $A + D = B + C = S/2$.

A		B	
	M		
C		D	
			N

Puisque M est un Dürer, alors nous avons $A + B + C + D = S$. (1)
De plus, nous avons $A + M + D + N = S$ (2)
Et $B + M + C + N = S$ (3) puisque M est pandiagonal.
Additionnons (2) avec (3). Nous trouvons $A + B + 2M + C + D + 2N = 2S$ ou encore $A + B + C + D + 2(M + N) = 2S$ d'où $2(M + N) = S$, $M + N = S/2$ et finalement $A + D = S/2$ et $B + C = S/2$.
Il en est de même pour les 3 autres carrés 3x3.

44) M est un Dürer.

(*)

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	M	N
P	Q	R	T

Nous avons donc $(A + B + E + F) + (M + N + R + T) = (A + F + M + T) + (B + E + N + R) = S + (B + E + N + R) = 2S$ d'où $B + E + N + R = S$.
De la même façon pour $C + H + J + Q = S$.

45) Notre carré magique d'ordre 4 possède la figure magique A + C + I + K = S.

A	B	C	D
E	F		
I		K	
N			T

Nous avons 3S = (A + B + C + D) + (A + E + I + N) + (A + F + K + T) =
= (A + B + E + F) + (A + C + I + K) + (A + D + N + T) = (A + B + E + F) + S + S d'où
A + B + E + F = S et le carré est un Dürer.

46) Notre carré magique renferme la figure magique A + B + C + D = S.

r	A		
B	t		
		u	C
		D	v

Nous avons 2S = (A + B + C + D) + (r + t + u + v) = (A + B + r + t) + (C + D + u + v) où A + B + r + t = C + D + u + v (voir le problème 41). Il s'ensuit que A + B + r + t = S et le carré est un Dürer.

47) Pour trouver cet algorithme, observons d'abord la structure générale (2.1) des Dürer (voir 5.4).

a) Nous constatons qu'il faut que a, b, c, d et f soient des entiers impairs positifs et que g et S soient des entiers pairs positifs.

b) Il faudra obtenir 16 entiers différents.

c) S'il y a un 0 ou des négatifs, alors nous les ferons disparaître en ajoutant un certain entier positif dans toutes les cases du carré.

25	55	5	7
11	1	19	61
6	16	56	14
50	20	12	10

17	31	3	39
13	29	27	21
54	18	16	2
6	12	44	28

Si nous ajoutons l'entier positif k dans toutes les cases du carré M, alors les rangées formées d'impairs seront formées de pairs et les rangées formées de pairs seront formées d'impairs si k est impair.

48) Dans la liste des 880 carrés magiques normaux primitifs (voir partie 3 du livre, appelée aussi le CD), nous en avons trouvé un qui possède une figure complète idéale et qui est un Dürer.

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

La figure complète est idéale car elle contient les 4 plus grands entiers. Dans chaque case de la figure complète, ajoutez l'entier $k \geq 0$. Vous obtiendrez alors un nouveau carré magique Dürer presque normal de somme magique $S = 34 + k$.

49) Soit donné un carré magique M d'ordre 4.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	P	Q

(A)

D	B	C	A
H	F	G	E
L	J	K	I
Q	N	P	M

(B)

Q	N	P	M
H	F	G	E
L	J	K	I
D	B	C	A

(C)

Il est très facile de vérifier que le carré (C) est magique. Maintenant supposons que le carré (A) soit presque normal. Alors, observons les 3 cases blanches de (A) et les 3 cases blanches de (C). Nous voyons que (C) n'est pas un équivalent de (A). Les carrés (A) et (C) sont donc primitifs. **Observez aussi que (A) Dürer implique (C) Dürer.**

50) Nous allons utiliser la structure générale (2.8) des A-Dürer que voici. Tous les A-Dürer sont issus de (2.8).

a)

$$(2.8)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ S-a-c-f & -b+c+f & f & a+b-f \\ \frac{S}{2}-a-b+f & \frac{S}{2}-f & \frac{S}{2}+b-c-f & -\frac{S}{2}+a+c+f \\ -\frac{S}{2}+a+b+c & \frac{S}{2}-c & \frac{S}{2}-b & \frac{S}{2}-a \end{pmatrix}$$

Nous voulons que $\frac{S}{2} - c = 15 \ et \ \frac{S}{2} - b = 14$ d'où $c = 2 \ et \ b = 3$ puisque $S = 34$.

Ainsi, (2.8) devient :

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 2 & 29-a \\ 32-a-f & f-1 & f & 3+a-f \\ 14-a+f & 17-f & 18-f & f+a-15 \\ a-12 & 15 & 14 & 17-a \end{pmatrix}$$

Puisque nous voulons un A-Dürer normal, alors nous devons avoir $a-12 \geq 1$ d'où l'entier $a = 13 ou 16$ puisque $14 et 15$ sont déjà dans le carré.

Avec $a = 13$, nous trouvons dans le carré, les nombres $1, 2, 3, 4, 13, 14, 15, 16$. Il s'ensuit que les valeurs permises pour f sont les entiers de $5 à 12$. Les deux seuls carrés magiques normaux sont obtenus avec $a = 13 \ et \ f = 7$ puis avec $a = 13 \ et \ f = 11$.

Avec $a = 16$, nous trouvons les mêmes entiers dans le carré et les valeurs permises pour f sont les mêmes. Les deux seuls carrés magiques normaux sont obtenus avec $a = 16 \ et \ f = 7$ puis avec $a = 16 \ et \ f = 11$. La structure générale (2.8) peut donc générer seulement 4 A-Dürer normaux avec 15 14 dans les cases centrales de la quatrième rangée. Les voici :

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 3 & 2 & 16 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 1 & 15 & 14 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 13 \ ; \ f = 7 \qquad a = 13 \ ; \ f = 11 \qquad a = 16 \ ; \ f = 7 \qquad a = 16 \ ; \ f = 11$$

Il est intéressant de voir que si nous permutons les deux rangées centrales d'un A-Dürer, alors nous obtenons un nouveau A-Dürer. Vous pouvez le vérifier avec la structure générale (2.8) ou encore, utiliser une figure magique des A-Dürer.

b) Parmi les quatre A-Dürer ci-haut, il n'y a qu'un seul diabolique-alpha normal soit le dernier à droite (a = 16 et f = 11); c'est celui d'Albert Dürer. Les trois autres ne sont ni des diaboliques, ni des diaboliques-alpha.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 & 16 \\ 14 & 8 & 9 & 3 \\ 15 & 5 & 12 & 2 \\ 4 & 10 & 7 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 7 & 12 & 9 & 6 \\ 10 & 5 & 8 & 11 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons trouvé le Dürer de gauche dans la liste des 880 carrés normaux d'ordre 4. C'est un Dürer non associatif (13 + 1 = 14 au lieu de 17). Celui de droite est un équivalent de celui de gauche, donc toujours un Dürer non associatif.

d) Dans la même liste, nous avons trouvé celui de gauche qui n'est pas un Dürer et qui n'est pas associatif.

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 5 & 11 & 8 & 10 \\ 12 & 6 & 9 & 7 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 7 & 9 & 6 & 12 \\ 10 & 8 & 11 & 5 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Celui de droite est la rotation de 180° de celui de gauche donc toujours non Dürer et non associatif.

e) Il nous faut montrer qu'aucun super-Dürer normal ne peut contenir $15 \;\; 14$ dans les cases centrales de la quatrième rangée. Voyons la structure générale (2.2) des super-Dürer :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

Nous devons avoir : $\frac{S}{2}-b-c+d=15 \; et \; \frac{S}{2}-d=14$

Puisque nous voulons un super-Dürer normal, alors $S=34$. Nous trouvons :

$$d=3 \; et \; b+c=5$$

Notre structure générale devient :

$$\begin{pmatrix} a & b & 5-b & 29-a \\ 3 & 31-a-b & a+b-2 & 2 \\ b+12 & a-12 & 17-a & 17-b \\ 19-a-b & 15 & 14 & a+b-14 \end{pmatrix}$$

Puisque $a-12 \geq 1$, alors $a=13 \ ou \ a=16$. De plus, $5-b \geq 1$ d'où $b \leq 4$.
Puisque nous avons déjà $2 \, et \, 3$ dans le carré, il s'ensuit que $b=1 \ ou \ b=4$.
Voyons si une de ces 4 possibilités peut nous conduire à un super-Dürer normal. Dans les quatre cas, le carré obtenu n'est pas normal. Donc aucun super-Dürer normal renferme $15 \ 14$ dans les deux cases centrales de la dernière rangée.

51) Prenez un carré magique normal d'ordre 4 et multipliez-le par 100.
a)

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

400	1500	1400	100
500	1000	1100	800
900	600	700	1200
1600	300	200	1300

Les deux carrés sont magiques et le carré vert renferme les poids des 16 lingots.

Une rangée nous indique quels sont les 4 lingots qu'un enfant peut recevoir.

Les 4 rangées nous donnent une façon d'effectuer le partage. Le carré vert étant magique, la somme des 4 lingots d'une rangée donne toujours le même total.

b) La façon de faire n'est pas unique. Nous pourrions prendre les colonnes. Aussi, observez que le carré est un Dürer d'où une troisième façon de faire le partage soit en prenant les 4 carrés 2x2 de chaque coin. **Trouvez-en une autre.**
c) Chacun recevra 3400 grammes d'or soit la somme magique.

52) Un ultra-magique presque normal d'ordre 4 n'existe pas. En effet, le théorème 5.9 de la section 5.5 du chapitre 5 nous dit qu'un carré magique d'ordre 4 est pandiagonal si et seulement s'il est super-Dürer. Nous allons prendre la structure générale (2.2) des super-Dürer et exiger que le carré soit associatif.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

Pour que ce carré soit associatif, il faut $b+\frac{S}{2}-d=\frac{S}{2}$ d'où $b=d$. Nous voyons aussitôt que le carré ne peut pas être presque normal. Nous concluons alors que si un carré magique d'ordre 4 est presque normal, alors il ne peut être ultra-magique.

Une impression : c'est demander beaucoup à un carré magique d'ordre 4 d'être à la fois presque normal, associatif et super-Dürer (pour l'ordre 4, super-Dürer = hyper-magique). L'ordre est trop petit pour être aussi exigeant!!!

53) Un diabolique ou un diabolique-alpha feront l'affaire.
54) Ces vérifications sont faciles à faire. Le but de ce problème est de vous présenter des propriétés remarquables des diaboliques-alpha.
55) Idem.
56) Idem
57) Idem
58) Les deux carrés sont des super-Dürer-alpha sont identiques.

	b		
a	e	c	
	f		
g	d	h	

	b	n	
a	m	c	r
	d	s	

		n	
	m	w	r
		x	
	y	s	z

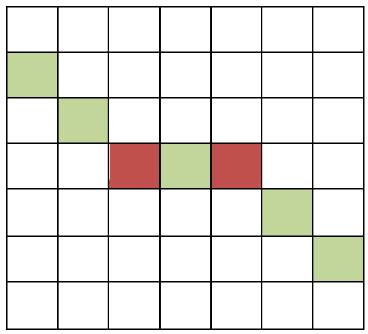
Puisque le carré est Dürer, nous avons (a + c + g + h) + (b + e + f + d) = S + S = 2S = (a + b + c + d) + (e + f + g + h) = S + (e + f + g + h) d'où **(e + f + g + h) = S.**
Dans le carré de droite, puisque le carré est magique d'ordre 4, nous avons (b + n + d + s) + (a + m + c + r) = S + S = 2S = (a + b + c + d) + (m + n + r + s) = S + (m + n + r + s) d'où **(m + n + r + s) = S**.
De façon semblable, nous montrons que **(w + x + y + z) = S.**

Ce résultat est vrai pour tous les Dürer car nous n'avons utilisé que les propriétés des Dürer.

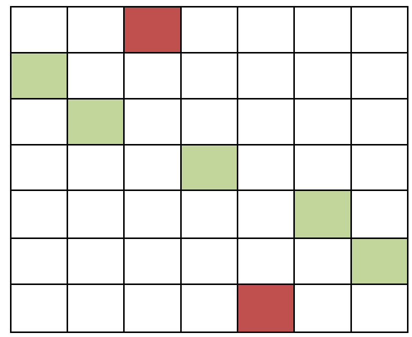
59) Tous les carrés d'ordre $n \geq 4$ possèdent au moins une figure complète.

a) Le problème 4 dans 4.3.8 nous montre qu'un carré **d'ordre 3** ne possède jamais de figure complète.

b) **Pour les ordres impairs** $n \geq 5$, l'algorithme suivant s'applique toujours.



Étape 1

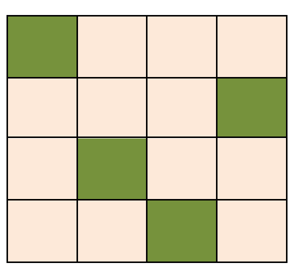


Étape 2

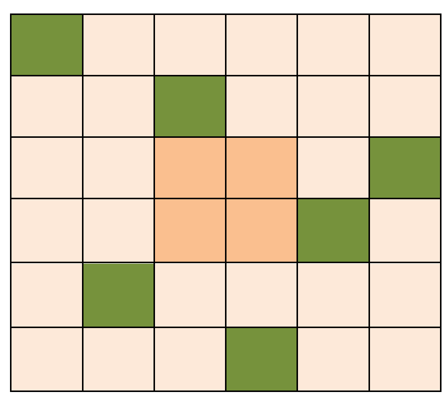
Pour l'étape 1, nous choisissons les cases de la diagonale juste en dessous de la diagonale principale et ce, jusqu'à ce que nous arrivions à la case située sur la rangée centrale (la case rouge). À partir de la seconde case rouge située à la droite de la case centrale, nous choisissons les cases de la diagonale juste au dessus de la diagonale principale.

Pour l'étape 2, celle-ci est clairement décrite par le carré de droite.

c) Pour les ordres pairs, nous allons trouver un carré d'ordre 4 et une figure complète. De même pour le carré d'ordre 6. **Les figures complètes sont en vert**.

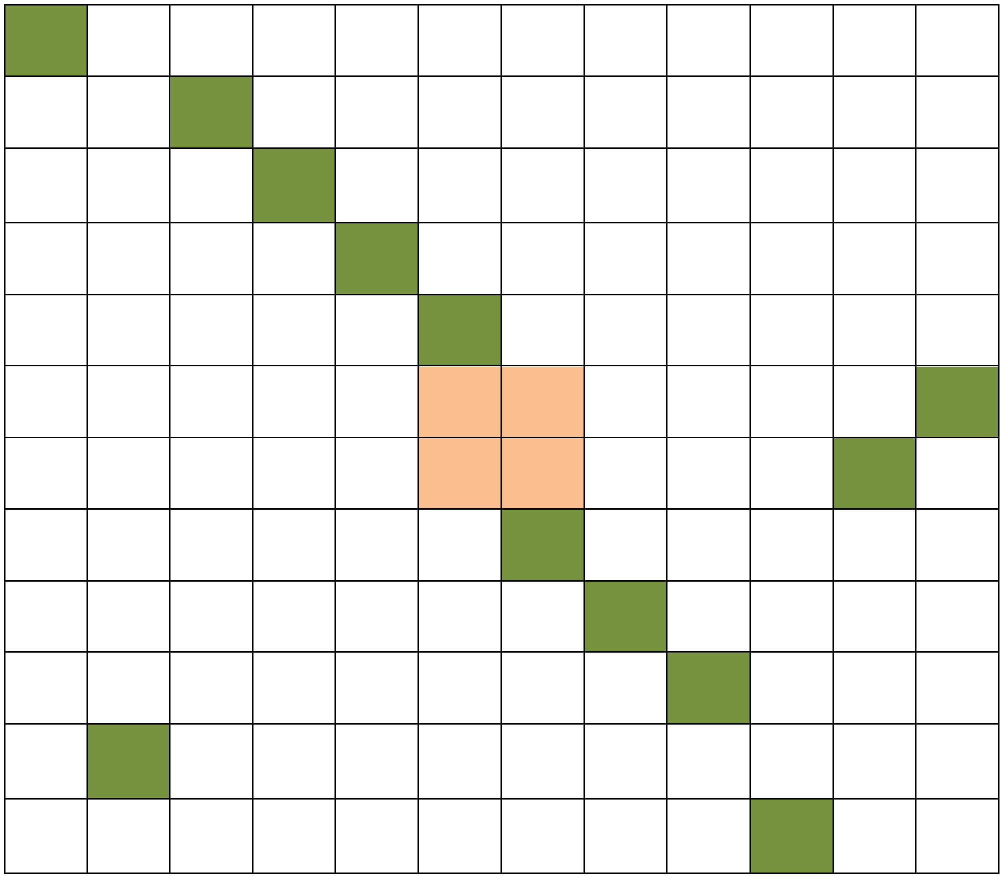


Ordre 4



Ordre 6

Le carré d'ordre pair suivant illustre bien le procédé pour les carrés d'ordres pairs $n \geq 8$. Le petit carré orangé est central.



Ordres pairs $n \geq 8$

Soit une figure complète d'un carré d'ordre $n \geq 4$. En général, celle-ci n'est pas unique.

60) Si $A\,et\,B$ sont deux carrés magiques presque normaux, alors $A+B$ n'est pas forcément presque normal. Voyons l'exemple suivant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 10 & 11 & 40 & 21 \\ 37 & 24 & 7 & 14 \\ 1 & 20 & 31 & 30 \\ 34 & 27 & 4 & 17 \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} 31 & 4 & 40 & 7 \\ 30 & 17 & 21 & 14 \\ 1 & 34 & 10 & 37 \\ 20 & 27 & 11 & 24 \end{pmatrix}} = \underset{A+B}{\begin{pmatrix} 41 & 15 & 80 & 28 \\ 67 & 41 & 28 & 28 \\ 2 & 54 & 41 & 67 \\ 54 & 54 & 15 & 41 \end{pmatrix}}$$

Pour cause de répétitions, nous voyons que $A+B$ n'est pas presque normal.

Le carré magique A est presque normal et k est un nombre réel. Que dire de $k\,A$?

a) Il est évident que si notre carré magique A est presque normal, alors $k\ A$ est presque normal si k est un entier $\geq 1.$

b) Si k est un nombre réel ≤ 0, alors $k\ A$ n'est pas presque normal.

c) Si k est irrationnel, alors $k\ A$ n'est pas presque normal.

d) Si $k > 0$ est rationnel non entier, alors $k\ A$ est presque normal ou pas.

Prenons, par exemple, $k = \frac{2}{3}.$ Si dans A, un entier n'est pas un multiple de 3, alors $k\ A$ n'est pas presque normal. Si dans A, tous les entiers sont des multiples de 3, alors $k\ A$ est presque normal.

61) Pour montrer que les structures (2.3) et (2.4) sont équivalentes, il suffit de montrer que si un carré provient de (2.3), alors (2.4) peut le générer et réciproquement.
Pour y arriver, si nous posons dans (2.3) : a = A + 3r ; b = A + t ; S = 4A + 6r + 6t, alors nous obtenons (2.4).
Si nous posons dans (2.4) : A = (2a + 6b – S)/4 ; r = (2a – 6b + S)/12 ;
t = (S – 2a – 2b)/4, alors nous trouvons (2.3).

62) Même façon de procéder. Si nous posons dans (2.6) : S = 4a + 6r, alors nous obtenons (2.7).
Si dans (2.7), nous posons r = (S – 4a)/6, alors nous trouvons (2.6).

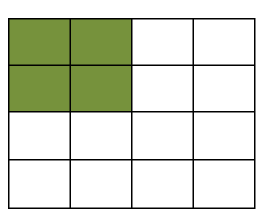
63) Même façon de procéder. Si nous posons dans (2.9) : a = u + 3r et S = 4u + 30r, alors nous obtenons (2.10).
Si dans (2.10), nous posons u = (10a – S)/6 et r = (S – 4a)/18, alors nous trouvons (2.9).
Ajoutons ici les structures générales (2.11) et (2.12) des diaboliques-alpha. Posons dans (2.11) : S = 4a + 30r. Nous obtenons (2.12).
Posons dans (2.12) : r = (S – 4a)/30. Nous trouvons (2.11).

64) Le nombre de figures magiques de M est le même que le nombre de figures magiques d'un carré normal d'ordre 4 (voir le problème 33). Donc ici, f(M) = 86.

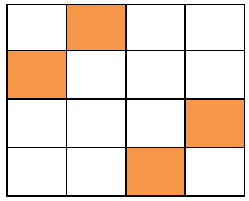
65) Pour les ordres 5, 6 et 7, nous trouvons respectivement f(M) = 1394, f(M) = 32 134 et f(M) = 957 332 (voir section 2.3 de la partie 1).

66) Oui car tous les super-Dürer sont pandiagonaux (théorème 5.9 du chapitre 5). Donc tous les super-Dürer-alpha et tous les super-Dürer-bêta sont pandiagonaux.

67) Critère 1 : le petit carré 2x2 dans le coin haut gauche est une figure magique. C'est la définition du carré Dürer. Nous avons alors les 24 figures magiques qui caractérisent les Dürer.

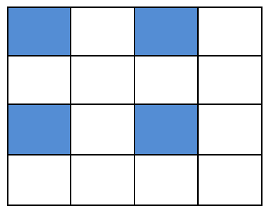


Critère 2 : La figure suivante fait partie des 24 figures magiques qui caractérisent les Dürer :



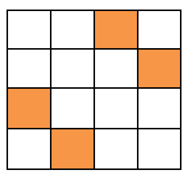
Le problème 46) nous montre que si cette figure est magique alors le carré 2x2 dans le coin haut gauche est une figure magique d'où le carré est un Dürer.

Critère 3 : La figure suivante fait partie des 24 figures magiques qui caractérisent les Dürer :

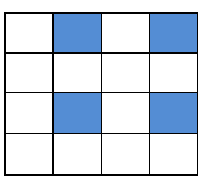


Le problème 45) nous montre que si cette figure est magique alors le carré 2x2 dans le coin haut gauche est une figure magique d'où le carré est un Dürer.

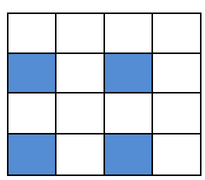
Remarque : avons-nous le critère 2a suivant?



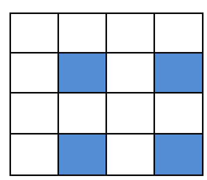
Avons-nous les critères 3a, 3b et 3c suivants :



3a



3b



3c

68) Nous allons utiliser deux figures complètes. La première en bleu et la seconde en gris. Ces deux figures complètes renferment ensemble tous les entiers de 9 à 16. Nous pouvons maintenant enlever 8 dans les huit cases de ces deux figures complètes. Le carré qui en résulte est toujours magique et sa somme est S = 18. De plus, le carré contient les entiers de 1 à 8, chacun apparaissant deux fois.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

4	7	6	1
5	2	3	8
1	6	7	4
8	3	2	5

69) Nous allons procéder de la même façon avec le carré magique suivant :

5	1	12	16
10	14	3	7
8	4	13	9
11	15	6	2

5	1	4	8
2	6	3	7
8	4	5	1
3	7	6	2

70) Notre programme nous indique que 8 carrés magiques normaux d'ordre 4 possèdent 8 cerfs-volants. Nous connaissons deux diaboliques normaux A et B qui possèdent ces 8 cerfs-volants où B est obtenu par la rotation de A de 180°. De plus, les 8 équivalents de A (A, B et les 6 autres) renferment chacun les 8 cerfs-volants. Ce sont les 8 carrés cherchés. Nous choisirons pour le carré A, le premier diabolique normal que nous rencontrons dans 5.10.

71) Voici un A-Dürer M et le carré M'obtenu de M en permutant ses deux rangées centrales. Nous voulons montrer que M'est un A-Dürer.

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	L	N
P	R	U	V

M

A	B	C	D
J	K	L	N
E	F	G	H
P	R	U	V

M'

Le carré M'est toujours magique puisque G + K = F + L et qu'alors les deux grandes diagonales restent magiques. En effet, A + (K + G) + V = A + (F + L) + V = S. De même pour l'autre diagonale.

Le carré M'est toujours un Dürer. Ceci est dû au fait que dans M, nous ayons $A + B + J + K = S$ (voir les figures magiques des A-Dürer dans 5.9). De plus, nous avons dans M, $A + B + E + F = S$ puisque M est un Dürer. D'où : $J + K = E + F$. M'est donc un Dürer puisque $A + B + J + K = S$.
Enfin, selon le théorème 5.16, M'est un A-Dürer puisque $A + V = B + U = S/2$ dans M et évidemment dans M'.

72) Ce carré ne peut pas être magique de somme S. En effet, la somme des quatre coins est obligatoirement $12 + A + 7 + S – A – 11 = S + 8$. Rappelons que si un carré d'ordre 4 est magique, alors les quatre coins forment une figure magique. La somme des quatre coins doit donner S et non $S + 8$.

6.5 Chapitre 6

1) Nous allons montrer que peu importe là où se trouve le carré bleu d'ordre 5, celui-ci sera magique et pandiagonal. De plus, sa somme magique sera la même que celle de M.

Pour y arriver, il suffit de déplacer le carré M horizontalement d'une colonne et de constater que le nouveau carré M'soit magique, pandiagonal et de même somme.

Ensuite, il suffit de déplacer le carré M verticalement d'une rangée et de constater que le nouveau carré M'soit magique, pandiagonal et de même somme.

Observation : Dès que le carré se déplace horizontalement d'une colonne, il gagne une colonne à droite mais il perd **la même colonne** à gauche. De même verticalement. Dans les deux cas, le carré M'renferme les mêmes nombres que le carré M donc s'il est magique, il aura la même somme magique que M.

A	B	C	D	E	A
F	G	H	J	K	F
M	N	O	P	Q	M
R	S	T	U	V	R
W	X	Y	Z	L	W

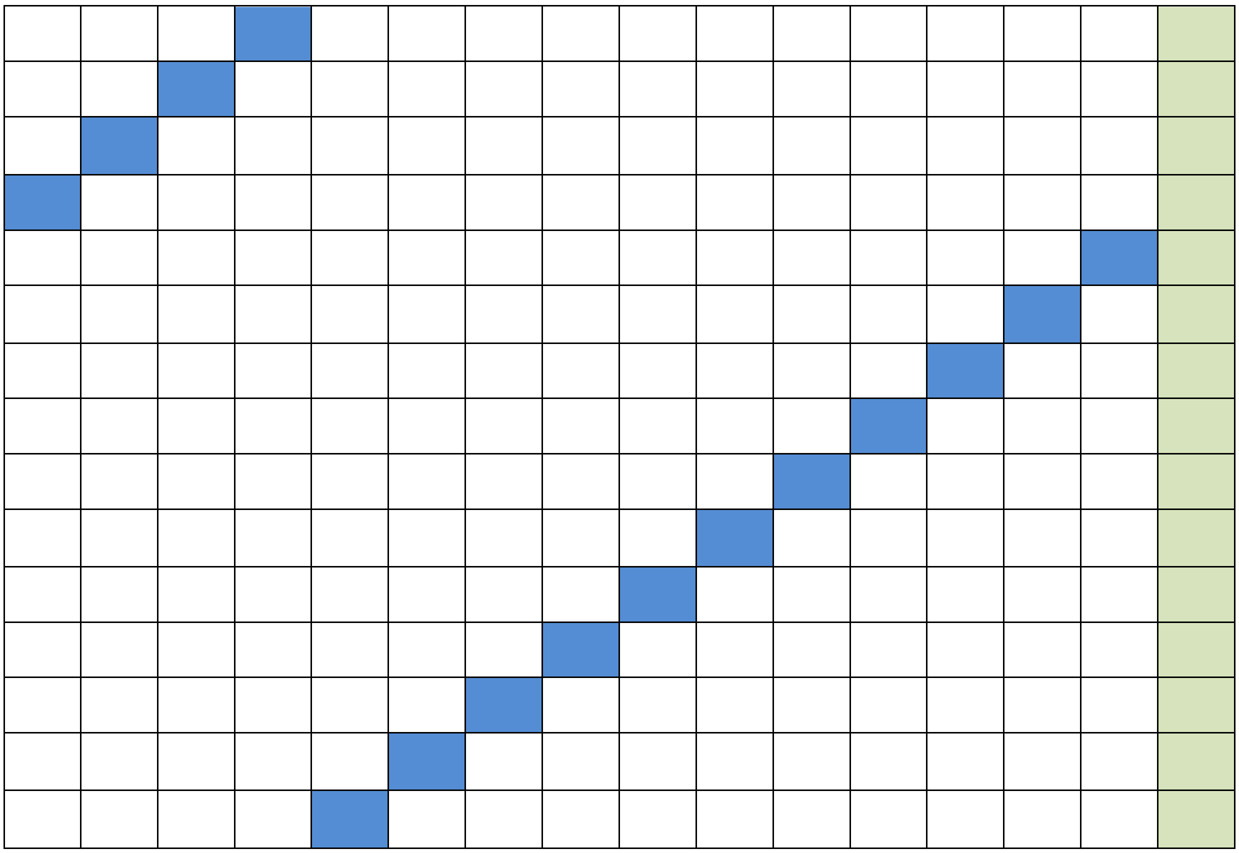
Il faut maintenant s'assurer que le nouveau carré M'soit magique et pandiagonal. Les colonnes restent évidemment magiques. De même pour les rangées puisque, par exemple, dans la première rangée, nous perdons A à gauche mais nous le récupérons à droite. Il reste à vérifier toutes les diagonales.

Par exemple : Prenons dans M', la diagonale C G M V Z. Celle-ci est la diagonale M G C Z V de M laquelle est magique d'où la diagonale C G M V Z de M'est magique. Regardez ainsi toutes les diagonales de M'et vous pourrez les retrouver toutes dans M, lesquelles sont toutes magiques dans M puisque M est pandiagonal.

Maintenant, peu importe la position du carré bleu, celui-ci est arrivé à sa position par une succession de déplacements horizontaux et verticaux et à chaque position intermédiaire, le carré est toujours magique, pandiagonal et de même somme magique que M.

2) 3) 4) Pour ces trois problèmes, nous pourrions procéder de la même façon que pour le problème 1). Il est très facile de savoir si toutes les diagonales de M impliquent que celles de M' soient magiques. Mais nous vous laissons le soin de faire cette vérification. Cependant, nous allons résoudre le problème général 5).

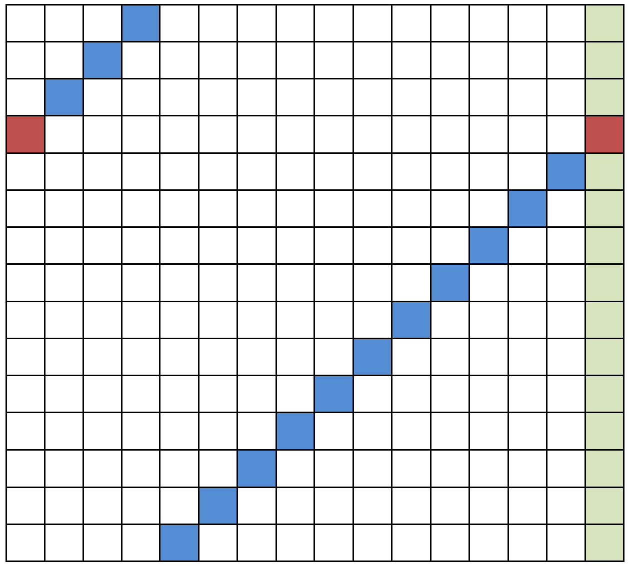
5) Supposons que le carré M soit magique et pandiagonal d'ordre n où n est un entier ≥ 3.



Les cases blanches et bleues forment le carré M et M'est le carré obtenu en supprimant la colonne de gauche. Notons cette diagonale secondaire de M par (u ; v) pour indiquer que nous trouvons u cases sur la branche au-dessus de la grande diagonale secondaire et que nous trouvons v cases sur l'autre branche avec u + v = n. Nous avons illustré dans M, la diagonale secondaire (4 ; 11).

Nous voyons que la diagonale de M devient, dans M', la diagonale secondaire (u – 1 ; v + 1).

Dans M, la somme des cases bleues est S mais dans M', voir le carré qui suit, la somme des cases de la diagonale brisée est toujours S car nous avons perdu la première case de la petite branche (case rouge de gauche) mais la grande branche l'a récupérée (la case rouge de droite) et celle-ci est devenue la dernière case de la grande branche.



Notons ce qui se passe avec les diagonales secondaires. Dans le tableau ci-dessous, la colonne de gauche nous indique les diagonales secondaires dans M et ce qu'elles deviennent dans M'se trouve dans la colonne de droite. Retrouvez ce tableau.

$$\begin{array}{ccc}
M & & M' \\
(1\,;\,n-1) & \to & (0\,;\,n) \\
(2\,;\,n-2) & \to & (1\,;\,n-1) \\
(3\,;\,n-3) & \to & (2\,;\,n-2) \\
(4\,;\,n-4) & \to & (3\,;\,n-3) \\
\ldots & & \\
(n-1\,;\,1) & \to & (n-2\,;\,2) \\
(n\,;\,0) & \to & (n-1\,;\,1)
\end{array}$$

Il en est de même avec les diagonales principales.

Ainsi nous voyons qu'un déplacement horizontal d'une colonne nous donne un nouveau carré magique pandiagonal de même somme.

Il en est de même avec un déplacement vertical d'une rangée.

Maintenant, peu importe la position du carré bleu, celui-ci est arrivé à sa position par une succession de déplacements horizontaux et verticaux et à chaque position intermédiaire, le carré est toujours magique, pandiagonal et de même somme magique que M.

Nous avons supposé que M soit un carré magique pandiagonal. Nous savons qu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial, ce qui n'est pas intéressant pour notre pavé!!! Cependant, nous connaissons, par exemple, des carrés pandiagonaux presque normaux pour les ordres n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. De là notre pavé avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 5.

6) Un carré magique d’ordre 3 ne peut pas être pandiagonal s’il est non trivial (voir problème 8 de 7.4). Si M est trivial d’ordre 3, alors nous aurons un pavé avec le même nombre dans toutes ses cases. M’ sera évidemment trivial.

Prenons M, le carré normal qui suit formé des 3 colonnes de gauche. Nous voyons que M’ n’est plus magique à cause de ses deux diagonales (1 + 7 + 4 = 12 et 9 + 7 + 8 = 24 mais S = 15).

4	9	2	4
3	5	7	3
8	1	6	8

7) Appelons A et B, les deux carrés magiques d’ordre n. Dans le centre de A, nous trouvons le nombre m et dans le centre de B, nous trouvons le nombre w, différent de m. Dans la case centrale de tous les équivalents de A, nous trouvons le nombre m. Dans la case centrale de tous les équivalents de B, nous trouvons le nombre w. Donc A n’est pas un équivalent de B et B n’est pas un équivalents de A. Les carrés A et B sont donc primitifs.

8) Nous allons d’abord montrer qu’il y a autant de carrés magiques normaux d’ordre 5 et de centre 1 qu’il y en a de centre 25. Considérons tous les carrés magiques normaux d’ordre 5.

Il y en a 275 305 224 x 8 = 2 202 441 792. Puis, prenons tous ceux qui ont 1 comme centre et tous ceux qui ont 25 comme centre. Soit maintenant A, un carré magique normal d’ordre 5 qui renferme 1 dans sa case centrale. Nous allons construire A’ comme suit : si m est l’entier de A situé dans la case (i ; j), alors nous placerons dans la case (i ; j) de A’ l’entier 26 – m. Il s’ensuit que A’ sera toujours magique, normal et que son centre sera 25.

De plus, si A et B sont deux carrés différents avec 1 comme centre, alors A’ et B’ sont magiques, normaux et différents avec 25 comme centre. Si nous prenons un carré A’ de centre 25, alors ce carré sera obtenu à partir d’un carré A de centre 1. En effet, appliquons 26 – m sur A’; nous obtiendrons un carré magique normal de centre 1 appelé A. Appliquons 26 – m sur A et nous aurons A’.

Ceci nous permet d’affirmer qu’il y a une bijection entre les carrés de centre 1 et ceux de centre 25. Il y en a donc autant d’où il y a autant de primitifs de centre 1 que de primitifs de centre 25.

Le procédé est le même si le centre contient k, un entier allant de 1 à 12.

9) Un ultra-magique est à la fois pandiagonal et associatif par définition.

a				
	c			
		e		
			d	
				b

Puisque le carré est associatif, alors a + b = c + d = 2S/5 et a + b + c + d + e = S. Nous voyons bien que e = S – (a + b) – (c + d) = S – 2S/5 – 2S/5 = S/5. Si notre carré magique est associatif d'ordre impair n, alors le centre sera S/n. Ce résultat exige que le carré magique d'ordre impair soit associatif.

10) a) Nous avons 10 + 26 = 36 = 2S/5 d'où S = 90.

b) La case centrale contient 90/5 = 18.

c) 12 + m = 36 d'où m = 24.

d) Puisque M est presque normal, le plus petit entier pourrait être 1 donc le plus grand possible est 35.

Terminons avec un ultra-magique presque normal M qui vérifie a), b), c) et d). Ici, le plus grand entier est 34.

10	24	6	19	31
20	33	11	22	4
23	2	18	34	13
32	14	25	3	16
5	17	30	12	26

Ultra-magique S = 90

11) C'est en appliquant ce procédé que nous avons trouvé les 25 carrés magiques pandiagonaux de centres allant de 1 à 25.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}} \quad \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 11 & 13 & 15 & 12 & 14 \\ 21 & 23 & 25 & 22 & 24 \\ 6 & 8 & 10 & 7 & 9 \\ 16 & 18 & 20 & 17 & 19 \end{pmatrix}}$$

Les entiers dans le carré magique pandiagonal A servent à numéroter les 25 cases. Il reste à vérifier que le carré C soit magique et pandiagonal. Par exemple, dans le carré A, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = S signifie que l'addition des contenus des cases numérotées de 1 à 5 est S. Dans le carré C, nous voyons clairement que 1 + 3 + 5 + 2 + 4 = S. Les rangées et colonnes de C restent des figures magiques. Il en est de même des 10 diagonales. Par exemple, dans A, 3 + 7 + 11 + 20 + 24 = S et dans C, nous trouvons 3 + 11 + 24 + 7 + 20 = S. Nous vous laissons compléter la vérification.

Il est très intéressant de voir que le contenu de la case 25 (en position (5 ; 5)) se retrouve en position (3 ; 3) soit au centre du carré. Celui de la case 19 (en position (4 ; 4)) se retrouve en position (5 ; 5). **Voir le site de Harvey Heinz «Pandiagonal 5x5».**

12) Il faut trouver un carré magique normal d'ordre 5 qui possède une figure complète idéale.

M =

25	11	2	8	19
3	9	20	21	12
16	22	13	4	10
14	5	6	17	23
7	18	24	15	1

Les cinq cases vertes forment une figure complète idéale puisque celles-ci contiennent les entiers 21, 22, 23, 24, 25. Ajoutons l'entier k dans les cinq cases vertes. Le carré qui en résulte est magique, presque normal et de somme magique $65+k$ où k est un entier ≥ 0. Nous aurons alors toutes les sommes magiques 65, 66, 67, … .

13) Le théorème 6.1 de la section 6.2 nous indique qu'un tel carré n'existe pas; la réponse est donc non. La plus petite somme pour un Ariane presque normal est S = 123.

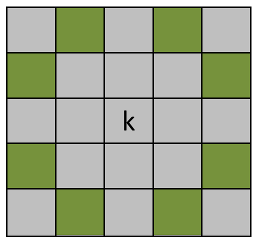
14) Il faut prendre, par exemple, le carré magique normal M du problème 12) et obtenir 100 M. Les rangées de 100 M nous donnent une première solution et les colonnes, une seconde

solution. Voir le problème 51) de 5.18. La façon de faire n'est donc pas unique. De plus, puisque M est ultra-magique, alors les cinq diagonales principales donnent une troisième solution et les cinq diagonales secondaires donnent une quatrième solution.

De toute façon, chacun recevra 6500 grammes de platine.

15) La structure générale des Ariane (voir section 6.2) nous montre clairement que si a et S ont la même parité, alors nous aurons 25 entiers ce qui n'est pas le cas si a et S n'ont pas la même parité.

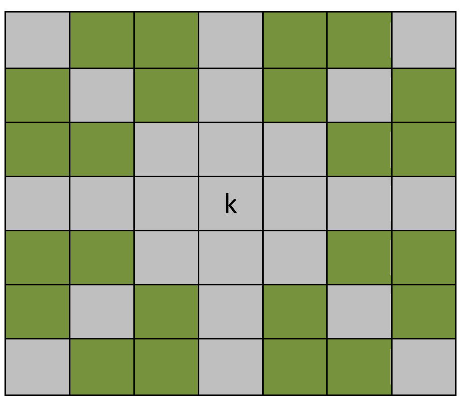
16) Le carré est magique de somme S et de centre k.



La somme des cases grises est $S + (S - k) + (S - k) + (S - k) = 4S - 3k$. La somme des 25 cases est $5S$ et celle des 8 cases vertes est x.

Nous avons donc $4S - 3k + x = 5S$ d'où $x =$ **$S + 3k$**.

17) La solution est très semblable.



Nous trouvons $4S - 3k + x = 7S$ d'où la somme des cases vertes $= x =$ **$3S + 3k$**.

D'une façon générale, prenons un carré magique d'ordre impair $2n + 1$. Si nous excluons la rangée centrale, la colonne centrale et les deux grandes diagonales, alors la figure formée des cases restantes (les cases vertes) a pour somme **$(2n - 3) S + 3k$**.

18) Le procédé 1-3-5-7-2-4-6 s'applique aussi au carré magique pandiagonal d'ordre 7. Procédons de la même façon qu'avec le problème 11) ci-haut. Le procédé 1-4-7-3-6-2-5 s'applique aussi au carré magique pandiagonal d'ordre 7. Voyons 1-3-5-7-2-4-6 :

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

A

1	2	3	4	5	6	7
15	16	17	18	19	20	21
29	30	31	32	33	34	35
43	44	45	46	47	48	49
8	9	10	11	12	13	14
22	23	24	25	26	27	28
36	37	38	39	40	41	42

B

1	3	5	7	2	4	6
15	17	19	21	16	18	20
29	31	33	35	30	32	34
43	45	47	49	44	46	48
8	10	12	14	9	11	13
22	24	26	28	23	25	27
36	38	40	42	37	39	41

C

Si A est magique pandiagonal, alors C est magique pandiagonal. Nous vous laissons le soin de vérifier. La case 49 en position (7 ; 7) se retrouve en position (4 ; 4) soit au centre du carré. **Voir le site de Harvey Heinz «Pandiagonal 5x5».**

Nous avons construit à l'aide du procédé 1-3-5-7-2-4-6, 49 carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 dont les centres varient de 1 à 49. Vous les trouverez dans l'annexe 31.

19) Le procédé 1-3-5-7-9-2-4-6-8 s'applique aussi au carré magique pandiagonal d'ordre 9. Même façon de procéder qu'au problème précédent.

20) Aucun des sept équivalents d'un Ariane n'est un Ariane. Deux Ariane différents sont donc toujours primitifs.

7.4 Chapitre 7

1) Ici n = 2k et sur toute diagonale, grande ou brisée, deux cases séparées par (n – 2)/2 cases soit k – 1 cases totalisent toujours 2S/n = S/k.

Nous voyons une diagonale (grande où brisée) formée de 2k cases soit la case rouge à gauche plus k – 1 cases vertes et la case rouge à droite plus k – 1 cases grises. La somme des deux cases rouges est donc 2S/n = S/k. Ainsi, la somme des 2k cases est k x S/k = S et la diagonale est magique. Toutes les diagonales, grandes ou brisées, sont donc magiques et le carré magique est pandiagonal.

La propriété du théorème 7.2 implique à elle seule la pandiagonalité!!!

2) Dans la deuxième colonne de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6, nous trouvons l'expression a – b – c + d + S/6. Si le carré renferme que des entiers, alors il est clair que a, b, c et d sont des entiers d'où S/6 est entier. Enfin, S/6 = entier d'où S = 6 x entier.

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante car dans la sixième colonne, la dernière expression 3a/2 – b – c/2 + d n'est pas un entier si c est pair alors que a est impair.

3) En effet, le carré magique normal d'ordre 6 a pour somme magique S = 111. Tout carré magique d'ordre 6 presque normal a obligatoirement une somme > 111.

Le carré hyper-magique presque normal M, donc pandiagonal, ne peut pas être normal. En effet, supposons que M soit normal. Selon le théorème 7.4 et son corollaire 7.5, k S = 3 x 111 est impair d'où la contradiction car k S doit être pair selon le théorème. M n'est donc pas normal.

La somme magique ne pourra pas être 111. Nous avons donc **S > 111**. Si un carré magique d'ordre 6 est presque normal de somme 111, alors le carré est normal.

4) Il suffit de montrer que k et S sont impairs. Ici, n = 4m + 2 = 2 (2m + 1) = 2 k. Nous voyons bien que k est impair. Si le carré est normal, alors $S=(2m+1)(16m^2+16m+5)$. S est le produit de deux impairs donc un impair. Nous avons kS impair d'où la contradiction et le carré ne peut pas être normal. Nous avons alors $S>(2m+1)(16m^2+16m+5)$.

5) Nous avons

$$a_i+a_{i+1}+b_i+b_{i+1}+\frac{4S}{n}(k-1)=2S \text{ d'où } a_i+a_{i+1}+b_i+b_{i+1}=2S-\frac{4S}{2k}(k-1)=\frac{2S}{k}=\frac{4S}{2k}=\frac{4S}{n}.$$

Même façon de faire avec les colonnes.

6) Le carré magique n'est pas un hyper-magique car il ne peut pas être pandiagonal puisque ici, k S est impair. Il ne peut donc pas être hyper-magique puisque tous les hyper-magiques sont pandiagonaux.

7) Notre carré est un candidat à la pandiagonalité puisque S est pair d'où k S est pair. Nous connaissons des carrés magiques presque normaux d'ordre 6 avec k S pair qui ne sont pas pandiagonaux. Nous connaissons des carrés magiques presque normaux d'ordre 6 avec k S pair qui sont pandiagonaux (voir 7.2).

8) Dans 4.3.2, prenons la structure générale (1.1) des carrés magiques d'ordre 3. Prenons deux diagonales brisées, une principale et une secondaire. En égalant chacune à S = 3A + 3r + 3t, nous trouvons r = 0 et t = 0 d'où un carré trivial formé du nombre A. Il est évident qu'un carré trivial est pandiagonal.

9) Reprenons la structure (1.1). Il est facile de vérifier que deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours 2S/3 = 2A + 2r + 2t. De plus, la case centrale est A + r + t soit S/3.

10) Considérons une grande diagonale de notre carré magique associatif d'ordre impair. La case centrale est la case bleue. Posons n = 2k + 1.

A				C				B

Puisque deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent 2S/n, alors A + B = 2S/n. De plus, nous avons k x 2S/n + C = S d'où C = S – 2kS/n = S (n-2k)/n = S/n.

11) Prenons d'abord la figure verte. Elle est formée de cinq petits carrés 2x2 qui totalisent 5 x 4S/20 = S. La figure est donc magique et de plus, quelle que soit sa position, nous aurons toujours cinq petits carrés 2x2, chaque ayant une somme 4S/20. Cette figure est une super-figure.

L'autre figure est formée d'un petit carré 2x2 (9, 10, 13, 14) de somme 4S/20 (voir les théorèmes 7.1 et 7.2). Puis 4 cases (6, 7, 11, 12) sont les sommets d'un 6x6 de somme 4S/20. Toutes les autres cases numérotées se regroupent par deux (1 ; 15), (2 ; 18), (3 ; 19), (4 ; 16), (5 ; 17) et (8 ; 20). Dans chaque couple, les deux cases sont sur une même diagonale, grande ou brisée, séparées par 9 cases ((n – 2)/2) et dont la somme est 2S/20. La somme des 20 cases est S donc ces 20 cases forment une figure magique. Quelle que soit la position de cette figure, elle reste magique, ce qui en fait une super-figure. En effet, par exemple, 2 cases situées sur une diagonale et séparées de 9 cases, resteront sur une diagonale et séparées de 9 cases avec la même somme 2S/20 et ce, quelle que soit la façon de placer la figure et peu importe où, en autant que 20 cases soient parfaitement couvertes par celle-ci.

12) Selon le théorème 7.6, il suffit de prendre un carré pandiagonal d'ordre pair. Ici un 8x8 normal donc de somme S = 260. C'est le carré 28 de la Partie 1.Chacun des 4 groupes de 16 nombres aura pour somme : 8 x260/4 = 520.

Le carré de la première page de 7.3 nous indique comment fabriquer les 4 groupes.

13) 960 x 10/4 = 2400 est la somme des cases vertes puisque le carré est pandiagonal.

14) Ce carré magique d'ordre 18 nous donne k = 9 et avec S = 935, nous trouvons k S impair. Puisque le carré renferme 324 = 18 x 18 entiers, alors celui-ci ne peut pas être pandiagonal donc ne peut pas être hyper-magique.

15) Revoyons le théorème 7.1. Ce carré d'ordre n = 2k, nous montre que la somme des 4 coins du carré 2k x 2k est 4S/n et ce quel que soit l'entier $k \geq 2.$ Dans un sous-carré 2h x 2h, avec h < k, les sous-carrés d'ordre 2 ont toujours la même somme soit 4S/n, S étant la somme magique du 2k x 2k. Les 4 coins du 2h x 2h totalisent toujours 4S/n, la preuve étant la même que pour les 4 coins du 2k x 2k.

16) Nous partons de la structure générale des carrés magiques d'ordre 6.

a) Nous vous suggérons de prendre la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 de 7.2.

b)

$$\begin{gathered}
-\mathrm{a}15-\mathrm{a}16-\mathrm{a}17-\mathrm{a}21-2\mathrm{a}22-\mathrm{a}23-\mathrm{a}27-\mathrm{a}28-\mathrm{a}29+\frac{11S}{6}\\
\mathrm{a}15+\mathrm{a}16+\mathrm{a}17+\mathrm{a}20+\mathrm{a}21+\mathrm{a}22+\mathrm{a}23+\mathrm{a}27+\mathrm{a}5-\mathrm{a}8-\frac{7S}{6}\\
\mathrm{a}10+\mathrm{a}15+2\mathrm{a}16+\mathrm{a}17+\mathrm{a}20+2\mathrm{a}21+3\mathrm{a}22+2\mathrm{a}23+\mathrm{a}27+2\mathrm{a}28-\mathrm{a}3-\mathrm{a}8-\frac{13S}{6}\\
\mathrm{a}15+\mathrm{a}16+\mathrm{a}17+\mathrm{a}21+\mathrm{a}22+\mathrm{a}23+\mathrm{a}27+\mathrm{a}28+\mathrm{a}29-\mathrm{a}4-\frac{7S}{6}\\
-\mathrm{a}10-\mathrm{a}15-\mathrm{a}16-\mathrm{a}17-\mathrm{a}20-\mathrm{a}21-\mathrm{a}22-\mathrm{a}23-\mathrm{a}27-\mathrm{a}28-\mathrm{a}5+\mathrm{a}8+\frac{11S}{6}\\
-\mathrm{a}15-2\mathrm{a}16-\mathrm{a}17-\mathrm{a}20-2\mathrm{a}21-2\mathrm{a}22-2\mathrm{a}23-\mathrm{a}27-\mathrm{a}28+\mathrm{a}3+\mathrm{a}4+\mathrm{a}8+\frac{11S}{6}
\end{gathered}$$

Colonne 1

$$\begin{gathered}
-\mathrm{a}20-\mathrm{a}23-\mathrm{a}5+\frac{2S}{3}\\
\mathrm{a}8\\
\mathrm{a}14\\
\mathrm{a}20\\
-\mathrm{a}14-2\mathrm{a}15-2\mathrm{a}16-\mathrm{a}17-2\mathrm{a}20-3\mathrm{a}21-3\mathrm{a}22-2\mathrm{a}23-2\mathrm{a}27-2\mathrm{a}28-\mathrm{a}29+\mathrm{a}3+\mathrm{a}4+\frac{10S}{3}\\
2\mathrm{a}15+2\mathrm{a}16+\mathrm{a}17+2\mathrm{a}20+3\mathrm{a}21+3\mathrm{a}22+3\mathrm{a}23+2\mathrm{a}27+2\mathrm{a}28+\mathrm{a}29-\mathrm{a}3-\mathrm{a}4+\mathrm{a}5-\mathrm{a}8-3S
\end{gathered}$$

Colonne 2

$$a3$$
$$-a10 - a14 - 2a15 - 2a16 - a17 - a20 - 2a21 - 2a22 - a23 - a27 - a28 + \frac{8S}{3}$$
$$a15$$
$$a21$$
$$a27$$
$$a10 + a14 + a15 + 2a16 + a17 + a20 + a21 + 2a22 + a23 + a28 - a3 - \frac{5S}{3}$$

Colonne 3

$$a4$$
$$a10$$
$$a16$$
$$a22$$
$$a28$$
$$-a10 - a16 - a22 - a28 - a4 + S$$

Colonne 4

$$a5$$
$$a14 + 2a15 + 2a16 + a17 + 2a20 + 3a21 + 3a22 + 2a23 + 2a27 + 2a28 - a3 - a4 - a8 - \frac{8S}{3}$$
$$a17$$
$$a23$$
$$a29$$
$$-a14 - 2a15 - 2a16 - 2a17 - 2a20 - 3a21 - 3a22 - 3a23 - 2a27 - 2a28 - a29 + a3 + a4 - a5 + a8 + \frac{11S}{3}$$

Colonne 5

$$a15 + a16 + a17 + a20 + a21 + 2a22 + 2a23 + a27 + a28 + a29 - a3 - a4 - \frac{3S}{2}$$
$$-a15 - a16 - a17 - 2a20 - 2a21 - 2a22 - 2a23 - 2a27 - a28 + a3 + a4 - a5 + a8 + \frac{13S}{6}$$
$$-a10 - a14 - 2a15 - 3a16 - 2a17 - a20 - 2a21 - 3a22 - 2a23 - a27 - 2a28 + a3 + a8 + \frac{19S}{6}$$
$$-a15 - a16 - a17 - a20 - 2a21 - 2a22 - 2a23 - a27 - a28 - a29 + a4 + \frac{13S}{6}$$
$$a10 + a14 + 3a15 + 3a16 + 2a17 + 3a20 + 4a21 + 4a22 + 3a23 + 2a27 + 2a28 - a3 - a4 + a5 - a8 - \frac{25S}{6}$$
$$a16 + a17 + a21 + a22 + a23 + a27 + a28 - a8 - \frac{5S}{6}$$

Colonne 6

Ce sont les 6 colonnes de la structure générale MP des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6. Les colonnes de 1 à 6 vont de gauche à droite dans la structure.

C'est un sous-espace de dimension 17.

Un carré issu de cette structure renferme 36 entiers si et seulement si les 17 variables prennent une valeur entière et S est divisible par 6.

c)

$$\begin{array}{ccc}
2a3+3a4+2a5-S & -2a3-2a4-a5+S & a3 \\
-a4-a5-a8+\frac{2S}{3} & a8 & a3+2a4+a5-a8-\frac{S}{3} \\
-a3+a8+\frac{S}{6} & a3+a4+a5-a8-\frac{S}{6} & -2a3-3a4-2a5+a8+\frac{7S}{6} \\
\frac{1}{3}(-3a4+S) & \frac{1}{3}(-3a5+S) & a3+2(a4+a5)-\frac{2S}{3} \\
2a3+3a4+a5-a8-\frac{2S}{3} & -2a3-2a4+a8+\frac{2S}{3} & a3+\frac{1}{3}(-3(a5+a8)+S) \\
-3a3-4a4-2a5+a8+\frac{3S}{2} & 3a3+3a4+a5-a8-\frac{5S}{6} & -2a3-a4+a8+\frac{S}{2}
\end{array}$$

Colonnes 1, 2, 3

$$\begin{array}{ccc}
a4 & a5 & -a3-2(a4+a5)+S \\
-2a3-3a4-a5+a8+S & 2a3+2a4-a8-\frac{S}{3} & -a3+a5+a8 \\
3a3+4a4+2a5-a8-\frac{7S}{6} & -3a3-3a4-a5+a8+\frac{7S}{6} & 2a3+a4-a8-\frac{S}{6} \\
-2a3-3a4-2a5+\frac{4S}{3} & 2a3+2a4+a5-\frac{2S}{3} & \frac{1}{3}(-3a3+S) \\
a4+a5+a8-\frac{S}{3} & \frac{1}{3}(-3a8+S) & -a3-2a4-a5+a8+\frac{2S}{3} \\
a3-a8+\frac{S}{6} & -a3-a4-a5+a8+\frac{S}{2} & 2a3+3a4+2a5-a8-\frac{5S}{6}
\end{array}$$

Colonnes 4, 5, 6

Voilà une structure HM de carrés hyper-magiques d'ordre 6 obtenue de la structure MP des carrés magiques pandiagonaux. Les variables sont a3, a4, a5, a8 et S.

Tous les hyper-magiques issus de HM sont pandiagonaux car également issus de MP. Nous allons maintenant montrer que la structure HM est équivalente à celle de 7.2. En effet, en posant dans la structure de 7.2 : a = 2a3 + 3a4 + 2a5 – S; b = a3; c = a4; d = – a4 – a5 – a8 + 2S/3, nous obtenons HM.

Maintenant, posons dans HM : a8 = (– 3a + 6b + 3c – 6d + S)/6; a3 = b; a4 = c;
a5 = (a – 2b – 3c + S)/2, nous obtenons la structure de 7.2.

Les deux structures sont donc équivalentes.

d) Ainsi, la structure HM génère tous les hyper-magiques d'ordre 6 et ceux-ci se trouvent tous dans le sous-espace des pandiagonaux. Tous les hyper-magiques d'ordre 6 sont donc pandiagonaux.
e) Évidemment, HM est un sous-espace de dimension 5 de l'espace vectoriel des pandiagonaux d'ordre 6, de dimension 17.

17) Un carré magique pandiagonal M d'ordre 6 ne peut pas contenir 36 entiers consécutifs. En effet, nous pourrions ajouter dans M un même entier dans toutes les cases afin que M devienne normal. Ce nouveau carré M'est toujours pandiagonal et sa somme est 111. Nous avons là une contradiction car k S est impair (3x111) or, pandiagonal formé d'entiers implique k S pair.

18) Nous aurions k = 2m + 1 donc impair. Le problème 4 de 7.4 nous montre que la somme d'un carré normal d'ordre 4m + 2 est impaire d'où k S impair. Si le carré est pandiagonal, alors k S doit être pair et la contradiction s'ensuit.

19) Puisque le carré est non trivial, alors il contient au moins deux nombres différents et par conséquent, un plus petit nombre a et un plus grand nombre différent de $a.$ Puisque le carré est associatif, la case centrale renferme le nombre $S/n.$

D'abord, montrons que a ne peut pas se situer dans la case centrale lorsque l'ordre du carré est impair. Si a est dans la case centrale, alors $a = S/n \ d'où \ S = na.$ La somme S' des n^2 nombres du carré est $S' = nS = n^2a.$ Cependant, nous savons que $S' > n^2a$ puisque dans notre carré, nous avons au moins un nombre $> a.$ Il y a donc contradiction et a ne peut pas occuper la case centrale.

De la même façon, la case centrale ne peut pas contenir le plus grand nombre $g.$ En effet, si g est dans la case centrale, alors $g = S/n \ d'où \ S = ng.$ Puis $S' = nS = n^2g.$ Cependant, nous savons que $S' < n^2g$ puisque notre carré contient au moins un nombre $< g.$ Il y a donc contradiction et g ne peut pas être dans la case centrale.

Enfin, si a occupe une autre case que la case centrale, alors sa case symétrique par rapport au centre du carré ne peut pas contenir $a.$ En effet, si les deux cases renferment le nombre $a,$ alors $2a = 2S/n \ d'où \ S/n = a,$ ce qui est impossible. De même, si les deux cases renferment $g.$

Maintenant, considérons deux cases distinctes symétriques par rapport au centre du carré qui renferment les nombres $a \ et \ b$ avec $a + b = 2S/n$ et $a,$ le plus petit nombre, b différent de $a,$ donc $b > a.$ Nous voulons montrer que b est le plus grand nombre du carré.

Supposons que b ne soit pas le plus grand nombre du carré et soit $g,$ ce plus grand nombre. Nous avons donc : $g = b + k$ où $k > 0.$ La case symétrique de la case qui contient g renferme un nombre $d \geq a$ puisque a est le plus petit. Le nombre d s'écrit : $d = a + m \ où \ m \geq 0.$ Enfin,

$g+d=(b+k)+(a+m)=(a+b)+(k+m)=2S/n\ +\ (k+m)$ avec $(k+m)>0.$ Nous avons là une contradiction car $g+d=2S/n.$ Finalement, b est le plus grand nombre du carré.

20) Prenons la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 de 7.2. Nous allons prendre chacun des 16 sous-carrés d'ordre 3 et additionner les 9 nombres qui s'y trouvent. Nous trouverons 16 fois le nombre 3S/2.

21) Pour ce faire, nous allons prendre la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 de la section 7.2. En position (2 ; 3), nous avons a – b + d et en position (5 ; 4), nous avons –d + S/3. Ces deux cases sont symétriques par rapport au centre du carré. Si celui-ci est associatif, alors nous avons : a – b + d + (– d + S/3) = 2S/n = 2S/6 = S/3 d'où a = b. Ce qui contredit que le carré soit presque normal. L'hyper-magique presque normal ne peut donc pas être associatif.

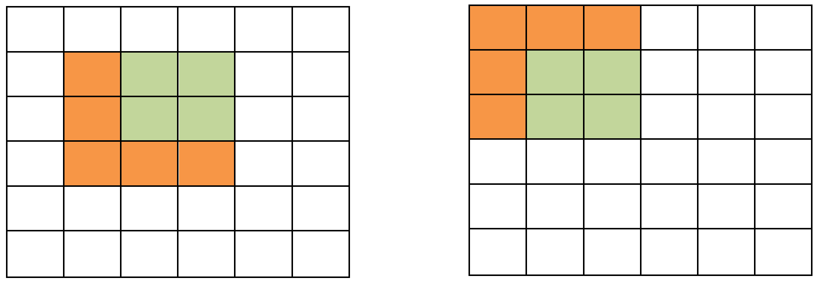
22) Tout carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé de 36 entiers impairs a une somme magique de la forme 6 m où m est un entier impair. D'abord, la structure générale des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6 (dans MATHEMATICA, **«pandiagonaux ordre 6»**) nous montre clairement que si un carré magique pandiagonal renferme 36 entiers, alors S est divisible par 6 donc **S = 6 m où m est un entier**.

a) Si maintenant, les 36 entiers sont impairs, alors dans la structure générale, en position (6 ; 3), nous trouvons l'expression : (–b – d + g + i + k – m – u + w) + S/6. Les 8 variables libres de la parenthèse prennent des valeurs entières impaires puisque le carré renferme 36 impairs et la somme dans la parenthèse est donc un entier pair. Il s'ensuit que S/6 est un entier impair puisque la somme totale de l'expression en position (6 ; 3) est impaire. Nous avons alors:

$$\frac{S}{6}=impair\ \ d'où\ \ S=6\times impair$$

b) Nous voyons que si les 36 entiers sont pairs, alors S/6 est pair et $S=6\times\ pair$.
c) Si la somme est S = 156 = 6 x 26, alors le carré doit contenir au moins un nombre pair car s'il contenait que des entiers impairs, il aurait la forme 6 x impair ce qui n'est pas le cas ici.
d) Si la somme est S = 150 = 6 x 25, alors le carré doit contenir au moins un nombre impair car s'il contenait que des entiers pairs, il aurait la forme 6 x pair ce qui n'est pas le cas ici.
e) Si nous trouvons au moins un pair et au moins un impair dans le carré, alors la somme magique est S = 6 m où m est un entier. Nous ne pouvons pas affirmer que m soit pair ou impair. Nous connaissons un pandiagonal d'ordre 6 de somme S = 6 x 25 (voir le carré Hy-150 de 7.2) et un pandiagonal d'ordre 6 de somme S = 288 = 6 x 48 (voir les deux carrés de 8.4). Ces carrés renferment tous au moins un pair et au moins un impair.

24) Le carré suivant est un hyper-magique d'ordre 6.



Selon le problème 20 ci-haut, nous savons que la somme des 9 cases du carré formé de 4 cases vertes et de 5 cases orangés a pour somme 3S/2. Le grand carré étant un hyper-magique nous assure que le petit carré formé des 4 cases vertes a pour somme 2S/3. Il s'ensuit que la somme des 5 cases de l'équerre est 3S/2 – 2S/3 = 5S/6. Peu importe la position de l'équerre, celle-ci fera toujours partie d'un sous-carré d'ordre 3 dans lequel il y a un sous-carré d'ordre 2.

La vérification nous montre que la somme des cases de toute équerre dans Hy-150 est bien 125.

25) Le carré magique est pandiagonal d'où le partage en 4 groupes se fera à partir du carré de 7.3. La somme des cases blanches = la somme des cases rouges = la somme des cases vertes = la somme des cases jaunes.
La somme dans chaque groupe est 225 x 10 = 2250
26) Le but de ce problème est de vous présenter une conjecture sur les hyper-magiques.
27) L'équerre, peu importe sa position, forme toujours, avec 4 petits carrés d'ordre 2, un carré d'ordre 5. Il en est de même de la croix, du T et du Z. Appelons m, la somme des 9 cases de l'équerre ou de la croix ou du T ou du Z. Nous aurons, dans les 4 cas,

$$\frac{5S}{2} = m + 4\frac{4S}{10} \;\; d'où \;\; m = \frac{9S}{10}.$$

28) La structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 nous montre que le carré renferme 36 entiers si et seulement si S est un entier divisible par 6 avec a et c, des entiers de même parité et bien entendu b et d, des entiers.

8.6 Chapitre 8

1) Le tableau G1 de 8.2 nous indique qu'il n'y a pas de Gauss de somme S = 400. De même si S = 392.

2) Le carré hyper-magique-alpha suivant est normal donc de somme S = 260. La somme des 4 cases des sous-carrés 2x2 est toujours 4S/8 = S/2 = 130.

16	33	48	1	62	19	30	51
61	20	29	52	15	34	47	2
12	37	44	5	58	23	26	55
57	24	25	56	11	38	43	6
3	46	35	14	49	32	17	64
50	31	18	63	4	45	36	13
7	42	39	10	53	28	21	60
54	27	22	59	8	41	40	9

3) Le carré est un Gauss de somme S = 556. Il y a 12 entiers dans ce Gauss. Pour compléter ce carré, il faut se servir des propriétés des Gauss (voir 8.2), par exemple, la somme des 4 coins des 4x4 qui donne toujours 278; nous avons aussi utilisé la figure magique nommée «avion» pour trouver l'entier 138. Aussi, la demi-figure verte dans le carré de droite de la deuxième page de 8.2. Le carré complété est le carré qui précède le tableau G1 de 8.2 lequel est défini avec a1 = 49, a3 =75 et S = 556. Oui, le carré est presque normal.

4) Voyons la structure générale des hyper-magiques-alpha de 8.3. Le nombre en position (5 ; 6) est (a1 + a3)/2. Il est clair que les nombres a1 et a3 doivent être des entiers de même parité. De plus, en position (5 ; 5), le nombre – a1 + S/4 doit être un entier d'où S/4 doit être un entier et finalement, S doit être un entier divisible par 4. C'est une condition nécessaire mais non suffisante.

En effet, en position (8 ; 1), le nombre est (– 5 a1 + 3a3 + S)/6. Avec a1 = 9, a3 = 7 et S = 400, nous avons la condition nécessaire mais le nombre obtenu 62, 666… n'est pas un entier.

5) Voyons dans la section 8.2, la structure générale des Gauss. Il est clair que les nombres a1 et a3 doivent être des entiers ainsi que S si le carré renferme 64 entiers. En position (2 ; 1), nous avons 3a1 – S/4 qui est entier d'où S/4 est entier et S est un entier divisible par 4. De plus, les 64 entiers du carré ont tous la forme (entier + k S/2 ou k S/4) et S doit être un entier divisible par 4 puisque (2 ; k) = 1 et (4 ; k) = 1. En fait, k est relativement premier avec 2 aussi bien qu'avec 4.

Si a1 et a3 sont des entiers et S est un entier divisible par 4, alors il est évident que le carré renferme 64 entiers.

6) Dans 8.5, le résultat (*) de l'encadré vert nous dit qu'un carré magique d'ordre pair n = 2k associatif et formé que d'entiers implique k S pair. Or ici, n = 10 = 2x5 et S = 245 donc k S = 5 x 245 est impair. Le carré M renferme que des entiers d'où il ne peut pas être associatif.

7) a) La réponse est oui car nous pouvons construire, pour tous les ordres impairs ≥ 3, un carré magique arithmétique qui sera associatif lorsque construit avec l'algorithme ALG-1 (Voir le théorème 11.3, chapitre 11).

k

Pour n = 1, le carré renferme le nombre k et S = k. Le carré est associatif car k + k = 2k = 2k/1 = 2S/n.

b) La réponse est oui car avec l'algorithme ALG-2, tous les carrés magiques construits sont arithmétiques et associatifs (Voir le théorème 11.4 du chapitre 11).

c) Dans ces deux cas, nous pouvons toujours trouver un carré normal et une infinité de presque normaux.

8) La réponse est non. Ici, k = 3 et S = 265 donc k S est impair. (Voir le problème 6) ci-haut). Le carré est associatif donc il ne peut pas contenir que des entiers.

9) Prenons la figure orangée du bas. Celle-ci est magique car de somme S = 260. Si nous la déplaçons parallèlement à elle-même d'une rangée (figure bleue), elle reste magique.

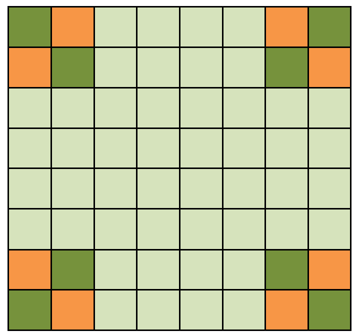
64	2	62	4	53	11	55	9
49	15	51	13	60	6	58	8
48	18	46	20	37	27	39	25
33	31	35	29	44	22	42	24
12	54	10	56	1	63	3	61
5	59	7	57	16	50	14	52
28	38	26	40	17	47	19	45
21	43	23	41	32	34	30	36

Les deux figures (orangée et bleue) totalisent 4xS/2 = 2S car le carré est hyper-magique. Puisque la figure orangée est de somme S, il s'ensuit que la figure bleue est aussi de somme S. De même si nous montons la figure bleue d'une rangée et ainsi de suite.

La figure verte du haut (rotation de 180° de la figure orangée) est aussi magique. Si nous la descendons d'une rangée, elle reste magique pour la même raison.

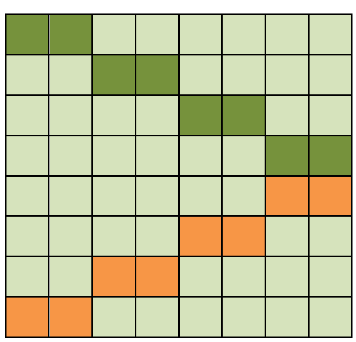
Cependant, cette figure n’est pas une super-figure car si nous la tournons de 90°, celle-ci n’est plus magique : 64 + 49 + 18 + 31 + 54 + 59 + 28 + 21 = 324.

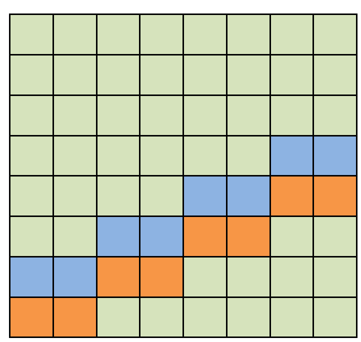
10) Nous allons d’abord montrer que la figure verte est une super-figure. Nous pourrons ensuite déduire que la figure en orangé est aussi une super-figure.



a) Montrons que la figure en vert est magique. Celle-ci se compose des 4 coins d’un 6x6 et des 4 coins du 8x8 d’où la somme des 8 cases est S/2 + S/2 = S (voir les propriétés des Gauss). Nous n’avons qu’une seule façon de placer cette figure dans le carré ce qui en fait automatiquement une super-figure.
b) Les 8 cases de la figure en orangé se trouvent dans les 4 carrés 2x2 situés dans les 4 coins du 8x8. La somme de ces 4 carrés 2x2 est 4 x S/2 = 2S. La somme des 8 cases vertes est S donc la somme des 8 cases en orangé est S. Nous n’avons qu’une seule façon de placer cette figure dans le carré ce qui en fait automatiquement une super-figure.

11) La façon de faire est la même qu’au problème 9) ci-haut.

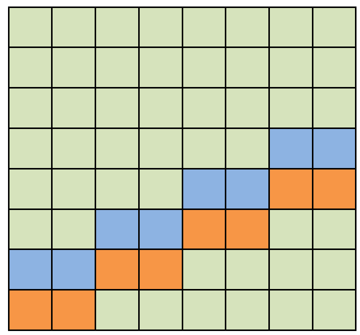




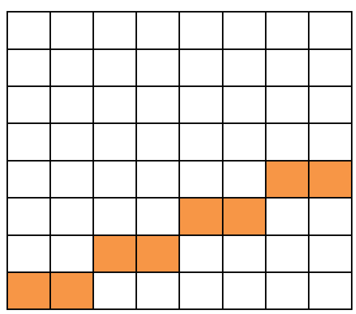
D’abord, montrons, avec la structure générale des Gauss, que la figure en orangé est magique. En additionnant les 8 expressions de la figure, nous trouvons S. Mais ce n’est pas nécessaire de faire cette addition puisque l’escalier en orangé est une figure magique imposée à la structure générale. Pour construire cette structure, nous avons exigé l’escalier. Placez l’escalier verticalement et vous verrez que la figure n’est plus magique.

12) La façon de faire est la même. Cependant, pour l'escalier en vert, il faudra faire l'addition des 8 cases dans la structure générale des Gauss. Nous trouvons bien S. Placez l'escalier verticalement et vous verrez que la figure n'est plus magique.

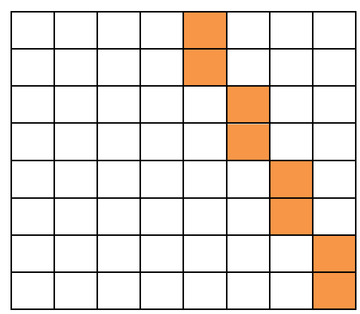
13) Mais cet escalier est une super-figure pour les hyper-magiques-alpha. Allons dans la structure générale.



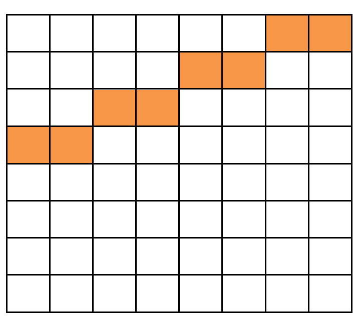
0



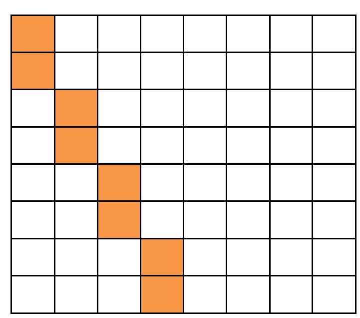
1



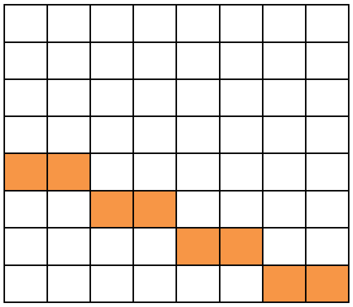
2



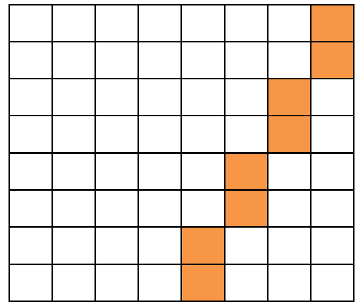
3



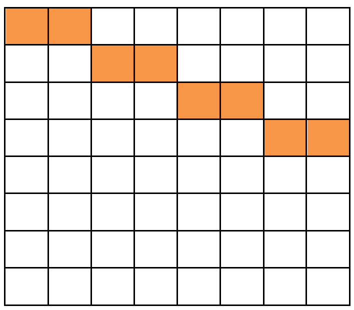
4



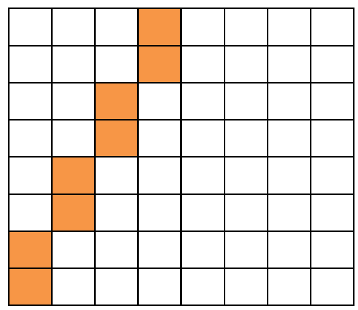
5



6



7



8

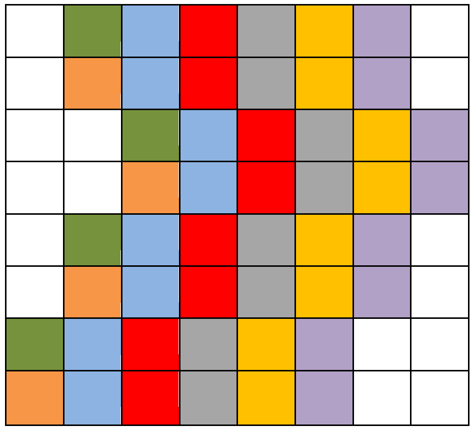
Les escaliers dans les carrés de 1 à 8 sont des figures magiques de la structure générale des hyper-magiques-alpha. En effet, en additionnant les 8 expressions, nous avons toujours trouvé S comme total. Si nous déplaçons chaque escalier parallèlement à lui-même, alors celui-ci reste toujours magique (voir l'idée dans le carré 0 et le problème 9)). Nous pouvons constater qu'en déplaçant l'escalier parallèlement à lui-même dans 1 ou dans 3, nous obtenons les mêmes figures magiques. De même dans 2 ou 4, dans 5 ou 7 et dans 6 ou 8.

Pour trouver toutes les façons de placer l'escalier dans le carré hyper-magique-alpha, il suffit de conserver les carrés 1, 2, 5 et 6. L'escalier est donc une super-figure.

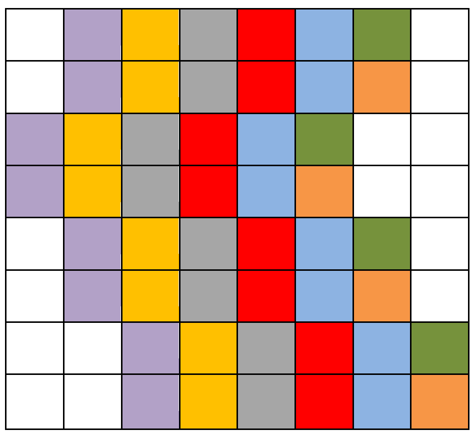
14) a) Notre carré est un hyper-magique-alpha. Nous avons vérifié que la somme des 4 cases vertes de gauche = la somme des 4 cases en orangé de gauche = la somme des 4 cases en orangé de droite = la somme des 4 cases vertes de droite = S/2. Les deux figures sont donc magiques.

b) Appelons A, le groupe des 4 cases vertes de gauche et B, le groupe des 4 cases en orangé de gauche. Puis C est le groupe des 4 cases vertes de droite et D, le groupe des 4 cases en orangé de droite. Voici 4 nouvelles figures magiques :

(%) $$A \cup C \; ; \; A \cup D \; ; \; B \cup C \; ; \; B \cup D$$



En ajoutant la figure bleue, celle-ci devient une nouvelle figure magique puisque 4 x S/2 – S = S. Il en est de même avec la figure rouge qui devient elle aussi magique. En incluant la figure de gauche et en la déplaçant vers la droite, nous trouvons 6 nouvelles figures magiques. De même avec la figure de droite que nous déplacerons vers la gauche.



Nous venons de trouver 6 + 6 + 4 = 16 nouvelles figures magiques dans la structure générale des hyper-magiques-alpha. Ceux-ci auront tous ces 16 figures magiques.

15)

a) n = 1 : k + k = 2S/n = 2k/1 = 2k $\boxed{k}$

b) n = 2 : k + k = 2S/n = 4k/2 = 2k

k	k
k	k

c)

n > 2 : k + k = 2S/n = 2nk/n = 2k.

16) Oui, un carré magique d'ordre 2, donc trivial, est toujours associatif. Voir le problème 15). Un carré magique d'ordre 2 n'est jamais normal, ni presque normal puisqu'il est trivial.

17) Prenons la structure générale de carrés magiques associatifs d'ordre 6. Pour avoir que des entiers, il est nécessaire et suffisant que la somme magique S soit un entier divisible par 6 et que les 13 variables prennent des valeurs entières.

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{a1} & \mathrm{a11}-\mathrm{a14}+\mathrm{a17}+\mathrm{a5}-\mathrm{a8} \\
\mathrm{a7} & \mathrm{a8} \\
\mathrm{a13} & \mathrm{a14} \\
\mathrm{a13}+\mathrm{a14}+\mathrm{a15}+\mathrm{a16}+\mathrm{a17}-\frac{2S}{3} & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a17}+S) \\
-2\mathrm{a1}-\mathrm{a11}-2\mathrm{a13}-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-2\mathrm{a17}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}-\mathrm{a7}+\mathrm{a8}+\frac{7S}{3} & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a11}+S) \\
\mathrm{a1}+\mathrm{a11}-\mathrm{a14}+\mathrm{a17}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}-\mathrm{a8}-\frac{2S}{3} & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a5}+S)
\end{array}$$

De gauche à droite : Colonnes 1 et 2

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{a3} & \mathrm{a4} \\
-\mathrm{a1}-\mathrm{a11}-\mathrm{a13}-\mathrm{a15}-\mathrm{a17}-\mathrm{a3}-\mathrm{a5}-\mathrm{a7}+\frac{3S}{2} & -\mathrm{a1}-\mathrm{a11}-\mathrm{a13}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}-\mathrm{a4}-\mathrm{a5}-\mathrm{a7}+\frac{3S}{2} \\
\mathrm{a15} & \mathrm{a16} \\
\frac{1}{3}(-3\mathrm{a16}+S) & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+S) \\
\mathrm{a1}+\mathrm{a11}+\mathrm{a13}+\mathrm{a16}+\mathrm{a17}+\mathrm{a4}+\mathrm{a5}+\mathrm{a7}-\frac{7S}{6} & \mathrm{a1}+\mathrm{a11}+\mathrm{a13}+\mathrm{a15}+\mathrm{a17}+\mathrm{a3}+\mathrm{a5}+\mathrm{a7}-\frac{7S}{6} \\
\frac{1}{3}(-3\mathrm{a4}+S) & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a3}+S)
\end{array}$$

Colonnes 3 et 4

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{a5} & -\mathrm{a1}-\mathrm{a11}+\mathrm{a14}-\mathrm{a17}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}-2\mathrm{a5}+\mathrm{a8}+S \\
\mathrm{a11} & 2\mathrm{a1}+\mathrm{a11}+2\mathrm{a13}+\mathrm{a15}+\mathrm{a16}+2\mathrm{a17}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}+2\mathrm{a5}+\mathrm{a7}-\mathrm{a8}-2S \\
\mathrm{a17} & -\mathrm{a13}-\mathrm{a14}-\mathrm{a15}-\mathrm{a16}-\mathrm{a17}+S \\
\frac{1}{3}(-3\mathrm{a14}+S) & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a13}+S) \\
\frac{1}{3}(-3\mathrm{a8}+S) & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a7}+S) \\
-\mathrm{a11}+\mathrm{a14}-\mathrm{a17}-\mathrm{a5}+\mathrm{a8}+\frac{S}{3} & \frac{1}{3}(-3\mathrm{a1}+S)
\end{array}$$

Colonnes 5 et 6

Effectivement, nous rencontrons des termes comme S/3, 3S/2, 7S/6 qui sont des entiers dès que S est un entier divisible par 6.

Nous avons vu que si n = 2k, alors «associatif + formé que d'entiers» implique k S pair (voir problème 6 ci-haut). Nous voulons ici vous montrer qu'avec k S impair, il est impossible d'obtenir un carré formé exclusivement d'entiers puisque le carré est associatif par construction (il provient de la structure ci-haut). Avec S impair, il y aura exactement 20 fractions rationnelles et 16 entiers. (voir S = 125) plus bas.

Si S est impair et divisible par 3, alors nous aurons 4 fractions rationnelles et 32 entiers. Les 4 fractions sont les sommets d'un sous-rectangle formé des cases (2 ; 3), (2 ; 4), (5 ; 3), (5 ; 4). Ce rectangle est centré!!! (voir S = 123).

Nous allons construire deux carrés associatifs respectivement de sommes S = 123 et S = 125.

$$\mathrm{a1} = 6; \mathrm{a3} = 19; \mathrm{a4} = 22; \mathrm{a5} = 16; \mathrm{a7} = 38; \mathrm{a8} = 24; \mathrm{a11} = 29; \mathrm{a13} = 31; \mathrm{a14} = 17; \mathrm{a15} = 7; \mathrm{a16} = 12; \mathrm{a17} = 44; S = 123;$$

$$\begin{matrix} 6 & 48 & 19 & 22 & 16 & 12 \\ 38 & 24 & -\frac{11}{2} & -\frac{27}{2} & 29 & 51 \\ 31 & 17 & 7 & 12 & 44 & 12 \\ 29 & -3 & 29 & 34 & 24 & 10 \\ -10 & 12 & \frac{109}{2} & \frac{93}{2} & 17 & 3 \\ 29 & 25 & 19 & 22 & -7 & 35 \end{matrix}$$

S = 123

$$\mathrm{a1} = 6; \mathrm{a3} = 19; \mathrm{a4} = 22; \mathrm{a5} = 16; \mathrm{a7} = 38; \mathrm{a8} = 24; \mathrm{a11} = 29; \mathrm{a13} = 31; \mathrm{a14} = 17; \mathrm{a15} = 7; \mathrm{a16} = 12; \mathrm{a17} = 44; S = 125;$$

$$\begin{matrix} 6 & 48 & 19 & 22 & 16 & 14 \\ 38 & 24 & -\frac{5}{2} & -\frac{21}{2} & 29 & 47 \\ 31 & 17 & 7 & 12 & 44 & 14 \\ \frac{83}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{89}{3} & \frac{104}{3} & \frac{74}{3} & \frac{32}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{38}{3} & \frac{313}{6} & \frac{265}{6} & \frac{53}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{83}{3} & \frac{77}{3} & \frac{59}{3} & \frac{68}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{107}{3} \end{matrix}$$

S = 125

Remarque : Nous n'avons pas cherché à construire des carrés sans répétition.

18) La réponse est non. Un ultra-magique est un carré magique à la fois pandiagonal et associatif. Le problème 8 de 7.4 nous montre qu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial. Donc un ultra-magique d'ordre 3 est forcément trivial d'où il ne peut pas être normal, presque normal ou contenir au moins deux nombres différents.

19) La réponse est non. Voyez le dernier encadré vert de 8.5 et le paragraphe juste au-dessus.

20) La réponse est non. Un hyper-magique est toujours pandiagonal. Non pandiagonal implique non hyper-magique.

21) Avec MATHEMATICA, utilisez le fichier «Le compte». Celui-ci donne le nombre de figures magiques que possède le carré magique. Nous trouvons f(288) = 13 136, f(252) = 13 736 et f(310) = 432.

Avec MAPLE, utilisez le programme «Le compte-aff». Celui-ci donne aussi le nombre de figures magiques mais en plus, il les affiche.

22) Le carré magique M est formé seulement d'entiers et sa somme magique est impaire car elle se termine par 5. Puisque l'ordre du carré est n = 18 = 2x9, et que S est impair, alors k S est impair. Si M est associatif, alors k S est pair car le carré renferme seulement des entiers. Nous avons là une contradiction. M ne peut donc pas être associatif.

23) Nous avons donc k S impair.

a) Ultra-magique = associatif + pandiagonal or (pandiagonal + formé que d'entiers) implique k S pair. Ici, k S est impair et M est formé que d'entiers donc M ne peut pas être pandiagonal d'où M ne peut pas être ultra-magique.

b) M ne peut pas être hyper-magique car tous les hyper-magiques sont pandiagonaux. Or M n'est pas pandiagonal.

c) Une condition nécessaire est que k S soit pair.

24) Dans la recherche de la structure générale des Gauss, section 8.2, nous avons, à partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 8, obtenu un carré M tel que ses 49 petits carrés 2x2 donnaient S/2 pour somme.

Puis nous avons voulu ajouter la pandiagonalité à M avec la surprise suivante : M est déjà pandiagonal!!! Était-ce par hasard?

Je ne crois pas à un tel hasard!!! Pour moi, le problème demeure. Pourquoi avons-nous eu la pandiagonalité?

La deuxième propriété qui définit un hyper-magique soit : «sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées par (n – 2)/2 cases, totalisent toujours 2S/n » entraine à elle seule la pandiagonalité.

25) M est un carré magique d'ordre 6 et de somme S = 480. De plus, il est presque normal et associatif. Prenons deux cases symétriques par rapport au centre du carré, l'une contenant l'entier a et l'autre, l'entier b. Nous avons donc $a + b = 2S/n = 2S/6 = S/3 = 480/3 = 160$. Il est clair que nous ne pouvons pas avoir $a = 80$ puisqu'alors, nous aurions $b = 80$, ce qui n'est pas possible puisque M est presque normal. L'entier 80 ne peut pas se trouver dans M.

9.6 Chapitre 9

1) Nous allons regarder les différentes puissances du carré diabolique suivant :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Le carré D^2 est un carré semi-magique avec la grande diagonale secondaire magique.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 233 & 297 & 321 & 305 \\ 297 & 265 & 273 & 321 \\ 321 & 273 & 265 & 297 \\ 305 & 321 & 297 & 233 \end{pmatrix}$$

Le carré D^3 est de nouveau un diabolique!!! Tous ses nombres se terminent par le chiffre 6.

$$D^3 = \begin{pmatrix} 10186 & 9306 & 9386 & 10426 \\ 10106 & 9706 & 9626 & 9866 \\ 9786 & 10026 & 9946 & 9546 \\ 9226 & 10266 & 10346 & 9466 \end{pmatrix}$$

Il en est de même des puissances entières D^k où $k \geq 3$ est un entier impair. Voyons ce qui se passe pour $D^5 = D^3 D^2$.

Précisons d'abord que si nous multiplions deux entiers A et B qui ont respectivement a et b pour chiffres des unités, alors le chiffre des unités du produit AB sera le même que le chiffre des unités du produit ab. Par exemple, le produit 367 x 1259 se termine à droite par le chiffre des unités de 7 x 9 = 63 donc par 3. Effectivement, 367 x 1259 = 462 053. Revenons à $D^3 D^2$. Les deux carrés suivants indiquent le dernier chiffre de chaque entier de D^3 et de D^2.

$$\underset{D^3}{\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}} \qquad \underset{D^2}{\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}}$$

Nous allons voir quel est le chiffre des unités de l'entier en position (1 ; 1) dans D^5. N'oublions pas qu'il s'agit ici du produit matriciel.

Le chiffre des unités est obtenu ainsi : $\begin{array}{l} 6\times3=18\ ;\ 6\times7=42\ ;\ 6\times1=6\ ;\ 6\times5=30 \\ 8+2+6+0=16 \end{array}$

Le dernier chiffre de l'entier en position (1 ; 1) est donc 6.

Remarquez que dans les quatre colonnes de D^2, nous retrouvons les mêmes quatre chiffres; alors nous aurons toujours à additionner les mêmes quatre chiffres $8, 2, 6, 0$ dans des ordres différents d'où la somme qui sera toujours 16 et 6 qui sera toujours le dernier chiffre de chaque entier de D^5.

La démarche est exactement la même avec $D^5D^2 = D^7$ et ainsi de suite.

Donc, toutes les puissances impaires positives de D sont des diaboliques formés de 16 entiers ayant tous 6 comme dernier chiffre!!! Le carré suivant est le diabolique D^9.

15179063871616	15179514431616	15179473471616	15178940991616
15179104831616	15179309631616	15179350591616	15179227711616
15179268671616	15179145791616	15179186751616	15179391551616
15179555391616	15179022911616	15178981951616	15179432511616

Regardez les 4 derniers chiffres de chaque entier de D^9. Mais encore plus surprenant, les 4 premiers chiffres de chaque entier!!!

Voyons maintenant les puissances paires de D^k où $k \geq 4$ est un entier pair.

Le carré suivant est D^4 et tous ses entiers se terminent par 4. Ce carré est semi-magique avec sa grande diagonale secondaire magique.

338564	333444	331524	332804
333444	336004	335364	331524
331524	335364	336004	333444
332804	331524	333444	338564

D^4

$$\underset{D^4}{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \underset{D^2}{\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}}$$

Nous allons voir quel est le chiffre des unités de l'entier en position (1 ; 1) dans D^6. N'oublions pas qu'il s'agit ici du produit matriciel.

Le chiffre des unités est obtenu ainsi : $\begin{array}{l} 4\times3=12 \; ; \; 4\times7=28 \; ; \; 4\times1=4 \; ; \; 4\times5=20 \\ 2+8+4+0=14 \end{array}$

et le dernier chiffre de chaque entier de D^6 sera toujours 4.

Le carré suivant est D^8.

446477148224	446444380224	446432092224	446440284224
446444380224	446460764224	446456668224	446432092224
446432092224	446456668224	446460764224	446444380224
446440284224	446432092224	446444380224	446477148224

Observez les 3 derniers chiffres et les 4 premiers chiffres de chaque entier de D^8.

2) Selon le théorème 9.4, le diabolique A affecté de l'exposant 111 222 333 444 555 reste un carré magique, toujours diabolique et de somme magique $S^{111222333444555}$. C'est le cas de toutes les puissances entières impaires ≥ 1 d'un diabolique A. Le résultat est évident si le diabolique est trivial.

3) Ce n'est pas le cas pour les puissances entières paires d'un diabolique non trivial. Il suffit de regarder D^2 au problème 1). Le carré D^2 n'est plus magique. Cependant, il est semi-magique avec une seule diagonale magique. Il en est de même de D^4.

4) Nous avons construit deux Dürer $A\,et\,B$ respectivement de sommes 75 et 56. Le carré AB^2 est semi-magique de somme 235 200. Les deux grandes diagonales ne sont pas magiques. Donc, il serait faux de dire que AB^2 est encore un Dürer.

5) $BA = \left(\frac{TS}{n^2}\right) C^2 = \left(\frac{TS}{n^2}\right) nC = \left(\frac{TS}{n}\right) C$ d'où $BA = AB$ puisque $TS = ST$.

6) L'encadré vert de 9.3 nous affirme que si $A\,et\,B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors AB^2 est un ultra-magique. De plus, $AB^2 = B^2A$ quels que soient les ultra-magiques d'ordre 5. Nous avons donc l'ultra-magique A^2B.

$$A^2B = \begin{array}{ccccc} 57182 & 59790 & 60873 & 59671 & 58234 \\ 60478 & 59276 & 57989 & 58462 & 59545 \\ 59269 & 58217 & 59150 & 60083 & 59031 \\ 58755 & 59838 & 60311 & 59024 & 57822 \\ 60066 & 58629 & 57427 & 58510 & 61118 \end{array}$$

C'est un ultra-magique de somme 65 x 65 x 70 = 295 750. Vous pouvez vérifier qu'il est associatif et pandiagonal.

$$AB^2 = \begin{matrix} 61732 & 64340 & 65423 & 64221 & 62784 \\ 65028 & 63826 & 62539 & 63012 & 64095 \\ 63819 & 62767 & 63700 & 64633 & 63581 \\ 63305 & 64388 & 64861 & 63574 & 62372 \\ 64616 & 63179 & 61977 & 63060 & 65668 \end{matrix}$$

C'est un ultra-magique de somme 65 x 70 x 70 = 318 500. Vous pouvez vérifier qu'il est associatif et pandiagonal.

Voici $AB\,et\,B^2$:

$$AB = \begin{matrix} 1036 & 859 & 859 & 911 & 885 \\ 859 & 984 & 911 & 885 & 911 \\ 859 & 911 & 1010 & 911 & 859 \\ 911 & 885 & 911 & 984 & 859 \\ 885 & 911 & 859 & 859 & 1036 \end{matrix}$$

Ce carré est semi-magique avec sa diagonale secondaire magique. De plus, il est symétrique car il est égal à sa transposée. Il n'est ni pandiagonal ni associatif.

$$B^2 = \begin{matrix} 1106 & 929 & 929 & 981 & 955 \\ 929 & 1054 & 981 & 955 & 981 \\ 929 & 981 & 1080 & 981 & 929 \\ 981 & 955 & 981 & 1054 & 929 \\ 955 & 981 & 929 & 929 & 1106 \end{matrix}$$

Ce carré est semi-magique avec sa diagonale secondaire magique. De plus, il est symétrique car il est égal à sa transposée. Il n'est ni pandiagonal ni associatif.

Les carrés $AB\,et\,B^2$ ne sont plus des ultra-magiques; cependant, $(AB)B\,et\,A(B^2)$ sont des ultra-magiques : $(AB)\,B = A(B^2) = AB^2$ lequel est ultra-magique.

7) $A^3B^8 = A^3(B^3)^2 B^2 = C\,B^2$ est ultra-magique. $A^7B^{30} = A^7(B^{15})^2$ est un ultra-magique. Pour y arriver, nous utilisons, lorsque $A\,et\,B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, le fait que $AB^2\;et\;B^2A$ soient le même ultra-magique et que toutes les puissances entières impaires ≥ 1 de A et de B soient des ultra-magiques. (Voir les encadrés de 9.3).

Si $A\,et\,B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors le carré $A^k(B^m)^2$ est un ultra-magique si $k\;et\;m$ sont des entiers impairs ≥ 1. Le carré $A^{27}B^{50} = A^{27}(B^{25})^2$ est ultra-magique.

8) Un carré magique M d'ordre 2 est toujours trivial. Si nous cherchons un carré magique M' tel que $MM' = M'M = I$ où I est la matrice unité standard : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors nous aurons :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}} \underset{M'}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \underset{M'}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \underset{M}{\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cette égalité n'est pas possible selon le théorème 9.5 car les membres de gauche doivent être des triviaux ce qui n'est pas le cas du membre de droite.

Il en est de même si M' est semi-magique. Donc un carré magique d'ordre 2 n'est pas inversible ni en tant que carré magique ni en tant que carré semi-magique. (Voir l'encadré vert qui précède le théorème 9.8).

Passons maintenant au carré semi-magique M d'ordre 2. Un tel carré a obligatoirement la structure suivante : $M = \begin{pmatrix} a & S-a \\ S-a & a \end{pmatrix}$. Soit M', son inverse s'il existe. Nous aurions donc :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} a & S-a \\ S-a & a \end{pmatrix}} \underset{M'}{\begin{pmatrix} b & T-b \\ T-b & b \end{pmatrix}} = \underset{MM'}{\begin{pmatrix} 2ab-bS-aT+ST & -2ab+bS+aT \\ -2ab+bS+aT & 2ab-bS-aT+ST \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le produit de deux semi-magiques donne un semi-magique et I est semi-magique. L'existence de M' semble possible. Pour que M' existe, il faut $Det(M) \neq 0$ soit $S \neq 0 \; et \; S \neq 2a.$ La résolution d'un système de deux équations à deux inconnues $b \; et \; T$ nous donne :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} a & S-a \\ S-a & a \end{pmatrix}} \underset{M'}{\begin{pmatrix} \dfrac{a}{(2a-S)S} & \dfrac{a-S}{(2a-S)S} \\ \dfrac{a-S}{(2a-S)S} & \dfrac{a}{(2a-S)S} \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Un carré semi-magique d'ordre 2 est donc inversible en tant que carré semi-magique.

9) Un carré magique M d'ordre 1 est inversible si et seulement si le nombre que contient M est différent de 0. En fait, l'ensemble des carrés magiques d'ordre 1 est isomorphe avec $\mathbb{R}$.

10) Le théorème 9.8 nous assure que l'inverse de M existe bien et soit M^{-1} cet inverse dont la somme est $\frac{1}{S}$. Puisque M est formé d'entiers, alors S est un entier.

Le point crucial ici est que si M soit formé qu'avec des entiers, alors M^{-1} renferme que des entiers puisque $Det(M) = \pm 1$. En effet, $M^{-1} = \frac{Adj(M)}{Det(M)} = \pm Adj(M)$ et l'adjointe de M renferme que des entiers. (Voir la construction de l'adjointe).

Donc $\frac{1}{S}$ est un entier. Il s'ensuit que $S = \pm 1$ et que $\frac{1}{S} = \pm 1$. Ici, $S \neq 0$ car $Det(M) \neq 0$.

11) M est un carré magique d'ordre 3 formé de 9 entiers avec $Det(M) \neq 0$. Donc S est entier. Le théorème 9.8 nous indique que si $Det(M) \neq 0$, alors $S \neq 0$. Nous voulons montrer que $Det(M) \neq \pm 1$.

Supposons que $Det(M) = \pm 1$. L'inverse M^{-1} est un carré magique selon le théorème 9.8. Selon le problème 10), l'inverse est formé que d'entiers. Puis la somme de M^{-1} est $\frac{1}{S}$ et le nombre central de M^{-1} est $\frac{1}{3S}$. Or ce nombre ne sera jamais un entier. Il s'ensuit que $Det(M) \neq 0$.

12) M est un A-Dürer (Dürer associatif) de somme S = 64. Selon le théorème 9.4, M^{35} est toujours un A-Dürer. Sa somme magique est $S = 64^{35}$, un nombre de 64 chiffres.

13) Le carré M^{24} est un carré semi-magique (voir théorème 9.1) de somme $S = 64^{24}$.

14) Avec MATHEMATICA, nous avons pris deux fois la structure générale des super-Dürer-bêta :

$$A = \begin{matrix} a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \\ b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \end{matrix}$$

Puis nous avons constaté que $AB^2 - B^2A = 0$ de même que $AB - BA = 0$, où 0 représente ici le carré trivial d'ordre 5 formé de zéros. D'où $AB^2 = B^2A \; et \; AB = BA$.

15) $A\,et\,B$ sont des ultra-magiques quelconques d'ordre 5.Voyons si les figures de 6.3 sont des super-figures et ultra-figures dans AB^2.

Nous avons vu dans 9.3 que AB^2 est un ultra-magique donc provient de la structure générale de 6.3.

Le fichier «ultra-magique ordre 5» dans MATHEMATICA nous montre que les 16 figures (17 figures moins celle en rouge) sont des super-figures (les 14 premières) et ultra-figures (les 2 dernières) de la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5. Nous les retrouvons donc dans AB^2.

De plus, dans le fichier «ultramagique ABB» dans MATHEMATICA, nous montrons que ces 14 figures sont des super-figures de AB^2 ainsi que les 2 dernières sont des ultra-figures de AB^2.

16) Comparons les procédés $AB^2\ et\ A^2B$ avec $M\ et\ N$.

$$M = \begin{matrix} 20 & 17 & 21 & 44 \\ 16 & 49 & 15 & 22 \\ 30 & 7 & 31 & 34 \\ 36 & 29 & 35 & 2 \end{matrix} \qquad N = \begin{matrix} 21 & 18 & 22 & 59 \\ 27 & 54 & 26 & 13 \\ 38 & 1 & 39 & 42 \\ 34 & 47 & 33 & 6 \end{matrix}$$

Le procédé AB^2 nous permet de trouver les super-Dürer $MN^2 et\ NM^2$. Le procédé A^2B nous permet de trouver les super-Dürer $N^2M\ et\ M^2N$. Ces 4 carrés sont différents deux à deux :

$$MN^2 = \begin{matrix} 363954 & 361794 & 364366 & 378686 \\ 361326 & 381726 & 360914 & 364834 \\ 370034 & 355714 & 370446 & 372606 \\ 373486 & 369566 & 373074 & 352674 \end{matrix}$$

$$N^2M = \begin{matrix} 352786 & 373102 & 353394 & 389518 \\ 361694 & 381218 & 361086 & 364802 \\ 381006 & 344882 & 381614 & 361298 \\ 373314 & 369598 & 372706 & 353182 \end{matrix}$$

$$M^2N = \begin{matrix} 309510 & 291630 & 310610 & 336730 \\ 308550 & 338790 & 307450 & 293690 \\ 313630 & 287510 & 314730 & 332610 \\ 316790 & 330550 & 315690 & 285450 \end{matrix}$$

$$NM^2 = \begin{matrix} 301940 & 299060 & 303600 & 343880 \\ 309100 & 338380 & 307440 & 293560 \\ 320640 & 280360 & 322300 & 325180 \\ 316800 & 330680 & 315140 & 285860 \end{matrix}$$

Le procédé A^2B ne nous permet pas de construire les carrés obtenus avec AB^2. Ces deux procédés sont donc différents et cela est dû au fait que, pour les super-Dürer, $AB^2 \neq B^2A$.

Enfin, $M^5 = \begin{matrix} 2753547008 & 2749917008 & 2754757008 & 2782587008 \\ 2748707008 & 2788637008 & 2747497008 & 2755967008 \\ 2765647008 & 2737817008 & 2766857008 & 2770487008 \\ 2772907008 & 2764437008 & 2771697008 & 2731767008 \end{matrix}$

C'est un super-Dürer presque normal. Les 16 entiers commencent tous par 27 et se terminent tous par 7008. La somme magique de M est 102 et celle de M^5 est $102^5 = 11\ 040\ 808\ 032$.

10.6 Chapitre 10

1) Ce carré ne peut pas contenir le nombre 2. Supposons qu'il le contienne. Les autres nombres premiers sont tous impairs. Dans une rangée, nous aurions n nombres premiers impairs et dans une autre rangée, nous aurions $(n-1)$ nombres premiers impairs et le nombre 2. Or cela est impossible car nous aurions deux rangées de parités différentes et le carré ne serait pas magique.

Cas 1 : n est pair

Rangée avec n entiers impairs $\Rightarrow$ somme paire.

Rangée avec le 2 $\Rightarrow$ somme impaire et le carré ne peut pas être magique.

Cas 2 : n est impair

Rangée avec n entiers impairs $\Rightarrow$ somme impaire.

Rangée avec le 2 $\Rightarrow$ somme paire et le carré ne peut pas être magique.

2) Dans 4.3.2, prenons la structure générale (1.1) des carrés magiques d'ordre 3. Posons 3a + 3r + 3t = p, un nombre premier et remplaçons t par p/3 – a – r dans la structure générale. Nous trouvons :

$$\begin{matrix} \frac{1}{3}(p+3r) & \frac{1}{3}(-3a+2p-6r) & a+r \\ a & \frac{p}{3} & \frac{1}{3}(-3a+2p) \\ \frac{1}{3}(-3a+2p-3r) & a+2r & \frac{1}{3}(p-3r) \end{matrix}$$

Ainsi, vous pouvez construire une infinité de carrés magiques d'ordre 3 de sommes magiques p. Par exemple, avec a = 2, r = 3 et p = 23, nous trouvons :

$$\begin{matrix} \frac{32}{3} & \frac{22}{3} & 5 \\ 2 & \frac{23}{3} & \frac{40}{3} \\ \frac{31}{3} & 8 & \frac{14}{3} \end{matrix}$$

3) Vous trouverez une liste de carrés premiers formés de n^2 nombres premiers consécutifs (carrés premiers parfaits). Pour les ordres 5, 7, 9, 11, 57, 59 et 63, vous trouverez un carré premier parfait qui sera super-premier car sa somme magique sera un nombre premier.

(Ordre ; somme magique) : (5 ; 313) ; (7 ; 797) ; (9 ; 2311) ; (11 ; 4507) ; (57 ; 863 609) ; (59 ; 932 257) ; (63 ; 1 137 781).

Nous vous invitons à vérifier que pour les autres ordres < 63, aucune somme n'est un nombre premier. C'est évident pour les ordres pairs!!!

4) Il ne peut pas être super-premier car sa somme magique sera toujours un entier pair > 2. (La somme d'un nombre pair d'impairs est paire).

5) Le corollaire 10.9 : Il existe un carré premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$. En fait, ce corollaire nous dit qu'il existe un carré hyper-magique (ses n^2 nombres premiers forment une suite arithmétique de raison non nulle) pour tous les ordres $n \geq 3$. Évidemment, la façon de construire un carré premier n'est pas unique.

Ici, nous avons un carré premier parfait pour tous les ordres de 3 à 63. Donc, pour ces ordres, il existe un carré premier presque normal comme le dit le corollaire. Ce résultat est bien conforme avec le corollaire 10.9.

6) Soit donnée une suite de 16 nombres premiers différents deux à deux. Il est clair que la somme des 15 premiers nombres premiers ≥ 3 est celle des 15 plus petits impairs soit 379.

Donc, une somme de 15 nombres premiers différents deux à deux est ≥ 379. Pour avoir une somme de 480, il suffit que le seizième nombre premier soit 101 (379 + 101 = 480). Si nous prenons 103 ou plus, la somme dépassera 480.

Ainsi, nous voyons que pour obtenir un carré premier d'ordre 4 de la plus petite somme 120, nous devons choisir nos 16 nombres premiers parmi les nombres premiers allant de 3 à 101.

7) Dans chaque carré, les cinq cases en rouge appartiennent à une figure complète.

a) $$\begin{pmatrix} 17 & 73 & 59 & 13 & 151 \\ 79 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 83 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 7 \\ 23 & 11 & 89 & 149 & 41 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 17 & 73 & 59 & 13 & 151 \\ 79 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 83 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 7 \\ 23 & 11 & 89 & 149 & 41 \end{pmatrix}$$

$$S = 313 \qquad S = 313$$

Pour diminuer la somme magique, nous allons enlever, par exemple, l'entier 1 dans chaque case de la figure complète. Il en résultera un nouveau carré magique presque normal de somme S = 312, formé de 20 nombres premiers et 5 entiers pairs différents de 2. Voilà les 2 premiers carrés que le problème 7) vous demande de trouver.

Si nous enlevons l'entier 3, alors nous allons obtenir 2 nouveaux carrés qui répondent aux conditions du problème.

Mais si nous enlevons 5 dans le carré de gauche, alors le carré renfermera 21 nombres premiers car 7 deviendra 2. Parmi les 5 entiers pairs, nous trouverons l'entier 2, un nombre premier.

Enfin, si nous enlevons un entier pair, 2 par exemple, alors nous aurons toujours 25 entiers impairs dont 20 sont certainement premiers mais parmi les 5 autres, il y en aura peut-être un qui sera toujours premier et nous aurons alors au moins 21 nombres premiers au lieu de 20, comme l'exige le problème 7. Il faudra être vigilent!!!

Nous enlevons un entier pair m, alors il faut regarder ce que deviennent les 5 entiers de la figure complète. Dès que l'un d'eux est premier, nous devons rejeter l'entier m.

Pour le carré de gauche : nous gardons les entiers 1 et 3 et nous rejetons les entiers 2, 4, 5, 6. Il est clair que l'entier que nous enlevons dans la figure complète du carré de gauche, doit être < 7.

Pour le carré de droite : l'entier que nous enlevons dans sa figure complète doit être < 19. Nous gardons les entiers 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Nous rejetons tous les autres de 2 à 18.

Les carrés magiques cherchés sont donc au nombre de 10.

b)

Pour trouver ces 10 carrés magiques presque normaux de sommes < 313 qui renferment exactement 20 nombres premiers, il suffit de prendre les entiers ci-haut que nous conservons. Ainsi, avec le carré de gauche et l'entier 1, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} 17 & 72 & 59 & 13 & 151 \\ 78 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 82 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 6 \\ 23 & 11 & 89 & 148 & 41 \end{pmatrix}$$

$$S = 312$$

c)

Il suffit d'ajouter le nombre 17 dans toutes les cases de la figure complète du carré de gauche ou du carré de droite.

8) Il suffit de prendre une figure complète (celle-ci existe pour tous les carrés d'ordres $n \geq 4$) puis d'ajouter l'entier impair m > 0 dans toutes les cases de celle-ci.

9) Pour construire un tel carré magique, partez d'un carré normal d'ordre 5 et ajoutez-lui le **nombre premier 1123** dans toutes ses cases. Le nouveau carré sera magique et contiendra un seul nombre premier soit 1129 (voir annexe 11, page 1, colonne ordre 5).

Le seul nombre premier 1129 prendra la place du 6 dans le carré normal (6 + 1123 = 1129).

Pour avoir 1129 en position (3 ; 3), il suffit de trouver, dans 6.1, le carré qui contient 6 en position (3 ; 3) soit celui de centre 6. En ajoutant 1123 dans toutes les cases du carré normal de centre 6, vous obtiendrez un carré magique presque normal qui contiendra son seul nombre premier en position (3 ; 3).

Pour la position (4 ; 4), prenez le carré de centre 15.

Pour la position (2 ; 3), prenez le carré de centre 25.

Pour la position (2 ; 4), prenez le carré de centre 15 et effectuez une rotation de +90°. Le 6 sera alors en position (2 ; 4).

Enfin, le nombre 1129 peut occuper la case que vous voulez. Avec les 25 carrés de 6.1, vous avez déjà 18 positions pour le 6. Les 7 autres positions s'obtiennent avec les équivalents des 25 carrés. Voyez le tableau suivant; la colonne de gauche indique les 7 positions manquantes, la colonne centrale indique le centre du carré à prendre et enfin, la colonne de droite indique les rotations à effectuer.

Position pour le 6	Prendre le carré de centre	Rotation à effectuer
(4 ; 1)	1	+90°
(4 ; 5)	8	+90°
(1 ; 4)	8	180°
(5 ; 3)	2	180°
(3 ; 2)	12	+270°
(2 ; 4)	15	+90°
(2 ; 2)	15	180°

10) Si les 16 nombres premiers forment une suite magique (nous pouvons construire un carré magique avec ces 16 nombres premiers), alors la somme S*de ceux-ci est S*= 4S où S est la somme magique. Mais la somme magique S est paire car somme de 4 impairs donc S = 2k où k est un entier positif. Finalement, S* = 4S = 4(2k) = 8k d'où S* est divisible par 8.

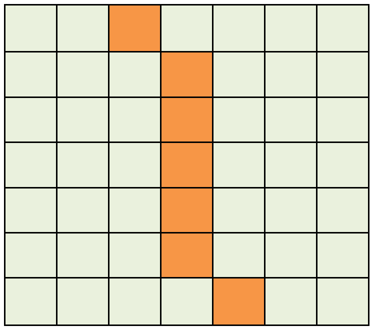
11) Simplement parce que les carrés sont magiques et que la somme dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, doit être la même. Par exemple, dans le carré 1, la rangée 3 contiendrait les 6 plus petits et la rangée 4, les 6 plus grands donc deux sommes différentes pour deux rangées ce qui n'est pas possible dans un carré magique.

En d'autres mots, dans les carrés 1, 2, 3, les 12 nombres premiers sont situés dans deux figures magiques. Nous ne pouvons pas placer les plus petits dans l'une et les plus grands dans l'autre.

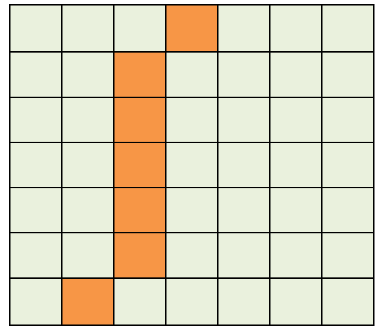
Pour les 5 autres carrés, les figures ne sont pas obligatoirement magiques.

12) Pour la suite 1, c'est certain qu'il sera impossible de construire un carré magique à cause du nombre 2 (voir problème 1 ci-haut). Pour les suites 2, 4, 5, 6, 7, 9, la somme des 16 nombres premiers consécutifs n'est pas divisible par 8. Le carré magique n'est donc pas possible car la divisibilité par 8 est une condition nécessaire à son existence.

13)



Colonne tordue gauche-droite



Colonne tordue droite-gauche

La définition d'une colonne tordue gauche-droite : la première case en haut se situe dans la colonne i, les $n-2$ suivantes se situent dans la colonne $i+1$ et la dernière en bas se situe dans la colonne $i+2$.

La définition d'une colonne tordue droite-gauche : la première case en haut se situe dans la colonne i, les $n-2$ suivantes se situent dans la colonne $i-1$ et la dernière en bas se situe dans la colonne $i-2$.

14) Voici les carrés magiques (2) et (3) de l'annexe 18 :

(2)

1 850 590 111	1 850 590 117	1 850 590 069
1 850 590 057	1 850 590 099	1 850 590 141
1 850 590 129	1 850 590 081	1 850 590 087

(3)

5 196 186 001	5 196 186 007	5 196 185 959
5 196 185 947	5 196 185 989	5 196 186 031
5 196 186 019	5 196 185 971	5 196 185 977

Ces carrés magiques sont formés de 9 nombres premiers consécutifs.

Si nous ajoutons l'entier 3 345 595 890 dans toutes les cases du carré (2), alors nous obtenons le carré (3).

15) Prenons 13 et 17, deux nombres premiers consécutifs et ajoutons 6 à chacun. Nous obtenons 19 et 23, deux nombres premiers consécutifs.

Prenons les deux nombres premiers consécutifs 113 et 127 puis ajoutons à chacun l'entier 2346. Nous obtenons 2459 et 2473, deux nombres premiers qui ne sont pas consécutifs car 2467 est un nombre premier situé entre 2459 et 2473.

16) Le carré (3) – (2) est un carré trivial forme du nombre 3 345 595 890. Cela signifie que nous avons une suite de 9 nombres premiers consécutifs (ceux du carré (2)) puis en ajoutant le même entier 3 345 595 890 à chacun, nous obtenons une nouvelle suite de 9 nombres premiers consécutifs!!! Ceci est exceptionnel!!! Consultez le tableau 5 de l'annexe 18, page 14 et le problème suivant.

17) Bon succès dans votre recherche. Nous croyons que pour les ordres 4, 5, …, cela ne sera pas possible mais notre intuition peut nous jouer un vilain tour en tout temps!!!

Que se passe-t-il si nous donnons à m des valeurs allant jusqu'à 900 000 000 000 000 000 000?

11.4 Chapitre 11

1) Dans 11.3, deuxième cas, ALG-2, prenez les carrés A et B où B est la rotation de – 90° de A. Superposez les deux carrés et formez les couples (u ; v) où u est dans une case de A et v est dans la case correspondante de B. Les nombres u et v prennent les valeurs de 0 à 4k – 1. Il suffit maintenant de vérifier que vous obtenez n^2 couples différents deux à deux.

Suggestion : imprimez 2 fois le carré A puis placez A et B l'un à côté de l'autre.

2) Les carrés A, B et C sont linéairement indépendants. En effet, dans la case (1 ; 1) de A et de B, nous trouvons 0 et dans la case (1 ; 1) de C, nous trouvons 1. Donc C n'est pas une combinaison linéaire de A et B.

Dans la case (2 ; 1) de B, nous trouvons 1 et dans la case (2 ; 1) de A, nous trouvons 0. Donc B n'est pas une combinaison linéaire de A.

Ainsi, les carrés A, B et C sont linéairement indépendants.

3) Dans 11.3, troisième cas, ALG-3, prenez les carrés A et B où B est la rotation de – 90° de A. Superposez les deux carrés et formez les couples (u ; v) où u est dans une case de A et v est dans la case correspondante de B. Les nombres u et v prennent les valeurs de 0 à 4k – 1. Il suffit maintenant de vérifier que vous obtenez n^2 couples différents deux à deux.

4) Les carrés A, B et C sont linéairement indépendants. En effet, dans la case (1 ; 1) de A et de B, nous trouvons 0 et dans la case (1 ; 1) de C, nous trouvons 1. Donc C n'est pas une combinaison linéaire de A et B.

Dans la case (2 ; n) de B, nous trouvons 4k et dans la case (2 ; n) de A, nous trouvons 0. Donc B n'est pas une combinaison linéaire de A.

Ainsi, les carrés A, B et C sont linéairement indépendants.

5) Ici, n = 4k + 2 d'où 4k = n – 2 et 4k + 1 = n – 1. De plus, $n \geq 6$. Voyons ce que nous trouvons dans le coin haut- gauche de chaque carré.

$t = 1\ ;\ r = n\ ;\ a = 1$			$t = n\ ;\ r = 1\ ;\ a = 1$	
1	$n-1$		1	n^2-2n+1
n^2-n			n^2-1	

Les cases des coins haut- gauche sont (1 ; 1), (1 ; 2) et (2 ; 1). Les deux carrés $A + nB + C \ et \ nA + B + C$ sont donc primitifs. En effet, si l'un était un équivalent de l'autre, alors dans chaque carré, le 1 serait associé avec les deux mêmes nombres, ce qui n'est pas le cas ici.

Signalons que pour les deux carrés, les 4 coins sont les mêmes soient $1\ ;\ n\ ;\ n^2\ \ et\ \ n^2-n+1.$ Une condition nécessaire pour que les deux carrés soient primitifs est qu'ils possèdent les mêmes 4 coins ce qui est le cas ici. Mais cette condition n'est pas suffisante!!!

6) Une structure générale est un carré arithmétique si ses n^2 expressions sont toutes différentes et ont la forme :

$$\begin{array}{ccccc}
a & a+r & a+2r & \ldots & a+(n-1)r \\
a+t & a+t+r & a+t+2r & \ldots & a+t+(n-1)r \\
a+2t & a+2t+r & a+2t+2r & \ldots & a+2t+(n-1)r \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a+(n-1)t & a+(n-1)t+r & a+(n-1)t+2r & \ldots & a+(n-1)t+(n-1)r
\end{array}$$

Alors, il est toujours possible de construire un carré magique presque normal en attribuant une valeur entière > 0 aux variables $a, r\, et\, t$ et en exigeant que $r>(n-1)t\ \ ou\ \ t>(n-1)r.$

Si dans la structure générale, nous trouvons deux expressions identiques, alors chaque carré issu de la structure générale contiendra assurément une répétition. Nous ne pourrons jamais construire un presque normal.

La structure n'est donc pas arithmétique.

D'avoir deux expressions identiques peut se produire si le carré A n'a pas été convenablement choisi (voir la remarque 1 à la fin de 11.3). Les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3 ont été construits en choisissant convenablement le carré A. Ce qui n'a pas été fait dans la remarque 1.

7) Si le carré M est arithmétique, alors selon le théorème11.1, la somme doit être divisible par 19. Or ici, 3449 n'est pas divisible par 19. Votre erreur est d'affirmer, si la somme est bien 3449, que votre carré est arithmétique. Si celui-ci est bien arithmétique, alors votre erreur se trouve dans le calcul de la somme qui n'est pas 3449.

8) Regardez les propriétés juste au-dessus du théorème 11.3. Vous aurez alors a = 4, r = 3 et t = 45. Le plus grand entier est 676 = a + (n – 1) r + (n – 1) t; il se trouve juste à droite de la case centrale tandis que juste à gauche de la case centrale, se trouve le plus petit entier 4.

La somme magique (voir juste au-dessus du théorème 11.1) est S = 5100. La case centrale contient le nombre S/n = 5100/15 = 340.

Le carré qui suit est le carré cherché, trouvé avec le fichier «Ordre 15» de MATHEMATICA ou d'EXCEL. Vérifiez les résultats déjà trouvés à travers le carré ci-dessous :

361	652	313	604	265	556	217	508	169	460	121	412	73	364	25
22	358	649	310	601	262	553	214	505	166	457	118	409	70	406
403	19	355	646	307	598	259	550	211	502	163	454	115	451	67
64	400	16	352	643	304	595	256	547	208	499	160	496	112	448
445	61	397	13	349	640	301	592	253	544	205	541	157	493	109
106	442	58	394	10	346	637	298	589	250	586	202	538	154	490
487	103	439	55	391	7	343	634	295	631	247	583	199	535	151
148	484	100	436	52	388	4	340	676	292	628	244	580	196	532
529	145	481	97	433	49	385	46	337	673	289	625	241	577	193
190	526	142	478	94	430	91	382	43	334	670	286	622	238	574
571	187	523	139	475	136	427	88	379	40	331	667	283	619	235
232	568	184	520	181	472	133	424	85	376	37	328	664	280	616
613	229	565	226	517	178	469	130	421	82	373	34	325	661	277
274	610	271	562	223	514	175	466	127	418	79	370	31	322	658
655	316	607	268	559	220	511	172	463	124	415	76	367	28	319

9) Utilisez respectivement ALG-1, ALG-3 et ALG-2 pour les ordres 9, 10 et 12. Dans chaque cas, prenez a = 5 puis de façon arbitraire, r = 2 et:

Ordre 9 : t = 17.

Ordre 10 : t = 19.

Ordre 12 : t = 23.

Vous trouverez trois carrés arithmétiques presque normaux puisque t > (n – 1) r. Vérifiez ensuite que votre carré est bien celui obtenu avec «Ordre 9», «Ordre 10» et «Ordre 12».

10) Tous les carrés construits avec ALG-1 et ALG-2 sont associatifs donc la somme des cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\frac{2S}{n}$. Nous avons alors :

$$\frac{2S}{n} = 2a + (n-1)r + (n-1)t$$

11) $\frac{2S}{n} = \frac{2\times 385}{7} = 110.$

12) Si ce carré magique est associatif, alors nous devons avoir : $\frac{2S}{n} = \frac{2\times 870}{12} = 145.$

La somme des extrémités de la grande diagonale secondaire (ce sont des cases symétriques par rapport au centre du carré) est $10+140=150.$ Le carré ne peut donc pas être associatif puisque 150 est différent de 2S/n = 145.

13) Avec ALG-3, construisez un carré normal M d'ordre 6. Le problème 27 de 11.4 nous dit que si M est arithmétique, alors k M + m est arithmétique.

a) 2M + 1 est arithmétique et il est formé que d'entiers impairs.

b) Nous prendrons 2M.

c) Nous prendrons 3M.

d) Nous prendrons 3M + 2.

e) Nous prendrons 3M. En effet, M est normal donc renferme 18 entiers pairs et 18 entiers impairs. Nous savons que impair x 3 est impair et que pair x 3 est pair.

f) Prenons 21M. Il est vrai que les 18 impairs sont divisibles par 7 et que les 18 pairs sont divisibles par 3.

14) La réponse est oui. Nous pouvons toujours construire un carré magique d'ordre $n \geq 3$ à partir d'un tableau arithmétique, ce que nous montrent les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3. Chaque algorithme nous conduit à une structure générale qui renferme les n^2 expressions d'un tableau arithmétique.

Nous pouvons défaire la structure générale pour former le tableau arithmétique. Inversement, nous pouvons remettre toutes les expressions du tableau arithmétique à leur place dans le carré magique.

15) Utilisez «Ordre 5» avec a = 5, r = 3 et t = 15. La somme magique est S = 205.

47	68	29	50	11
8	44	65	26	62
59	5	41	77	23
20	56	17	38	74
71	32	53	14	35

16)

a) Tous les carrés issus de cette structure générale sont des A-Dürer car la structure est elle-même un A-Dürer. En effet, la somme des 4 cases du sous-carré 2x2 dans le coin haut gauche donne la somme magique S = 4a + 6r + 6t. De plus, la somme des cases (1 ; 1) et (4 ; 4) puis (1 ; 2) et (4 ; 3) donne 2a + 3r + 3t = S/2 d'où le carré est associatif. C'est un A-Dürer.

b) Nous avons 3 variables libres d'où le sous-espace de dimensions 3 (voir le problème 17 qui suit). C'est un sous-espace de l'espace des A-Dürer qui lui est de dimension 5 (voir 5.9). Les carrés A, B et C qui conduisent à la structure générale forment une base.

c) Avec le fichier «Le compte» dans MATHEMATICA, nous trouvons bien f(S) = 68. C'est le nombre de figures magiques que possède la structure générale.

17) Dans une structure générale de carré arithmétique, chaque expression a la forme suivante : $a+rk_1+tk_2$ où $k_1\, et\, k_2$ prennent toutes les valeurs de $0\ à\ n-1.$ Dans une case donnée (i ; j) du carré, $k_1\, et\, k_2$ sont fixes, $a, r,\ t$ sont des variables. Soient A et B, deux carrés issus de cette structure. Dans la case (i ; j) de A et B, nous trouvons respectivement :

$$a+rk_1+tk_2\ \ et\ \ a'+r'k_1+t'k_2.$$

Dans la case (i ; j) de A + B, nous trouvons $(a+a') + (r+r')k_1 + (t+t')k_2$

Dans la case (i ; j) de k A, nous trouvons $k\,a + (k\,r)k_1 + (k\,t)k_2.$ Nous voyons que A + B et k A proviennent de la même structure générale que A et B.

A	B	$A+B$	$k\,A$
a	a'	$a+a'$	$k\,a$
r	r'	$r+r'$	$k\,r$
t	t'	$t+t'$	$k\,t$

Les coordonnées de A sont (a, r, t), celles de B (a', r', t'), celles de A + B sont (a + a', r + r', t + t') et celles de k A sont (k a, k r, k t).

18) Nous savons que cette structure générale a été obtenue avec ALG-1 donc elle est associative. La somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est 2S/5. La case centrale renferme S/5. La somme magique est 5a + 10 r + 10 t.

Numérotons de 1 à 16, les 16 figures de gauche à droite et de haut en bas; elles sont toutes magiques puisque de somme 5a + 10 r + 10 t.

Les figures 1, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15 et 16 sont des super-figures.

19) Effectivement, le fichier «Le compte» de MATHEMATICA donne bien 934 figures magiques; de même avec «Illustration-figures» de MAPLE. (Voir le dernier exemple dans 5.2, chapitre 5).

20) En effet, avec ALG-1, nous obtenons la structure générale de «Ordre 3» qui est équivalente aux structures (1) de 4.3 et (1.1) de 4.3.2, ces deux dernières étant équivalentes (elles génèrent les mêmes carrés magiques d'ordre 3 et les génèrent tous). Les structures (1) et (1.1) sont associatives et ainsi, tous les 3x3 générés avec «Ordre 3» sont associatifs.

21) En effet, tous les carrés magiques fabriqués avec ALG-1 et ALG-2 sont associatifs. Mais il y a de nombreux carrés magiques d'ordre 5, par exemple, qui ne sont pas associatifs (les carrés normaux qui n'ont pas 13 dans la case centrale).

Prenons la structure générale (2) des carrés magiques d'ordre 4 du chapitre 5. Nous observons que f et g sont des variables libres situées dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré. En prenant f différent de S/2 – g, le carré ne pourra pas être associatif.

Prenons maintenant la structure générale des carrés magiques d'ordres supérieurs à 4 (voir chapitre 3, le cas $n \geq 5$). Les variables a_{22} *et* $a_{(n-1)(n-1)}$ sont des variables libres situées dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré. Il suffit de prendre $a_{(n-1)(n-1)} \neq \frac{2S}{n} - a_{22}$ si nous voulons un carré magique non associatif d'ordre impair ou d'ordre pair multiple de 4.

Il reste le cas pair non multiple de 4 soit $n = 4k + 2$.

ALG-3 nous conduit à des carrés qui présentent plusieurs paires de cases symétriques par rapport au centre du carré dont la somme est $2S / n.$. Par exemple, sur la grande diagonale principale, le nombre en position (2 ; 2) + le nombre en position (n – 1; n – 1) donne $2S / n.$ Puis, nous pouvons prendre la structure générale des carrés magiques d'ordres supérieurs à 4 (voir chapitre 3, le cas $n \geq 5$) et construire un carré magique tel que $a_{(n-1)(n-1)} \neq \frac{2S}{n} - a_{22}.$ Ainsi, le carré obtenu ne proviendra pas de ALG-3.

22) Prenons le tableau arithmétique de 11.2. Si nous avons r = (n – 1) t, alors nous aurons une première répétition soit 2 fois a + (n – 1) t. En effet, a + r devient a + (n – 1) t. De même si t = (n – 1) r car a + t deviendra a + (n – 1) r. Le carré ne sera donc pas presque normal.

23) Nous avons posé les conditions nécessaires pour avoir des répétitions. Notre carré M provient de l'algorithme ALG-1 ou de l'algorithme ALG-2 donc, il est associatif.

Si nous prenons une case blanche, cela implique que le nombre qui s'y trouve est unique dans le carré $M.$ Par contre, si la case est rouge, alors le nombre qui s'y trouve n'est pas unique dans $M.$

Deux cases blanches renferment deux nombres différents sans quoi elles seraient rouges. Par contre, deux cases rouges peuvent contenir soit deux nombres égaux, soit deux nombres différents.

Prenons la case blanche A qui contient le nombre a. Celui-ci est donc unique dans $M.$ Sa case B symétrique par rapport au centre du carré contient le nombre $b.$ Nous avons $a \neq b.$ Nous allons montrer que B est une case blanche donc que b est unique dans $M.$ Supposons que C contienne le nombre $b.$ Alors D, la case symétrique par rapport au centre du carré de C, contient le nombre $a.$ Cela contredit l'unicité de $a.$ Donc b est unique et la case B est blanche.

Nous venons de montrer que A est une case blanche si et seulement si B, sa case symétrique par rapport au centre du carré, est blanche. Enfin, la figure formée des cases blanches est symétrique par rapport au centre du carré.

Terminons avec les cases rouges. Si A est une case rouge, alors sa case symétrique par rapport au centre du carré doit être une case rouge car si elle était blanche, selon le résultat précédent, A serait une case blanche.

L'ensemble des cases rouges est une figure symétrique par rapport au centre du carré.

24) Les quatre carrés arithmétiques normaux primitifs sont définis par :

a = 1, r = 1, t = 6 ; a = 31, r = – 6, t = 1 ; a = 31, r = 1, t = – 6 ; a = 1, r = 6, t = 1

Pour vous convaincre que ces quatre carrés sont primitifs, regardez les coins où se trouve le 1.

1	25	25		30	1	1	5
35		1	5		35	30	

25) Observez le tableau arithmétique de 11.2. Pour éviter les répétitions, il est nécessaire que nous ayons $r \neq 0$ *et* $t \neq 0.$ Cette condition n'est évidemment pas suffisante.

26) Pour chaque ordre $n \geq 2,$ nous pouvons trouver une infinité de carrés magiques qui ont pour somme des 4 coins, le nombre $\dfrac{4S}{n}.$

a) Pour $n = 2,\ \ 4a = 4S/n = 4S/2 = 2S = 4a.$

a	a
a	a

Pour $n = 3,$ avec la structure (1.1) nous trouvons que la somme des 4 coins est

$4a + 4r + 4t = 4S/3.$

Pour $n = 4,$ le théorème 5.1 nous dit que la somme des 4 coins est toujours $S = 4S/4.$

b) Pour $n \geq 2,$ la somme des 4 coins est la somme des extrémités des deux grandes diagonales. Puisque le carré est associatif, la somme des 4 coins est $\dfrac{2S}{n} + \dfrac{2S}{n} = \dfrac{4S}{n}.$

c) Avec ALG-1 et ALG-2, les carrés obtenus sont tous associatifs et la somme des 4 coins est $\dfrac{4S}{n}.$ Avec ALG-3, en utilisant les carrés A, B et C, nous trouvons que la somme des 4 coins est : $4a + 2(n-1)r + 2(n-1)t = \dfrac{4S}{n} = \dfrac{4}{n}\left(na + \dfrac{n(n-1)}{2}r + \dfrac{n(n-1)}{2}t \right)$ où la parenthèse est la somme magique de tout carré arithmétique.

d) Ainsi, nous voyons que pour tous les ordres $n \geq 2,$ il existe une infinité de carrés magiques ayant $\dfrac{4S}{n}$ pour somme des 4 coins.

27)

Le carré M est arithmétique et tous ses nombres seront multipliés par $k.$ Tous les nombres du tableau arithmétique correspondant seront multipliés par k puis nous ajouterons m à chacun.

Dans M, le terme général est : $a+k_1\,r+k_2\,t$ où les paramètres $k_1 \; et \; k_2$ varient de $0 \; à \; n-1.$

Dans $k\,M + m,$ le terme général est : $\left(k\,a+m\right) + k_1(k\,r) + k_2(k\,t).$ Tous les nombres forment un nouveau tableau arithmétique et le nouveau carré est arithmétique.

28)

Prenons M, un carré magique normal d'ordre $n \geq 3.$ Le carré $10^k M$ est presque normal et renferme n^2 entiers, chacun se terminant par k zéros. Puis ajoutons l'entier $a_1a_2...a_k$ lequel est formé de k chiffres. Nous obtiendrons alors un carré presque normal formé d'entiers se terminant tous par $???...??\,a_1a_2...a_k$.

Nous pouvons en fabriquer une infinité en prenant M parmi l'infinité de presque normaux.

29)

Ces carrés sont donc associatifs. Les 4 sommets du rectangle sont les extrémités des deux diagonales du rectangle. Nous avons $a \; et \; c$, deux nombres en positions symétriques par rapport au centre du carré d'où $a+c=2S\,/\,n.$ De même, $b+d\;=2S\,/\,n.$ Finalement :

$$a+b+c+d=2S\,/\,n\;+\;2S\,/\,n\;=\;4S\,/\,n$$

30) a) Les carrés de S_n sont définis avec les variables $a, r \; et \; t.$ En posant, par exemple, $t=n\,r,$ nous obtenons une structure générale G de carrés formés de n^2 nombres qui forment une suite arithmétique. La structure G renferme 2 variables libres. Il est facile de montrer que W est un sous-espace de dimension 2 de S_n. La dimension est 2 car nous avons 2 variables libres; nous pouvons aussi trouver une base de W laquelle contiendra 2 carrés linéairement indépendants.

Nous pourrions aussi poser $r=nt.$

b)

$$(1.1)\quad \begin{pmatrix} A+t+2r & A & A+2t+r \\ A+2t & A+t+r & A+2r \\ A+r & A+2t+2r & A+t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A+5r & A & A+7r \\ A+6r & A+4r & A+2r \\ A+r & A+8r & A+3r \end{pmatrix}$$

Après avoir posé $t=3r.$

$$\begin{pmatrix} A+5r & A & A+7r \\ A+6r & A+4r & A+2r \\ A+r & A+8r & A+3r \end{pmatrix} = A\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}}_{Q}$$

La base $(P\ ;\ Q)$ de W est formée de deux carrés magiques linéairement indépendants.

Voici la structure trouvée dans «Ordre 4» :

$$\begin{matrix} a & a+3r+2t & a+3r+t & a+3t \\ a+2r+3t & a+r+t & a+r+2t & a+2r \\ a+r+3t & a+2r+t & a+2r+2t & a+r \\ a+3r & a+2t & a+t & a+3r+3t \end{matrix}$$

Posons $t=4r$. Nous obtenons :

$$\begin{matrix} a & a+11r & a+7r & a+12r \\ a+14r & a+5r & a+9r & a+2r \\ a+13r & a+6r & a+10r & a+r \\ a+3r & a+8r & a+4r & a+15r \end{matrix}$$

Complétez en trouvant la base $(P\ ;\ Q)$ de W.

31) Si a, r *et* t sont des entiers, alors il est évident que le carré renferme que des entiers. Inversement, si le carré renferme que des entiers, alors a est un entier, a + r est un entier donc r est entier et a + t est un entier donc t est entier.

32) La réponse est non. Le carré trivial d'ordre 2 qui renferme le nombre 5, par exemple, est un carré arithmétique défini avec a = 5 et r = t = 0.

Le carré arithmétique normal suivant d'ordre 6 est défini par a = 36, r = – 1 et t = – 6.

36	12	19	13	25	6
2	29	14	23	11	32
3	27	22	16	9	34
4	10	21	15	28	33
35	26	17	20	8	5
31	7	18	24	30	1

33)

a) Chaque carré est arithmétique car nous avons pour chacun, son tableau arithmétique défini par a = 0, r = 1 et t = 0.

b) Nous voulons montrer que A + B n'est pas un carré arithmétique. Cela n'est pas toujours simple!!!

Si le carré magique est formé seulement d'entiers, alors, selon le théorème 11.1, nous avons là une condition nécessaire pour que le carré soit arithmétique. Ici, notre carré A + B est formé d'entiers et il est d'ordre pair. Sa somme magique est 30 et elle est un multiple entier de 3 soit (6/2). Nous ne pouvons rien dire. Si la somme avait été 28, nous aurions pu affirmer que le carré A + B n'est pas arithmétique.

Il faut pousser l'étude plus loin si nous voulons montrer que A + B n'est pas arithmétique. Nous allons ici montrer qu'aucun tableau arithmétique ne peut nous donner A + B.

D'abord, observons ce qu'il y a dans A + B. Ce sont 36 entiers qui vont de 0 à 10.

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 3 & 9 & 5 \\ 9 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Nous allons indiquer, en rouge, le nombre de fois que chaque entier apparait dans le carré:

$(0\,;1)\;(1\,;2)\;(2\,;1)\;(3\,;6)\;(4\,;5)\;(5\,;6)\;(6\,;5)\;(7\,;6)\;(8\,;1)\;(9\,;2)\;(10\,;1)$

Nous allons nous servir des expressions $a+5r \;\; et \;\; a+5t$, lesquelles ne peuvent prendre que des valeurs entières allant de 0 à 10. Elles sont dans le tableau arithmétique d'ordre 6 suivant :

$$(*) \quad \begin{matrix} a & a+r & a+2r & a+3r & a+4r & a+5r \\ a+t & a+t+r & a+t+2r & a+t+3r & a+t+4r & a+t+5r \\ a+2t & a+2t+r & a+2t+2r & a+2t+3r & a+2t+4r & a+2t+5r \\ a+3t & a+3t+r & a+3t+2r & a+3t+3r & a+3t+4r & a+3t+5r \\ a+4t & a+4t+r & a+4t+2r & a+4t+3r & a+4t+4r & a+4t+5r \\ a+5t & a+5t+r & a+5t+2r & a+5t+3r & a+5t+4r & a+5t+5r \end{matrix}$$

Nous allons attribuer à la variable a, les valeurs de 0 à 10. À l'aide des deux expressions choisies, nous allons trouver les valeurs possibles pour r et t. Puisque le carré $A+B$ est formé que d'entiers, nous devons donner à r et t que des valeurs entières. Nous allons regarder 2 cas parmi les 11. Vous aurez alors qu'à compléter les autres cas de la même façon.

Cas 1 : $a=0$

Nous voulons :
$$0 \le 5r \le 10$$
$$0 \le r \le 2$$

Les seuls entiers possibles sont : $r=0,\; r=1,\; r=2.$ De la même façon, nous trouvons que les seuls entiers possibles pour t sont $t=0,\; t=1,\; t=2.$ D'où 9 cas à regarder.

Voyons, par exemple, ce que devient le tableau (*) avec $a=0,\ r=1,\ t=1$:

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Celui-ci est à rejeter car il ne correspond pas aux nombres dans A + B. En effet, le tableau contient trois 2 alors que A + B n'en contient qu'un seul 2.De même pour les 8.

Avec $a=0,\ r=1,\ t=2,$ le tableau contient des nombres supérieurs à 10 lesquels ne sont pas dans A + B. Donc, un autre cas à rejeter.

0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	10	11
8	9	10	11	12	13
10	11	12	13	14	15

Il reste 7 cas à regarder sur les 9.

Cas 7 : $a=6$

Nous voulons :

$$0 \le 6+5r \le 10$$
$$-6 \le 5r \le 4$$
$$-6/5 \le r \le 4/5$$

Les seuls entiers possibles sont : $r=-1,\ r=0.$ De la même façon, nous trouvons que les seuls entiers possibles pour t sont $t=-1,\ t=0.$ D'où 4 cas à regarder. Que devient le tableau (*) avec : $a=6,\ r=0,\ t=-1$:

6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5
4	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

À rejeter puisque nous avons six 2 alors que A + B n'en contient qu'un seul.

Les onze cas (a = 0 jusqu'à 10) nous indiquent que le tableau (*) ne pourra jamais conduire à A + B. Tous les cas seront à rejeter!!!

Le carré magique A + B n'est donc pas arithmétique. Tous les calculs ont été faits avec MATHEMATICA, donc très rapidement.

34) En général, la réponse est non. Si G est la structure générale des carrés magiques d'ordre 5, par exemple, alors tous les équivalents proviennent de cette structure.

Si G est la structure générale des diaboliques (voir 5.10), alors seulement deux équivalents sur huit sont des diaboliques donc six équivalents ne proviennent pas de G.

35) A, B et C sont des carrés magiques associatifs d'ordre n, respectivement de sommes S, T et V. Nous voulons montrer que x A + y B + z C est un carré magique associatif.

Prenons les mêmes deux cases symétriques par rapport au centre de chaque carré A, B et C. La somme de ces deux cases est 2xS/n pour A, 2yT/n pour B et 2zV/n pour C. La somme de ces deux cases dans x A + y B + z C est donc (2xS + 2yT + 2zV)/n = 2 (xS + yT + zV)/n = 2W/n où W est la somme magique de x A + y B + z C. La combinaison linéaire des trois carrés associatifs est donc un carré magique associatif.

36) Les sommes sont : $s_1 = \dfrac{[a+a+(n-1)r]n}{2}$ et $s_2 = \dfrac{[a+(n^2-n)r+a+(n^2-1)r]n}{2}$

La somme $S = \dfrac{(2a+n^2r-r)n}{2}$ puis $\dfrac{s_1+s_2}{2} = \dfrac{(2a+n^2r-r)n}{2}$.

Finalement, $S = \dfrac{s_1+s_2}{2}$. Nous avions ici $n \geq 3$.

Pour $n = 2$, le carré est trivial. Nous pouvons respecter $a > 0$ mais nous aurons $r = 0$. Nous avons $s_1 = s_2 = 2a \, et \, S = 2a$.

Finalement $S = \dfrac{s_1+s_2}{2}$.

37) Nous prendrons le carré de la page 8 qui sera le carré A puis sa rotation de -90°, le carré B.

Propriété 2)

Les nombres de la grande diagonale principale sont, de bas en haut :

$$t\frac{n-1}{2} + r\times 0 + a\,;\, t\frac{n-1}{2} + r\times 1 + a\,;\, t\frac{n-1}{2} + r\times 2 + a\,;\, \ldots\,;\, t\frac{n-1}{2} + r\times(n-1) + a$$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison r.

Propriété 3)

Les nombres de la grande diagonale secondaire sont, de haut en bas :

$$t\times 0 + r\frac{n-1}{2} + a\,;\; t\times 1 + r\frac{n-1}{2} + a\,;\; t\times 2 + r\frac{n-1}{2} + a\,;\ldots;\; t\times(n-1) + r\frac{n-1}{2} + a$$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison t.

Propriété 4)

À gauche de la case centrale, nous trouvons : $t\times 0 + r\times 0 + a = a$.

À droite de la case centrale, nous trouvons : $t(n-1) + r(n-1) + a$.

Lorsque r et t sont positifs, alors il est clair que a et $a+(n-1)r+(n-1)t$ sont respectivement le plus petit et le plus grand nombre du carré. (Voir le tableau arithmétique (*), page 1).

38)

1) Le carré A de la page 15 est associatif car la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\frac{2S}{n}$. En effet, $S = 4k(4k-1)/2 = 8k^2 - 2k$ et avec $n = 4k$, $\frac{2S}{n} = \frac{16k^2 - 4k}{4k} = 4k-1$. Effectivement, si nous observons bien la structure du carré A, il est facile de se constater que la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $4k-1$. La somme t A + r B + a C sera donc un carré associatif.

2) Les nombres de la grande diagonale principale sont, de haut en bas :

$$t\times 0 + r\times 0 + a\,;\; t\times 1 + r\times 1 + a\,;\; t\times 2 + r\times 2 + a\,;\;\ldots;\; t\times(4k-1) + r\times(4k-1) + a$$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison $r+t$.

3) Les nombres de la grande diagonale secondaire, de haut en bas, ont la forme :

$$((4k-1)-u)t + ur + a \text{ où } u \text{ varie de } 0 \text{ à } 4k-1.$$

Nous avons : $((4k-1)-u)t + ur + a = (4k-1)t + a + u(r-t)$

Les nombres forment donc une suite arithmétique de raison $r-t$. Le nombre en bleu est constant.

4) Dans chaque colonne du carré A (page 15), de haut en bas, nous trouvons $\frac{n}{4}$ entiers identiques, $\frac{n}{2}$ entiers identiques puis de nouveau $\frac{n}{4}$ entiers identiques. Dans les colonnes du carré B qui est la rotation de -90° de A, nous trouvons de haut en bas, une suite arithmétique de

$\frac{n}{4}$ entiers, une suite arithmétique de $\frac{n}{2}$ entiers puis une suite arithmétique de $\frac{n}{4}$ entiers. Ces suites sont de raisons 1 ou – 1. Il s'ensuit, dans le carré $tA + rB + aC$, les propriétés énoncées et les raisons sont $\pm\, r, \mp\, r, \pm\, r.$

5) De la même façon, sur les rangées, les trois suites arithmétiques sont de raisons $\pm\, t, \mp\, t, \pm\, t.$

6) Observez que la grande diagonale principale de A renferme de haut en bas, les entiers consécutifs allant de 0 à 4k – 1. Il en est de même de la grande diagonale principale de B. Si a, r et t sont positifs, alors le plus petit nombre est t x 0 + r x 0 + a = a situé dans la case du haut de la grande diagonale principale.

Le plus grand nombre est t (4k – 1) + r (4k – 1) + a situé dans la case du bas de la grande diagonale principale. (Voir le tableau arithmétique (*), page 1).

39)

1) En observant bien la structure du carré A de la page 21, nous voyons que les entiers vont de 0 à 4k + 1 = n – 1 puisque n = 4k + 2.

2) Les nombres de la grande diagonale principale sont, de haut en bas :

$$t\times 0 + r\times 0 + a;\ t\times 1 + r\times 1 + a;\ t\times 2 + r\times 2 + a;\ \ldots;\ t\times(4k-1) + r\times(4k-1) + a$$

Ils forment donc une suite arithmétique de raison $r+t.$

Les nombres de la grande diagonale secondaire, de haut en bas, ont la forme :

$$((4k+1)-u)t + ur + a \text{ où } u \text{ varie de } 0 \text{ à } 4k+1.$$

Nous avons : $((4k+1)-u)t + ur + a = (4k+1)t + a + u(r-t)$

Les nombres forment donc une suite arithmétique de raison $r-t.$ Le nombre en bleu est constant.

3) Observez que la grande diagonale principale de A renferme de haut en bas, les entiers consécutifs allant de 0 à 4k + 1. Il en est de même de la grande diagonale principale de B. Si a, r et t sont positifs, alors le plus petit nombre est t x 0 + r x 0 + a = a situé dans la case du haut de la grande diagonale principale.

Le plus grand nombre est t (4k – 1) + r (4k – 1) + a situé dans la case du bas de la grande diagonale principale. (Voir le tableau arithmétique (*), page 1).

4) Pour montrer que les deux carrés sont primitifs, regardons les 3 nombres dans le coin haut gauche; plus précisément, les nombres situés dans les cases (1 ; 1), (1 ; 2) et (2 ; 1).

Avec a = 1, r = 1, t = n, nous trouvons le coin du carré U :

$1 \qquad\qquad\qquad 1 + 4kn$

$1 + 4k + n(4k + 1)$

Avec a = 1, r = n, t = 1, nous trouvons le coin du carré V :

$1 \qquad\qquad 1 + 4k$

$2 + 4k + 4kn$

Excepté 1, aucun nombre du coin de U ne peut égaler un nombre du coin de V. En effet, puisque n est un entier ≥ 6 d'où $k \geq 1$, nous avons :

$1 + 4k = 1 + 4kn$ qui implique $n = 1$, ce qui est impossible.

$1 + 4k = 1 + 4k + n(4k + 1)$ implique $n = 0$ ou $k = -1/4$ ce qui est impossible.

$2 + 4k + 4kn = 1 + 4kn$ implique $1 + 4k = 0$ ce qui est impossible.

$2 + 4k + 4kn = 1 + 4k + n(4k + 1)$ implique $n = 1$, ce qui est impossible.

Donc, les deux carrés sont primitifs car aucun équivalent de U ne peut égaler V et réciproquement, bien entendu. De plus, nous savons déjà que U et V sont normaux.

12.5 Chapitre 12

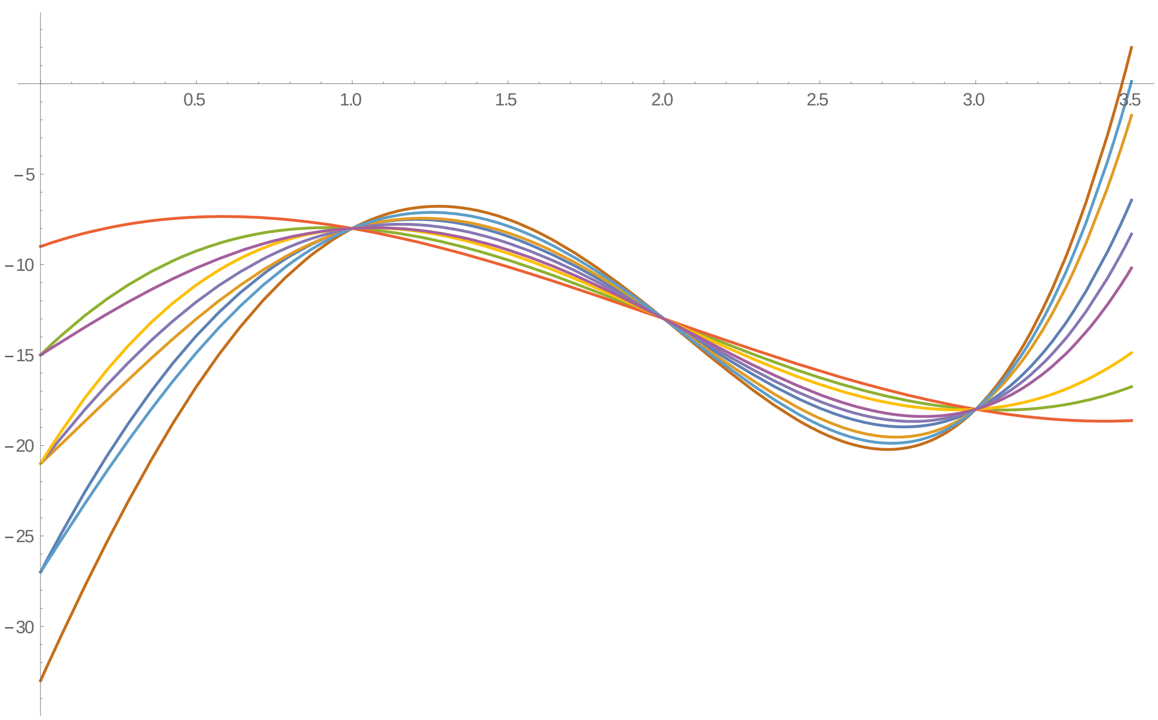
1) Reprenons la structure générale des carrés magiques d'ordre 3 :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{pmatrix}$$

Posons dans (*) :

$$a = \alpha(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 9 \; ; \; r = r(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \; ; \; t = t(x) = (x^2-1)(x-2)(x-3).$$

Les neuf courbes sont les suivantes où $\alpha(x)$ est la courbe qui rencontre l'axe vertical au point le plus haut (la courbe orangée) :



À $x=1, x=2, x=3,\; r(x)=t(x)=0$ et les points d'intersection sont :

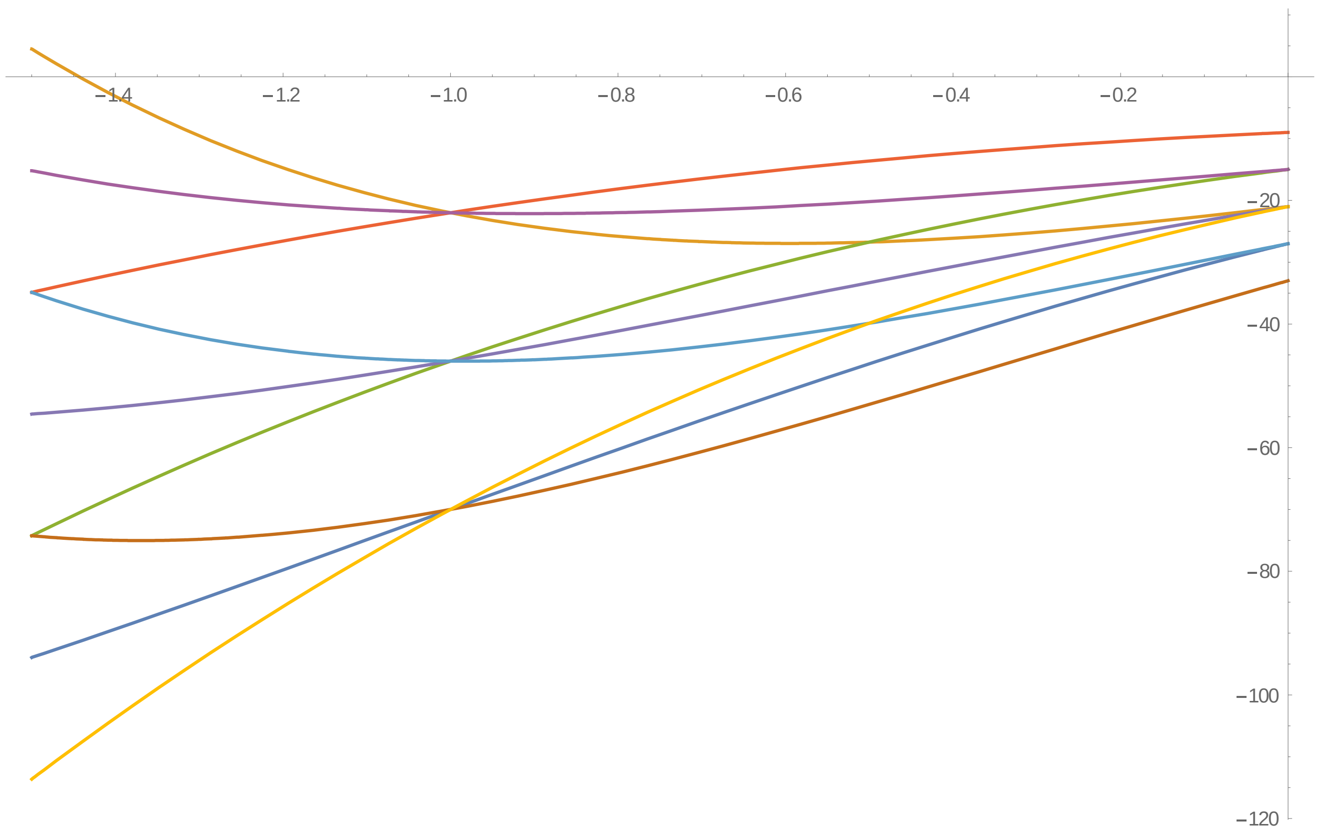
$$(1\;;\;\alpha(1)), (2\;;\;\alpha(2)) \; et \; (3\;;\;\alpha(3)).$$

Ces trois points sont donc sur la courbe de $\alpha(x) = f(x)$. Ce sont les trois nœuds. Notez que le choix de $r(x)$ *et* $t(x)$ est arbitraire, en autant que $r(1) = t(1) = r(2) = t(2) = r(3) = t(3) = 0$.

Que se passe-t-il à $x=-1$? $t(-1)=0$ mais $r(-1)\neq 0$. Notre carré devient :

$$\begin{pmatrix} \alpha(-1)+2r(-1) & \alpha(-1) & \alpha(-1)+r(-1) \\ \alpha(-1) & \alpha(-1)+r(-1) & \alpha(-1)+2r(-1) \\ \alpha(-1)+r(-1) & \alpha(-1)+2r(-1) & \alpha(-1) \end{pmatrix}$$

Cela explique les intersections à x = -1!!!



2) Prenons la seconde structure générale (2.4) des super-Dürer-alpha (voir chapitre 5.6). Nous voyons que la somme magique est 4A + 6r + 6t. Ici, nous avons :

$$A=-1769+\frac{121409x}{28}-\frac{161307x^2}{40}+\frac{56981x^3}{30}-\frac{3981x^4}{8}+\frac{881x^5}{12}-\frac{57x^6}{10}+\frac{19x^7}{105}$$

$$r=723-\frac{745261x}{420}+\frac{66171x^2}{40}-\frac{140533x^3}{180}+\frac{1639x^4}{8}-\frac{2723x^5}{90}+\frac{47x^6}{20}-\frac{47x^7}{630}$$

$$t=462-\frac{468829x}{420}+\frac{41367x^2}{40}-\frac{87391x^3}{180}+\frac{1015x^4}{8}-\frac{841x^5}{45}+\frac{29x^6}{20}-\frac{29x^7}{630}$$

Avec MATHEMATICA, nous avons trouvé 4A + 6r + 6t = 34. La somme magique est donc 34 quelle que soit la valeur de la variable x.

3) Voir l'annexe 15, exemple 3 où p(x) est notre polynôme $A(x)$. Le procédé est le même pour $r(x) \, et \, t(x)$.
Voyons pour $r(x)$ que nous nommons temporairement $q(x)$ puisque $x = 2520r + k$.
Donc, nous posons $x = 2520r + k$ dans $q(x)$. Avec MATHEMATICA, nous obtenons $q(2520r + k) = q(k) + E$ *où* E est un entier. Puisque $q(k)$ est un entier pour $k = 0, 1, 2, ..., 2519$, alors $q(x)$ est un entier quel que soit l'entier *x*.

Cependant, $q(630r + k) = q(k) + E + \frac{u}{2}$ où E est un entier et $\frac{u}{2}$, somme de quatre fractions, est aussi un entier (facile à montrer). Nous avons vérifié que $q(k)$ est un entier pour $k = 0, 1, 2, ..., 629$. Donc $q(x)$ est toujours un entier dès que *x* est entier.

Il en est de même pour $t(x)$. Donc, tous les polynômes du carré prennent une valeur entière dès que *x* entier. En effet, c'est le cas de $A(x), r(x) \, et \, t(x)$ ainsi que de tous les autres polynômes qui sont des expressions linéaires à coefficients entiers de $A(x), r(x) \, et \, t(x)$.

4) Les neuf courbes possèdent un seul nœud. Les nœuds sont obtenus en résolvant le système d'équations : $\begin{cases} r(x) = 0 \\ t(x) = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x^3 \sin(2x) = 0 \\ x \cos(2x) = 0 \end{cases}$

Il est clair que le système possède une solution à $x = 0$. D'où le nœud à $x = 0$. Pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres, il suffit de prendre toutes les valeurs de *x* qui annulent $r(x)$ et de montrer que celles-ci n'annulent pas $t(x)$.

Les valeurs qui annulent $\sin(2x)$ sont $k\pi \; et \; \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}$. Mais aucune de ces valeur annule $\cos(2x)$. Le nœud est donc unique.

5) Il faut montrer que le système : $\begin{cases} x^3 \sin(2x) = 0 \\ x \cos(3x) = 0 \end{cases}$ possèdent une infinité de solutions.

Les valeurs de *x* qui annulent $\sin(2x)$ sont $k\pi \, et \, \frac{\pi}{2} + k\pi$. Nous voyons que $\cos(3k\pi) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Puis $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\right) = 0$ pout tout $k \in \mathbb{Z}$.

Les nœuds sont donc situés à $x = 0 \; et \; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}$.

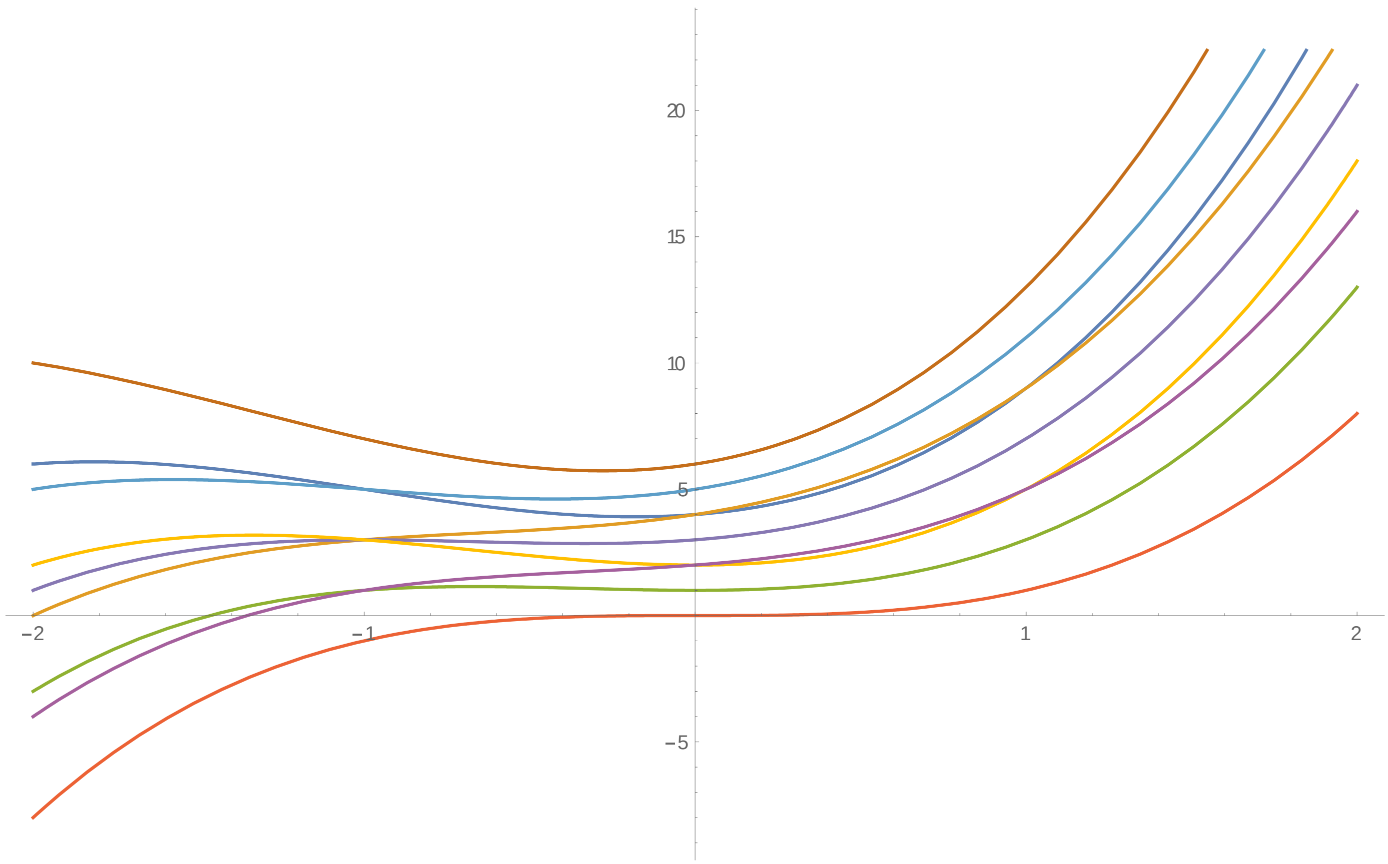
6) Voir l'exemple 3 de 12.4. L'intervalle des rencontres est l'intervalle fermé [– 1 ; 1]. Nous trouvons cinq intersections à x = – 1, deux intersections à x = 0 et deux intersections à x = 1. Ce sont les seules intersections entre ces neuf courbes. En dehors de l'intervalle [– 1 ; 1], il n'y a aucune intersection.

La démarche à suivre est expliquée dans l'exemple 3 et nous avons noté les 9 polynômes de la structure générale (1.1) comme suit :

$$\begin{pmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (4) & (5) & (6) \\ (7) & (8) & (9) \end{pmatrix}$$

Ainsi, en résolvant l'équation (4) = (7), par exemple, nous trouverons les abscisses des points d'intersection entre les deux courbes qui correspondent aux polynômes (4) et (7).

7) Voici les 9 courbes représentatives des 9 polynômes de l'exemple 3 de 12.4.



Nous allons identifier les 9 courbes à partir de la verticale x = 3/2. De bas vers le haut, nous rencontrons les courbes qui correspondent aux polynômes :

(2) ; (7) ; (9) ; (6) ; (5) ; (4) ; (1) ; (3) ; (8)

Nous notons chaque courbe avec le même nombre que pour son polynôme. Ainsi, la courbe (2) est celle du polynôme (2).

La courbe (2) ne rencontre aucune des autres courbes.

La (7) et la (9) se rencontrent à x = – 1.

La (9) et la (6) se rencontrent à x = 0 et à x = 1.

La (6) et la (5) se rencontrent à x = – 1.

La (6) et la (4) se rencontrent à x = – 1.

La (5) et la (4) se rencontrent à x = – 1.

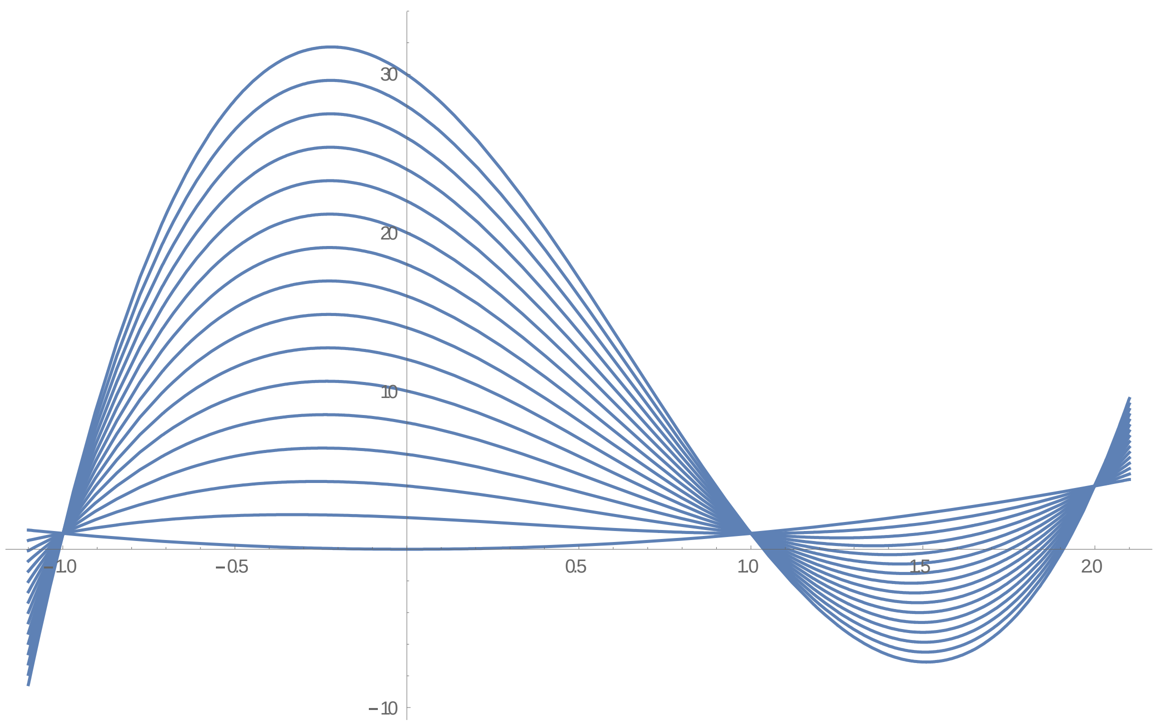
La (4) et la (1) se rencontrent à x = 0 et à x = 1.

La (1) et la (3) se rencontrent à x = – 1.

La (8) ne rencontre aucune des autres courbes.

8) Prenons la structure générale (2.12) des diaboliques-alpha (voir 5.11). Puis posons :

$$a(x) = x^2 \ \ et \ \ r(x) = (x^2 - 1)(x - 2).$$



Nous avons un nœud à $x = -1,\ x = 1,\ x = 2$ et aucune autre intersection. En effet, pour les autres valeurs de $x,\ r(x) \neq 0$ et les 16 polynômes forment une suite arithmétique de raison non nulle d'où 16 valeurs différentes. Il ne peut donc pas y avoir d'autres intersections.

9) Simplement parce qu'à $x = 1,$ nous avons $r(1) = 0\, et\, t(1) = 3.$ (Voir le type 2 du tableau en vert dans l'exemple 11 de 12.4). Le carré plus bas renferme les valeurs des 16 polynômes à

$x=1.$ Nous voyons que quatre polynômes prennent la valeur 2, quatre autres la valeur 5, quatre autres la valeur 8 et quatre autres la valeur 11.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 11 & 8 \\ 11 & 8 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 8 \\ 11 & 8 & 2 & 5 \end{array}$$

Voilà pourquoi les 16 courbes se rencontrent par groupe de 4 courbes. Il en sera toujours ainsi si le carré magique est arithmétique et si $r(x_0)=0$ mais $t(x_0)\neq 0$ ou l'inverse. Pour voir ce qui se passe, prenez le tableau arithmétique dans lequel vous poserez $r=0.$

Enfin, pour voir que les 16 polynômes sont différents, il suffit de les évaluer à $x=5.$ Vous trouverez 16 valeurs différentes donc les 16 polynômes sont différents.

10) Ici, $r(x)\,et\,t(x)$ sont $\sin(x)\,et\,\cos(x).$ Puisque $\sin(x_0)=0 \;\Rightarrow\; \cos(x_0)\neq 0$ et que $\cos(x_0)=0 \;\Rightarrow\; \sin(x_0)\neq 0,$ alors nous ne pouvons pas avoir de nœud. Par contre nous avons le type 2 à $x=k_1\,\pi$ et $x=\pi/2+k_2\pi$ où $k_1\,et\,k_2$ parcourent $\mathbb{Z}.$ Cala revient à prendre $x=k\pi/2$ où k parcourt $\mathbb{Z}.$

11) Nous utilisons ici une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 5 (voir le fichier «Ordre 5» dans MATHEMATICA ou EXCEL).

Nous avons : $a(x)=15$; $r(x)=\sin(x)$; $t(x)=\sin(2x).$

Pour les nœuds : $\begin{cases}\sin(x)=0\\ \sin(2x)=0\end{cases}$ nous donne $x=k\,\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}.$

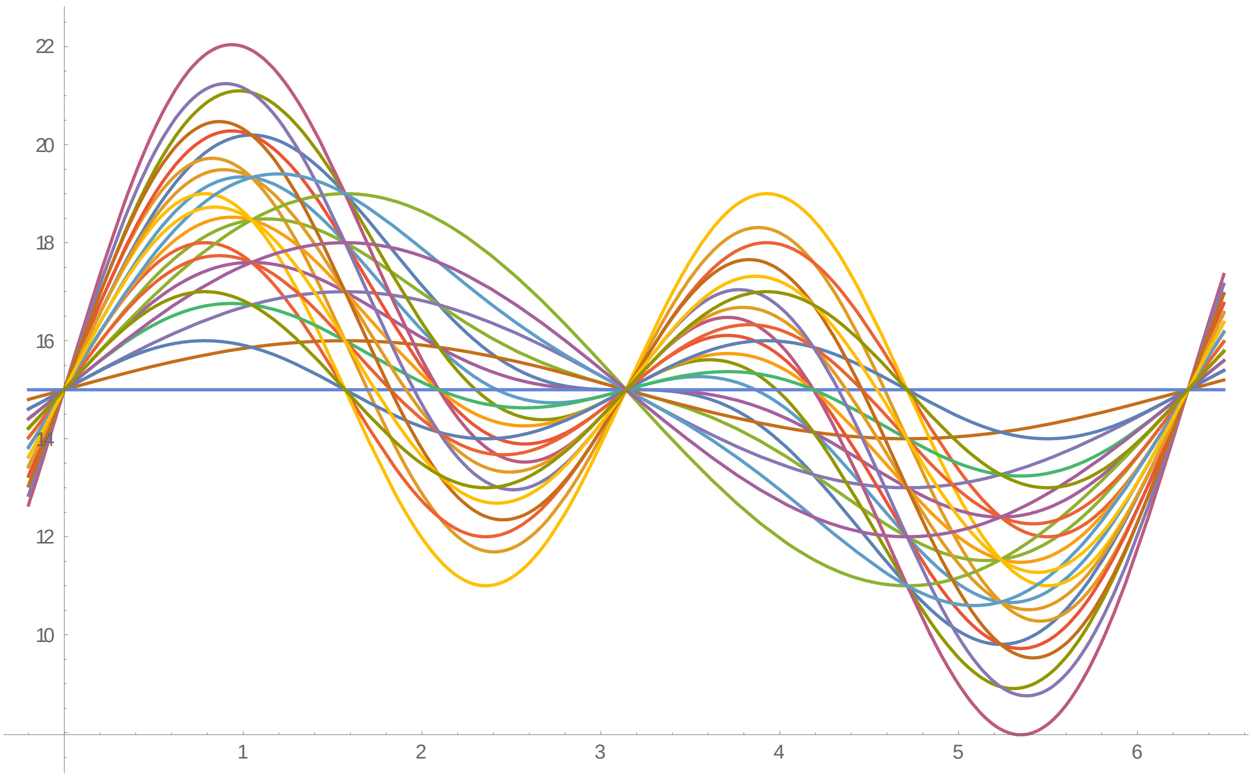
Pour le type 2 : $\begin{cases}\sin(2x)=0\\ \sin(x)\neq 0\end{cases}$ nous donne $x=\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi$ où k parcourt $\mathbb{Z}.$

Notez ici que $\sin(x)=0\;\; et\;\; \sin(2x)\neq 0$ n'est pas possible!!!

Pour le type 3 : Il faut $2\sin(x)\cos(x)=\pm\sin(x)\neq 0$ d'où $\cos(x)=\pm\,\dfrac{1}{2}.$ Enfin, nous trouvons :

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{3}+2k\pi \text{ où } k \text{ parcourt } \mathbb{Z}.$$

Vous pouvez vérifier ces intersections dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, voir le graphique ci-dessous.



Nous avons trois nœuds, deux types 2 et quatre types 3.

12) La solution est placée après le problème 15 plus bas.

13) Pour le type 3 : Il faut $2\sin(x)\cos(x) = \pm\sin(x) \neq 0$ d'où $\cos(x) = \pm\,\frac{1}{2}$. Enfin, nous trouvons :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \text{ parcourt } \mathbb{Z}.$$

14) Dans la solution du problème 11 ci-haut, nous avons traité le type 3. Celui-ci a lieu à $x = -\frac{\pi}{3}$ puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et que $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq 0$.

15) $a(x) = x\ ;\ r(x) = \sin(2x)\ ;\ t(x) = \sin(4x)$.

Pour les nœuds : $\begin{matrix} \sin(2x) = 0 \\ \sin(4x) = 0 \end{matrix}$ soit $\begin{matrix} 2\sin(x)\cos(x) = 0 \\ 4\sin(x)\cos(x)\cos(2x) = 0 \end{matrix}$

d'où $x = k_1\pi\ et\ x = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$ avec $k_1\, et\, k_2$ qui parcourent $\mathbb{Z}$. Les nœuds se trouvent donc sur l'axe horizontal et sur l'axe vertical.

Notons que $\cos(x) = 0 \;\Rightarrow\; \cos(2x) = -1$.

Pour le type 2 : $\begin{matrix} 4\sin(x)\cos(x)\cos(2x) = 0 \\ 2\sin(x)\cos(x) \neq 0 \end{matrix}$ d'où $\cos(2x) = 0\ et\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{4},\ k \text{ parcourt } \mathbb{Z}.$$

Le type 2 se produit aux multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$. Il est facile de montrer que les nœuds se produisent aux multiples pairs de $\frac{\pi}{4}$.

12) Oui, nous pouvons les prévoir. En coordonnées polaires, la valeur de la variable x est la mesure en radians d'un angle.

Les nœuds se trouvent à $x = k\,\pi$ donc se trouvent sur l'axe horizontal.

Les rencontres de type 2 sont à $x=\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi$ donc se trouvent sur l'axe vertical. Ce que vous pouvez observer dans l'exemple 11 de 12.4. N'oubliez pas que k parcourt $\mathbb{Z}$.

16) Dans les quatre cases du carré d'ordre 2, plaçons les polynômes suivants :

Ce choix est arbitraire :
$$\begin{aligned} a(x)&=(x-1)(x-2)+k\\ b(x)&=(x-1)(x-2)(x+1)+k\\ c(x)&=(x-1)(x-2)(x+2)+k\\ d(x)&=(x-1)(x-2)(x+3)+k \end{aligned}$$

Ceux-ci prennent la même valeur k pour seulement $x=1\ et\ x=2.$

17) Les valeurs entières de u,v,s,w varient de $0\ à\ 3.$ Il est facile de constater que $s-u$ prendra des valeurs entières allant de $-3\ à\ 3.$ De même pour $v-w.$ La fraction a donc la forme :

$$\frac{s-u}{v-w}=\frac{-3,-2,-1,0,1,2,3}{-3,-2,-1,1,2,3}\ \text{puisque}\ v\neq w.$$

Il est aussi facile de constater que les 42 quotients sont tous compris dans l'intervalle $[-3\ ;\ 3].$

Finalement, $-3\leq\dfrac{s-u}{v-w}\leq 3.$

18) Nous voulons seize courbes avec trois types 3 consécutifs. Avec «Ordre 4», nous posons :

$$a(x)=x^2\ ;\ r(x)=x^2+1\ ;\ t(x)=x^4+1$$

Pour les types 3, il faut : $x^4+1=\pm(x^2+1)\neq 0.$

Nous trouvons un type 3 à $x=-1, x=0\, et\ x=1.$

Le graphique plus bas montre que les trois types 3 sont consécutifs. Pour être certain, il faut chercher les intersections dans l'intervalle fermé $[-1\ ;1].$ Mais nous allons chercher l'intervalle des rencontres, lequel est : $\left[-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}\ ;\ \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}}\right]\simeq\left[-1{,}8872077\ ;\ 1{,}8872077\right].$ En dehors de cet intervalle, il n'y a aucune autre intersection. Nous allons voir ça de plus près.

Nous avons cherché tous les points d'intersection en résolvant 120 équations. Nous avons trouvé 14 intersections à $x=-1,$ 14 intersections à $x=0$ et 14 intersections à $x=1.$ Ce sont trois types 3 consécutifs. Dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, il n'y a aucune autre intersection. En effet, les autres intersections se situent à :

$$x = \pm\frac{\sqrt{3+\sqrt{17}}}{2} = \pm 1{,}334457\ldots \qquad 4-10\ ;\ 7-13$$

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}} = \pm 1{,}553773\ldots \qquad 2-6\ ;\ 4-9\ ;\ 5-10\ ;\ 7-12\ ;\ 8-13\ ;\ 11-15$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}} = \pm 1{,}887207\ldots \qquad 2-10\ ;\ 4-13\ ;\ 7-15$$

Nous trouvons à droite, les paires de courbes qui se rencontrent. Par exemple, la paire 4-10 nous indique que les courbes 4 et 10 se rencontrent à x = 1,334457… et à x = – 1,334457…

Voici comment les 16 courbes ont été numérotées.

$$\begin{array}{cccc}
x^2 & 5+4x^2+2x^4 & 4+4x^2+x^4 & 3+x^2+3x^4 \\
5+3x^2+3x^4 & 2+2x^2+x^4 & 3+2x^2+2x^4 & 2+3x^2 \\
4+2x^2+3x^4 & 3+3x^2+x^4 & 4+3x^2+2x^4 & 1+2x^2 \\
3+4x^2 & 2+x^2+2x^4 & 1+x^2+x^4 & 6+4x^2+3x^4
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 13 & 7 \\ 14 & 5 & 8 & 6 \\ 11 & 9 & 12 & 3 \\ 10 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

En terminant, voici le comportement des 16 courbes dans les 7 graphiques suivants :

Graphique 1 : nous voyons les trois types 3 à x = –1, 0 et 1. Aucune autre intersection.

Graphique 2 : de x = 1 à x = 1,4, nous voyons seulement deux intersections à x = 1,334457….

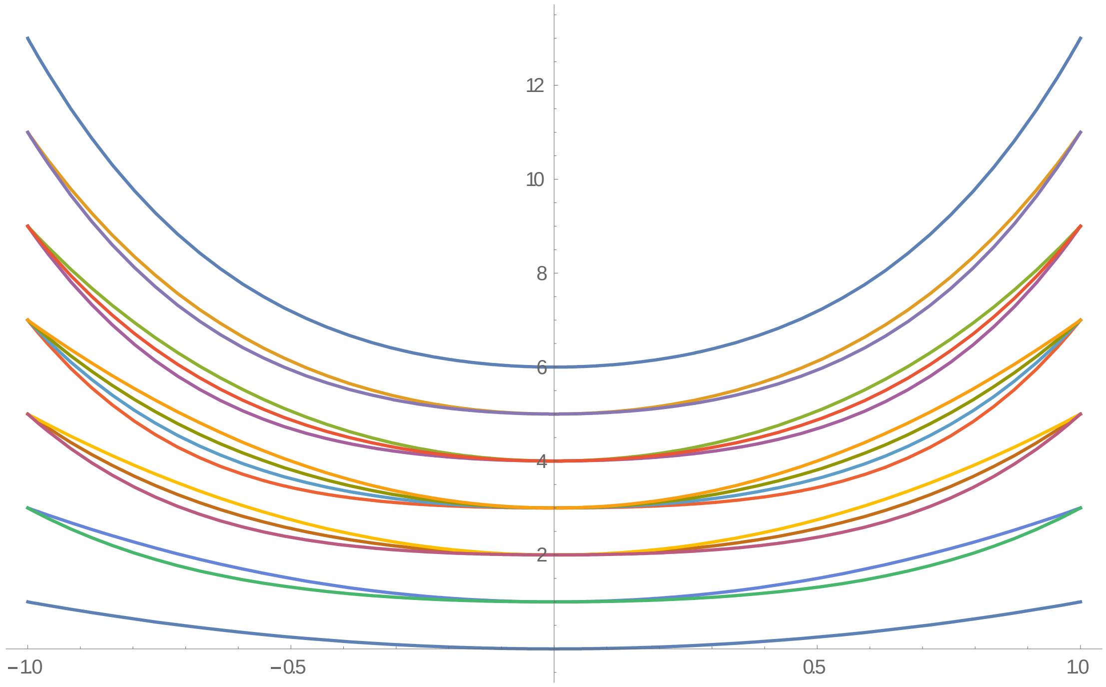
Graphique 3 : de x = 1,4 à x = 1,6, nous voyons le type (11 222 222 11) à x = 1,553773….Aucune autre intersection.

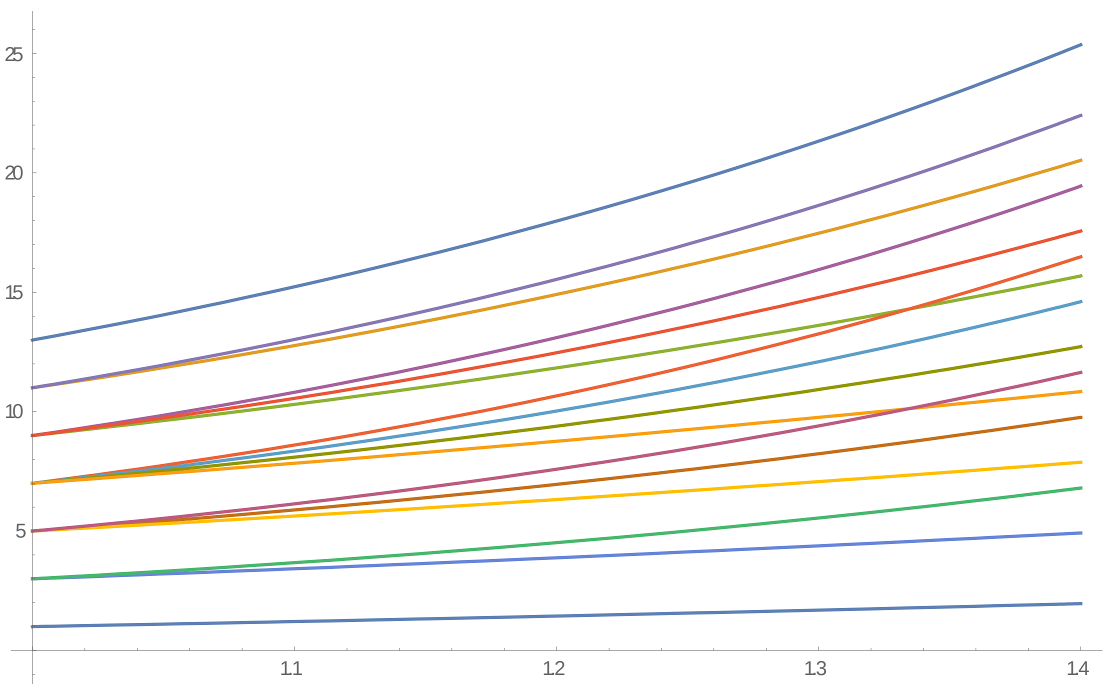
Graphique 4 : de 1,6 à 1,95, nous voyons le type (111 2 11 2 11 2 111) à x = 1,887207…. Aucune autre intersection.

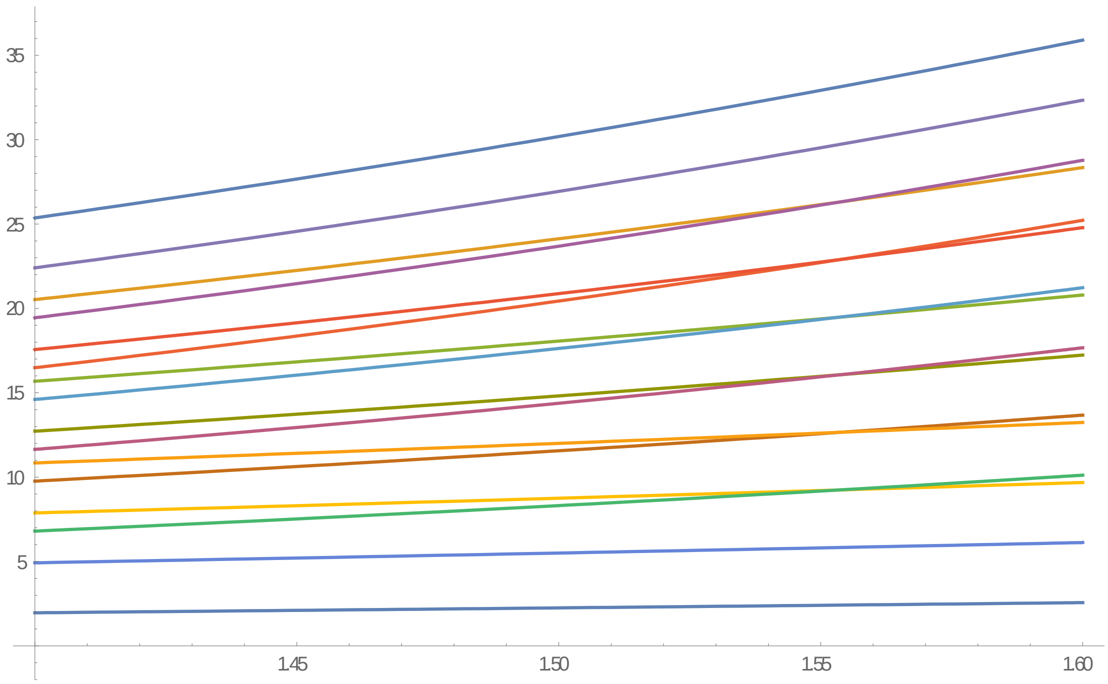
Graphique 5 : de 1,95 à 2, il n'y a plus d'intersection et nous voyons comment les courbes commencent à se regrouper par groupes de quatre.

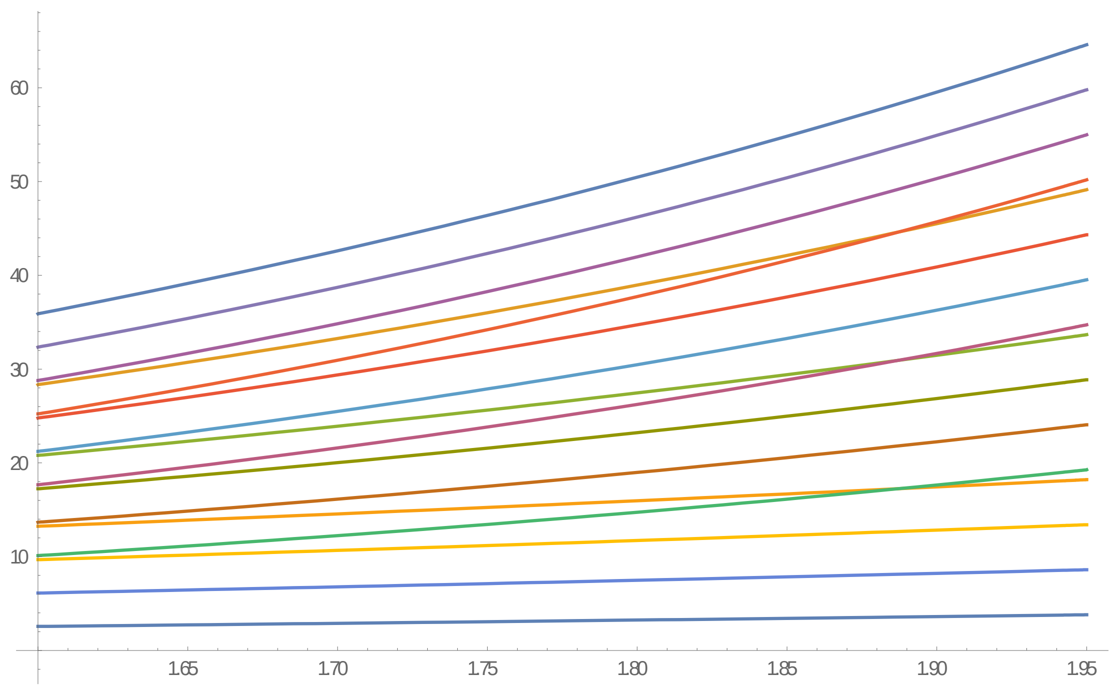
Graphique 6 et 7 : depuis x = 2, nous voyons très bien les quatre groupes de 4 courbes qui ne se rencontreront plus jamais; de même pour les 4 courbes de chaque groupe!!!

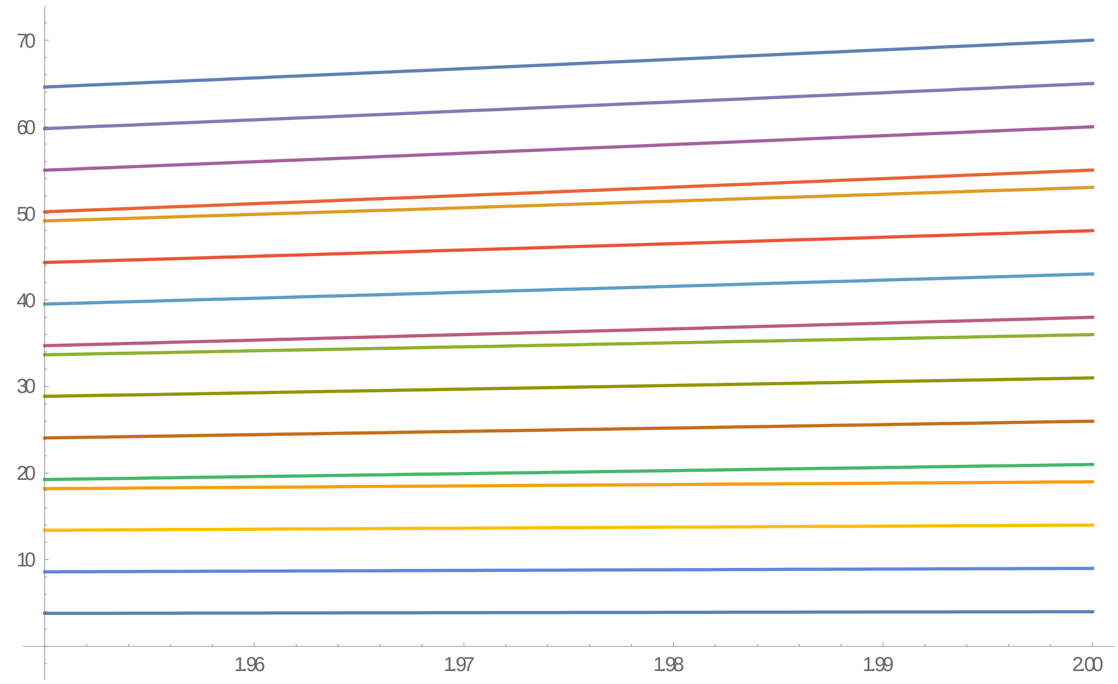
Il en est de même quand x varie de –1 à – l'infini. En effet, chaque courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical : f (–x) = f(x) pour tout x réel.

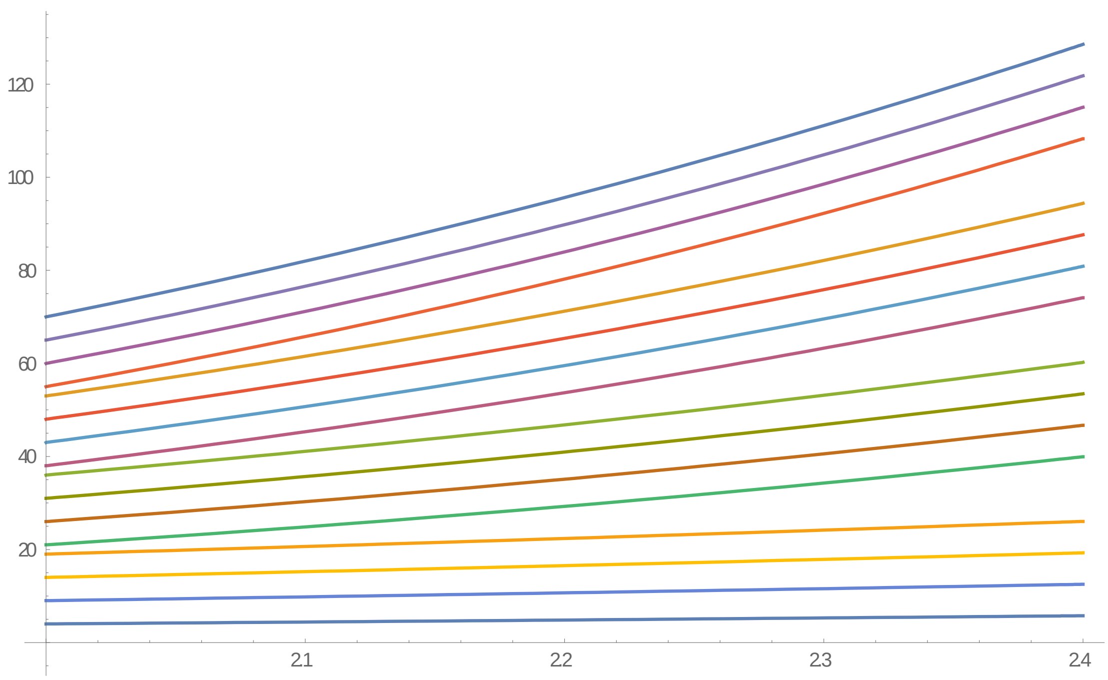

12
10
8
6
4
2
−1.0
−0.5
0.5
1.0

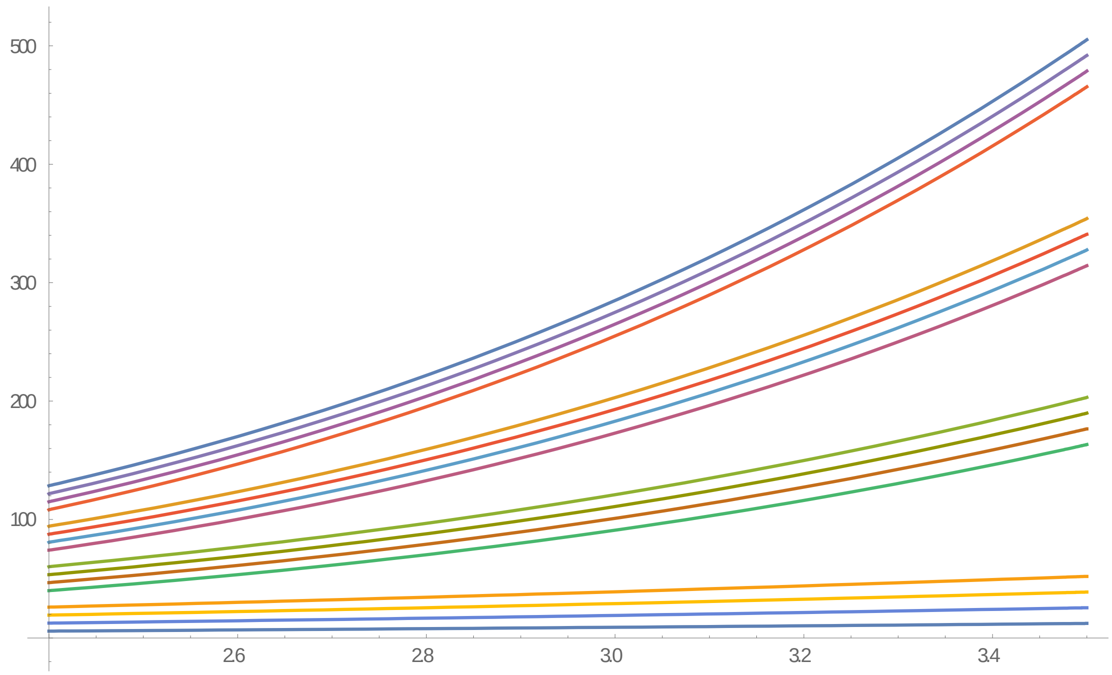

25
20
15
10
5
1.1
1.2
1.3
1.4


35
30
25
20
15
10
5
1.45
1.50
1.55
1.60


60
50
40
30
20
10
1.65
1.70
1.75
1.80
1.85
1.90
1.95


70
60
50
40
30
20
10
1.96
1.97
1.98
1.99
2.00


120
100
80
60
40
20
2.1
2.2
2.3
2.4


500
400
300
200
100
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4

13.7 Chapitre 13

1) Nous pouvons utiliser l'exponentiation. Prenons un carré normal d'ordre 4 :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}} \rightarrow \underset{B}{\begin{pmatrix} 2^4 & 2^{15} & 2^{14} & 2^1 \\ 2^5 & 2^{10} & 2^{11} & 2^8 \\ 2^9 & 2^6 & 2^7 & 2^{12} \\ 2^{16} & 2^3 & 2^2 & 2^{13} \end{pmatrix}}$$

Le carré A est magique de somme 34 d'où le carré B est multiplicatif de produit

$$2^{34} = 17\ 179\ 869\ 184$$

2) Un cube magique parfait presque normal d'ordre 3 n'existe pas. En effet, chaque face est un carré magique d'ordre 3 et de somme S; elle doit donc contenir dans sa case centrale le nombre S/3, ce qui nous fait au moins six fois le nombre S/3 dans le cube. Celui-ci n'est donc pas presque normal.

3) Soit le carré multiplicatif : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix}$ de produit magique $P \neq 0$.

Nous avons : $AEK = P$; $BEH = P$; $CEG = P$ d'où $(ABC)E^3(KHG) = P^3$ et de $PE^3P = P^3$, nous trouvons $E^3 = P$ soit $E = \sqrt[3]{P}$.

Qu'arrive-t-il si $P = 0$? Il se peut que la case centrale soit non nulle!!! Le carré multiplicatif de produit nul $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ renferme un nombre différent de $\sqrt[3]{P}$.

4) Un cube magique parfait presque normal d'ordre 4 n'existe pas. Supposons qu'un cube magique parfait presque normal d'ordre 4 existe. Alors, nous allons trouver une contradiction.

Les huit cases qui forment les huit coins du cube renferment les nombres différents A, B, C, D, E, F, G, H. Le carré de gauche est la face du devant du cube, celui du centre, la face du dessus du cube, celui de droite, la face du dessous du cube.

Je vous invite à dessiner un beau cube et à bien identifier les sommets en vous servant des trois carrés suivants (la case qui contient A se nomme aussi A, …).

A			B
C			D

devant

G			E
A			B

dessus

H			F
C			D

dessous

La preuve est basée sur une propriété que possèdent tous les carrés magiques d'ordre 4 : «la somme des 4 coins est toujours une figure magique» donc la somme des 4 nombres dans les 4 cases en coin est toujours la somme magique S (voir théorème 5.1, section 5.3 du chapitre 5). Aussi, nous allons nous servir du fait que le cube magique est parfait.

Rappelons que «presque normal» signifie que le cube magique est formé d'entiers >1 tous différents deux à deux. Nous avons :

B + D + E + F = S puis G + H + E + F = S d'où B + D = G + H.

Puisque G + H + B + D = S (le cube magique est parfait), alors **G + H = S/2.**

Ensuite nous avons : A + B + E + G = S et C + D + E + G = S d'où A + B + C + D + 2(E + G) = 2S,

S + 2(E + G) = 2S et **E + G = S/2**.

Enfin, G + H = S/2 et E + G = S/2 d'où H = S/2 – G = E et **E = H.** C'est la contradiction. Le cube magique parfait presque normal n'existe donc pas.

5) Le nombre d'alignements NA est $3n^2+6n+4.$ Avec $n=4$, NA = 76. Rappelons qu'un alignement est formé de n petits cubes dont les centres sont situés sur une même droite.

Le cube magique de Fermat n'est pas parfait. Seulement 64 alignements sont magiques. Donc 12 alignements ne le sont pas.

Il faut donc regarder 32 rangées et colonnes horizontales, 16 colonnes verticales, 24 diagonales planaires et 4 grandes diagonales spatiales. La somme magique est S = 130.

Nous pouvons voir que les 4 grandes diagonales spatiales ne sont pas magiques.

Considérons la face de devant qui a pour sommets les nombres 49, 52, 61, 64.

Les 2 diagonales dans chacun des 4 carrés parallèles à la face de devant ne sont pas magiques.

Voilà donc les 12 alignements non magiques. Nous vous laissons le soin de vérifier que les 64 autres alignements sont bien magiques.

6) La somme magique est $\frac{n(n^3+1)}{2} = \frac{12(12^3+1)}{2} = 10\,374$.

7) Avec le fichier «Le compte» dans MATHEMATICA ou le programme «Illustration-figures» construit avec MAPLE (voir 3) de l'annexe 23), nous trouvons 85 figures magiques.

8) Nous trouvons 6786 figures magiques!!!

9) Évidemment, les calculs sont faits avec MATHEMATICA et la commande suivante:

$$\sum_{i=1}^{16\,777\,216} \frac{i^k}{4096}.$$

34359740416

384307202562021376

4835703854919286182117376

64903720403092286580832804046848

907419807381787457954493108918163603456

13049124484142159396460294355134910123554236416

10) Pour le 4-multi-magique : $\sum_{i=1}^{262\,144} \frac{i^k}{512}$

67109120

11728191138560

2305860601433292800

483574939543598221299968

Pour le 5-multi-magique : $\sum_{i=1}^{1\,048\,576} \frac{i^k}{1024}$

536871424 375300505818624 295148468129574682624

247588598153261713654424064 2163463214094627070542069618442224

Pour un autre 4-multi-magique : $\sum_{i=1}^{65\,536} \frac{i^k}{256}$

8388736

366512264576

18014948269490176

944509325737451882624

11) Pour obtenir un carré magique à partir d'un carré multiplicatif M, il suffit de logarithmer M en base 2, par exemple.

$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ est un carré multiplicatif de produit $P.$ En logarithmant en base 2, nous

obtenons : $log_2 M = \begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b & \log_2 c \\ \log_2 d & \log_2 e & \log_2 f \\ \log_2 g & \log_2 h & \log_2 k \end{pmatrix}$ lequel est magique de somme

$\log_2 P.$ Par exemple, $\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2(abc) = \log_2 P.$

Le carré magique obtenu peut être normal. Par exemple,

$$M = \begin{pmatrix} 2^4 & 2^9 & 2^2 \\ 2^3 & 2^5 & 2^7 \\ 2^8 & 2^1 & 2^6 \end{pmatrix}$$

est un carré multiplicatif de produit $P = 2^{15}.$ En logarithmant en base 2, nous obtenons le carré

magique normal : $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

12) Pour construire un carré magique formé de nombres irrationnels seulement, nous pourrions prendre la structure générale des 3x3 dans «Ordre 3» (MATHEMATICA ou EXCEL).

Posons alors $a=\sqrt{2}$; $r=2\sqrt{2}$; $t=5\sqrt{3}$.

Nous obtenons le carré :
$$\begin{array}{ccc} 5\sqrt{2}+5\sqrt{3} & \sqrt{2}+10\sqrt{3} & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2}+5\sqrt{3} & 5\sqrt{2}+10\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2}+10\sqrt{3} & 5\sqrt{2} & \sqrt{2}+5\sqrt{3} \end{array}$$

Il faut maintenant s'assurer que chaque nombre du carré est bien irrationnel. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, il est facile de montrer que $3\sqrt{2}\ et\ 5\sqrt{2}$ le sont aussi.

Pour montrer que le nombre $\sqrt{2}+10\sqrt{3}$ est irrationnel, posons $x=\sqrt{2}+10\sqrt{3}.$ Par des élévations au carré, nous trouvons une équation polynomiale à coefficients entiers qui admet $\sqrt{2}+10\sqrt{3}$ comme racine puis nous appliquons le théorème des racines rationnelles. Nous voyons alors que l'équation n'admet aucune racine rationnelle. Donc, $\sqrt{2}+10\sqrt{3}$ est irrationnel.

L'équation est $x^4-604x^2+88804=0.$ Les racines rationnelles possibles sont :

$$\{1,2,4,149,298,596,22201,44402,88804\}$$

Elles sont obtenues avec la commande : Divisors [88 804] de MATHEMATICA. Quant aux racines négatives, elles sont inutiles ici car (x est une racine ssi $-x$ est une racine).

Autre solution : basée sur le théorème 2.11, page 24 de «Irrational numbers», Ivan Niven, quatrième impression 1997 publié chez MAA.

«Pour tout nombre rationnel positif r, $\log_{10} r$ est irrationnel si $r\neq 10^n$ où n est un entier».

Soit M, un carré multiplicatif de produit $P=32\ 768.$

$$M=\begin{pmatrix} 16 & 512 & 4 \\ 8 & 32 & 128 \\ 256 & 2 & 64 \end{pmatrix}$$

Nous allons le logarithmer en base 10, ce qui donnera un carré magique de somme $S=\log_{10} 32768,$ formé de neuf irrationnels puisqu'aucun des nombres de M n'est une puissance entière de 10. Le carré magique cherché est :

$$\begin{pmatrix} \log_{10} 16 & \log_{10} 512 & \log_{10} 4 \\ \log_{10} 8 & \log_{10} 32 & \log_{10} 128 \\ \log_{10} 256 & \log_{10} 2 & \log_{10} 64 \end{pmatrix}$$

13) et14) Problèmes presqu'identiques. 14) est une généralisation de 13). Prenons la structure générale G des carrés magiques d'ordre 3 qui se trouve dans «Ordre 3».

$$G = \begin{matrix} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{matrix}$$

Si $A \neq B$, alors nous trouvons $a+2t \neq a+r+2t$ d'où $r \neq 0$.

Si $A \neq C$, alors nous trouvons $a+2t \neq a+t$ d'où $t \neq 0$.

Donc, $A \neq B$ et $A \neq C$ implique $rt \neq 0$.

Si maintenant notre carré est bi-magique, alors nous trouverons une contradiction. Mettons au carré chaque nombre des deux premières rangées de G puis faisons la somme de chacune :

Première rangée : $3a^2 + 6ar + 5r^2 + 6at + 4rt + 5t^2$

Seconde rangée : $3a^2 + 6ar + 5r^2 + 6at + 10rt + 5t^2$

Pour que le carré G soit bi-magique, il faut que les sommes soient égales d'où $rt = 0$. C'est la contradiction!!! G ne peut donc pas être bi-magique.

Si G est presque normal, alors nous avons $A \neq B et A \neq C$ et G ne peut pas être bi-magique.

Enfin, G bi-magique et presque normal n'existe pas. Donc si G est bi-magique alors il y aura des répétitions dans G.

Il est facile de montrer que seul un carré trivial d'ordre 3 peut être bi-magique.

15) La réponse est oui. Il suffit d'effectuer l'exponentiation dans différentes bases.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2^4 & 2^9 & 2^2 \\ 2^3 & 2^5 & 2^7 \\ 2^8 & 2^1 & 2^6 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3^4 & 3^9 & 3^2 \\ 3^3 & 3^5 & 3^7 \\ 3^8 & 3^1 & 3^6 \end{pmatrix}$$

Et ainsi de suite. Avec M, nous pouvons construire une infinité non dénombrable de carrés multiplicatifs en utilisant une base réelle a quelconque dans $]0\,;1[\, \cup\,]1\,;\infty[$.

16) Soit M, un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3.$ Tous les nombres sont différents deux à deux.

Le produit magique ne peut pas être nul car si c'était le cas, nous devrions avoir un zéro par rangée ce qui contredirait le fait que tous les nombres soient différents. Le produit est donc non nul.

14.18 Chapitre 14

1) W devient la matrice identité et $A = BW$ nous donne $B = A$.

2) W devient un carré trivial non nul. Or, il n'est pas toujours possible de trouver B tel que $A = BW$. En effet, BW est toujours un trivial quel que soit le carré magique B (voir le théorème 9.5 de la section 9.4). Si A n'est pas un trivial, alors l'égalité ne peut pas avoir lieu. Donc W n'est pas un diviseur universel.

3) Rappelons d'abord que $W = \begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}$ avec $X \geq 0, Y \geq 0 \, et \; X \neq Y$; cela implique que

$X - Y \neq 0 \; et \; X + 2Y \neq 0$. Nous cherchons comment A peut prendre la structure :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$$

Prenons A, un carré magique d'ordre 3 quelconque (voir «Ordre 3».

$$\begin{matrix} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{matrix}$$

Celui-ci aura la structure (*) si et seulement si $t = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+2r \\ a+r & a+2r & a \end{pmatrix}$$

Nous allons montrer que si $A = BW$, alors B sera un carré magique et aura la structure (*).

De $A = BW$, nous trouvons $B = AW^{-1}$. Vous trouverez W^{-1} dans l'annexe 10 où

$S = (X + 2Y)$:

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

$$B = AW^{-1} = \begin{pmatrix} a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+2r \\ a+r & a+2r & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{aX+2rX-aY+rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{aX-aY-3rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{a+r}{X+2Y} \\ \frac{aX-aY-3rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{a+r}{X+2Y} & \frac{aX+2rX-aY+rY}{(X-Y)(X+2Y)} \\ \frac{a+r}{X+2Y} & \frac{aX+2rX-aY+rY}{(X-Y)(X+2Y)} & \frac{aX-aY-3rY}{(X-Y)(X+2Y)} \end{pmatrix}$$

Le carré B est magique et possède la structure (*). Notez qu'également que W^{-1} a la même structure que W.

4) Dans 14.1, prenons le carré magique M formé de 6 entiers carrés parfaits :

19^2	35^2	17^2
553	25^2	697
31^2	5^2	889

Les 9 entiers de M sont impairs. Nous voulons construire un carré magique formé de 6 entiers carrés parfaits tel que celui-ci soit formé de 9 entiers pairs.

Il suffit de construire le carré 4M ou 16M …. Le carré 4M est donc :

$$\begin{pmatrix} 38^2 & 70^2 & 34^2 \\ 2212 & 50^2 & 2788 \\ 62^2 & 10^2 & 3556 \end{pmatrix}$$

5) Évidemment, dans un carré magique presque normal d'ordre n, la suite des n^2 entiers consécutifs allant de 1 à n^2 est celle qui a la plus petite somme S*. Si nous ne prenons pas cette

suite, alors la nouvelle suite renfermera peut-être certains entiers $\leq n^2$ et a moins un entier $> n^2$. Sa somme S vérifie alors S > S*. Il s'ensuit que la somme magique du carré normal est la plus petite puisque S/n > S*/n.

6) 7) et 8) Le carré suivant est magique et renferme 9 entiers carrés parfaits. Les nombres a, b, c, d, e, f, g, h et k sont des entiers ≥ 0.

a^2	b^2	c^2
d^2	e^2	f^2
g^2	h^2	k^2

a) Si e^2 est un multiple de 7, alors tous les nombres du carré sont des multiples de 7. Nous avons donc $e^2 = 7m$ où m est un entier ≥ 0. Il s'ensuit que la somme magique $S = 3e^2$ est un multiple de 7. Puisque $a^2 + e^2 + k^2 = S$, la somme $a^2 + k^2$ est un multiple de 7. Pour que cela arrive, il faut obligatoirement que $a\, et\, k$ soient des multiples de 7. En effet, voyons ce qui se produit si $a\, et\, k$ ne sont pas des multiples de 7. Tout entier peut s'écrire sous la forme $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+3, 7m+4, 7m+5\, ou\, 7m+6.$

a	k	a^2	k^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	2	2
4	4	2	2
5	5	4	4
6	6	1	1

Par exemple, la sixième ligne nous indique que $a = 7m_1 + 5; k = 7m_2 + 5; a^2 = 7m_3 + 4; k^2 = 7m_4 + 4.$ Maintenant, si nous faisons toutes les sommes possibles dans les deux dernières colonnes, nous n'obtiendrons jamais un multiple de 7 sauf $0+0$. Donc la seule façon pour que $a^2 + k^2$ soit un multiple de 7 est que $a^2\, et\, k^2$ soient des multiples de 7. La suite se fait de la même façon et tous les nombres du carré sont des multiples de 7. Par exemple, $b^2 + e^2 + h^2 = S$...

b) e^2 est un multiple de 11. C'est la même démarche. Passons au tableau :

a	k	a^2	k^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	9	9
4	4	5	5
5	5	3	3
6	6	3	3
7	7	5	5
8	8	9	9
9	9	4	4
10	10	1	1

Maintenant, si nous faisons toutes les sommes possibles dans les deux dernières colonnes, nous n'obtiendrons jamais un multiple de 11 sauf $0+0$. Tous les nombres du carré sont des multiples de 11.

c) e^2 est un multiple de 5. Même démarche. Voyons le tableau :

a	k	a^2	k^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	4	4
3	3	4	4
4	4	1	1

Si nous faisons toutes les sommes possibles dans les deux dernières colonnes, nous trouvons au moins un multiple de 5. Nous ne pouvons donc pas affirmer que si a^2+k^2 est un multiple de 5, alors a^2 et k^2 le sont.

9) Si un carré magique possède l'antisymétrie centrale, alors sa somme magique est nulle. En effet, une matrice qui possède l'antisymétrie centrale a une grande diagonale principale formée exclusivement de zéros d'où S = 0.

10) Aucun n'est associatif sauf, **peut-être**, le carré de centre 13. En effet, tous ces carrés magiques sont normaux donc de somme S = 65. Si un carré magique d'ordre impair n est associatif, alors son centre est S/n soit ici 65/5 = 13. Tous ceux dont le centre n'est pas 13 ne peuvent pas être associatifs.

11) Le seul qui pourrait être associatif est celui de centre u = 13. Il est facile de vérifier qu'effectivement ce carré de centre 13 est bien associatif (deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent 2S/5 = 26). De plus, toutes les diagonales, grandes et brisées sont des figures magiques; le carré de centre 13 est donc un ultra-magique.

12) Un exemple suffit pour nous convaincre :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A

40	90	20
30	50	70
80	10	60

B

47	97	27
37	57	77
87	17	67

C

Nous prendrons B = 10A et C = B + 7. D'une façon générale, A est un carré magique normal d'ordre n (ou presque normal), B = 10A ou 100A ou 1000A …et C = B + k où k varie de 0 à 9.

Tous ces carrés sont horizontaux et verticaux (voir 14.13 pour les définitions ou le glossaire 2).

13) Nous allons faire : M' = 10M + 7.

1	47	6	43	5	48
35	17	30	21	31	16
36	12	41	8	40	13
7	45	2	49	3	44
29	19	34	15	33	20
42	10	37	14	38	9

M

17	477	67	437	57	487
357	177	307	217	317	167
367	127	417	87	407	137
77	457	27	497	37	447
297	197	347	157	337	207
427	107	377	147	387	97

M'

14) C'est le théorème 14.15 et sa démonstration est dans l'annexe 13.

15) Voyez la démonstration du théorème 14.14 dans l'annexe 13.

16) Consultez l'annexe 13, premier encadré vert. Supposons que nous voulions n^2+2 entiers consécutifs dans un intervalle $[p\ ;\ q]$ tel que celui-ci ne contienne que deux nombres premiers p et q. Nous savons que cela est toujours possible. Nous prendrons ici $n \geq 3$.

Maintenant, nous savons qu'avec n^2 entiers consécutifs, nous pouvons toujours construire un carré magique.

Pour le carré d'ordre n, nous prendrons p et les n^2-1 entiers qui suivent le nombre premier p. Ce carré magique contiendra un seul nombre premier soit p.

Pour le carré d'ordre $n-1$, nous prendrons p et les $(n-1)^2-1$ entiers qui suivent p.

Et ainsi de suite jusqu'au carré d'ordre 3.

Tous ces carrés magiques contiendront un seul nombre premier, le même pour tous $(ici\ p)$. Ils seront évidemment presque normaux car formés d'entiers consécutifs.

Dans ces carrés, p sera toujours le plus petit entier. Notez que nous aurions pu prendre le nombre premier q au lieu de p.

17) Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous savons qu'il existe un carré magique normal et une infinité de presque normaux (chapitre 11). Soit M, un tel carré magique. Le carré 4M est un carré composé presque normal. Il y en a une infinité pour chaque ordre.

18) Consultez l'annexe 11, page 1, le tableau «ordre 5». Prenez un carré magique normal M d'ordre 5 puis ajoutez dans toutes ses cases le nombre premier 71 ou 31 ou 11 ou 3 ou 2 pour avoir respectivement un carré magique qui contiendra 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 nombres premiers. Dans tous les cas, le carré sera formé de 25 entiers consécutifs.

$$M + 2 = 8$$
$$M + 3 = 7$$
$$M + 11 = 6$$
$$M + 31 = 5$$
$$M + 71 = 4$$

19) Les deux nombres premiers sont 359 et 367. Ajoutons 5 dans toutes les cases et nous trouverons un seul nombre premier soit 362 + 5 = 367. Pour avoir trois nombres premiers, il suffit d'ajouter le nombre 97 dans toutes les cases du carré.

20) Le carré doit avoir 27 dans sa case centrale. Si M est normal, alors M + 22 contiendra 27 dans sa case centrale et il n'y aura que 3 nombres premiers dans M + 22 soient 23, 29 et 31.

21) Ces trois carrés sont dans 14.13. Nous avons construit M_{13} avec «Ordre 5» dans MATHEMATICA donc avec l'algorithme ALG-1 (vous verrez a = 199, r = 1 et t = 5 juste au-dessus de M_{13}). C'est pourquoi M_{13} est associatif. Les carrés $M_{11}\ et\ M_{12}$ sont-ils produits avec ALG-1? Comment proviennent-ils des fichiers «Ordre 3» et «Ordre 5»?

Oui, ils proviennent de l'algorithme ALG-1. Pour M_{11}, a = 89, r = 1 et t = 3. Pour M_{12}, a = 1669, r = 1 et t = 5. Les trois carrés sont associatifs car ils sont fabriqués avec ALG-1.

22) Un carré magique d'ordre 2 est trivial :

m	m
m	m

Avons-nous 2m = 2S/n = 4m/2 ? OUI.

Tous les carrés magiques d'ordre 2 sont donc associatifs.

23) Prenons un carré magique normal d'ordre 5 avec 24 comme centre (voir 6.1). Ce carré ne peut pas être associatif car son centre est différent de S/5 = 65/5 = 13.

12	9	60	23	16
80	18	11	7	4
6	2	24	75	13
19	70	8	1	22
3	21	17	14	65

Les cases vertes forment une figure complète. Nous voulons que le centre soit S/5 = 24 donc que S = 120. Nous allons ajouter 55 dans les cases de la figure complète et la somme magique S du nouveau carré sera 65 + 55 = 120.

Ainsi, nous avons un carré magique presque normal de somme S = 120, son centre est S/5 = 120/5 = 24 et ce carré n'est clairement pas associatif.

24) Il est très facile de constater qu'avec la structure générale (1) des carrés magiques d'ordre 3, la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours 2S/3.

Avec la structure (1.1), nous trouvons toujours 2S/3 = 2A + 2r + 2t.

25) Construisez un carré normal M avec «Ordre 10» puis utilisez l'annexe 11, page 4, Ordre 10.

Le carré M + 1 contient exactement 26 nombres premiers.

26) Consultez l'annexe 11.

a) $g_9(A) = 0$ pour $A = M + 155921$ où M est un carré normal d'ordre 9 fait avec le fichier «Ordre 9», par exemple.

b) $g_3(A) = 3$ pour $A = M + 3$ où M est un carré normal d'ordre 3 fait avec le fichier «Ordre 3», par exemple.

c) $g_{13}(A) = 13$ pour $A = M + 6373$ où M est un carré normal d'ordre 13 fait avec le fichier «Ordre 13», par exemple.

d) $g_{13}(A) = 20$ pour $A = M + 1103$ où M est un carré normal d'ordre 13 fait avec le fichier «Ordre 13», par exemple.

27) La réponse est oui!!! L'annexe 11 nous montre que $g_5(M + 109) = 3$ où M est un carré magique normal quelconque d'ordre 5.

Nous avons 275 305 224 carrés magiques normaux primitifs d'ordre 5. Chacun peut prendre la place de M et nous aurons alors 275 305 224 carrés magiques presque normaux primitifs qui renferment exactement 3 nombres premiers.

28) Consultez l'annexe 7.

g) Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un seul triplet jumeau.

Triplet de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 4) = triplet jumeau

Nous connaissons le triplet $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$ et c'est le seul!!! Nous l'appelons **triplet jumeau.** Lorsque $2 \leq p \leq 11$, nous trouvons 1 seul triplet jumeau: $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$. Soit maintenant $p \geq 13$, un nombre premier. Tous les entiers ≥ 12 ont la forme $3k$ *ou* $3k+1$ *ou* $3k+2$ avec k, un entier ≥ 4. Donc, un nombre premier ≥ 12 aura la forme $3k+1$ *ou* $3k+2$.

Avec $p = 3k+1$, le triplet devient $(3k+1\ ;\ 3k+3\ ;\ 3k+5)$ et $3k+3 = 3(k+1)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+1 \geq 5$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

Avec $p = 3k+2$, le triplet devient $(3k+2\ ;\ 3(k+1)+1\ ;\ 3k+6)$. Nous voyons que $3k+6 = 3(k+2)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+2 \geq 6$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

h) Un quadruplet jumeau est un quadruplet de la forme :

$$(p\ ;\ p+2\ ;\ p+4\ ;\ p+6).$$

Un tel quadruplet ne peut pas exister car si c'était le cas, nous aurions deux triplets jumeaux ce qui contredit g). Mais puisqu'il existe un seul triplet jumeau, pouvons-nous avoir un seul quadruplet jumeau? La réponse est évidemment non car nous aurions (3 ; 5 ; 7 ; 9).

i) De même pour les n-uplets jumeaux : (p ; p + 2 ; p + 4 ; p + 6 ; p + 8 ; …).

j) Un quadruplet jumeau voisin a la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$. Le premier est $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13)$. C'est le seul qui ne respecte pas la règle 1-3-7-9. Si $p > 7$, alors dans tout quadruplet jumeau voisin, les quatre entiers se terminent toujours par 1, 3, 7, 9, dans cet ordre. En effet, puisque ce sont des nombres premiers > 7, ceux-ci doivent se terminer par 1, 3, 7 ou 9. Il reste à montrer que c'est bien dans cet ordre.
Si p se termine par 3, alors les quatre entiers du quadruplet se terminent par 3, 5, 9, 1 et nous n'avons pas quatre nombres premiers à cause du 5.

Si p se termine par 7, alors de même : 7, 9, 3, 5.

Si p se termine par 9, alors de même : 9, 1, 5, 7.

Il ne reste donc que 1, 3, 7, 9, dans cet ordre.

k) Avec «Ordre 3», posons a = 101, r = 2 et t = 6 puis a = 11, r = 2 et t = 6. Nous trouvons :

111	113	103
101	109	117
115	105	107

21	23	13
11	19	27
25	15	17

Le carré de gauche contient un seul quadruplet jumeau voisin : $(101\,;103\,;107\,;109)$.

Le carré de droite contient un seul quadruplet jumeau voisin : $(11\,;13\,;17\,;19)$.

Nous voyons également que tout quadruplet jumeau voisin peut se retrouver dans un carré magique d'ordre 3.

$p+10$	$p+12$	$p+2$
p	$p+8$	$p+16$
$p+14$	$p+4$	$p+6$

$S=3p+24$

Il existe toujours un carré magique d'ordre 3 qui contient les quatre nombres premiers de tout quadruplet jumeau voisin $(p\,;\,p+2\,;\,p+6\,;\,p+8)$ **!!!**

l) Avec «Ordre 3», posons a = 5, r = 2 et t = 6. Nous trouvons :

15	17	7
5	13	21
19	9	11

Le carré contient $(5\,;7\,;11\,;13)$ *et* $(11\,;13\,;17\,;19)$. Il contient aussi le seul 6-uplet jumeau voisin soit $(5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19)$.

m) Avec «Ordre 11», construisons un carré magique normal. Nous y trouverons les trois premiers quadruplets jumeaux voisins :

$$(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13),\ (11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19), (101\ ;\ 103\ ;\ 107\ ;\ 109).$$

n) Nous allons construire un carré magique normal dont l'ordre est à déterminer. Puis avec «Quadruplets jumeaux voisins» dans MAPLE, nous allons prendre les neuf premiers quadruplets et constater que le neuvième se termine par 3259. Il nous faut construire un carré normal d'ordre 58 car $\sqrt{3259} = 57,087....$ Nous y trouverons les neuf premiers quadruplets.

o) Le quinzième quadruplet se termine par 15739 et $\sqrt{15739} = 125,455....$ Nous construirons un carré normal d'ordre 126 qui contiendra les quinze premiers quadruplets.

29) Pour la solution, voir le théorème 4 de l'annexe 7.

30) Puisqu'un 6-uplet jumeau voisin renferme un quadruplet jumeau voisin, alors le 6-uplet jumeau voisin a obligatoirement la forme suivante lorsque $p \geq 11\ soit\ (p > 7)$:

$$(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23\ ;\ 30k+25)\ ;\ k \text{ entier} \geq 0.$$

Il est clair que ce 6-uplet ne contient pas 6 nombres premiers. Le seul 6-uplet jumeau voisin est donc : $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19)$.

31) La seule solution est m = 2 et n = 83. En effet, tous les autres nombres premiers sont impairs et impair + 81 est toujours pair.

32) Voici un Dürer presque normal de somme S = 60. Il contient un quadruplet jumeau voisin.

11	13	17	19
20	16	18	6
8	2	24	26
21	29	1	9

33) Il existe une infinité de quadruplets jumeaux voisins. **C'est une conjecture** basée sur les 180 619 quadruplets que nous avons trouvés (voir 14) de l'annexe 7).

34) Le problème 59 de 5.18 nous montre qu'il existe une figure complète pour tous les carrés d'ordres $n \geq 4$. Nous partirons d'un carré magique presque normal M d'ordre n > 3 et de somme S puis nous y placerons une figure complète. Nous ajouterons l'entier positif k dans toutes les cases de la figure complète de façon à obtenir aucune

répétition (le carré sera toujours magique et presque normal). Enfin, nous ajouterons dans toutes les cases de la figure complète de M + k, respectivement les entiers 1, 2, 3, 4, 5, …. Nous obtiendrons alors une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de S + k. (Voir 14.17 du chapitre 14).

35) Puisque la somme magique S d'un carré magique d'ordre 3 est toujours 3c où c est l'entier de la case centrale, alors les sommes ne peuvent pas être consécutives. En effet, si le centre renferme l'entier c + 1, alors la somme devient S + 3.

36) Voici notre carré magique presque normal avant les permutations :

$A =$

a	b	i						e	f
c	d	j						g	h
			λ						
α	β								
m	p							w	x
r	s							y	z

Le carré suivant après les permutations :

$f_4^n(A) =$

d	c	j						h	g
b	a	i						f	e
			λ						
β	α								
s	r							z	y
p	m							x	w

Ce dernier carré est toujours magique et presque normal.

Démontrons maintenant le théorème :

1) $f_4^n(A+B) = f_4^n(A) + f_4^n(B).$ Regardons ce qui se passe dans le 2x2 du coin haut gauche :

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f_4^n(A) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f_4^n(B) \begin{pmatrix} d' & c' \\ b' & a' \end{pmatrix}$$

$$A+B \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f_4^n(A+B) \begin{pmatrix} d+d' & c+c' \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix}$$

Regardez comment la fonction f_4^n agit sur les cases blanches et les cases vertes.

Vous pourrez alors déduire que $f_4^n(A+B) = f_4^n(A) + f_4^n(B).$

2) $$M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f_4^n(M) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad k\, f_4^n(M) \begin{pmatrix} kd & kc \\ kb & ka \end{pmatrix}$$

$$k\,M \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f_4^n(k\,M) \begin{pmatrix} kd & kc \\ kb & ka \end{pmatrix}$$

Regardez comment la fonction f_4^n agit sur les cases blanches et les cases vertes.

Vous pourrez alors déduire que $f_4^n(k\,M) = k\, f_4^n(M).$

3) $$M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f_4^n(M) \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad f_4^n(f_4^n(M)) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

D'où $f_4^n(f_4^n(M)) = M.$

4) Montrons que $A \neq B \;\Rightarrow\; f_4^n(A) \neq f_4^n(B).$ Supposons $f_4^n(A) = f_4^n(B).$ Nous avons alors $f_4^n(f_4^n(A)) = f_4^n(f_4^n(B))$ d'où $A = B.$ Contradiction puisque nous avions $A \neq B.$ La fonction f_4^n est donc injective.

Soit maintenant M, un carré magique d'ordre $n.$ Il existe un carré magique d'ordre $n,$ soit $f_4^n(M),$ tel que $f_4^n(f_4^n(M)) = M.$ La fonction f_4^n est donc surjective.

Finalement, c'est une bijection de $E_n \rightarrow E_n.$

C'est aussi un automorphisme de E_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre $n.$

37) Il faut trouver toutes les paires de cases qui totalisent 104 = 306 – 41 – 53 – 47 – 61. Nous regardons chaque entier w du carré en-dehors du carré central 2x2. Nous regardons si 104 – w se trouve dans le carré en-dehors du carré central 2x2. Nous trouvons ainsi 8 paires soient :

(28 ; 76) (31 ; 73) (34 ; 70) (36 ; 68) (37 ; 67) (38 ; 66) (42 ; 62) (46 ; 58)

Donc il existe 8 figures magiques qui renferment les cases centrales du 2x2.

38) Le carré $e = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour la multiplication. Supposons que le carré $U = \begin{pmatrix} u & u & u & u \\ u & u & u & u \\ u & u & u & u \\ u & u & u & u \end{pmatrix}$ soit un autre élément neutre (une autre unité) pour la multiplication. Alors, quel que soit le nombre $a \neq 0$, nous avons :

$$U\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}U = \begin{pmatrix} 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \\ 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \\ 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \\ 4ua & 4ua & 4ua & 4ua \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$$

Ce qui implique $4ua = a$ et $4u = 1$ puisque $a \neq 0$. Enfin $u = 1/4$. Nous avons donc $U = e$ d'où l'unicité de l'élément neutre.

39) Soit A, un trivial formé du nombre $a \neq 0$. Son inverse est en rouge.

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons que $M = \begin{pmatrix} m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \end{pmatrix}$ soit un autre inverse avec $m \neq 0$.

Alors nous aurions : $\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \\ m & m & m & m \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $4am = \frac{1}{4}$ et $m = \frac{1}{16a}$. L'inverse est donc unique.

40) **Question 1** :

L'ensemble A est celui des carrés semi-magiques d'ordre 4. Ceux-ci forment un groupe abélien pour l'addition. Puisque le produit (matriciel) de deux carrés semi-magiques est un carré semi-magique, alors A possède une structure d'anneau unitaire. En effet, la matrice unité I est l'élément neutre pour la multiplication matricielle; celle-ci est un carré semi-magique qui renferme que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. Enfin, l'anneau A est infini et non commutatif.

L'ensemble B est celui des super-Dürer-bêta. Si M et M' sont des super-Dürer-bêta, alors MM' est un trivial (voir le théorème de 9.6 de 9.4) donc un super-Dürer-bêta.
L'ensemble B est un anneau commutatif (théorème 9.6) mais il n'est pas unitaire.
En effet, supposons que B contienne une unité U et que M soit un super-Dürer-bêta non trivial (il en existe une infinité). Alors nous avons UM = M et UM = trivial d'où la contradiction et B n'est pas unitaire.
N'oublions pas que les propriétés des matrices carrées sont transmises aux carrés semi-magiques et magiques!!!

L'ensemble C est celui des triviaux d'ordre 4. Le théorème 9.2 nous montre que le produit est un trivial. L'ensemble C est aussi un anneau commutatif selon le théorème 9.2. De plus, il est unitaire. Le carré trivial e du problème 38 ci-haut est l'élément neutre pour la multiplication dans C. Montrons que C est un corps commutatif. Il est commutatif car l'anneau l'est. Enfin, chaque trivial non nul est inversible puisque :

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16a}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse est en rouge et C est un corps commutatif.

Question 2 :

L'anneau commutatif non unitaire A est celui des super-Dürer-bêta. L'anneau B est celui des triviaux d'ordre 4. Les théorèmes du chapitre 9 nous permettent d'affirmer que :

$$\forall x \in A \; et \; \forall y \in A, \; xy \in B$$

Question 3 :

La matrice carrée M a un déterminant nul. De plus, M est inversible!!! Expliquez.
Prenons M, une matrice triviale dans le corps commutatif des carrés triviaux d'ordre 4.
Nous voyons, plus haut, que l'inverse d'un trivial non nul est un trivial non nul et que :

$$\text{trivial x son inverse} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = J$$

où J est l'élément neutre pour la multiplication dans le corps des triviaux lequel ne contient pas I. (voir question 1 ci-haut). Bien entendu, I n'est pas un trivial.

Nous connaissons le résultat suivant : «Une matrice carrée M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ ». Ici, la matrice unité (élément neutre pour la multiplication des matrices carrées) est I et non plus J.

Nous avons : $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot I$ et non pas $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot J$.

«Une matrice carrée M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$ » est une conséquence de $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot I$.

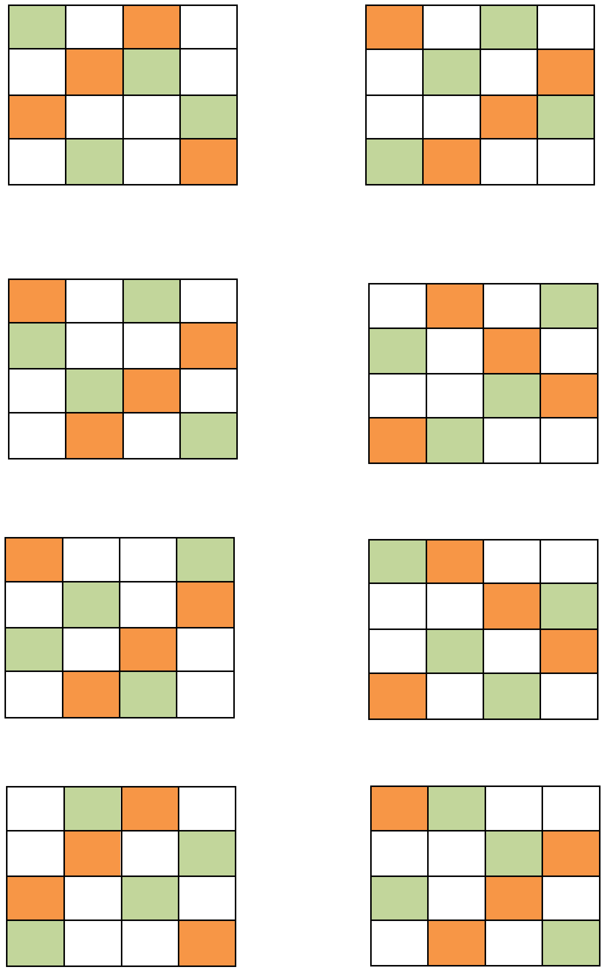
Question 4 : L'anneau A sera l'ensemble des carrés semi-magiques d'ordre 4 et B, l'ensemble des triviaux. Nous prendrons $u = I \; et \; v = J$. Nous aurons alors :

$$x\,I = I\,x = x \quad \forall\, x \in B$$
$$x\,J = J\,x = x \quad \forall\, x \in B$$

41) Aucun carré d'ordre 4 ne possède une figure complète pandiagonale.
Mentionnons d'abord que tout carré d'ordre 4 possède une seule figure complète et ses sept équivalents. Elles sont en vert dans les huit carrés suivants.

Pour montrer qu'aucune figure complète n'est pandiagonale, il suffit de trouver, pour chacun des huit carrés suivants, une diagonale brisée que ne contient pas de case verte.

Ici, une diagonale brisée qui ne contient pas de case verte est illustrée en orangé. Une seule suffit.



42) Le carré de droite est un Dürer de somme S = 33.

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

0	8	15	10
14	11	3	5
12	13	6	2
7	1	9	16

Nous avons choisi une figure complète qui renferme les quatre plus petits entiers du carré (carré de gauche). Puis nous avons enlevé 1 dans les cases de la figure complète afin d'abaisser la somme de 34 à 33 (carré de droite).

43) Nous avons trouvé les quatre carrés suivants :

1	6	12	15
11	16	2	5
14	9	7	4
8	3	13	10

1	7	10	16
12	14	3	5
15	9	8	2
6	4	13	11

1	7	10	16
15	9	8	2
12	4	13	5
6	14	3	11

8	10	15	1
9	3	6	16
4	14	11	5
13	7	2	12

Ces quatre carrés magiques renferment une figure complète qui contient les quatre plus petits entiers de chaque carré. Il reste à enlever 1 dans chaque case de la figure complète de chaque carré. Les quatre carrés auront S = 33 comme somme magique. Les deux carrés du haut sont des Dürer mais pas les deux du bas.

44) Nous vous présentons ici le plus beau carré magique d'ordre 6 (voir section 14.17):

Claude Bégin; Claude St-Hilaire : 6 avril 2016

15	10	4	24	27	31
25	17	9	32	2	26
3	33	14	21	28	12
34	30	19	7	8	13
16	20	29	5	35	6
18	1	36	22	11	23

Premier carré normal idéal connu d'ordre 6

Il est normal de somme S = 111 et possède une figure complète idéale. Ajoutons 114 dans toutes les cases du carré. Celui-ci devient presque normal de somme S = 6x114 + 111 = 795.

Enfin, ajoutons 5 dans toutes les cases de la figure complète. Le carré obtenu est donc presque normal avec 115 comme plus petit entier et S = 800.

Cette solution n'est pas unique. En effet, nous pouvons prendre le carré normal qui suit avec sa figure complète. Le procédé est exactement le même.

15	10	5	20	30	31
26	13	11	32	2	27
18	33	7	25	9	19
28	21	23	24	1	14
16	22	29	6	35	3
8	12	36	4	34	17

45) Consultez l'annexe 10 et 14.3 du chapitre 14.

a) $Det(M) = 360.$

b) $Det(W) = X^3 - 3XY^2 + 2Y^3 = (X - Y)^2(X + 2Y).$ Celui-ci s'annule lorsque $X = Y$ ou $X = -2Y.$

c) Si $X \geq 0\, et\, Y \geq 0,$ alors $Det(W) \neq 0$ dès que $X \neq Y.$ En effet, $X \neq Y$ implique que $(X - Y)^2$ est un entier $> 0.$ Le facteur $(X + 2Y) \neq 0$ car si $X = 0,$ alors $Y > 0$ et si $Y = 0,$ alors $X > 0.$ Dans tous les cas, $(X + 2Y) \neq 0$ en incluant évidemment le cas $X > 0$ et $Y > 0.$ **Notez que la définition de diviseur universel** W **implique** $Det(W) \neq 0.$

d) Voyons les deux produits suivant : $M'W\, et\, WM'$:

Dans les deux cas, nous obtenons :

$$M'W = WM' = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} = M$$

Pour trouver M', nous avons fait $M' = MW^{-1} = W^{-1}M.$

Notons que $X^2 + XY - 2Y^2 = (X - Y)(X + 2Y).$

$$\begin{array}{c} M' \\ \begin{pmatrix} \frac{4X-7Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{3(3X+Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{2X-11Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{3(X-3Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{5}{X+2Y} & \frac{7X-Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{8X+Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{X-13Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{6X-3Y}{X^2+XY-2Y^2} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} W \\ \begin{matrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} W \\ \begin{matrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{matrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} M' \\ \begin{pmatrix} \frac{4X-7Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{3(3X+Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{2X-11Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{3(X-3Y)}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{5}{X+2Y} & \frac{7X-Y}{X^2+XY-2Y^2} \\ \frac{8X+Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{X-13Y}{X^2+XY-2Y^2} & \frac{6X-3Y}{X^2+XY-2Y^2} \end{pmatrix} \end{array}$$

e)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}}_{Z}\underbrace{\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}}_{W} = \underbrace{\begin{pmatrix} aX+2bY & bX+aY+bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & aX+2bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & bX+aY+bY & aX+2bY \end{pmatrix}}_{ZW}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}}_{W}\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}}_{Z} = \underbrace{\begin{pmatrix} aX+2bY & bX+aY+bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & aX+2bY & bX+aY+bY \\ bX+aY+bY & bX+aY+bY & aX+2bY \end{pmatrix}}_{WZ}$$

Nous voyons bien que $ZW = WZ$ et que ZW a la même structure que W.

f)

Nous avons vu en d) et dans 14.3 que $M = WM_1$ avec M_1 magique lorsque M est magique. À son tour, M_1 magique fait que $M_1 = WM_2$ où M_2 est magique, et ainsi de suite. Donc $M = W(W(WM_3)) = W^3M_3$ avec M_3 magique. Nous pouvons continuer ainsi jusqu'à $M = W^kM_k$ où M_k est magique et k, un entier ≥ 1. Si $Det(M) \neq 0$ alors $Det(M_k) \neq 0$. En effet, $Det(W) \neq 0$ et $Det(M) \neq 0$ donc $Det(M_k) \neq 0$ puisque nous avons toujours $Det(AB) = Det(A) \times Det(B)$. Ici, $M = WWW...WM_k$.

g)

Le carré $W^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *et* $M' = M(W^4)^{-1} = \begin{matrix} -\frac{11}{16} & \frac{69}{16} & -\frac{43}{16} \\ -\frac{27}{16} & \frac{5}{16} & \frac{37}{16} \\ \frac{53}{16} & -\frac{59}{16} & \frac{21}{16} \end{matrix}$

Le carré M' est magique. Puis $M = W^4 M' = M' W^4$.

h)

Si $Det(M) = 0,$ alors $Det(M') = 0.$ Cependant, nous avons $M = M'W = WM'$ mais nous ne pouvons pas écrire $W = \dfrac{M}{M'}$.

46) Nous voulons montrer que si A est associatif, alors il en est de même de $k\,A + m$.
Le carré magique A est associatif et de somme S signifie que si x et y sont dans des cases symétriques par rapport au centre du carré, alors $x + y = \dfrac{2S}{n}$.

Dans $k\,A,$ la nouvelle somme est $k\,S.$ Puis nous avons :

$$k\,x + k\,y = k(x+y) = k\frac{2S}{n} = 2\frac{k\,S}{n}.$$

Le carré $k\,A$ est donc associatif.

Dans $k\,A + m,$ la nouvelle somme est $k\,S + n\,m.$ Puis nous avons :

$$(k\,x + m) + (k\,y + m) = k\,(x+y) + 2m = k\frac{2S}{n} + \frac{2n\,m}{n} = \frac{2}{n}\left(k\,S + n\,m\right).$$

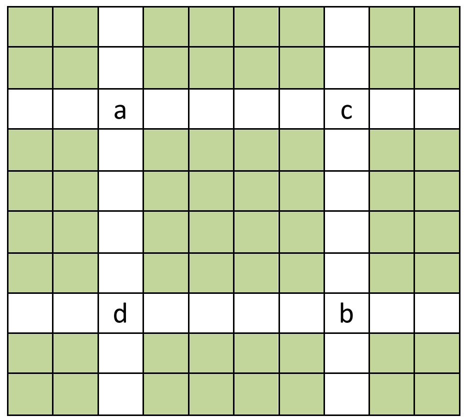
Le carré $k\,A + m$ est donc associatif.

47) Si A est associatif et d'ordre n impair, alors voyons ce que nous trouvons sur la grande diagonale principale. Nous avons $\dfrac{n-1}{2}$ groupes de 2 cases symétriques par rapport au centre du carré dont la somme est $\dfrac{n-1}{2} \times \dfrac{2S}{n} = \dfrac{n\,S - S}{n}$. Le nombre dans la case centrale est donc : $S - \dfrac{n\,S - S}{n} = \dfrac{n\,S}{n} - \dfrac{n\,S - S}{n} = \dfrac{S}{n}$. Nous venons de voir que : si A est associatif, alors le centre est $\dfrac{S}{n}$. Donc, si le centre n'est pas $\dfrac{S}{n}$, alors A n'est pas

associatif. Nous pouvons dire qu'une condition nécessaire pour que A soit associatif est que le centre soit $\frac{S}{n}$ car si ce n'est pas $\frac{S}{n}$, alors A n'est pas associatif.

48)

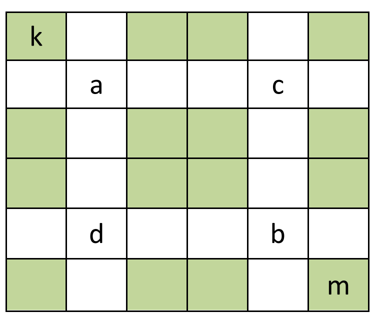
a) Le carré M''est bien magique. En effet, M'est clairement semi-magique ainsi que M''. Enfin, nous voyons que sur les grandes diagonales de M'', les nombres a et b sont toujours sur la même diagonale ainsi que c et d, quoique permutés.



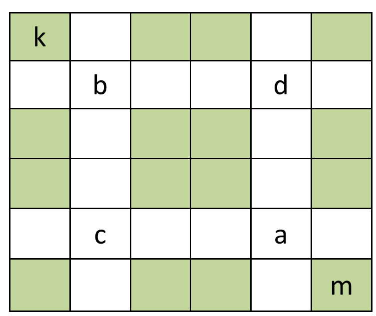
M

Dans les zones vertes, aucun nombre ne bouge avec les deux permutations.

b)



M



M''

Supposons que M soit presque normal. Nous voyons bien que M et M'' sont primitifs car aucun équivalent de M ne peut être égal à M'' puisque a est différent de b. Nous avons ka dans M mais kb dans M''.

c)

a					c
d					b

M

b					d
c					a

M’’

		a	c		
		d	b		

M

		b	d		
		c	a		

M’’

49) Dans l’annexe 11, première page, nous voyons que pour avoir un carré magique d’ordre 5 qui contient un seul nombre premier, il suffit d’ajouter le nombre premier 1123 dans toutes les cases d’un carré normal. Ce nombre premier est 1129 soit 1123 + 6. Si nous prenons le carré de centre 6 de 6.1, nous aurons le seul nombre premier dans la case centrale d’où le «bel-intrus-1129». Celui-ci est pandiagonal.

50) Les deux carrés suivants sont magiques de sommes 123 et 131. Ce sont deux Ariane.

23	1	54	5	40
56	27	3	24	13
4	43	15	32	29
10	14	42	37	20
30	38	9	25	21

A

23	1	58	5	44
56	31	3	24	17
8	43	15	36	29
10	14	46	41	20
34	42	9	25	21

B

23	1	54	5	40
57	27	3	24	13
4	43	15	32	29
10	14	42	37	20
30	38	9	25	21

A’

23	1	58	5	44
55	31	3	24	17
8	43	15	36	29
10	14	46	41	20
34	42	9	25	21

B’

Dans les cases blanches, nous avons maintenant 57 et 55, ce qui rend les deux carrés non magiques.
La somme magique de (A + B) est 123 + 131 = 254.
Avec (A’ + B’), la somme dans chaque rangée, excepté la deuxième, est 254. La somme dans toutes les colonnes, excepté la première à gauche, est 254. De même pour les deux grandes diagonales.
Dans la deuxième rangée, la somme est (123 + 1) + (131 – 1) = 254. De même dans la première colonne.
Le carré A’ + B’ est donc magique.

51) Avec le procédé DM, voir 14.17.1, le carré d’ordre $mn = 2p$ n’est pas possible. Nous avons $m \geq 3, n \geq 3$, puis p premier implique $m = 2 \, et \, n = p \; ou \; m = p \, et \, n = 2$. De plus, avec $n = 2 \, ou \, m = 2$, nous aurons un carré trivial et le carré d’ordre mn doit être normal.

52) Ce carré arithmétique de somme 160 est défini avec a = 4, r = 2 et t = 12.

36	54	22	40	8
6	34	52	20	48
46	4	32	60	18
16	44	12	30	58
56	24	42	10	28

Pour avoir un vertical-alpha formé que d’entiers impairs, il suffit d’ajouter un impair ≥ 1 dans toutes les cases. C’est ce qui arrive, par exemple, avec a = 5. Nous trouvons :

37	55	23	41	9
7	35	53	21	49
47	5	33	61	19
17	45	13	31	59
57	25	43	11	29

Passer de a = 4 à a = 5 est équivalent à ajouter 1 dans toutes les cases du premier carré.

53) Vous trouverez la solution dans l'annexe 5.

54) Nous trouvons que r et t se terminent par 0 puisqu'ils sont des multiples de 10. Tous les nombres du carré se terminent donc par le dernier chiffre de a. Ainsi, le carré est à la fois vertical et horizontal. De plus, nous en avons trouvé avec des répétitions car la condition suffisante pour ne pas avoir de répétition n'était pas respectée (avec r = 10 et t = 40 par exemple).

55) Le carré magique d'ordre impair est vertical. Cela signifie que dans chaque colonne, tous les entiers se terminent par le même chiffre. Si un entier est impair, par exemple, alors la somme magique sera impaire. Donc, dans les autres colonnes, la somme est impaire d'où chaque entier de la colonne est impair et alors, tous les entiers du carré sont impairs. De même si nous trouvons un entier pair dans le carré; alors, tous les entiers seront pairs.

56) Puisque les 25 carrés d'ordre 3 sont magiques, alors la somme des 5 cases de chaque figure est un carré magique. Nous allons vérifier que chaque figure est bien magique car la somme est le carré S'. Ce qui est fait. Dans les trois cas, nous avons trouvé S'.

Nous pouvions aussi constater que ces trois figures sont des figures magiques dans la structure générale M' juste au-dessus du grand carré 15x15. C'est avec cette structure que nous avons construit le carré 5x5 formé de carrés 3x3.

57) Dans le carré normal, la somme de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est $\frac{2\times 369}{9}=82$. La somme des cases correspondantes dans M est :

$$82=5+7.11=5\bmod(11) \text{ soit } \frac{2S}{9}=\frac{2\times 6\bmod(11)}{9}=5\times 12\bmod(11)=5\bmod(11).$$

En effet, $S=369=6\bmod(11)$ et l'inverse multiplicatif de 9 dans E est 5.

58) M' d'ordre $m \geq 3$ est magique et associatif et ses m^2 carrés d'ordre $n \geq 3$ sont aussi magiques et associatifs. Alors le grand carré d'ordre $m\,n$ est aussi magique et associatif. Construisons M' avec soit ALG-1 ou ALG-2 ce qui nous assure M' arithmétique et associatif. De plus, en posant $t = m\,r$, nous trouvons que la somme de M' est :

$$S = m\,a + \frac{(m^3 - m)\,r}{2}$$

Puisque M' est associatif, alors deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours :

$$\frac{2S}{m} = 2a + (m^2 - 1)\,r$$

Les expressions dans M' ont tous la forme $a + w\,r$ où $w = 0, 1, \ldots, (m^2 - 1)$.

Dans M', prenons les cases $U\ et\ V$ symétriques par rapport au centre du carré et plaçons dans celles-ci, respectivement, les carrés d'ordre n suivants :

$$a + k_1\,r\ et\ a + k_2\,r \ \text{ avec } \ k_1 + k_2 = m^2 - 1.$$

où a est un carré normal d'ordre n et r, le carré trivial formé du nombre n^2.

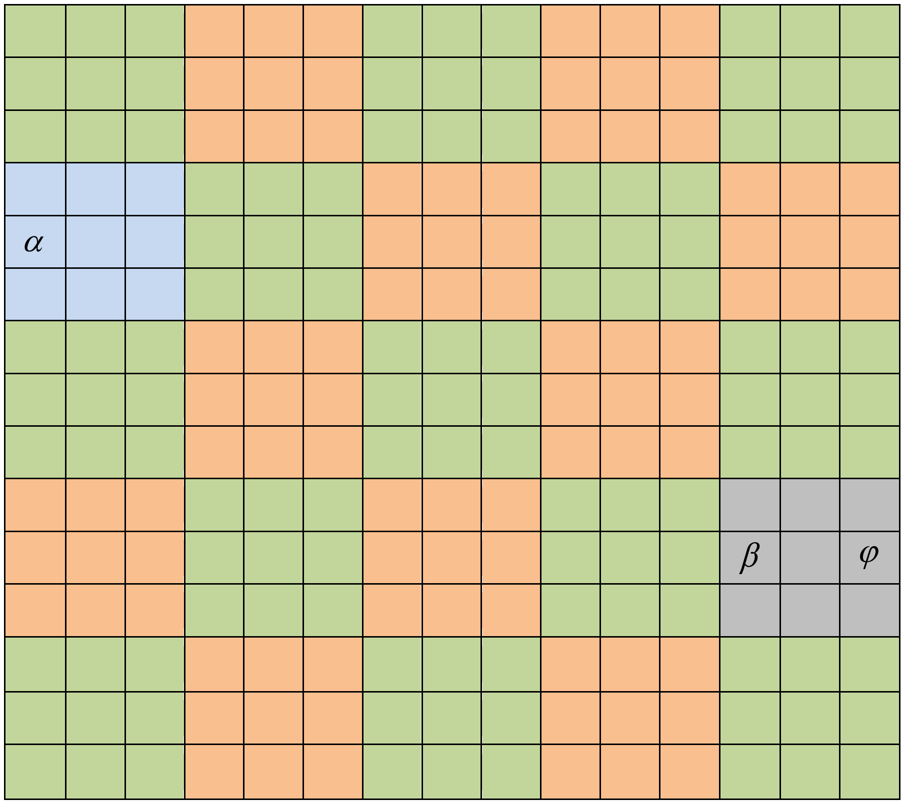
Il est important ici de bien comprendre le procédé DM de construction d'un carré doublement magique. Les carrés d'ordre n forment une suite arithmétique :

$$a\ ;\ a + r\ ;\ a + 2r\ ;\ \ldots\ ;\ a + (m^2 - 1)\,r$$

Le passage d'un terme au suivant se fait en ajoutant n^2 dans toutes les cases.

Dans U, la somme magique est : $S_1 = s + n^3 k_1$ et dans V, $S_2 = s + n^3 k_2$ où s est la somme magique du carré normal a.

La case U est bleue et la case V est grise. Dans une case du carré bleu, considérons le nombre $\alpha = \lambda + n^2 k_1$ où λ occupe la même case dans le carré normal a. Puis le nombre $\beta = \lambda + n^2 k_2$ qui occupe la même case dans le carré gris. Enfin, φ est situé dans la case symétrique par rapport au centre du carré gris de la case qui contient β.



Les cases qui renferment α et φ sont symétriques par rapport au centre du grand carré d'ordre mn.

Le procédé DM nous permet de voir que le grand carré d'ordre mn est magique et normal. Nous voulons montrer qu'il est associatif. Pour cela, nous devons calculer $\alpha+\varphi$. Nous trouvons :

$$\beta+\varphi=\frac{2(s+n^3k_2)}{n} \; d'où \; \varphi=\frac{2(s+n^3k_2)}{n}-(\lambda+n^2k_2).$$

Finalement, $\alpha+\varphi=\lambda+n^2k_1+\frac{2s}{n}+2n^2k_2-\lambda-n^2k_2=n^2+1+n^2(k_1+k_2)=$

$$=n^2+1+n^2(m^2-1)=n^2m^2+1.$$

N'oublions pas que $s=\frac{n(n^2+1)}{2}$ et que $k_1+k_2=m^2-1$.

La somme magique du grand carré d'ordre mn est $\frac{(mn)^3+mn}{2}$ car il est normal. Puis,

$\frac{2}{mn}\,\frac{(mn)^3+mn}{2}=m^2n^2+1$. Le grand carré est donc associatif!!!

59) Ce carré est un intrus et même un bel-intrus. En effet, tous les nombres sont premiers sauf le nombre central qui est composé : 203 = 7x29.

60) Dans l'annexe 31, vous trouverez 49 carrés magiques normaux pandiagonaux d'ordre 7 dont les centres sont les entiers de 1 à 49. Ils sont construits avec le procédé : 1-3-5-7-2-4-6 (voir début du chapitre 6). Le carré suivant est de centre 36 et le nombre premier 9551 + 36 = 9587, un autre nombre premier. Voyons pourquoi nous considérons ces deux nombres premiers.

12	13	28	4	48	26	44
32	14	42	20	43	5	19
40	34	25	16	10	41	9
7	30	8	36	18	31	45
2	46	22	37	38	6	24
35	11	21	23	3	49	33
47	27	29	39	15	17	1

Dans la deuxième page de l'annexe 11, vous trouvez ''Ordre 7''et le nombre premier 9551 qui ajouté dans toutes les cases d'un carré normal d'ordre 7, nous donne un carré magique formé d'un seul nombre premier soit 9587. Celui-ci apparait dans la case où se trouve 36. Avec le carré ci-haut, nous obtiendrons le bel-intrus-9587 lequel est pandiagonal. Vous le trouverez après la solution du problème 64) à la page suivante.

61) Les entiers $n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ ...\ , n! + n$ sont consécutifs et non premiers lorsque $n \geq 3$. L'intervalle $[n! + 2\ ;\ n! + n]$ est donc un intervalle de longueur $n - 1$ qui ne renferme aucun nombre premier. Si nous voulons un intervalle de longueur 10 000 qui ne renferme aucun nombre premier, il suffira de choisir $n = 10\,001$. Il est vrai que l'intervalle débutera par un entier extrêmement grand soit $10\,001! + 2$. Cependant, intuitivement, nous pouvons penser qu'un intervalle [a ; b] de longueur 10 000 qui renferme aucun nombre premier peut se trouver avec a, beaucoup plus petit que $10\,001! + 2$. Ainsi, pour un intervalle de longueur 25, nous prendrions $[26! + 2\ ;\ 26! + 26]$ lequel renferme 25 entiers consécutifs tous non premiers. Mais l'intervalle $[1328\ ;\ 1352]$ est un intervalle qui renferme aussi 25 entiers consécutifs tous non premiers (voir 14.12).

Terminons en montrant que $n! + k$ est composé où $2 \leq k \leq n$ est entier.

$$n! + k = k\left(1\times2\times3\times\ldots\times(k-1)\times(k+1)\times\ldots\times n + 1\right)$$

Il suffit de constater que la parenthèse contient un entier $\geq 2.$ Enfin, cet intervalle sans nombre premier peut donc avoir la longueur que nous voulons, aussi grande soit-elle.

62) Appelons w, le nombre d'entiers entre $p\,et\,q.$ Nous avons $w = q - p - 1,$ un entier impair puisque $q - p$ est pair. En effet, les deux nombres premiers sont impairs et impair – impair = pair. Il y a donc un nombre impair de nombres composés entre $p\,et\,q$ et un nombre impair d'entiers dans tout intervalle $[p\ ;\ q]$ où $p\,et\,q$ sont deux nombres premiers consécutifs.

63) C'est une conséquence immédiate du théorème 14.15.1. n^2 doit être impair d'où n doit être impair.

64) Parce que n^2 n'est pas impair. Remarquez que dans le tableau (*%) de 14.12, tous les entiers de la troisième colonne sont impairs.

9563	9564	9579	9555	9599	9577	9595
9583	9565	9593	9571	9594	9556	9570
9591	9585	9576	9567	9561	9592	9560
9558	9581	9559	9587	9569	9582	9596
9553	9597	9573	9588	9589	9557	9575
9586	9562	9572	9574	9554	9600	9584
9598	9578	9580	9590	9566	9568	9552

Le bel-intrus-9587

15.7 Chapitre 15

1) Soit le carré multiplicatif de produit $P \neq 0$.

a	b
c	d

a	$\frac{P}{a}$
$\frac{P}{a}$	$\frac{P}{a}$

a	a
a	a

Puisque le carré est multiplicatif, nous avons : $ab = ac = ad = P$ d'où $b = c = d = \frac{P}{a}$. Nous avons aussi : $\frac{P}{a}\frac{P}{a} = P$ d'où $P = a^2$. Finalement, le carré multiplicatif est le trivial formé du nombre $a \neq 0$.

Voyons maintenant le cas $P = 0$. Il nous faut un 0 par rangée, colonne et diagonale. Nous ne perdons aucune généralité en plaçant m dans la case (1 ; 1) :

m	0
0	0

0	0
0	0

Les trois 0 doivent occuper ces cases si m, éventuellement non nul, occupe la case (1 ; 1). Il est également possible d'avoir m = 0.

2) Si A et B sont différents, cela signifie qu'il existe deux cases correspondantes dans lesquelles nous trouvons deux nombres différents u et v. Il s'ensuit que $a^u \neq a^v$. En effet, cette fonction exponentielle est strictement croissante. Les deux carrés multiplicatifs sont donc différents.

3) D'abord, revoyons la démonstration du théorème 15.7. En plaçant toutes les valeurs possibles de $a \ et \ c$ dans (*), nous trouverons 56 carrés dont 48 qui ne sont pas presque normaux. Les huit autres carrés seront les seuls susceptibles de donner des carrés presque normaux. Ainsi, avec $a = p^2q^2$; $c = pq^2$; $d = pq$, nous trouvons :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} p^2q^2 & \dfrac{1}{p\,q^2} & p^2q^3 \\ p\,q^2 & p\,q & p \\ \dfrac{1}{q} & p^3q^4 & 1 \end{pmatrix}$$

Évidemment, ce carré n'est pas presque normal. Par contre, avec $a = p; c = q^2; d = p\,q,$ nous trouvons :

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} p & p^2q^2 & q \\ q^2 & p\,q & p^2 \\ p^2q & 1 & p\,q^2 \end{pmatrix}$$

Ce carré multiplicatif est susceptible de donner un carré presque normal. Avec $p = 2\,et\,q = 3,$ nous obtenons le presque normal du plus petit produit $216.$

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 36 & 3 \\ 9 & 6 & 4 \\ 12 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

Sur les 56 cas possibles, 48 donneront un carré de type (1) donc à rejeter. Le type (1) peut aussi contenir des répétitions et le carré sera rejeté pour cette raison.

Sur les 56 cas, 8 carrés sont de type 2. Ce sont 8 équivalents. Voici comment les trouver sachant que $d = p\,q.$

$a = p\,et\,c = q^2$; $a = p\,et\,c = p^2q^2$; $a = q\,et\,c = p^2$; $a = q\,et\,c = p^2q^2$;
$a = p^2q\,et\,c = 1$; $a = p^2q\,et\,c = q^2$; $a = p\,q^2\,et\,c = 1$; $a = p\,q^2\,et\,c = p^2$

Si nous prenons le premier carré (en rouge) comme primitif, alors les sept autres sont ses équivalents. Ces huit carrés sont susceptibles de produire des carrés presque normaux; effectivement, le carré (3) nous montre qu'ils en produisent.

Montrons que si $p\,et\,q$ sont des nombres premiers différents, alors les nombres du carré (2) : $1, p, q, p^2, q^2, p\,q, p\,q^2, p^2q, p^2q^2$ sont tous différents deux à deux. Nous ne perdons aucune généralité en prenant $p < q.$ Deux nombres de cette liste ne peuvent pas être égaux sinon, excepté les cas évidents, nous aurions un entier qui possèderait deux décompositions différentes en facteurs premiers et cela contredirait le théorème fondamental de l'arithmétique.

Une autre façon de faire est d'ordonner ces 9 nombres du plus petit au plus grand.

Premier cas : $p < q \, et \, q < p^2$. La suite ordonnée des 9 nombres est :

$$1 \quad p \quad q \quad p^2 \quad pq \quad q^2 \quad p^2q \quad pq^2 \quad p^2q^2$$

Second cas : $p < q \, et \, p^2 < q$. La suite ordonnée des 9 nombres est :

$$1 \quad p \quad p^2 \quad q \quad pq \quad p^2q \quad q^2 \quad pq^2 \quad p^2q^2$$

Nous voyons bien que les 9 nombres sont différents deux à deux.

4) Nous obtenons le carré multiplicatif :

$$M = \begin{pmatrix} p^4 & p^9 & p^2 \\ p^3 & p^5 & p^7 \\ p^8 & p & p^6 \end{pmatrix}$$

Nous pouvions obtenir M en faisant l'exponentiation en base $p > 0 \; et \; p \neq 1$ du carré magique $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5) Ces carrés auront pour produit $P = 270^3 = 19\,683\,000$. Nous pouvons les construire avec la structure générale (*) de 15.2.

36	18225	30
225	270	324
2430	4	2025

a = 36 ; c = 225 ; d = 270

324	25	2430
2025	270	36
30	2916	225

k = 9 ; a = 36 k ; c = 225 k ; d = 270

36	6075	90
675	270	108
810	12	2025

k = 3 ; a = 36 ; c = 225 k ; d = 270

108	2025	90
225	270	324
810	36	675

k = 3 ; a = 36 k ; c = 225 ; d = 270

180	729	150
225	270	324
486	100	405

k = 5 ; a = 36 k ; c = 225 ; d = 270

Tous ces carrés multiplicatifs sont presque normaux, ont tous pour centre 270 et sont tous primitifs.

6) Vrai selon le théorème 15.7 puisque le centre 21 = 3×7 où 3 et 7 sont des nombres premiers différents. Nous avons donc un carré et ses sept équivalents.

7) Selon le théorème 15.5, nous trouvons avec p = 3 et k = 4, le carré multiplicatif :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3^8 & 3^3 \\ 3^6 & 3^4 & 3^2 \\ 3^5 & 1 & 3^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6561 & 27 \\ 729 & 81 & 9 \\ 243 & 1 & 2187 \end{pmatrix}$$

8) Pour tous les carrés d'ordres $n \geq 4$, nous trouvons toujours une figure complète dans laquelle chaque case contient 0. Le produit est donc 0. Dans toutes les autres cases, nous pouvons y mettre un nombre non nul. Il y a donc n fois le nombre 0 dans ce carré multiplicatif à produit nul.
Regardons maintenant un 3x3. Nous voyons bien que trois 0 suffisent :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}$$

9) Regardez les 8 figures complètes que possède tout carré d'ordre 4, voir le problème 41 de 14.18. Les cases des figures complètes sont en vert. Il suffit maintenant d'observer que chaque petit carré 2x2 situé dans un coin, contient une seule case verte.
   Observez aussi où se trouvent les cases vertes de la figure complète. Par exemple, le 2x2 central contient toujours une case verte.

10) C'est une conséquence immédiate du problème 9) précédent.

11) Voir le problème 41 de 14.18 et les huit figures complètes à la fin de 15.3. Pour montrer que ce sont les seules possibles, il suffit de choisir la case (1 ; 1) et de voir comment choisir les trois autres cases. Sur la deuxième rangée, nous pouvons choisir soit la case rouge, soit la case bleue et voir ce qui arrive avec chaque choix…

(1 ; 1)			

   Ensuite, nous recommençons en partant de la case (1 ; 2) et ainsi de suite.

12) Nous allons placer, une par une, les 8 figures complètes sur ce carré d'ordre 4 de produit 14 280. Dans chaque cas, nous ne pourrons pas diminuer le produit sans faire apparaitre des répétitions ou des rationnels non entiers.

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

Les figures complètes nous donnent un très bon moyen pour réduire le produit magique d'un carré multiplicatif.

13) Le premier carré (MSD*) de 15.3.2 a été fabriqué avec le carré A suivant, un m-hyper-magique presque normal d'ordre 4 :

A =

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

Ce carré fait partie d'un groupe de 48 m-hyper-magiques presque normaux primitifs d'ordre 4 lesquels renferment tous les mêmes 16 entiers!!! (Problème 31 de 15.7).

Nous allons en prendre un deuxième et fabriquer une autre structure (MSD*).

B =

1	24	15	40
60	10	4	6
8	3	120	5
30	20	2	12

Pour obtenir B, il nous faut prendre a = 1, b = 24, c = 15, f = 4, g = 8.

$$a = 1$$
$$b = 24 = 2^3 \times 3 = p^3 q$$
$$c = 15 = 3 \times 5 = qr$$
$$f = 4 = 2^2 = p^2$$
$$g = 8 = 2^3 = p^3$$

Nous placerons ces expressions dans (MSD) pour obtenir notre nouveau (MSD*) :

$(MSD*)_1$ =

1	p^3q	qr	p^3r
p^2qr	pr	p^2	pq
p^3	q	p^3qr	r
pqr	p^2r	p	p^2q

Le produit est $p^6q^2r^2 = (p^3qr)^2$.

Avec $p = 2, q = 3, r = 5$, nous retrouvons B.

Puisque nous trouvons dans (MSD*) et $(MSD^*)_1$, les mêmes expressions, alors pour construire un carré presque normal avec $(MSD^*)_1$, il suffit de faire la même chose qu'avec (MSD*).

Pour que $(MSD^*)_1$ soit presque normal, il est suffisant d'avoir :

$$1 < p < q < p^2 < r < pq$$

où p, q *et* r sont des entiers ≥ 2.

Ce qui implique les inégalités qui suivent et tous ces termes forment une suite strictement croissance donc 16 termes différents.

$$1 < p < q < p^2 < r < pq < p^3 < pr < p^2q < qr < p^2r < p^3q < pqr < p^3r < p^2qr < p^3qr$$

La partie en rouge (la condition suffisante), est toujours réalisable; par exemple, en prenant :

$$q = p+1 \text{ et } r = p^2+1$$

Donc, à partir du carré $(MSD^*)_1$, nous sommes assurés qu'avec

$$q = p+1 \text{ et } r = p^2+1,$$

nous obtiendrons un m-hyper-magique presque normal d'ordre 4.

Avec $p = 2, q = p+1 = 3$ *et* $r = p^2+1 = 5$, nous obtenons un carré du plus petit produit soit $14\,400$.

Nous vous laissons trouver une troisième structure qui sera $(MSD^*)_2$. Revoyez la construction de (MSD*) dans 15.3.2 et la construction de $(MSD^*)_1$ que nous venons de faire; cela vous aidera pour construire $(MSD^*)_2$.

14) Nous allons construire deux carrés avec la structure (*) de 15.3. Les voici :

Le carré A est défini par :

$a = 1; b = 15; c = 24; d = -12; e = 28; f = -3; g = -21; P = -5040$

Le carré B est défini par :

$a=1; b=15; c=24; d=-12; e=-28; f=-3; g=-21; P=5040$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 15 & 24 & -14 \\ -12 & 28 & -3 & -5 \\ -21 & 6 & 10 & 4 \\ -20 & -2 & 7 & -18 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 15 & 24 & 14 \\ -12 & -28 & -3 & -5 \\ -21 & -6 & -10 & -4 \\ 20 & 2 & 7 & 18 \end{pmatrix}$$

15) La réponse est non. Voir dans 15.3.3 les théorèmes 15.11 et 15.12 ainsi que l'avant dernier encadré vert. C'est M à lui seul qui détermine la somme magique de M'. Je construis le carré magique M'à l'aide d'une bordure autour de M et vous construisez le carré magique M''à l'aide d'une autre bordure autour de M. Alors M' et M'' ont la même somme magique!!!

16) La somme magique S de M'est $\frac{S^*}{n}$ où $S^* = nS_1 + 2S_1$. Finalement, $S = \left(\frac{n+2}{n}\right)S_1$.

17) Dans 15.3.3, vers la fin de la section, nous présentons, suite au théorème 15.12, un procédé pour construire le carré magique M'. Suivez ce procédé en donnant que des valeurs entières aux variables. Le carré M' sera magique et formé que d'entiers.

18) Le dernier carré de 15.3.3 nous montre que ce carré magique M' d'ordre 6 existe mais contiendra des entiers négatifs et peut-être 0. Il ne sera donc pas presque normal si nous exigeons que M soit dans M'.

M' =

	W				
	4	15	14	1	
	5	10	11	8	
	9	6	7	12	
	16	3	2	13	
	Z				

Pour que M' soit un carré magique presque normal, il faudra prendre W, un entier > 16 et M' devra avoir pour somme magique S = 51 soit $\frac{n+2}{n}S_1 = \frac{6}{4}\times 34 = 51$.

Donc W + Z = 51 – 34 = 17. Il est clair que W = 17 et Z = 0, W = 18 et Z = – 1, etc … Le carré M' ne pourra jamais être ni presque normal ni normal si nous ne touchons pas au carré central en vert.

Construisons un carré magique M'comme suit :

M' =

21	17	18	19	20	-44
22	4	15	14	1	-5
23	5	10	11	8	-6
24	9	6	7	12	-7
-100	16	3	2	13	117
61	0	-1	-2	-3	-4

Ce carré M' contient 36 entiers différents. L'entier correcteur est 101. Il contient le carré normal d'ordre 4. M' n'est pas presque normal si M reste dans M'.

M'' =

122	118	119	120	121	57
123	105	116	115	102	96
124	106	111	112	109	95
125	110	107	108	113	94
1	117	104	103	114	218
162	101	100	99	98	97

Voici M'', un carré presque normal d'ordre 6 obtenu à l'aide d'une bordure placée autour d'un carré normal d'ordre 4. L'entier correcteur 101 a été appliqué sur M'. La somme magique de M'' est 657.

19)

X									

									Y

Prenons deux rangées symétriques par rapport au centre d'un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$ formé uniquement de nombres réels > 0. Puisque ce carré est associatif, alors le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré donne toujours le même nombre k. Ainsi, $X\,Y = k$.

Nous avons donc : $P^2 = k^n \;\; d'où \;\; k = (P^2)^{\frac{1}{n}} = P^{\frac{2}{n}} = \sqrt[n]{P^2}$.

Il est facile de montrer que si n est impair, alors la case centrale contient le nombre $\sqrt[n]{P}$.

20) Puisqu'un m-ultra-magique d'ordre impair $n \geq 3$ est associatif, par définition, alors si celui-ci est formé de n^2 entiers > 0, sa case centrale renferme l'entier $\sqrt[n]{P}$ (voir problème 19) ci-haut). Donc : $\sqrt[n]{P} = k \;\; et \;\; P = k^n,\; k$ entier ≥ 1.

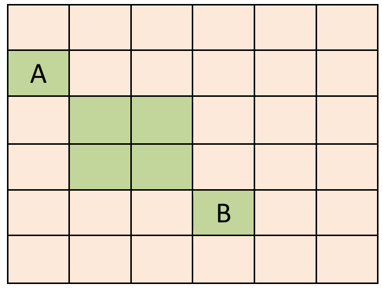
Dans la structure générale (UM*) de 15.4, la case centrale contient $P^{\frac{1}{5}}$. Si ce carré est formé exclusivement d'entiers > 0, alors $P = k^5$ où $k \geq 1$ est entier.

21) Nous avons $E^6 = P^5 \;\; où \;\; P \;\; et \;\; E$ sont des entiers ≥ 1. Tous les facteurs premiers de E se retrouvent dans P et si le facteur premier p_1 se retrouve k fois dans E, alors il se retrouve $6k$ fois dans P^5. Cela signifie que nous trouvons $p_1, \dfrac{6k}{5}$ fois dans P. Mais puisque $5\, et\, 6$ sont premiers entre eux, 5 doit diviser k d'où $k = 5k_1$ avec $k_1 \geq 1$, un entier. Il s'ensuit que $\dfrac{6k}{5} = \dfrac{6 \times 5k_1}{5} = 6k_1$. De même avec le facteur premier p_2 …

Finalement, $P = p_1^{6k_1} \times p_2^{6k_2} \times \ldots = \left(p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \ldots\right)^6$.

22) Nous avons un m-hyper-magique d'ordre 6 avec la figure en vert, une super-figure. En effet, peu importe la façon de placer la figure dans le carré, la somme des cases

du carré 2x2 est toujours 4S/6 = 2S/3. Les cases A et B seront toujours situées sur une diagonale grande ou brisée et la somme A + B sera toujours 2S/6 = S/3. La somme de la figure est donc toujours 2S/3 + S/3 = S.



23) Prenons deux cases symétriques par rapport au centre du carré. Plaçons dans l'une, le plus petit nombre a du carré (a n'est pas nécessairement unique). Soit b, le nombre de l'autre case. Nous avons : $ab = \sqrt[n]{P^2}$

Puisque le produit est constant, alors si nous augmentons a, il est clair que b diminuera. Nous ne pouvons pas augmenter b car a diminuera ce qui est impossible puisque a est le plus petit. Nous concluons que b est le plus grand nombre du carré.

24) Grâce au théorème 15.13.1, nous savons que tous les entiers d'un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit $P = k^5$, sont des diviseurs de k^2. Donc, nous devons trouver au moins 25 diviseurs.

Si k^2 possède 24 diviseurs ou moins, alors notre carré ne sera pas presque normal.

a) Si $k = 144$, alors nous avons un bon candidat car $144^2 = 20\,736$ possède 45 diviseurs. Effectivement, notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 9472 m-ultra-magiques presque normaux soit 1184 primitifs. Ces primitifs sont répartis en 74 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes 25 entiers!!!

b) Si $k = 240$, alors nous avons un bon candidat car $240^2 = 57\,600$ possède 81 diviseurs. Effectivement, notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 79 872 m-ultra-magiques presque normaux soit 9 984 primitifs.

c) Si $k = 127$, alors le carré presque normal n'existe pas car $127^2 = 16129$ ne possède que 3 diviseurs.

d) Si $k = 24$, alors le carré presque normal n'existe pas car $24^2 = 576$ ne possède que 21 diviseurs.

25) Il faut trouver la valeur de k telle que l'entier k^2 possède au moins 25 diviseurs. Après $k = 120$, nous trouvons le candidat $k = 126$ puisque $126^2 = 15876$ possède 45 diviseurs. Pour $k = 121, 122, 123, 124 \, et \, 125$, nous trouvons que k^2 possède moins que 25 diviseurs. De plus, notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 1280 m-ultra-magiques presque normaux soit 160 primitifs répartis en 10 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes 25 entiers!!! Donc, le suivant dans le tableau est 126^5. C'est le dixième meilleur produit.

26)

a) Nous allons trouver deux carrés multiplicatifs dont la somme n'est pas un carré multiplicatif. Les deux carrés suivants sont multiplicatifs :

1	15	24	14
12	28	3	5
21	6	10	4
20	2	7	18

$P = 5040$

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

$P = 14\ 280$

Additionnons la première rangée de l'un avec la première rangée de l'autre; nous obtenons : 2 25 45 82 et le produit : 184 500.
Additionnons la deuxième rangée de l'un avec la deuxième rangée de l'autre; nous obtenons : 40 79 5 10 et le produit : 158 000. La somme n'est donc pas un carré multiplicatif.

b) Nous allons trouver deux carrés multiplicatifs dont la somme est un carré multiplicatif. Les deux carrés suivants sont multiplicatifs : M et N = k M.
Dans une figure magique de M: $x_1 x_2 ... x_n = P.$

Dans la même figure de k M : $k\, x_1\, k\, x_2 ... k\, x_n = k^n P.$

Dans la même figure de M + k M : $(k+1)x_1 (k+1)x_2 ... (k+1)x_n = (k+1)^n P.$ Le carré M + k M est donc multiplicatif.

Sans cette façon de faire, il est possible de trouver deux carrés multiplicatifs M et N tels que M + N soit aussi multiplicatif. Prenons les deux carrés multiplicatifs suivants :

1	10	63	340
84	255	2	5
170	21	20	3
15	4	85	42

M avec $P = 214\ 200$

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

N avec $P = 14\ 280$

Nous trouvons en additionnant ces deux carrés M et N, le carré suivant :

2	20	84	408
112	306	4	10
204	28	40	6
30	8	102	56

Celui-ci est multiplicatif de produit P = 1 370 880.

Les carrés M et k M ont un lien très fort entre eux mais M et N ci-haut ne semblent pas avoir de lien. Pourtant, N est obtenu de M à l'aide de deux figures complètes et dans chacune, nous avons divisé les quatre entiers respectivement par 3 et 5 d'où le produit magique de N qui est 15 fois plus petit que celui de M. Il faudrait analyser ce lien entre M et N!!!Quelles-en sont les conséquences?

27) Nous ferons comme dans 26 b) : $A_1, k_1A_1, k_2A_1, ..., k_{m-1}A_1$. Le produit du carré qui est la somme $A_1 + A_2 + ... + A_m$ sera $(1 + k_1 + k_2 + ... + k_{m-1})^n P$.

28) Un tel carré provient de la structure (*) de 15.2. Il suffit d'observer qu'une diagonale brisée a un produit différent de d^3. Précisons ici que les variables a, c et d sont des nombres réels > 0. Dans une diagonale brisée de (*), nous trouvons :

$$\frac{a\,c}{d}\,c\,\frac{a^2c}{d^2} = \frac{a^3c^3}{d^3}$$

Mais se peut-il que $\dfrac{a^3c^3}{d^3} = d^3$?

Nous aurions alors $a\,c = d^2$ et $a = \dfrac{d^2}{c}$. Ce qui n'est pas possible dans un carré presque normal car nous aurions au moins une répétition. Ce carré ne peut donc pas être pandiagonal.

29) À partir de la structure (MD), nous avons trouvé la structure (MSD) des m-super-Dürer laquelle nous permet la construction des presque normaux.
À partir de la structure (*) de 15.3, nous construisons celle des m-hyper-magiques. Nous trouvons (MSD).
À partir de (*), nous construisons celle des multiplicatifs pandiagonaux. Nous trouvons toujours (MSD)!!!
Lire aussi la preuve du théorème 15.9.

30) Nous venons de montrer, au problème 29), que la structure des m-hyper-magiques d'ordre 4 est la même que (MSD).

31) Selon le théorème 15.10 et jusqu'à l'encadré vert qui le suit, si un m-hyper-magique est presque normal, alors tous ses entiers sont des diviseurs de $c\,g$. Donc, puisque $P = c^2g^2 = 14\,400$, nous trouvons $c\,g = 120$. Mais voilà que 120 possède exactement 16 diviseurs!!! Deux m-hyper-magiques presque normaux doivent donc renfermer les mêmes 16 entiers, les 16 diviseurs de 120.

32) Vous trouverez cette suite un peu plus loin, juste après la structure (MSD*) de 15.3.2. Les inégalités en rouge constituent une condition suffisante pour que toutes les inégalités qui suivent soient respectées. De plus, cette condition suffisante est toujours réalisable. Par exemple, puisque $q < p^2$, nous trouvons $p\,q < p^3$. Puisque $p^2 < r$ alors $p^3 < p\,r, \ldots$

33) N est un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de nombres > 0. Son associé, M, s'obtient en logarithmant N.

a) Soient a, b, c, d, quatre nombres situés dans les cases d'un carré 2x2 de N. Nous trouvons, dans les cases correspondantes de M, les nombres :

$$\log_u a \ ; \ \log_u b \ ; \ \log_u c \ ; \ \log_u d$$

Nous avons alors :

$$a\,b\,c\,d = \sqrt[6]{P^4} = P^{\frac{2}{3}}$$

$$\log_u a + \log_u b + \log_u c + \log_u d = \frac{2}{3}\log_u P = \frac{2}{3}S = \frac{4S}{6}$$

b) Soient $a, b,$ deux nombres situés dans les deux cases d'une diagonale, grande ou brisée, séparées par deux cases. Nous avons :

$$a\,b = \sqrt[6]{P_2} = P^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_u a + \log_u b = \log_u P^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_u P = \frac{1}{3}S = \frac{2S}{6}$$

Selon a) et b), M est donc un hyper-magique.

34) Prenons le 2x2 coin haut-gauche de M. En procédant comme au problème précédent, nous trouverons par exponentiation en base u, le m-Dürer N. Puis, à partir du coin haut-gauche de N, nous trouverons en logarithmant en base u, le Dürer M.
Si M est un Dürer, alors par exponentiation, nous obtenons un m-Dürer. De cette façon, nous obtiendrons tous les m-Dürer. En effet, soit N, un m-Dürer. En logarithmant N, nous obtenons un Dürer qui, par exponentiation, redonnera N.

35) Nous ne perdons aucune généralité en choisissant la base $a = 2$ étant donné que la variable a se retrouve dans la structure générale des Dürer.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & f & a+b-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & a+b+d-f-g & a+c-g \\ a+b+c-f-g & a+d-g & S-a-b-c-d+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Effectuons l'exponentiation en base 2 :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 2^a & 2^b & 2^c & \dfrac{2^S}{2^{a+b+c}} \\ 2^d & \dfrac{2^S}{2^{a+b+d}} & 2^f & \dfrac{2^{a+b}}{2^f} \\ \dfrac{2^{S+f+g}}{2^{2a+b+c+d}} & 2^g & \dfrac{2^{a+b+d}}{2^{f+g}} & \dfrac{2^{a+c}}{2^g} \\ \dfrac{2^{a+b+c}}{2^{f+g}} & \dfrac{2^{a+d}}{2^g} & \dfrac{2^{S+g}}{2^{a+b+c+d}} & \dfrac{2^{f+g}}{2^a} \end{pmatrix}$$

Posons maintenant :

$$(**) \qquad 2^a = m \;;\; 2^b = p \;;\; 2^c = q \;;\; 2^S = P \;;\; 2^d = u \;;\; 2^f = v \;;\; 2^g = w.$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{pmatrix} m & p & q & \dfrac{P}{m\,p\,q} \\ u & \dfrac{P}{m\,p\,u} & v & \dfrac{m\,p}{v} \\ \dfrac{P\,v\,w}{m^2\,p\,q\,u} & w & \dfrac{m\,p\,u}{v\,w} & \dfrac{m\,q}{w} \\ \dfrac{m\,p\,q}{v\,w} & \dfrac{m\,u}{w} & \dfrac{P\,w}{m\,p\,q\,u} & \dfrac{v\,w}{m} \end{pmatrix}$$

Cette structure est bien un m-Dürer où chaque nombre est > 0 selon (**).
Nous venons d'introduire des nouvelles variables mais ce n'est absolument pas nécessaire!!! Nous pourrions garder les mêmes que dans la structure (*). Au lieu d'écrire $2^a = m$, nous pourrions poser $2^a \rightarrow a, 2^b \rightarrow b, \ldots$ puisque l'écriture $2^a = a$ n'est pas admise. Celle-ci donne l'impression que nous avons une équation à résoudre laquelle n'a pas de solution. En gardant les mêmes variables que dans (*), nous obtenons beaucoup plus rapidement et simplement (***).

$$(***)\qquad \begin{pmatrix} a & b & c & \dfrac{P}{a\,b\,c} \\ d & \dfrac{P}{a\,b\,d} & f & \dfrac{a\,b}{f} \\ \dfrac{P\,f\,g}{a^2 b\,c\,d} & g & \dfrac{a\,b\,d}{f\,g} & \dfrac{a\,c}{g} \\ \dfrac{a\,b\,c}{f\,g} & \dfrac{a\,d}{g} & \dfrac{P\,g}{a\,b\,c\,d} & \dfrac{f\,g}{a} \end{pmatrix}$$

En partant de la structure des Dürer, nous passons directement à (***). L'addition se change en produit et la soustraction en quotient. Ainsi, $a+b-f$ devient $\dfrac{a\,b}{f}$.

Puis $S-a-b-d$ devient $\dfrac{P}{a\,b\,d}$ en n'oubliant pas que S se change en P puisque $2^S = P$.

36)

a) Pour s'assurer que l'ensemble F_n est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, consultez les pages 1 et 2 de l'annexe 26.

b) Il existe un isomorphisme entre E_n et F_n. La fonction qui associe un carré de E_n à un carré de F_n est l'exponentiation en base a du carré de E_n. Étant données les propriétés de la fonction exponentielle, il est facile de montrer que cette fonction est bijective. Notons f cette bijection. Nous devons aussi montrer que :

$$f(A+B) = f(A) * f(B)$$
$$f(k\,A) = k \circ f(A)$$

Voici la structure de la preuve : u et v sont dans des cases correspondantes respectivement dans A et B.

$$\begin{array}{llll} A & B & A+B & f(A+B) \\ u & v & u+v & a^{u+v}=a^u a^v \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} A & f(A) & B & f(B) & f(A)*f(B) \\ u & a^u & v & a^v & a^u a^v \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A & k\,A & f(k\,A) \\ u & k\,u & a^{k\,u} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} A & f(A) & k\circ f(A) \\ u & a^u & (a^u)^k = a^{u\,k} = a^{k\,u} \end{array}$$

c) Puisque E_n *et* F_n sont isomorphes, alors les deux espaces ont la même dimension. La dimension de l'espace F_n est donc $n(n-2)$. Consultez aussi l'annexe 27, dernier encadré vert.

37) Pour simplifier, nous allons prendre un carré magique A d'ordre 3. Le procédé est le même pour tous les ordres ≥ 4.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{2^x} \underset{B}{\begin{pmatrix} 2^4 & 2^9 & 2^2 \\ 2^3 & 2^5 & 2^7 \\ 2^8 & 2^1 & 2^6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{\log_3} \underset{C}{\begin{pmatrix} \log_3 2^4 & \log_3 2^9 & \log_3 2^2 \\ \log_3 2^3 & \log_3 2^5 & \log_3 2^7 \\ \log_3 2^8 & \log_3 2^1 & \log_3 2^6 \end{pmatrix}} \xrightarrow{3^x}$$

$$\xrightarrow{3^x} \underset{B}{\begin{pmatrix} 3^{\log_3 2^4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 2^4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}$$

Nous savons que $3^{\log_3 x} = x$ d'où l'égalité ci-haut. De plus, il est facile de montrer que $C \neq A$. Par exemple, avons-nous $\log_3 2^4 = 4$? Si oui, nous aurions $2^4 = 3^4$ ce qui est faux donc $C \neq A$.

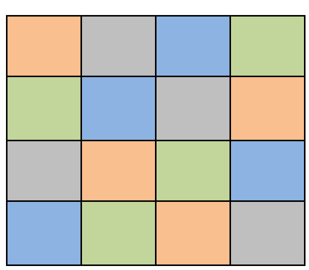
Les carrés $A \, et \, C$ sont magiques et A donne B par exponentiation en base 2 tandis que C donne B par exponentiation en base 3.

38) Dans ce carré, toutes les expressions sont différentes deux à deux. Si nous attribuons aux cinq variables, des nombres premiers différents, nous aurons alors un m-super-Dürer presque normal. En effet, tous les nombres seront des entiers ≥ 1. Ils seront tous différents deux à deux car si deux cases renferment le même entier N, cela signifie que N aura deux décompositions différentes en facteurs premiers, ce qui contredit le théorème fondamental de l'arithmétique.

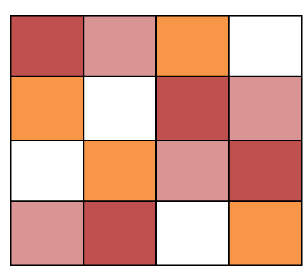
$(MSD-1)$

$a^2 b f g$	$a b^2 f g$	$a b c f g$	$c f g^3$
$b c f^2 g$	$a c g^3$	$a b f^2 g$	$a^2 b^2 g$
$a b f g^2$	$a^2 b^2 f$	$b c f g^2$	$a c f g^2$
$a b c g^2$	$c f^2 g^2$	$a^2 b g^2$	$a b^2 f^2$

39) Effectivement, ce sont bien les huit figures complètes que nous retrouvons à la fin de 15.3.



Carré réducteur 1



Carré réducteur 2

40) Voir l'annexe 26.

a) Nous ne pouvons pas avoir un espace vectoriel tel que défini au problème 36 ci-haut. Si M est issu de (MD*) et renferme le nombre 0, alors ce carré ne sera pas inversible et nous n'aurons pas notre structure de groupe.
b) Il faut vérifier que les deux structures soient équivalentes et alors dans les deux cas, nous aurons un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
c) C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 7 car le nombre minimum de variables libres est 7 (voir d) qui suit).
d) La structure (MD*) est une combinaison linéaire de huit carrés linéairement dépendants.
e) Ils forment un système de générateurs duquel nous trouverons une base formée de sept carrés. Avec les carrés de la base, les coordonnées du carré de Sayles sont uniques mais ce n'est pas le cas si le carré de Sayles est une combinaison linéaire des carrés d'un système de générateurs qui contient au moins huit carrés.

Voici ce système de générateurs dans lequel $b \in \,]0;1[\, \cup \,]1;\infty[$.

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez vérifier que :

$$(MD^*) = \begin{pmatrix} mn & uv & xy & rs \\ ry & sx & mu & nv \\ su & ny & rv & mx \\ vx & mr & ns & uy \end{pmatrix} =$$

$$= (\log_b m) \circ A * (\log_b n) \circ B * (\log_b u) \circ C * (\log_b v) \circ D *$$
$$*(\log_b x) \circ E * (\log_b y) \circ F * (\log_b r) \circ G * (\log_b s) \circ H$$

Pour montrer que A, B, C, D, E, F, G sont linéairement indépendants, il faut montrer qu'une combinaison linéaire égale à T implique que tous les scalaires soient nuls (ici, T est le trivial formé de l'entier 1). Donc, montrons que :

$$(*) \qquad \begin{aligned} &(a_1 \circ A) * (a_2 \circ B) * ... * (a_7 \circ G) = T \\ &A^{a_1} * B^{a_2} * C^{a_3} * D^{a_4} * E^{a_5} * F^{a_6} * G^{a_7} = T \end{aligned}$$

implique $a_1 = a_2 = ... = a_7 = 0.$ Il suffit de trouver explicitement le membre de gauche dans (*) et de considérer que $b^w = 1$ implique $w = 0.$

Le carré H est une combinaison linéaire des sept autres carrés.

$$H = A^{-1} * B * C * D^{-1} * E * F^{-1} * G$$

Pour trouver ces exposants, il suffit de poser le membre de gauche de (*) $= H.$

ATTENTION!!!

Ici, $A^{-1} = (-1) \circ A.$ C'est l'inverse de A relativement à l'opération $*$.

41) La structure générale (UM*) des m-ultra-magiques d'ordre 5 (voir 15.4) nous montre que la case centrale contient $P^{\frac{1}{5}} = k$ et que le produit est alors $P = k^5$. Puisqu'un m-ultra-magique est associatif, cela signifie que le produit de deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[5]{P^2} = \sqrt[5]{k^{10}} = k^2.$ Si le carré est formé exclusivement d'entiers, alors ceux-ci sont tous des diviseurs de k^2.
42) Ici, le produit est $P = k^6.$ Puisqu'un m-hyper-magique possède la propriété 4) de l'encadré vert de 15.5 (page 74), alors sur toute diagonale, grande ou brisée, le produit de deux cases séparées par (n – 2)/2 cases est toujours $\sqrt[6]{P^2} = \sqrt[6]{k^{12}} = k^2.$ Si le carré est formé exclusivement d'entiers, alors ceux-ci sont tous des diviseurs de k^2.
43) Bonne recherche!!!
44) L'entier 456 533 = $7^3 \times 11^3$ a la forme $a^3b^3.$ Selon les tableaux des pages 82 et 85 de 15.5, notre prédiction est 288, laquelle s'est avérée exacte!!!
45) a)
Le carré M est un m-hyper-magique d'ordre n et de produit $P.$ Considérons maintenant le carré $r\,M$ où $r > 0$ est un nombre réel. Il est clair que $r\,M$ est toujours un carré multiplicatif de produit $P^* = r^n P.$

Dans M : carré 2x2; le produit des 4 cases est : $\sqrt[n]{P^4}$.

Dans rM : carré 2x2; le produit des 4 cases est :

$$r^4\sqrt[n]{P^4}=\sqrt[n]{r^{4n}P^4}=\sqrt[n]{(r^nP)^4}=\sqrt[n]{(P^*)^4}$$

Sur toute diagonale, grande ou brisée, le produit de 2 cases séparées par $(n-2)/2$ cases est :

Dans M : $\sqrt[n]{P^2}$.

Dans rM : $r^2\sqrt[n]{P^2}=\sqrt[n]{r^{2n}P^2}=\sqrt[n]{(r^nP)^2}=\sqrt[n]{(P^*)^2}$

b)

Le carré M est un m-ultra-magique d'ordre n. Pour montrer que rM est encore un m-ultra-magique, il faut montrer que rM est toujours pandiagonal et associatif. Il est évident que ce nouveau carré est toujours multiplicatif et pandiagonal. En fait, à toute figure magique de produit P dans M correspond, dans rM, une figure magique de produit r^nP. Dans M, le produit de 2 cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[n]{P^2}$. Dans rM, nous trouverons : $\sqrt[n]{(P^*)^2}$ (voir la dernière ligne de 45) a)).

46) La réponse est oui. Voir le corollaire 1 de l'annexe 30, page 3.

47) Le carré est d'ordre $n=2m+1$. Sur la grande diagonale principale, le produit des entiers est : $P=\left(\sqrt[n]{P^2}\right)^m\times k$ où k est l'entier de la case centrale. Il s'ensuit que :

$$k=\frac{P}{P^{\frac{2m}{n}}}=\frac{P^{\frac{n}{n}}}{P^{\frac{2m}{n}}}=P^{\frac{n-2m}{n}}=P^{\frac{2m+1-2m}{n}}=P^{\frac{1}{n}}$$

Le carré étant presque normal, nous avons $P^{\frac{1}{n}}=k$ d'où $P=k^n$. (Voir problème 20).