8. Des carrés magiques spectaculaires

8.1 Introduction

Nous venons de définir, au chapitre précédent, les carrés ultra-magiques et hyper-magiques sans pour autant montrer comment les construire.

Un carré ultra-magique non trivial d'ordre 3 n'existe pas. En effet, celui-ci est associatif (problème 9 de 7.4) mais n'est pas pandiagonal (problème 8 de 7.4).

Les ultra-magiques d'ordre 4 non triviaux existent mais aucun n'est normal et même, aucun n'est presque normal. Pour montrer cela, nous partons de la structure générale des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4 qui est exactement la même que celle des super-Dürer d'ordre 4, (voir section 5.5) lesquels sont des Dürer. Si nous rendons associative cette structure, nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} a & \frac{S}{2}-a & c & \frac{S}{2}-c \\ \frac{S}{2}-a & a & \frac{S}{2}-c & c \\ \frac{S}{2}-c & c & \frac{S}{2}-a & a \\ c & \frac{S}{2}-c & a & \frac{S}{2}-a \end{pmatrix}$$

La section 5.9 nous montre comment rendre associatif un Dürer. C'est ce que nous avons fait pour avoir la structure ci-haut.

Un ultra-magique d'ordre 4 a obligatoirement cette forme. Il est clair que ce carré magique n'est ni normal, ni presque normal. Nous avons au mieux quatre nombres différents, chacun apparaissant quatre fois.

Pour les ultra-magiques d'ordre 5, la section 6.3 nous présente une structure générale laquelle permet de trouver les 128 ultra-magiques normaux d'ordre 5 qui existent. Tous les ultra-magiques d'ordre 5 ont en commun 362 figures magiques.

Pour les ultra-magiques d'ordres supérieurs à 5, le travail sera plus ardu. Il faudra partir de la structure générale et imposer sur celle-ci les conditions nécessaires pour avoir la structure des carrés magiques à la fois associatifs et pandiagonaux. Cette structure renfermera un nombre de variables qui augmentera avec l'ordre du carré. De là la grande difficulté lorsque nous partons de la structure générale. Comment trouver la structure des ultra-magiques d'ordre 2500? Pouvons-nous y arriver par d'autres moyens?

Quant aux hyper-magiques, la difficulté est la même lorsque nous voulons les construire et en particulier, lorsque l'ordre du carré est très grand.

Nous allons construire dans les deux sections suivantes, deux carrés magiques d'ordre 8 dont l'un sera un hyper-magique. Pour ce faire, nous partirons de la structure générale des carrés magiques d'ordre 8, laquelle renferme 48 variables.

Les cases du premier carré d'ordre 8 que nous allons construire ici sont numérotées de gauche à droite et de haut en bas avec les entiers de 1 à 64 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 \\ 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 \end{pmatrix}$$

Nous définissons un petit carré d'ordre 2 contenu dans le grand carré à l'aide des numéros qui identifient les quatre cases du petit carré. Par exemples : nous pouvons parler du carré (1 ; 2 ; 9 ; 10), (2 ; 3 ; 10 ; 11), (10 ; 11 ; 18 ; 19), (37 ; 38 ; 45 ; 46), … Il y en a en tout 49.

Nous voulons que la somme des quatre cases de chaque carré d'ordre 2 soit égale à 4S/n. Pour ce faire, nous allons additionner les expressions situées dans chaque carré d'ordre 2. Nous commencerons avec le carré (1 ; 2 ; 9 ; 10) et nous poserons la somme des expressions des quatre cases égale à 4S/n = S/2. De cette équation, nous allons isoler une variable et la remplacer dans la structure générale G des carrés magiques d'ordre 8, par son expression.

Nous obtiendrons alors une nouvelle structure générale G_1 qui renfermera 47 variables. Cette nouvelle structure générale donnera tous les carrés magiques d'ordre 8 avec la somme des cases du carré (1 ; 2 ; 9 ; 10) égale à S/2. Nous allons continuer jusqu'à ce que les 49 carrés d'ordre 2 aient pour somme S/2. Le nombre de variables aura considérablement diminué lorsque nous atteindrons notre dernière nouvelle structure générale.

8.2 Des carrés magiques d'ordre 8 très spéciaux : les Gauss

Le carré magique que nous allons construire ici est le carré 23 de la partie 1. Ses 49 petits carrés d'ordre 2 ont tous pour somme 4S/n = S/2. Le théorème 7.1 nous apprend que :

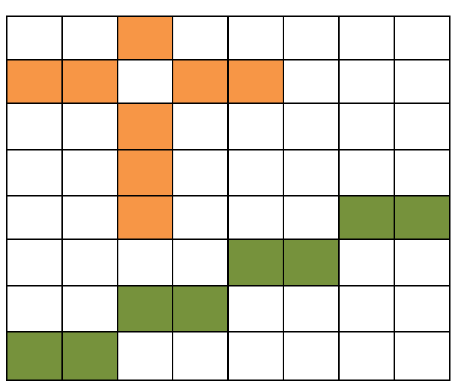
a) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 4 situés dans le grand carré est S/2.
b) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 6 situés dans le grand carré est S/2.
c) La somme des 4 coins du carré d'ordre 8 est S/2.

Le chapitre 3 de la partie 2 nous montre comment construire la structure générale des carrés magiques d'ordre 8 dont la dimension est 48. Nous partirons de cette structure générale pour construire le carré 23. Quand tous les petits carrés d'ordre 2 seront de somme S/2, nous exigerons la pandiagonalité. Nous ferons alors la somme des expressions dans chaque diagonale brisée, il y en a 14, et nous poserons cette somme égale à S. Nous isolerons une variable et nous lui substituerons son expression partout où cette variable se trouve dans la structure générale. Ainsi nous aurons une nouvelle structure générale avec une variable en moins. C'est ce que nous avons fait pour que les 49 petits carrés d'ordre 2 aient pour somme S/2 et de 48 variables, nous sommes passés à 13 variables.

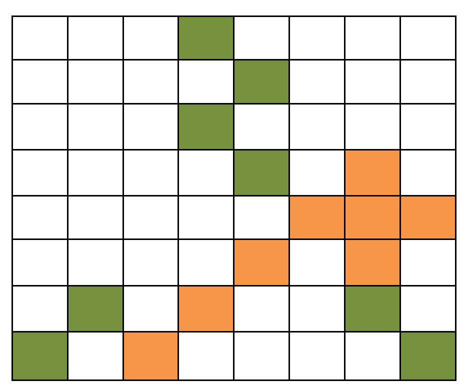
Le sous-espace V des carrés magiques d'ordre 8 tel que leurs 49 petits carrés d'ordre 2 ont pour somme S/2, est donc de dimension 13.

En voulant obtenir la pandiagonalité, nous avons eu la surprise suivante : tous les carrés magiques de V sont déjà pandiagonaux!!! La somme des expressions de chaque diagonale brisée était égale à S!!! Pourquoi? (Voir problème 24 de 8.6).

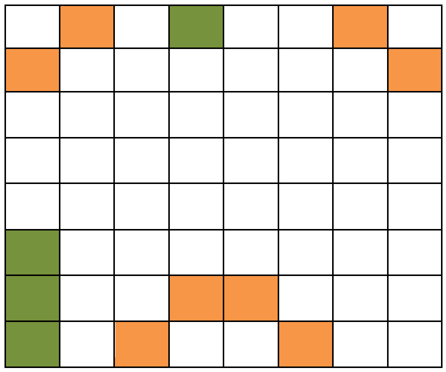
Cependant, nous avons obtenu un **sous-espace de dimension 3** (**celui des Gauss**) de V en exigeant d'avoir les cinq figures magiques suivantes dans la structure générale de V :

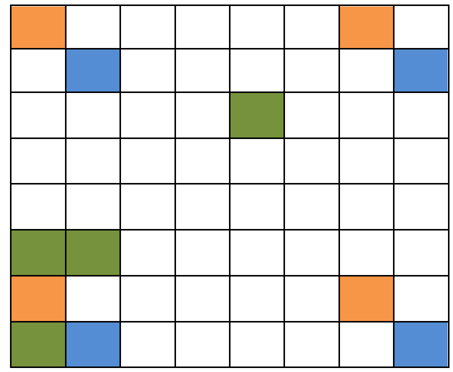


Avion (orangé) et escalier (vert)



Cerf-volant (orangé) et lampe (vert)





plus les cinq demi-figures de sommes S/2 dont deux sont en vert et dans le dernier carré à droite, nous avons les quatre sommets de trois carrés d’ordre 7 (nous en avons illustré deux, l’un en orangé, l’autre en bleu).

Quant au quatrième carré d’ordre 7, la somme de ses quatre coins était déjà S/2. Ainsi, nous avons pu éliminer dix variables dans la structure générale de V et obtenir la structure générale à trois variables que voici :

$$
\begin{array}{cccc}
\mathrm{a1} & -2\mathrm{a1}-5\mathrm{a3}+S & \mathrm{a3} & -\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S \\
-2\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-\dfrac{S}{4} & 3\mathrm{a1}-\dfrac{S}{4} & -\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\dfrac{S}{4} & 2\mathrm{a1}+\mathrm{a3}-\dfrac{S}{4} \\
-4\mathrm{a1}-11\mathrm{a3}+2S & 3\mathrm{a1}+6\mathrm{a3}-S & -5\mathrm{a1}+2(-5\mathrm{a3}+S) & 4\mathrm{a1}+5\mathrm{a3}-S \\
-\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+\dfrac{5S}{4} & 2\mathrm{a1}+13\mathrm{a3}-\dfrac{7S}{4} & -9\mathrm{a3}+\dfrac{5S}{4} & \mathrm{a1}+14\mathrm{a3}-\dfrac{7S}{4} \\
5\mathrm{a1}+8\mathrm{a3}-\dfrac{3S}{2} & -6\mathrm{a1}-13\mathrm{a3}+\dfrac{5S}{2} & 4\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}-\dfrac{3S}{2} & -5\mathrm{a1}-14\mathrm{a3}+\dfrac{5S}{2} \\
11\mathrm{a3}-\dfrac{5S}{4} & \mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+\dfrac{3S}{4} & \mathrm{a1}+10\mathrm{a3}-\dfrac{5S}{4} & -5\mathrm{a3}+\dfrac{3S}{4} \\
-2\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+\dfrac{3S}{2} & \mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\dfrac{S}{2} & -3\mathrm{a1}-8\mathrm{a3}+\dfrac{3S}{2} & 2\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}-\dfrac{S}{2} \\
3\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}-\dfrac{3S}{4} & -2\mathrm{a1}+\mathrm{a3}+\dfrac{S}{4} & 4\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}-\dfrac{3S}{4} & -3\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+\dfrac{S}{4}
\end{array}
$$

Ce sont les quatre premières colonnes de gauche à droite.

$a1+2a3-\frac{S}{4}$	$3a3-\frac{S}{4}$	$2a1+9a3-\frac{5S}{4}$	$-a1-4a3+\frac{3S}{4}$
$-2a1+3a3$	$a1-8a3+S$	$-3a1-4a3+S$	$2a1-a3$
$-4a1-9a3+\frac{7S}{4}$	$5a1+14a3-\frac{9S}{4}$	$-3a1-2a3+\frac{3S}{4}$	$4a1+7a3-\frac{5S}{4}$
$-a1-10a3+\frac{3S}{2}$	$5a3-\frac{S}{2}$	$-2a1-17a3+\frac{5S}{2}$	$a1+12a3-\frac{3S}{2}$
$5a1+10a3-\frac{7S}{4}$	$-4a1-5a3+\frac{5S}{4}$	$6a1+17a3-\frac{11S}{4}$	$-5a1-12a3+\frac{9S}{4}$
$9a3-S$	$-a1+2(-7a3+S)$	$-a1+2a3$	$-7a3+S$
$-2a1-7a3+\frac{5S}{4}$	$3a1+12a3-\frac{7S}{4}$	$\frac{1}{4}(-4a1+S)$	$2a1+5a3-\frac{3S}{4}$
$3a1+2a3-\frac{S}{2}$	$-4a1-7a3+\frac{3S}{2}$	$2a1-5a3+\frac{S}{2}$	$\frac{1}{2}(-6a1+S)$

Ce sont les quatre suivantes de gauche à droite.

Tous les carrés magiques issus de cette structure générale sont appelés des Gauss.

Un **Gauss** est donc un carré magique **d'ordre 8** qui possède les caractéristiques suivantes :

1) Ses 49 petits carrés d'ordre 2 ont tous pour somme S/2.
2) Il possède les cinq figures magiques illustrées ci-haut.
3) Il possède les cinq demi-figures illustrées ci-haut, de sommes S/2.

Tous les Gauss proviennent de la structure générale ci-haut.

De plus, ils possèdent tous les propriétés suivantes :

1) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 2 contenus dans le grand carré est S/2.
2) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 4 contenus dans le grand carré est S/2.
3) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 6 contenus dans le grand carré est S/2.
4) La somme des 4 coins de tous les carrés d'ordre 7 contenus dans le grand carré est S/2.
5) La somme des 4 coins du carré d'ordre 8 est S/2.
6) Ils sont tous pandiagonaux.

Un Gauss peut-il être normal. La réponse est non. En effet, un normal d'ordre 8 a pour somme 260. Donc nous avons posé dans la structure générale des Gauss, S = 260 puis nous avons donné aux variables a1 et a3, les valeurs entières de 1 à 64. Des 64x64 carrés obtenus, aucun n'était normal.

Cependant, nous avons trouvé des Gauss presque normaux. La structure générale nous montre que si S est un multiple de 4 et que a1 et a3 prennent des valeurs entières, alors les 64 nombres du Gauss seront tous des entiers.

Voici maintenant trois Gauss presque normaux dont la somme est S = 556. Nous savons qu'un Gauss presque normal aura une somme S > 260. En fait, les sommes possibles pour un Gauss presque normal sont :

264 ; 268 ; 272 ; 276 ; … ; 556 ; …

Nous allons tenter de trouver le Gauss presque normal dont la somme est la plus petite. De plus, de trouver le nombre de Gauss presque normaux qui ont cette somme. Allons-y pour nos trois premiers Gauss presque normaux :

57	67	75	49	68	86	94	60
122	32	104	50	111	13	85	39
59	65	77	47	70	84	96	58
38	116	20	134	27	97	1	123
51	73	69	55	62	92	88	66
130	24	112	42	119	5	93	31
45	79	63	61	56	98	82	72
54	100	36	118	43	81	17	107

Ce Gauss est déterminé par a1 = 57, a3 = 75 et S = 556. C'est le carré 23 de la partie 1. Nous avons illustré ici deux figures magiques et une demi-figure qui caractérisent les Gauss : l'avion en orangé, l'escalier en vert et les quatre coins d'un carré d'ordre 7 en bleu.

49	88	74	63	58	83	69	72
133	8	108	33	124	13	113	24
102	35	127	10	111	30	122	19
54	87	29	112	45	92	34	103
3	134	28	109	12	129	23	118
119	22	94	47	110	27	99	38
70	67	95	42	79	62	90	51
26	115	1	140	17	120	6	131

Ce Gauss est déterminé par a1 = 49, a3 = 74 et S = 556. Nous avons illustré deux figures magiques qui caractérisent les Gauss : le cerf-volant en orangé et la lampe en vert.

49	83	75	57	60	86	78	68
138	8	112	34	127	5	109	23
91	41	117	15	102	44	120	26
46	100	20	126	35	97	17	115
11	121	37	95	22	124	40	106
130	16	104	42	119	13	101	31
61	71	87	45	72	74	90	56
30	116	4	142	19	113	1	131

Ce Gauss est déterminé par a1 = 49, a3 = 75 et S = 556. Nous avons illustré une figure magique en orangé et une demi-figure en vert qui caractérisent les Gauss; de plus, une diagonale brisée en bleu.

Nous avons construit un programme dans MAPLE intitulé « Les meilleurs Gauss » lequel nous permet de trouver tous les Gauss presque normaux de somme donnée (voir dans la Partie 3). Pour S qui varie de 260 à 384, nous n'avons trouvé aucun Gauss presque normal. Cela montre d'une autre façon qu'un Gauss normal n'existe pas.

Pour S = 556, nous avons trouvé 44 Gauss presque normaux dont les trois ci-haut. Maintenant, qu'arrive-t-il avec S = 388? Nous trouvons seulement deux Gauss de cette somme et ce sont les deux meilleurs Gauss presque normaux car de plus petite somme. Nous allons les illustrer un peu plus loin. Mais d'abord, voyons ce tableau qui indique le nombre de Gauss presque normaux pour une somme donnée : colonne de gauche, la somme et colonne de droite, le nombre de Gauss presque normaux ayant cette somme :

388	2	448	3
392	0	452	11
396	3	456	4
400	0	460	12
404	3	556	44
408	1	700	163
412	5	800	126
416	1	900	357
420	6	1000	267
424	1	1100	605
428	7	1200	488
432	2	2000	1989
436	8	3000	5259
440	2	4000	10088
444	8	10000	71675

Tableau G1

Les deux carrés magiques suivants sont les deux meilleurs Gauss presque normaux. Ils ont la plus petite somme S = 388 et sont primitifs. Tous les autres Gauss presque normaux ont une somme S > 388.

34	60	52	42	41	59	51	49
95	5	77	23	88	6	78	16
68	26	86	8	75	25	85	15
35	65	17	83	28	66	18	76
4	90	22	72	11	89	21	79
87	13	69	31	80	14	70	24
46	48	64	30	53	47	63	37
19	81	1	99	12	82	2	92

a1 = 34 a3 = 52 S = 388

35	63	51	47	40	56	44	52
88	8	72	24	83	15	79	19
75	23	91	7	80	16	84	12
42	54	26	70	37	61	33	65
1	97	17	81	6	90	10	86
76	20	60	36	71	27	67	31
53	45	69	29	58	38	62	34
18	78	2	94	13	85	9	89

a1 = 35 a3 = 51 S = 388

Tous les Gauss possèdent également la propriété suivante : dans chaque rangée, de gauche à droite, additionnons les nombres des cases 1 et 2, puis 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8. Nous aurons alors le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc} X & X & Y & Y \\ Y & Y & X & X \\ X & X & Y & Y \\ Y & Y & X & X \\ X & X & Y & Y \\ Y & Y & X & X \\ X & X & Y & Y \\ Y & Y & X & X \end{array}$$

Tableau G2

où X égale la somme des cases 1 et 2 et Y égale la somme des cases 5 et 6. Pour démontrer ce résultat, nous irons dans la structure générale des Gauss et trouverons la somme des cases 1 et 2, puis 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8 et ce, dans les deux premières rangées. Cela nous donne :

$$\begin{array}{cccc} -a1-5a3+S & -a1-5a3+S & a1+5a3-S/2 & a1+5a3-S/2 \\ a1+5a3-S/2 & a1+5a3-S/2 & -a1-5a3+S & -a1-5a3+S \end{array}$$

En posant $X=-a1-5a3+S \; et \; Y=a1+5a3-S/2$ et sachant que la somme des quatre cases de tous les carrés d'ordre 2 donne S/2, nous déduisons le tableau ci-haut.

Poursuivons en disant que le tableau G1 **laisse croire** qu'il existe seulement trois sommes (408, 416 et 424) qui correspondent à un seul Gauss presque normal.

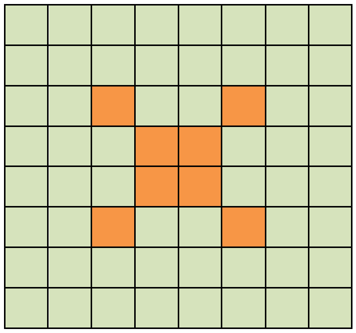
Le tableau montre également qu'il n'existe aucun Gauss presque normal ni de somme 392, ni de somme 400. Il laisse croire que pour les sommes plus grandes que 400, il existe au moins un Gauss presque normal.

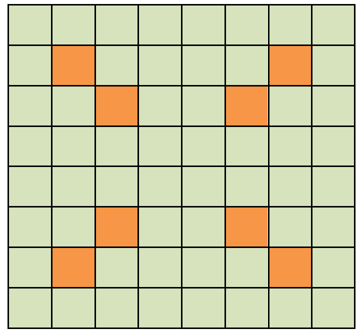
Théorème 8.1 :

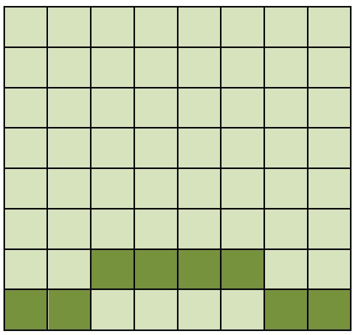
1) Il n'existe aucun Gauss normal.
2) Si G est un Gauss presque normal de somme S , alors $S \geq 388$.
3) Il n'existe que deux Gauss presque normaux de somme $S=388$.

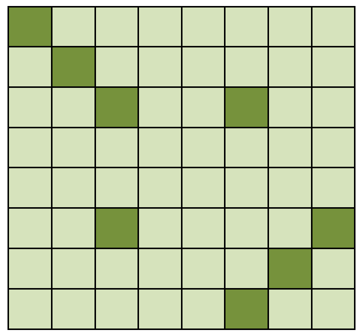
Ce sont les deux meilleurs Gauss presque normaux!!! Ils sont primitifs.

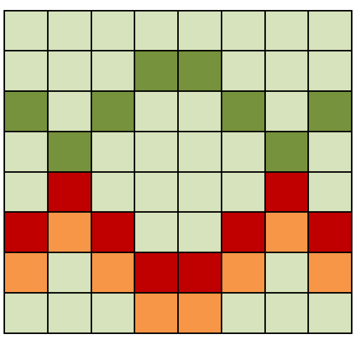
La structure générale des Gauss possède de très belles figures dont certaines sont des super-figures. En voici quelques-unes :

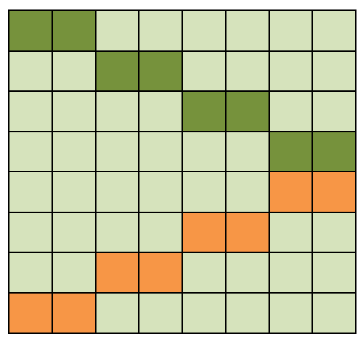

G-1

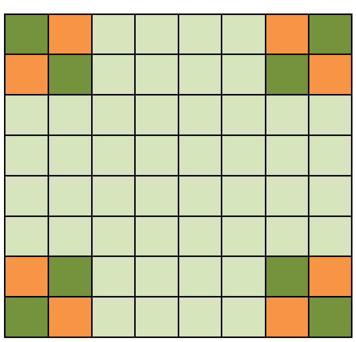

G-2

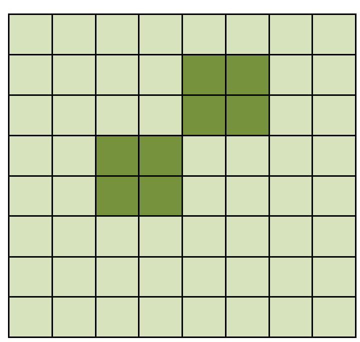

G-3


G-4


G-5


G-6


G-7


G-8

Les propriétés des Gauss nous permettent de voir que G-1, G-2, G-8 ainsi que la figure verte de G-7 sont des super-figures de la structure générale des Gauss.

Dans G-7, la figure en orangé est aussi une super-figure des Gauss (problème 10 de 8.6).

Il est remarquable que G-3 et G-4 soient des super-figures de la structure générale des Gauss!!!

Les trois figures de G-5 sont des figures magiques mais ne sont pas des super-figures. La figure verte est la rotation de 180°de la figure en orangé (ou de la figure rouge). Si nous déplaçons la figure en orangé, parallèlement à elle-même (nous pourrions avoir, par exemple, la figure rouge), alors la nouvelle figure (la figure rouge, par exemple), est toujours une figure magique. Il en est de même de la figure verte. Ce sont des figures magiques de la structure générale des Gauss.

Dans G-6, l'escalier en orangé est une figure magique de la structure générale, même si nous la déplaçons verticalement (problème 11 de 8.6). Le problème 12 de 8.6 montre que l'escalier en vert est aussi magique même si nous la déplaçons verticalement.

8.3 Les hyper-magiques-alpha

Rappelons d’abord ce qu’est un hyper-magique (chapitre 7) :

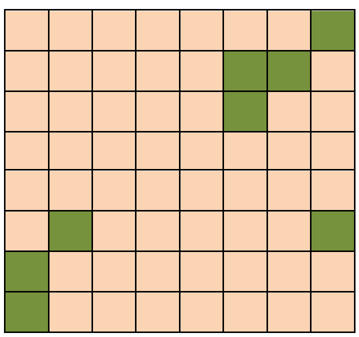
Un carré magique est un **hyper-magique** si et seulement si :

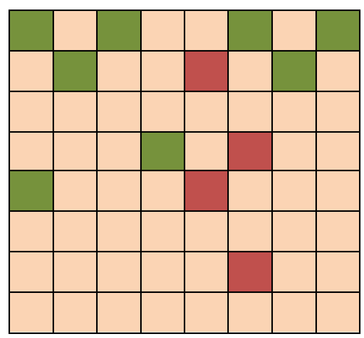
a) Le carré est d’ordre pair.

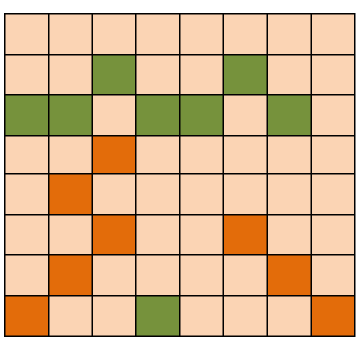
b) Chaque fois que nous prenons un petit carré d’ordre 2 dans le carré, la somme de ses quatre cases est toujours $\frac{4S}{n}$.

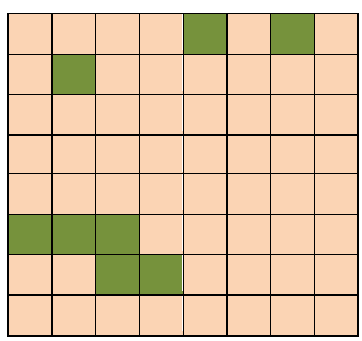
c) Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées de $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

Un **hyper-magique-alpha** est un hyper-magique **d’ordre 8** qui renferme les cinq figures magiques et la demi-figure magique suivantes (de somme S/2) :









Pour construire la structure générale des hyper-magiques-alpha, nous allons partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 8 avec les 49 petits carrés d'ordre 2 de somme S/2, laquelle représente le sous-espace V de la section 8.2 précédente. V étant de dimension 13.

Puis nous allons exiger que la condition c) soit respectée :

Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées de $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

Ainsi nous ferons disparaître quatre variables pour obtenir la structure générale des hyper-magiques d'ordre 8, de dimension 9.

En imposant les 5 figures et la demi-figure ci-haut, nous obtiendrons la structure générale des **hyper-magiques-alpha** laquelle représente un sous-espace de dimension 3. La voici :

$\mathrm{a1}$	$\frac{1}{4}(-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}+S)$	$\mathrm{a3}$	$\frac{1}{4}(2\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{20}(-12\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{10}(\mathrm{a1}-7\mathrm{a3}+2S)$	$\frac{1}{20}(8\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{10}(-9\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+2S)$
$\frac{1}{15}(13\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-22\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+11S)$	$\frac{1}{15}(-2\mathrm{a1}+9\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(38\mathrm{a1}+11(-6\mathrm{a3}+S))$
$\frac{1}{60}(-44\mathrm{a1}+48\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{30}(7\mathrm{a1}-9\mathrm{a3}+4S)$	$\frac{1}{60}(16\mathrm{a1}-12\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{30}(-23\mathrm{a1}+21\mathrm{a3}+4S)$
$\frac{1}{60}(34\mathrm{a1}+13(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{30}(-2\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{60}(-26\mathrm{a1}-18\mathrm{a3}+13S)$	$\frac{1}{30}(28\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{30}(-29\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(28\mathrm{a1}+24\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{30}(\mathrm{a1}-27\mathrm{a3}+7S)$	$\frac{1}{60}(-32\mathrm{a1}+84\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{20}(14\mathrm{a1}+3(-6\mathrm{a3}+S))$	$\frac{1}{10}(-2\mathrm{a1}+4\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{20}(-6\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+3S)$	$\frac{1}{10}(8\mathrm{a1}-6\mathrm{a3}+S)$
$\frac{1}{6}(-5\mathrm{a1}+3\mathrm{a3}+S)$	$\frac{1}{12}(4\mathrm{a1}+S)$	$\frac{1}{6}(\mathrm{a1}-3\mathrm{a3}+S)$	$-\frac{2\mathrm{a1}}{3}+\mathrm{a3}+\frac{S}{12}$

Ce sont les quatre premières colonnes de gauche à droite.

$\frac{1}{30}(-17a1+39a3+S)$	$\frac{1}{60}(4a1-48a3+13S)$	$\frac{1}{30}(13a1+9a3+S)$	$\frac{1}{60}(-56a1+12a3+13S)$
$\frac{1}{60}(58a1-6a3+S)$	$\frac{1}{30}(-14a1-12a3+7S)$	$\frac{1}{60}(-2a1+54a3+S)$	$\frac{1}{30}(16a1+7(-6a3+S))$
$\frac{1}{10}(-7a1+9a3+S)$	$\frac{1}{20}(4a1-8a3+3S)$	$\frac{1}{10}(3a1-a3+S)$	$\frac{1}{20}(-16a1+3(4a3+S))$
$\frac{1}{12}(10a1-6a3+S)$	$\frac{1}{6}(-2a1+S)$	$\frac{1}{12}(-2a1+6a3+S)$	$\frac{1}{6}(4a1-6a3+S)$
$\frac{1}{4}(-4a1+S)$	$\frac{a1+a3}{2}$	$\frac{1}{4}(-4a3+S)$	$\frac{1}{2}(-a1+3a3)$
$\frac{1}{5}(3a1-6a3+S)$	$\frac{1}{20}(-2a1+14a3+S)$	$\frac{1}{5}(-2a1-a3+S)$	$\frac{1}{20}(18a1-6a3+S)$
$\frac{1}{60}(-52a1+24a3+11S)$	$\frac{1}{30}(11a1+3a3+2S)$	$\frac{1}{60}(8a1-36a3+11S)$	$\frac{1}{30}(-19a1+33a3+2S)$
$\frac{1}{15}(11a1+2(-6a3+S))$	$\frac{1}{60}(-14a1+18a3+7S)$	$\frac{1}{15}(-4a1+3a3+2S)$	$\frac{1}{60}(46a1+7(-6a3+S))$

Ce sont les quatre suivantes de gauche à droite.

Tous les carrés issus de cette structure générale sont des hyper-magiques-alpha; de plus, tout hyper-magique-alpha provient de cette structure générale.

Les hyper-magiques-alpha possèdent les propriétés suivantes :

1) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 2 est S/2.
2) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 4 est S/2.
3) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 5 est S/2.
4) La somme des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 6 est S/2.
5) La somme des quatre coins du carré d'ordre 8 est S/2.
6) Ils sont tous pandiagonaux.

Il existe seulement huit hyper-magiques-alpha normaux, lesquels sont primitifs. Pour les trouver, nous avons, dans la structure générale ci-haut, posé S = 260 et nous avons fait varier les variables a1 et a3 de 1 à 64. De ces 64x64 = 4096 hyper-magiques-alpha, nous n'avons trouvé que huit normaux. Nous allons vous les présenter ici et dans chacun, nous allons illustrer quelques figures caractéristiques des hyper-magiques-alpha.

La structure générale des hyper-magiques-alpha nous conduit aussi au tableau G2 de 8.2.

1	63	3	61	12	54	10	56
16	50	14	52	5	59	7	57
17	47	19	45	28	38	26	40
32	34	30	36	21	43	23	41
53	11	55	9	64	2	62	4
60	6	58	8	49	15	51	13
37	27	39	25	48	18	46	20
44	22	42	24	33	31	35	29

Hyper-magique-alpha 1

1	48	33	16	51	30	19	62
52	29	20	61	2	47	34	15
5	44	37	12	55	26	23	58
56	25	24	57	6	43	38	11
14	35	46	3	64	17	32	49
63	18	31	50	13	36	45	4
10	39	42	7	60	21	28	53
59	22	27	54	9	40	41	8

Hyper-magique-alpha 2

4	62	2	64	9	55	11	53
13	51	15	49	8	58	6	60
20	46	18	48	25	39	27	37
29	35	31	33	24	42	22	44
56	10	54	12	61	3	63	1
57	7	59	5	52	14	50	16
40	26	38	28	45	19	47	17
41	23	43	21	36	30	34	32

Hyper-magique-alpha 3

16	33	48	1	62	19	30	51
61	20	29	52	15	34	47	2
12	37	44	5	58	23	26	55
57	24	25	56	11	38	43	6
3	46	35	14	49	32	17	64
50	31	18	63	4	45	36	13
7	42	39	10	53	28	21	60
54	27	22	59	8	41	40	9

Hyper-magique-alpha 4

(carré28)

49	32	17	64	3	46	35	14
4	45	36	13	50	31	18	63
53	28	21	60	7	42	39	10
8	41	40	9	54	27	22	59
62	19	30	51	16	33	48	1
15	34	47	2	61	20	29	52
58	23	26	55	12	37	44	5
11	38	43	6	57	24	25	56

Hyper-magique-alpha 5

61	3	63	1	56	10	54	12
52	14	50	16	57	7	59	5
45	19	47	17	40	26	38	28
36	30	34	32	41	23	43	21
9	55	11	53	4	62	2	64
8	58	6	60	13	51	15	49
25	39	27	37	20	46	18	48
24	42	22	44	29	35	31	33

Hyper-magique-alpha 6

64	17	32	49	14	35	46	3
13	36	45	4	63	18	31	50
60	21	28	53	10	39	42	7
9	40	41	8	59	22	27	54
51	30	19	62	1	48	33	16
2	47	34	15	52	29	20	61
55	26	23	58	5	44	37	12
6	43	38	11	56	25	24	57

Hyper-magique-alpha 7

64	2	62	4	53	11	55	9
49	15	51	13	60	6	58	8
48	18	46	20	37	27	39	25
33	31	35	29	44	22	42	24
12	54	10	56	1	63	3	61
5	59	7	57	16	50	14	52
28	38	26	40	17	47	19	45
21	43	23	41	32	34	30	36

Hyper-magique-alpha 8

Voilà les huit hyper-magiques-alpha normaux et il n'y en a pas d'autre. Ce sont des carrés magiques d'une très grande rareté!!! Ils sont tous primitifs.

Théorème 8.2 :

Il existe seulement huit hyper-magiques-alpha normaux. Dans un hyper-magique-alpha normal, nous trouvons toujours quatre pairs et quatre impairs dans chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale, grande ou brisée. De plus, les huit sont primitifs.

Hyper-magique-alpha 1 : nous avons illustré trois carrés d'ordre 2 (orangé) de somme 130, une figure magique caractéristique (vert) et la demi-figure caractéristique (rouge) de somme 130.

Hyper-magique-alpha 2 : nous avons illustré deux figures magiques caractéristiques (orangé et vert**).**

Hyper-magique-alpha 3 : nous avons illustré une diagonale brisée (orangé), une figure magique caractéristique (vert) et les quatre coins d'un 4x4 (bleu) de somme 130.

Hyper-magique-alpha 4 : nous avons illustré une figure magique caractéristique (vert) et les quatre coins d'un 5x5 (orangé) de somme 130.

Hyper-magique-alpha 5 : nous avons illustré les quatre coins de deux carrés d'ordre 6 (orangé et bleu).

Hyper-magique-alpha 6 : nous avons illustré une autre diagonale brisée (orangé) et deux cases (vert) séparées par trois cases**,** de somme S/4 = 65.

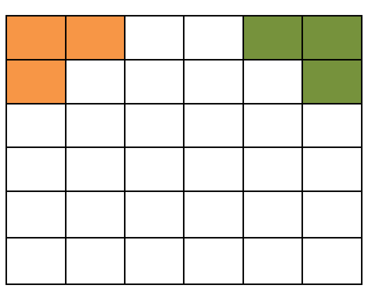
Hyper-magique-alpha 7 : nous avons illustré les quatre coins du 8x8 (orangé) de somme 130 et trois fois deux cases (vert, bleu, rouge), séparées par trois cases, de somme 65.

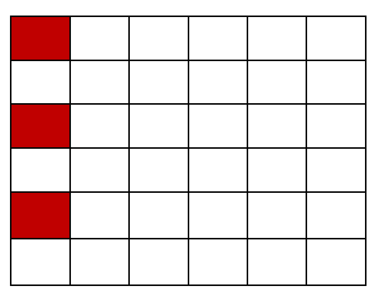
Hyper-magique-alpha 8 : nous avons illustré deux figures magiques (orangé et vert).

Nous avons observé dans les huit hyper-magiques-alpha normaux, que dans chaque colonne, chaque rangée et chaque diagonale (grande ou brisée), nous avons toujours quatre pairs et quatre impairs.

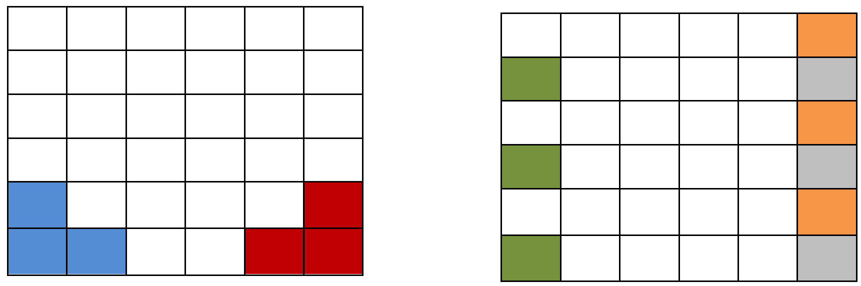
8.4 Les ultra-magiques-bêta

Rappelons qu'un ultra-magique est un carré magique à la fois pandiagonal et associatif. Nous avons construit la structure générale des carrés magiques associatifs d'ordre 6 (dimension 13) à partir de celle des carrés magiques d'ordre 6. Puis nous avons trouvé la structure générale des ultra-magiques d'ordre 6 (dimension 9). Nous avons ensuite imposé les trois demi-figures suivantes de somme S/2 pour obtenir la structure générale des **ultra-magiques-bêta** (dimension 6). **Les ultra-magiques-bêta sont des carrés magiques d'ordre 6.**





En conséquence, nous avons obtenu les demi-figures suivantes de somme S/2.



Voici une structure générale des ultra-magiques-bêta :

$\mathrm{a1}$	$\frac{1}{2}(-2\mathrm{a1}-2\mathrm{a7}+S)$	$\mathrm{a3}$
$\mathrm{a7}$	$\mathrm{a1}-2\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{3}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}+S)$
$-\mathrm{a1}+\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}-6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+5S)$	$\mathrm{a15}$
$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-\mathrm{a4}+\frac{S}{3}$	$\frac{1}{12}(6\mathrm{a15}+12\mathrm{a3}-6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}-S)$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+S)$
$-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{3}$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+2\mathrm{a4}-\frac{S}{6}$	$\frac{1}{4}(2\mathrm{a15}-4\mathrm{a3}-6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}+S)$
$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}+\mathrm{a3}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a4}+S)$

$\mathrm{a4}$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}-\mathrm{a3}+\frac{S}{3}$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$
$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}+12\mathrm{a3}+18\mathrm{a4}-18\mathrm{a7}+S)$	$-\mathrm{a1}+\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}+\frac{S}{2}$	$\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}$
$\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}+2\mathrm{a7}$	$\frac{1}{12}(-6\mathrm{a15}-12\mathrm{a3}+6\mathrm{a4}-6\mathrm{a7}+5S)$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a15}+\mathrm{a4}$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a15}+S)$	$\frac{1}{12}(6\mathrm{a15}+6\mathrm{a4}+6\mathrm{a7}-S)$	$\mathrm{a1}-\mathrm{a3}-\mathrm{a4}+\mathrm{a7}+\frac{S}{6}$
$\frac{1}{4}(2\mathrm{a15}-2\mathrm{a4}-2\mathrm{a7}+S)$	$-\mathrm{a1}+2\mathrm{a3}+\mathrm{a4}-\mathrm{a7}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a7}+S)$
$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a3}+S)$	$\mathrm{a1}+\mathrm{a7}-\frac{S}{6}$	$\frac{1}{3}(-3\mathrm{a1}+S)$

Nous avons les trois premières colonnes en haut de gauche à droite et les trois dernières colonnes en bas, de gauche à droite.

Ils forment un sous-espace de dimension 6. Si nous voulons un ultra-magique-bêta formé exclusivement d'entiers, alors il est nécessaire que les variables libres prennent des valeurs entières et selon la structure générale ci-haut, que S soit un entier divisible par 6.

Avant d'arriver à la structure générale ci-haut, nous avons d'abord trouvé celle des carrés magiques associatifs d'ordre 6 (Partie 3). Là aussi, si nous voulons un carré magique associatif formé seulement d'entiers, alors il est nécessaire que les variables libres prennent des valeurs entières et que S soit un entier divisible par 6. Si S n'est pas divisible par 6, alors le carré ne peut pas contenir seulement des entiers et donc ne peut pas être presque normal ou normal.

Puis après, nous avons trouvé la structure générale des ultra-magiques d'ordre 6 à partir de la précédente (voir la Partie 3). Dans celle-ci, nous avons une expression qui montre que S doit être divisible par 3 si nous voulons avoir que des entiers dans notre carré. Une autre expression montre que S doit être un entier pair. En précisant que les variables sont notées a1 , a3, a4, a7, a8, a11, a14, a15 et S, voici ces deux expressions situées dans la première colonne:

$$-a1+a15-a4+S/3 \ et \ (-2a1-4a14-2a15-4a7-2a8+3S)/4$$

Si nous voulons avoir que des entiers dans notre ultra-magique, alors il sera nécessaire que les variables libres prennent des valeurs entières et que S soit divisible par 6.

Cette preuve est basée sur la structure générale des ultra-magiques; elle est donc particulière à l'ordre 6. Nous pouvons même affirmer que si S ne se divise pas par 6, alors l'ultra-magique ne pourra pas renfermer seulement des entiers. Il ne sera donc pas presque normal.

Le carré magique normal d'ordre 6 ne peut pas être associatif car 111 est impair. (Voir 8.5 plus bas). Nous devons conclure qu'**un ultra-magique normal d'ordre 6 n'existe pas.**

Si S est divisible par 6, alors pouvons-nous avoir un ultra-magique-bêta presque normal? La réponse est oui puisque nous avons les deux suivants, de sommes divisibles par 6.

32	57	34	31	52	82
55	84	46	1	92	10
26	56	42	90	53	21
75	43	6	54	40	70
86	4	95	50	12	41
14	44	65	62	39	64

S = 288 f(288) = 13136

39	62	26	13	81	31
25	83	32	21	77	14
17	78	16	40	65	36
48	19	44	68	6	67
70	7	63	52	1	59
53	3	71	58	22	45

S = 252 f(252) = 13736

Nous venons de voir qu'un carré magique d'ordre 6 peut être associatif et si en plus, il est formé d'entiers, alors il peut être presque normal mais ne peut pas être normal. Un carré magique associatif existe-t-il pour tous les ordres $n \geq 3$? Le problème 7 de 8.6 permet de donner une réponse partielle à cette question.

Terminons en donnant la fréquence de quatre structures générales d'ordre 6 :

1) f(S) = 14 pour la structure générale des carrés magiques d'ordre 6.
2) f(S) = 828 pour la structure générale des carrés magiques associatifs d'ordre 6.
3) f(S) = 996 pour la structure générale des ultra-magiques d'ordre 6.
4) f(S) = 2096 pour la structure générale des ultra-magiques-bêta.

8.5 Carrés magiques associatifs d'ordres pairs

Nous allons nous demander quand un carré magique d'ordre pair peut-il être associatif.

Soit donné M, un carré magique d'ordre $n = 2k$ avec k, un entier ≥ 2.

Dans M, traçons une horizontale et une verticale qui passent par le centre du carré. Celles-ci séparent le carré en quatre sous-carrés d'ordre k. Appelons $A, B, C\,et\,D$ la somme des nombres de chaque sous-carré :

A	B
C	D

Carré M

$A + B$ est la somme des k premières rangées, $A + C$ est la somme des k premières colonnes et $B + C$ est la somme des nombres situés dans toutes les paires de cases symétriques par rapport au centre du carré lesquelles se trouvent dans les deux sous-carrés de sommes B et C.

Si M est associatif, alors la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\frac{2S}{n}$. Nous avons donc :

$$A + B = kS$$
$$A + C = kS$$
$$B + C = k^2 \frac{2S}{2k} = kS$$

Il est facile de montrer que $A = B = C = \frac{k\,S}{2}$. Si M est formé seulement d'entiers, alors $\frac{k\,S}{2}$ doit être un entier d'où $k\,S$ doit être pair. Nous venons de montrer que :

(*)	M associatif et M formé que d'entiers $\Rightarrow$ $k\,S$ pair

Maintenant, voyons les deux cas suivants :

Premier cas : k est pair.

Si M est formé d'entiers et k est pair, alors $k\,S$ est pair et M devient un bon candidat pour être associatif.

Deuxième cas : k est impair.

Si M est formé d'entiers et k est impair, alors $k\,S$ est pair si et seulement si S est pair. Cela signifie que si S est pair alors M est un bon candidat pour être associatif.

Si S est impair, alors $k\,S$ est impair et M, formé d'entiers, ne peut pas être associatif selon (*). De même, si M est associatif, alors M ne sera pas formé seulement d'entiers.

Il est facile de démontrer qu'un carré magique normal d'ordre $n = 2k, k$ impair, a toujours pour somme magique un entier impair. En effet, nous avons :

$$S = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{2k(4k^2+1)}{2} = k(4k^2+1) = impair$$

De même, Il est évident qu'un carré magique normal d'ordre $n = 2k, k$ pair, a toujours pour somme magique un entier pair.

D'où le théorème suivant :

Théorème 8.3:

Si M est un carré magique d'ordre $n = 2k$ avec $k \geq 3,$ un entier impair, et si M est normal, alors M ne peut pas être associatif. De plus, si M est associatif, alors M ne peut pas être normal.

Preuve :

Supposons que M soit associatif et normal, alors M est formé d'entiers et puisque k est impair, S est impair d'où $k\,S$ est impair. Nous avons là une contradiction avec (*). M ne peut donc pas être associatif s'il est normal et ne peut pas être normal s'il est associatif.

Nous remarquons facilement que si M est normal d'ordre n = 4 k, alors S est pair et il n'y a pas de contradiction avec (*). M est alors un bon candidat pour être associatif.

Ce que nous venons de montrer est que tous les carrés magiques normaux d'ordres pairs non multiples de 4, ne sont pas associatifs. Il en est donc de même pour tous les ultra-magiques, les ultra-magiques-alpha et les ultra-magiques-bêta, normaux d'ordres pairs non multiples de 4.

Nous venons également de montrer que tout carré magique associatif d'ordre pair non multiple de 4 ne peut pas être normal.

Nous connaissons des carrés magiques normaux d'ordre 4 qui sont associatifs (voir 5.9, les A-Dürer) et nous connaissons aussi des carrés magiques normaux d'ordre 5 qui sont associatifs (voir 6.3, les ultra-magiques d'ordre 5).

Que savons-nous, en général, des carrés magiques d'ordres pairs multiples de 4 et des carrés magiques d'ordres impairs? Pouvons-nous trouver des associatifs pour tous ces ordres? Pouvons-nous trouver des associatifs normaux pour tous ces ordres? **La réponse est oui!!!**

Existe-t-il un carré magique associatif d'ordre 5555? D'ordre 4444? Peuvent-ils être normaux? La réponse est oui à ces 3 questions!!! (Voir le problème 7 de 8.6).

La solution du problème 7 de 8.6 nous montrera :

1) Que pour tous les ordres impairs $n \geq 1$, il existe au moins un carré magique associatif normal et une infinité de carrés magiques associatifs presque normaux.
2) Que pour tous les ordres pairs $n = 4m$, où m est un entier ≥ 1, il existe au moins un carré magique associatif normal et une infinité de carrés magiques associatifs presque normaux.
3) Tous les carrés magiques d'ordre 1, 2 et 3 sont associatifs.

Qu'arrive-t-il si l'ordre pair est $n = 4m + 2$ avec m, un entier ≥ 1?

Nous savons que :

4) Si l'ordre est pair non multiple de 4, alors un carré magique ne peut pas être à la fois associatif et normal. En effet, $n=4m+2=2k$ où k est impair et si S est impair, alors kS est impair. Cela contredit (*).
5) Un carré magique d'ordre 6 peut être associatif et presque normal. Si c'est le cas, alors S est pair. (Voir les deux derniers carrés de 8.4).
6) Aucun carré magique normal d'ordre $n=4m+2$ où m est un entier ≥ 1, ne peut être associatif.
7) **La grande question** : pour tous les ordres pairs $n=4m+2$ où m est un entier ≥ 2, existe-t-il un carré magique associatif presque normal?

Nous allons également nous poser les quatre questions suivantes :

8) Pour tous les ordres pairs $n=2m$ où m est un entier ≥ 2, existe-t-il un carré magique pandiagonal presque normal? Normal?
9) Pour tous les ordres impairs $n \geq 7$, existe-t-il un carré magique pandiagonal presque normal? Normal?
10) Pour tous les ordres pairs $n=2m$ où m est un entier ≥ 2, existe-t-il un hyper-magique presque normal? Normal?
11) Pour tous les ordres $n \geq 7$, existe-t-il un ultra-magique presque normal? Normal?

Nous pouvons considérer ces cinq questions comme étant des propositions de recherche!!!

Puisqu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial (problème 8 de 7.4), alors un ultra-magique normal ou presque normal d'ordre 3 n'existe pas.

La structure générale des carrés magiques pandiagonaux d'ordre 4 n'est rien d'autre que celle des super-Dürer. Nous avons rendu celle-ci associative et avons alors observé que la structure générale des ultra-magiques d'ordre 4 est formée de quatre nombres, chacun apparaissant quatre fois. Un ultra-magique d'ordre 4 normal ou presque normal n'existe pas. D'où le résultat :

Il n'existe aucun ultra-magique d'ordre 3 qui soit normal ou presque normal. Il n'existe aucun ultra-magique d'ordre 4 qui soit normal ou presque normal.

Il existe un ultra-magique normal d'ordre 5 (Voir 6.1, le carré de centre 13). Il existe aussi un ultra-magique presque normal d'ordre 5 (Voir ci-dessous).

Il existe un ultra-magique presque normal d'ordre 6 (Voir les deux carrés de 8.4). Un ultra-magique normal d'ordre 6 n'existe pas.

Le carré suivant est un ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de somme 310 :

$$\begin{pmatrix} 48 & 54 & 57 & 28 & 123 \\ 84 & 55 & 104 & 32 & 35 \\ 88 & 13 & 62 & 111 & 36 \\ 89 & 92 & 20 & 69 & 40 \\ 1 & 96 & 67 & 70 & 76 \end{pmatrix}$$

$$S = 310 \quad f(310) = 432$$

8.6 Problèmes

1) Pouvez-vous trouver un Gauss presque normal de somme S = 400.
2) Dans l'hyper-magique-alpha normal suivant, nous avons, par erreur, effacé la grande diagonale secondaire et quelques cases. Retrouvez le carré initial?

16	33	48	1	62	19	30	
61	20		52	15	34		2
12	37	44	5	58		26	55
57	24	25	56		38	43	6
3					32	17	64
50	31		63	4	45	36	
7		39	10	53	28	21	
	27	22	59		41	40	9

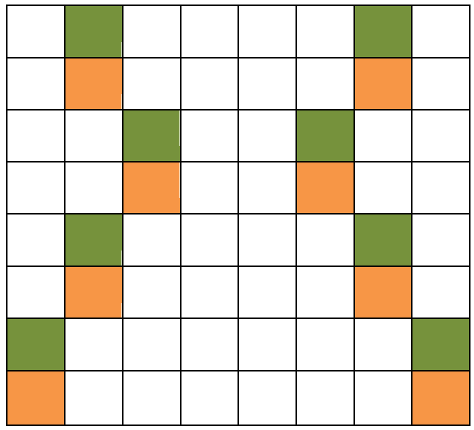
3) Voici quelques entiers dans le Gauss ci-dessous de somme S = 556.

		75					
	8		34	127			23
		117				120	
		20					
		37					
			42			101	
							131

Complétez le carré. Est-il presque normal?

4) Montrez qu'une condition nécessaire pour qu'un hyper-magique-alpha soit formé de 64 entiers est que S soit un multiple de 4 et que a1 et a3 soient des entiers de même parité.
5) Montrez qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un Gauss renferme 64 entiers est que a1 et a3 soient entiers et que S soit un multiple de 4.
6) Soit M un carré magique d'ordre 10 qui renferme seulement des entiers. Sa somme magique est S = 245. M peut-il être associatif?
7) Existe-t-il un carré magique associatif :
   a) Pour tous les ordres impairs $n \geq 1$?
   b) Pour tous les ordres pairs $n = 4m$ où m est un entier ≥ 1?
   c) Dans ces deux cas, le carré magique associatif peut-il être normal? Presque normal?
8) Soit M un carré magique associatif d'ordre 6. Sa somme magique est S = 265. M peut-il être formé seulement d'entiers?
9) Montrez que les figures dans le carré hyper-magique-alpha 8 ne sont pas des super-figures.
10) Montrez que dans G-7, la figure en orangé est une super-figure (section 8.2).
11) Montrez que dans G-6, l'escalier en orangé est une figure magique de la structure générale des Gauss, même si nous la déplaçons parallèlement à elle-même. Montrez aussi que ce n'est pas une super-figure.
12) Montrez que dans G-6, l'escalier en vert est une figure magique, même si nous la déplaçons parallèlement à elle-même. Montrez aussi que ce n'est pas une super-figure.
13) Montrez que la structure générale des hyper-magiques-alpha (voir section 8.3) possède comme super-figure l'escalier dans le carré G6 de 8.2

14) Le carré suivant est la structure générale des hyper-magiques-alpha dans laquelle nous avons illustré deux figures :



a) Dans la figure de gauche, les quatre cases vertes totalisent S/2 et les quatre cases en orangé totalisent aussi S/2. Il en est de même pour la figure de droite. Retrouvez ces résultats en vous servant de la structure générale de 8.3.

b) Sans vous servir de la structure générale de 8.3, montrez que ces deux figures génèrent seize figures magiques dans la structure générale de 8.3. Donc, tous les hyper-magiques -alpha possèdent ces seize figures magiques.

15) Montrez que tous les carrés triviaux d'ordres $n \geq 1$ sont associatifs.

16) Un carré magique d'ordre 2 peut-il être associatif? Normal?

17) En vous servant de la structure générale des carrés magiques associatifs d'ordre 6 (voir la Partie 3), trouvez un carré magique d'ordre 6 qui soit associatif et de somme impaire, tout en donnant aux variables libres, des valeurs entières positives. Observez alors que votre carré renferme des nombres qui ne sont pas des entiers.

18) Existe-t-il un ultra-magique d'ordre 3 qui soit presque normal? Normal? Qui renferme au moins deux nombres différents?

19) Existe-t-il un ultra-magique d'ordre 4 qui soit presque normal? Normal?

20) Un carré magique d'ordre pair $n \geq 4$, n'est pas pandiagonal; peut-il être hyper-magique?

21) Utilisez MAPLE ou MATHEMATICA pour retrouver les fréquences des deux ultra-magiques-bêta (S = 288 et S = 252) de 8.4 ainsi que la fréquence du dernier carré de 8.5.

22) Je vous dis qu'un carré magique M est formé d'entiers seulement et que sa somme magique se termine par le chiffre 5 (nous avons perdu les autres chiffres de la somme). Je vous demande si celui-ci est associatif et vous me répondez que vous n'en savez rien. Vous me demandez alors quel est l'ordre de M et je vous réponds 18. Vous affirmez aussitôt que M n'est pas associatif. Pourquoi?

23) Les propriétés des carrés magiques sont quelquefois reliées à la somme magique S. Soit M, un carré magique d'ordre 14 formé exclusivement d'entiers avec S = 1561.

a) Pourquoi M ne peut pas être ultra-magique?
b) Pourquoi M ne peut pas être hyper-magique?
c) En déduire une condition nécessaire pour qu'un carré magique d'ordre pair $n \geq 4$, soit un ultra-magique ou un hyper-magique.

24) Si un carré magique d'ordre pair est tel que la somme des nombres de tous ses sous-carrés 2x2 soit toujours égale à $\frac{4S}{n}$, **alors le carré est pandiagonal** (résultat trouvé sur Internet sans sa démonstration). Nous n'allons pas vous demander de démontrer ce résultat. Nous voulions seulement vous le présenter. Cependant, rien ne vous interdit de le démontrer ou de trouver sa démonstration déjà faite!!! Voir la première page de 8.2 et le carré 23 de la Partie 1 de cet ouvrage.
25) Soit donné un carré magique M presque normal d'ordre 6. Ce carré M est associatif et sa somme magique est S = 480. Je vous assure que M ne peut pas contenir l'entier 80. Pourquoi?