Annexe 7 : Excursion dans les nombres premiers

1) **Un nombre premier** est un entier ≥ 2 qui ne possède que deux diviseurs entiers **distincts** ≥ 1 donc qui n'est divisible que par 1 et lui-même. En conséquence, 1 n'est pas un nombre premier. Tous les nombres premiers sont impairs sauf 2, le seul qui soit pair.
2) Les nombres suivants sont premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …, 107, 109, …
3) **Le théorème fondamental de l'arithmétique** affirme que tout entier ≥ 2 qui n'est pas un nombre premier se décompose en un produit de nombres premiers et ce, de façon unique, à l'ordre près des facteurs. Par exemple, 2x2x5 et 2x5x2 sont la même décomposition en facteurs premiers de l'entier 20.
4) **Il existe une infinité de nombres premiers.** Voyons la preuve : considérons p et p+1, des entiers ≥ 2. D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, p possède au moins un facteur premier p_1 et p+1, un facteur premier p_2. Mais $p_1 \neq p_2$ puisque p et p+1 sont premiers entre eux. Soit maintenant le nouveau nombre p (p+1) + 1 qui possède au moins un facteur premier p_3 tel que $p_3 \neq p_1 \ et \ p_3 \neq p_2$. Puis le nombre p (p+1) [p (p+1) + 1] + 1 qui possède un nouveau facteur premier. Ainsi, nous voyons qu'à chaque étape, nous faisons apparaitre au moins un nouveau nombre premier. Il y en a donc une infinité!!! Nous n'avons pas fait appel au raisonnement par l'absurde mais avons plutôt utilisé un procédé constructif. Après chaque étape, nous pouvons citer les nombres premiers différents obtenus. Réf : [1], page 61.
5) Les nombres premiers sont aux entiers ≥ 2, ce que les atomes sont à la matière!! Toute quantité de matière est constituée d'atomes et tout entier ≥ 2 est constitué de nombres premiers : 111 111 111 111 = 3x7x11x13x37x101x9901 en est un exemple et ce nombre entier est composé de 7 nombres premiers. Quant à 20, il est composé de 3 nombres premiers.
6) Nous savons qu'il existe une infinité de nombres premiers mais comment ceux-ci sont-ils répartis sur la droite des entiers naturels? Par exemple, dans l'intervalle $[2 \,;\, 25]$, nous trouvons 9 nombres premiers, dans l'intervalle $[52 \,;\, 75]$, nous en trouvons 7 et dans l'intervalle $[284 \,;\, 307]$, seulement 2. Dans trois intervalles de longueur 24, nous avons trouvé 9, 7 et 2 nombres premiers. Précisons ici que nos intervalles auront tous la forme $[a \,;\, b]$ où a, b sont des entiers ≥ 0 et $a < b$. La longueur d'un tel intervalle sera le nombre d'entiers contenus dans celui-ci.

Il est naturel de penser qu'un intervalle de longueur 24 qui commencerait par un très grand entier, ne renferme aucun nombre premier. C'est ce qui arrive avec l'intervalle $[164840 ; 164863]$. Cependant, il est évident qu'il existe une infinité d'intervalles de longueur 24 qui renferment au moins un nombre premier.

Nous venons de voir qu'un intervalle de longueur 24 peut renfermer aucun nombre premier. Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de trouver un intervalle aussi grand que nous voulons qui ne renferme aucun nombre premier.

Observons d'abord que les entiers $n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ \ldots,\ n! + n$ sont consécutifs et non premiers lorsque $n \geq 2$. L'intervalle $[n! + 2 ; n! + n]$ est donc un intervalle de longueur $n-1$ qui ne renferme aucun nombre premier. Si nous voulons un intervalle de longueur 10 000 qui ne renferme aucun nombre premier, il suffira de choisir $n = 10\,001$. Il est vrai que l'intervalle débutera par un entier extrêmement grand soit $10\,001! + 2$. Cependant, intuitivement, nous pouvons penser qu'un intervalle [a ; b] de longueur 10 000 qui renferme aucun nombre premier peut se trouver avec a, beaucoup plus petit que $10\,001! + 2$. Ainsi, pour un intervalle de longueur 25, nous prendrions $[26! + 2 ; 26! + 26]$ lequel renferme 25 entiers consécutifs tous non premiers. Mais l'intervalle $[1328 ; 1352]$ est un intervalle qui renferme aussi 25 entiers consécutifs tous non premiers (voir 14.12).

Imaginons une route infinie sur laquelle on place tous les entiers positifs 1, 2, 3, …, un sur chaque millimètre de route. Nous pouvons affirmer qu'en marchant sur cette route, nous allons rencontrer un entier N à partir duquel, sur le milliard de milliards de milliards de milliards ... de kilomètres qui suivent, nous ne rencontrerons aucun nombre premier!!! Notons ici que le mot milliards est répété une fois par seconde pendant $10^{100000000}$ années!!! Les nombres premiers rencontrés avant N sont en nombre fini; ensuite sur un tronçon de route extrêmement long, aucun nombre premier puis, après ce tronçon, une infinité!!!

Cette image ne nous permet-elle pas de mieux percevoir la notion d'infini? Et qu'il existe des intervalles aussi longs que nous voulons qui ne renferment aucun nombre premier.

1___________N________________________________M_______________________________

De 1 à N, nous avons un nombre fini de nombres premiers. Dans l'intervalle de N à M qui est aussi long que nous puissions l'imaginer, il n'y a aucun nombre premier. Enfin, nous rencontrerons une infinité de nombres premiers à partir de M.

7) **Combien de nombres premiers trouvons-nous dans un intervalle donné?**
Dans MATHEMATICA, nous avons la commande PrimePi[n] qui nous donne le nombre de nombres premiers $\leq n.$ Ainsi, PrimePi[11] = 5, PrimePi[12] = 5, PrimePi[1000] = 168 et PrimePi[10^6] = 78 498. Nous pouvons aussi avoir entre crochets, un nombre réel quelconque : PrimePi[50 π] = 37 et PrimePi[97/3] = 11. Maintenant, combien de nombres premiers trouvons-nous dans l'intervalle fermé [a ; b] où a et b sont des entiers ≥ 1 et a < b? Il suffit de faire PrimePi[b] – PrimePi[a-1]. Par exemple, dans l'intervalle [100 ; 250], nous trouvons PrimePi[250] – PrimePi[99] = 53 – 25 = 28 nombres premiers. Pour trouver le nombre de nombres premiers dans l'intervalle [59,67 ; 104,776], nous prendrons l'intervalle [60 ; 104].

8) **Table de nombres premiers :** dans MATHEMATICA, il suffit d'utiliser la commande : Table[Prime[n], {n, 1, 100}] pour obtenir les 100 premiers nombres premiers. Si vous voulez les 4200 premiers nombres premiers, il suffit de prendre Table[Prime[n],{n,1,4200}]. Enfin, avec Table[Prime[n], {n, 8,10}], MATHEMATICA nous donne {19, 23, 29} soient les huitième, neuvième et dixième nombres premiers.

9) **(p ; p + 2) : couples de nombres premiers jumeaux :** un couple de nombres premiers jumeaux est un couple de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2)$. **Nous ne savons pas s'il existe une infinité de couples de nombres premiers jumeaux** même si, intuitivement, nous croyons que oui!!! Nous avons indiqué le nombre de couples de nombres premiers jumeaux dans les intervalles suivants :

[1 ; 10]	2
[1 ; 10^2]	8
[1 ; 10^3]	35
[1 ; 10^4]	205
[1 ; 10^5]	1 224
[1 ; 10^6]	8 169
[1 ; 10^7]	58 980
[1 ; 10^8]	440 312
[1 ; 10^9]	3 424 506

Nous avons regardé extrêmement loin sur la droite des entiers naturels et nous avons trouvé de nouveaux couples de nombres premiers jumeaux. Voici quelques intervalles et le nombre de couples qu'ils contiennent :

$[1+10^{16};1+10^{16}+10^{6}]$	948
$[1+10^{20};1+10^{20}+10^{6}]$	599
$[1+10^{25};1+10^{25}+10^{6}]$	451
$[1+10^{30};1+10^{30}+10^{6}]$	283
$[1+10^{35};1+10^{35}+10^{6}]$	199
$[1+10^{50};1+10^{50}+10^{6}]$	97
$[1+10^{70};1+10^{70}+10^{6}]$	53
$[1+10^{100};1+10^{100}+10^{6}]$	28
$[1+10^{115};1+10^{115}+10^{6}]$	23
$[1+10^{300};1+10^{300}+10^{6}]$	3
$[1+10^{380};1+10^{380}+10^{6}]$	0
$[1+10^{390};1+10^{390}+10^{6}]$	3
$[1+10^{400};1+10^{400}+10^{6}]$	2
$[1+10^{500};1+10^{500}+10^{6}]$	1

Nous remarquons qu'ils sont de plus en plus rares dans des intervalles dont la longueur est 1 million.

Un résultat très intéressant nous provient d'un mathématicien chinois Yitang Zhang : il affirme qu'il existe une infinité de couples de nombres premiers $(p;p+k)$ *avec* $k \leq 70\,000\,000.$ Puis, une amélioration : $k \leq 60\,000\,000.$ Avec Terence Tao et son projet «Polymath», une très grande amélioration s'ensuit : $k \leq 4680.$

Enfin, avec J. Maynard de l'université de Montréal, $k \leq 600.$ La méthode employée par Maynard ne pourrait pas faire mieux que de donner $k \leq 12,$ ce qui n'est pas encore fait à ce jour. Début 2014, nous avons eu $k \leq 270.$

10) Couples de nombres premiers de la forme (p ; p + 2k)

Nous pensons qu'il existe une infinité de tels couples mais ceci n'est qu'une conjecture. Ici, k est un entier > 1. Nous allons regarder combien nous en trouvons, respectivement de gauche à droite, dans les intervalles $[1\,;10^7]$, $[1+10^{10};1+10^{10}+10^6]$, $[1+10^{50};1+10^{50}+10^6]$ et $[1+10^{120};1+10^{120}+10^6]$:

$(p\ ;\ p+4)$	58 622	2446	102	27
$(p\ ;\ p+8)$	58 595	2465	100	9
$(p\ ;\ p+6)$	117 207	4989	187	33
$(p\ ;\ p+12)$	117 486	4935	212	34
$(p\ ;\ p+18)$	117 463	4998	193	30
$(p\ ;\ p+24)$	117 342	4941	193	30
$(p\ ;\ p+30)$	156 517	6505	266	53
$(p\ ;\ p+10)$	78 211	3248	116	22
$(p\ ;\ p+10^2)$	78 248	3292	139	19
$(p\ ;\ p+10^3)$	78 265	3338	131	15
$(p\ ;\ p+10^4)$	77 850	3249	129	31
$(p\ ;\ p+6\times10^4)$	155 798	6679	251	45

Par curiosité, dans l'intervalle $[1+10^{500};1+10^{500}+10^6]$, nous avons trouvé un couple de nombres premiers de la forme $[p\ ;\ p+4]$, zéro couple de nombres premiers de la forme $[p\ ;p+8]$, trois couples de nombres premiers de la forme $[p\ ;\ p+6]$ et trois couples de nombres premiers de la forme $[p\ ;\ p+60000]$. Nous n'avons pas cherché le nombre de couples pour les autres types. Ce que nous venons d'observer nous laisse croire que la conjecture suivante mérite d'être posée :

Conjecture 1 :

> Il existe une infinité de couples de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2k)$ où k est un entier ≥ 1.

Lorsque $k=1$, les couples sont appelés **jumeaux.**

11) Triplet de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 4) = triplet jumeau

Nous connaissons le triplet $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$ et c'est le seul!!! Nous l'appelons **triplet jumeau.** Lorsque $2 \leq p \leq 11$, nous trouvons 1 seul triplet jumeau: $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$. Soit maintenant $p \geq 13$, un nombre premier. Tous les entiers ≥ 12 ont la forme $3k\ ou\ 3k+1\ ou\ 3k+2$ avec k, un entier ≥ 4. Donc, un nombre premier ≥ 12 aura la forme $3k+1\ ou\ 3k+2$.

Avec $p = 3k+1$, le triplet devient $(3k+1\ ;\ 3k+3\ ;\ 3k+5)$ et $3k+3 = 3(k+1)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+1 \geq 5$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

Avec $p = 3k+2$, le triplet devient $(3k+2\ ;\ 3(k+1)+1\ ;\ 3k+6)$. Nous voyons que $3k+6 = 3(k+2)$ n'est pas un nombre premier puisque $k+2 \geq 6$. Dans ce cas, il n'y a pas de triplet jumeau.

Théorème 1 :

> Il n'existe qu'un seul triplet jumeau soit $(3\ ;\ 5\ ;\ 7)$.

Le triplet $(1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ n'est pas un triplet jumeau puisque 1 n'est plus considéré comme un nombre premier.

12) Triplets de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 6)

Les triplets $(5\ ;\ 7\ ;\ 11)$ $(11\ ;\ 13\ ;\ 17)$ $(17\ ;\ 19\ ;\ 23)$ $(41\ ;\ 43\ ;\ 47)$ sont les quatre premiers triplets rencontrés. Il en existe 55 dans l'intervalle $[1\ ;\ 10\ 000]$. Précisons que c'est p qui va parcourir l'intervalle $[1\ ;\ 10\ 000]$. Voyons le nombre de triplets trouvés dans les intervalles suivants :

$[1 ; 10]$	1
$[1 ; 10^2]$	4
$[1 ; 10^3]$	15
$[1 ; 10^4]$	55
$[1 ; 10^5]$	259
$[1 ; 10^6]$	1393
$[1 ; 10^7]$	8543
$[1 ; 10^8]$	55 600

Allons voir dans des intervalles beaucoup plus loin :

$[1+10^{15}; 1+10^{15}+10^6]$	69
$[1+10^{20}; 1+10^{20}+10^6]$	34
$[1+10^{25}; 1+10^{25}+10^6]$	13
$[1+10^{40}; 1+10^{40}+10^6]$	4
$[1+10^{50}; 1+10^{50}+10^6]$	2
$[1+10^{60}; 1+10^{60}+10^6]$	1
$[1+10^{90}; 1+10^{90}+10^6]$	1
$[1+10^{100}; 1+10^{100}+10^6]$	0
$[1+10^{110}; 1+10^{110}+10^6]$	0
$[1+10^{110}; 1+10^{110}+10^7]$	1
$[1+10^{121}; 1+10^{121}+10^6]$	1
$[1+10^{122}; 1+10^{122}+10^6]$	1

Ces observations nous permettent d'énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 2 :

Il existe une infinité de triplets de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6)$.

Théorème 2 :

Tous les triplets de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6)$ forment les trois groupes qui suivent :

Le groupe 1 renferme le triplet $(5\ ;\ 7\ ;\ 11)$.
Le groupe 2 renferme tous les triplets de la forme $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17)$ où k est un entier ≥ 0.
Le groupe 3 renferme tous les triplets de la forme $(30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23)$ où k est un entier ≥ 0.

Les triplets $(11\ ;13\ ;17)$; $(41\ ;\ 43\ ;\ 47)$; $(101\ ;103\ ;107)$ sont les trois premiers du groupe 2 et les triplets $(17\ ;19\ ;\ 23)$; $(107\ ;109\ ;113)$; $(227\ ;\ 229\ ;\ 233)$ sont les trois premiers du groupe 3.
Dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^8]$, nous avons trouvé 55 600 triplets; plus précisément celui du groupe 1, les 27 934 du groupe 2 et les 27 665 du groupe 3.
La démonstration du théorème 2 est très semblable à celle du théorème 4 de la section 14) qui suit.

13) Quadruplet jumeau et k-uplet jumeau

Nous appelons quadruplet jumeau, un quadruplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+4\ ;\ p+6)$.

Nous appelons k-uplet jumeau, un k-uplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+4\ ;\ ...\ ;\ p+2(k-1))$ avec k, un entier ≥ 4.

Théorème 3 :

Il n'existe aucun quadruplet jumeau donc aucun k-uplet jumeau avec k, un entier ≥ 4.

La preuve est laissée au lecteur. (Voir la section 11 ci-haut)

14) Quadruplets jumeaux voisins

Nous appelons **quadruplet jumeau voisin**, un quadruplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$. Voici les quatre premiers quadruplets jumeaux voisins :

$(5\ ;7\ ;11\ ;13)$ $(11\ ;13\ ;17\ ;19)$ $(101\ ;103\ ;107\ ;109)$ $(191\ ;193\ ;197\ ;199)$

Puis un très beau théorème qui caractérise les quadruplets jumeaux voisins :

Théorème 4 :

Si $p \geq 11$, alors tout quadruplet jumeau voisin a la forme $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19)$ où k est un entier ≥ 0.

Preuve :

Lorsque $p \leq 10$, nous trouvons un seul quadruplet jumeau voisin soit $(5\ ;7\ ;11\ ;13)$. Lorsque $p \geq 11$, il est clair que p se termine par 1, 3, 7 ou 9.

a) Si p se termine par 1, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 1, 3, 7, 9.
b) Si p se termine par 3, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 3, **5**, 9, 1.
c) Si p se termine par 7, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 7, 9, 3, **5**.
d) Si p se termine par 9, alors les nombres du quadruplet $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8)$ se terminent par 9, 1, **5**, 7.

Mais un entier ≥ 11 qui se termine par 5 ne peut pas être premier. Donc notre quadruplet aura ses 4 nombres qui se termineront respectivement par 1, 3, 7, 9.

Le nombre premier p aura donc la forme $10y+11$ avec y, un entier ≥ 0. D'un autre côté, p a la forme $3r+2$ avec r, un entier impair ≥ 3 ; nous poserons $r = 2u+1$ où u est un entier ≥ 1.

Ainsi, nous aurons $p = 10y + 11 = 6u + 5$, ce qui implique $u = 1 + 5y/3$. Puisque u est un entier, alors $5y/3$ doit être un entier d'où $y = 3k$ avec k, un entier ≥ 0.

Finalement $p = 10y + 11 = 10 \times 3k + 11 = 30k + 11$ et notre quadruplet jumeau voisin aura la forme :

$$(30k + 11 \; ; \; 30k + 13 \; ; \; 30k + 17 \; ; \; 30k + 19)$$

où k est un entier ≥ 0. Notons que p ne peut pas avoir la forme $3r + 1$. En effet, nous trouverions le quadruplet $(30k + 1 \; ; \; 30k + 3 \; ; \; 30k + 7 \; ; \; 30k + 9)$ lequel contient deux nombres composés. $p = 10y + 11 = 3r + 1 \; d'où \; 10y + 10 = 3r \; et \; r = 10k$. Nous trouvons $y = 3k - 1 \; et \; p = 10(3k - 1) + 11 = 30k + 1$.

Évidemment, $p = 3k$ n'est pas possible lorsque $p \geq 11$.

Voyons maintenant le nombre de quadruplets jumeaux voisins contenus dans les intervalles suivants :

$[1\,;\,10]$	1
$[1\,;\,10^2]$	2
$[1\,;\,10^3]$	5
$[1\,;\,10^4]$	12
$[1\,;\,10^5]$	38
$[1\,;\,10^6]$	166
$[1\,;\,10^7]$	899
$[1\,;\,10^8]$	4768
$[1\,;\,10^9]$	28388
$[1\,;\,10^{10}]$	180529

Allons voir dans des intervalles beaucoup plus loin :

$[11 + 3 \times 10^{20} ; 11 + 3 \times 10^{20} + 10^8]$	82
$[11 + 3 \times 10^{50} ; 11 + 3 \times 10^{50} + 10^8]$	4
$[11 + 3 \times 10^{70} ; 11 + 3 \times 10^{70} + 10^8]$	1
$[11 + 3 \times 10^{100} ; 11 + 3 \times 10^{100} + 10^8]$	0
$[11 + 3 \times 10^{100} ; 11 + 3 \times 10^{100} + 10^9]$	2

Ces résultats suggèrent la conjecture suivante :

Conjecture 3 :

Il existe une infinité de quadruplets jumeaux voisins.

En terminant, voyons un très grand quadruplet jumeau voisin :

$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,01$$
$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,03$$
$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,07$$
$$3\,000\,000\,000\,000\,996\,157\,09$$

15) Quintuplets jumeaux voisins et autres quintuplets

Nous appelons **quintuplet jumeau voisin**, un quintuplet de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8\ ;\ p+12)$.

Puisque les quatre premiers nombres du quintuplet forment un quadruplet jumeau voisin, alors nous devons avoir $p = 30k + 11$ lorsque $p \geq 11$.

Pour $p < 11$, nous trouvons un seul quintuplet jumeau voisin : $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17)$.

Théorème 5 :

Si $p \geq 11$, alors tout quintuplet jumeau voisin a la forme $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23)$ où k est un entier ≥ 0.

Dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^9]$, nous trouvons 3633 quintuplets jumeaux voisins dont $(11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23)$ $(101\ ;\ 103\ ;\ 107\ ;\ 109\ ;\ 113)$ $(1481\ ;\ 1483\ ;\ 1487\ ;\ 1489\ ;\ 1493)$

Nous appelons **quintuplet jumeau-alpha**, un quintuplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8\ ;\ p+2\alpha)$$

où α est un entier > 6.

Avec $p \geq 11$, les quintuplets jumeaux-alpha auront la forme :

(**) $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+11+2\alpha)$

où k, un entier ≥ 0.

Si $p < 11$, alors un seul quintuplet jumeau-alpha est possible soit :

(*) $(5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 5+2\alpha)$

la condition étant que $5+2\alpha$ soit un nombre premier.

Le tableau suivant indique la valeur de α ; le quintuplet (*) si il existe; puis le nombre de quintuplets (**) dans l'intervalle $[11\ ;\ 10^7]$, le nombre de quintuplets (**) dans l'intervalle $[11\ ;\ 10^9]$ et enfin, le premier quintuplet (**) rencontré.

α	(*)	$[11\ ;\ 10^7]$	$[11\ ;\ 10^9]$	*Exemple*
6	(5:7;11;13;17)	159	3632	(11;13;17;19;23)
7	(5;7;11;13;19)	/	/	/
9	(5;7;11;13;23)	158	3648	(11;13;17;19;29)
10	/	236	5321	(11;13;17;19;31)
15	/	246	6126	(11;13;17;19;41)
25	/	251	6340	(11;13;17;19;61)
30	/	185	4206	(11;13;17;19;71)

α	(*)	$[11\,;10^7]$	$[11\,;10^9]$	*Exemple*
34	(5:7;11;13;73)	195	4761	(11;13;17;19;79)
40	/	160	4167	(101;103;107;109;181)
45	/	288	6439	(11;13;17;19;101)
55	/	220	5036	(101;103;107;109;211)
250	/	177	4539	(101;103;107;109;601)
2500	/	328	7769	(11;13;17;19;5011)
25×10^5	/	119	3674	(11;13;17;19;5000011)

Dans l'intervalle $[11+3\times10^{25}\,;\,11+3\times10^{25}+10^8]$, nous trouvons tout de même 3 quintuplets jumeaux voisins. Les 3 nombres qui suivent sont le premier nombre de chaque quintuplet :

30000000000000000016327271
30000000000000000030315371
30000000000000000090120851

Conjecture 4 :

Il existe une infinité de quintuplets jumeaux voisins.

16) Le seul 6-uplet jumeau voisin et autres 6-uplets

Nous appelons **6-uplet jumeau voisin**, un 6-uplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\,;\,p+2\,;\,p+6\,;\,p+8\,;\,p+12\,;\,p+14)$$

Avec $p<11$, nous connaissons un seul 6-uplet jumeau voisin soit :

$$(5\,;\,7\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,;\,19)$$

Avec $p \geq 11$, nous avons $p = 30k + 11$ puisque les quatre premiers nombres du 6-uplet forment un quadruplet jumeau voisin (ici, k est un entier ≥ 0). Nous avons alors $p + 14 = 30k + 25$ qui n'est jamais un nombre premier. D'où :

Théorème 6 :

Il n'existe qu'un seul 6-uplet jumeau voisin soit $(5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;19)$.

Remarque : nous avons utilisé couple, triplet, quadruplet et quintuplet à la place de 2-uplet, 3-uplet, 4-uplet et 5-uplet.

Nous appelons **6-uplet jumeau-alpha**, un 6-uplet de nombres premiers de la forme: $(p\,;\ p+2\,;\ p+6\,;\ p+8\,;\ p+12\,;\ p+18)$.

Avec $p < 11$, nous trouvons un seul 6-uplet jumeau-alpha soit :

$$(5\,;7\,;11\,;13\,;17\,;23)$$

Avec $p \geq 11$, nous trouvons le nombre suivant de 6-uplets jumeaux-alpha dans les intervalles :

$[1\,;10]$	1
$[11\,;10^2]$	1
$[11\,;10^3]$	1
$[11\,;10^4]$	2
$[11\,;10^5]$	2
$[11\,;10^6]$	5
$[11\,;10^7]$	15
$[11\,;10^8]$	62
$[11\,;10^9]$	329

Pour les 6 premiers 6-uplets jumeaux-alpha, le premier nombre est :

$$5\,;11\,;1481\,;165701\,;326141\,;661091$$

17) Les 8-uplets jumeaux voisins

Nous appelons 8-uplet jumeau voisin, un 8-uplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6\ ;\ p+8\ ;\ p+90\ ;\ p+92\ ;\ p+96\ ;\ p+98)$$

Ce 8-uplet n'est rien d'autre qu'un couple de quadruplets jumeaux voisins. Les deux plus petits sont :

$$(11;13;17;19;101;103;107;109)\ et\ (101;103;107;109;191;193;197;199)$$

Le troisième est :

$$(15641;15643;15647;15649;15731;15733;15737;15739)$$

Dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^9]$, les 8-uplets jumeaux voisins sont au nombre de 30. Dans l'intervalle $[11+3\times10^{12};\ 11+3\times10^{12}+10^9]$, nous trouvons un seul 8-uplet jumeau voisin; également dans l'intervalle $[11+3\times10^{15};\ 11+3\times10^{15}+10^9]$, nous en trouvons un seul. Voici ces deux derniers :

3000592262951	3000000916685231
3000592262953	3000000916685233
3000592262957	3000000916685237
3000592262959	3000000916685239
3000592263041	3000000916685321
3000592263043	3000000916685323
3000592263047	3000000916685327
3000592263049	3000000916685329

18) Les 12-uplets jumeaux voisins

Nous appelons **12-uplet jumeau voisin**, un 12-uplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\,;\,p+2\,;\,p+6\,;\,p+8\,;\,p+90\,;\,p+92\,;\,p+96\,;\,p+98\,;\,p+180\,;\,p+182\,;\,p+186\,;\,p+188)$$

Il s'agit d'un triplet de quadruplets jumeaux voisins avec $p = 30k + 11$. Dans l'intervalle $[1\,;\,18\times10^9]$, nous en avons trouvé un seul soit celui déterminé par $k = 0$:

(*) $(11\,;\,13\,;\,17\,;\,19\,;\,101\,;\,103\,;\,107\,;\,109\,;\,191\,;\,193\,;\,197\,;\,199)$

La structure des 12-uplets jumeaux voisins a été déterminée à partir de (*). Il est donc évident que nous en trouvions au moins un!!! Étant données les contraintes imposées :

a) Dans un intervalle de longueur 189, nous exigeons la présence d'au moins 12 nombres premiers.
b) De plus, dans cet intervalle, 12 nombres premiers doivent être regroupés en 6 paires de nombres premiers jumeaux.
c) Enfin, ces 6 paires doivent être regroupées en 3 quadruplets jumeaux voisins.

et un seul 12-uplet jumeau voisin connu dans l'intervalle cité plus haut, alors nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture 5 :

Il n'existe qu'un seul 12-uplet jumeau voisin.

Malgré tout cela, il demeure possible de trouver un autre 12-uplet jumeau voisin dans un intervalle tel que $[1\,;\,10^{10^{100}}]$. Mais cette vérification est hors de notre portée, pour l'instant!!! Nous admettons que notre ordinateur n'est pas assez puissant pour aborder certains calculs!!!

19) Les couples de Sophie Germain et autres

Ce sont les couples de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ 2p+1)$. Voici les 7 premiers : (2 ; 5) (3 ; 7) (5 ; 11) (11 ; 23) (23 ; 47) (29 ; 59) (41 ; 83).

Dans chaque couple, le premier nombre p à gauche est appelé **«nombre premier de Sophie Germain»**. Nous le noterons **p-SG**. Ces nombres sont reliés au grand théorème de Fermat. « Il est devenu traditionnel, en grande partie à cause du théorème de Sophie Germain, de diviser le grand théorème de Fermat en 2 cas :

Cas 1 : dans $x^n + y^n = z^n$, aucun des entiers $x, y\ et\ z$ n'est divisible par n.

Cas 2 : dans $x^n + y^n = z^n$, un seul des entiers $x, y\ ou\ z$ est divisible par n.

Le théorème de Sophie Germain revient à dire que si n est un nombre premier de Sophie Germain, alors le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour toutes ces valeurs de n ». [2], page 77.

Voici le nombre de couples de Sophie Germain dans les intervalles suivants :

$[1\ ;\ 10]$	3
$[1\ ;\ 10^2]$	10
$[1\ ;\ 10^3]$	37
$[1\ ;\ 10^4]$	190
$[1\ ;\ 10^5]$	1171
$[1\ ;\ 10^6]$	7746
$[1\ ;\ 10^7]$	56032
$[1\ ;\ 10^8]$	423140

Allons voir dans des intervalles plus lointains :

$[1+10^{10}; 1+10^{10}+10^7]$	24183
$[1+10^{12}; 1+10^{12}+10^7]$	16835
$[1+10^{20}; 1+10^{20}+10^7]$	6093
$[1+10^{50}; 1+10^{50}+10^7]$	973
$[1+10^{100}; 1+10^{100}+10^7]$	250
$[1+10^{300}; 1+10^{300}+10^7]$	32

La conjecture suivante est déjà bien connue :

Conjecture 6 :

Il existe une infinité de couples de Sophie Germain.

Dans les couples mentionnés ci-haut, regroupons ceux qui sont en rouge :

(2 ; 5) (5 ; 11) (11 ; 23) (23 ; 47)

Nous remarquons que dans chaque couple, excepté 47, les deuxièmes entiers sont des nombres premiers de Sophie Germain. Cela nous permet d'écrire le quadruplet suivant :

(2 ; 5 ; 11 ; 23)

lequel est formé de 4 nombres premiers de Sophie Germain. Nous l'appellerons quadruplet-SG. Plus généralement, un **quadruplet-SG** est un quadruplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\ ;\ 2p+1\ ;\ 4p+3\ ;\ 8p+7)$$

Un **k-uplet-SG** est un k-uplet de nombres premiers tels que, excepté le premier entier, chaque entier est égal à 1 plus le double de l'entier précédent. Ici, k est un entier > 1.

Nous allons dresser un tableau qui donnera, dans les intervalles indiqués, le nombre de triplets-SG, de quadruplets-SG, de quintuplets-SG, de 6-uplets-SG, de 7-uplets-SG et de 8-uplets-SG :

	3	4	5	6	7	8
[1 ; 10]	2	2	1	0	0	0
$[1 ; 10^2]$	5	3	2	1	0	0
$[1 ; 10^3]$	9	6	3	1	0	0
$[1 ; 10^4]$	41	11	3	1	0	0
$[1 ; 10^5]$	205	37	8	2	0	0
$[1 ; 10^6]$	1187	159	33	5	0	0
$[1 ; 10^7]$	7476	892	190	45	3	0

Ainsi, dans la quatrième rangée, nous trouvons à partir de l'intervalle $[1 ; 10^4]$, respectivement 41 triplets-SG, 11 quadruplets-SG, 3 quintuplets-SG, 1 seul 6-uplet-SG, aucun 7-uplet-SG et aucun 8-uplet-SG.

Par exemple, observons les 2 quadruplets-SG suivants :

(2 ; 5 ; 11 ; 23) et (5 ; 11 ; 23 ; 47)

Dans le premier, les 4 entiers sont des nombres premiers-SG tandis que dans le second, les 3 premiers seulement sont des nombres premiers-SG. En effet, 1 + 2x47 = 95 n'est pas premier. Nous dirons que le premier est un **quadruplet-SG parfait** et que le second est tout simplement un quadruplet-SG.

Comment pouvons-nous trouver le nombre de quadruplets-SG parfaits dans un intervalle donné? Par exemple, dans l'intervalle $[1 ; 10^7]$, nous avons trouvé 892 quadruplets-SG et 190 quintuplets-SG. Nous avons donc 190 quadruplets-SG parfaits. Toujours dans le même intervalle, nous avons 892 triplets-SG parfaits. Cela est dû au résultat de l'encadré plus bas. Nous pouvons également nous servir du programme « k-uplets de nombres premiers » que nous avons fabriqué dans MAPLE.

Continuons avec l'intervalle $[1+10^{50} ; 1+10^{50}+10^7]$ dans lequel nous trouvons 24 triplets-SG donc 24 couples-SG parfaits parmi les 973 couples-SG de cet intervalle.

Puis l'intervalle $[1+10^{100} ; 1+10^{100}+10^7]$ dans lequel nous trouvons 5 triplets-SG donc 5 couples-SG parfaits parmi les 250 couples-SG de cet intervalle.

Enfin, l'intervalle $[1+10^{180} ; 1+10^{180}+10^7]$ dans lequel nous trouvons aucun triplet-SG donc aucun couple-SG parfait parmi les 76 couples-SG de cet intervalle!!!

Il existe une bijection entre les k-uplets-SG et les (k-1)-uplets-SG parfaits.

Dans les intervalles qui suivent, nous indiquons le nombre d'entiers n qui font de n^2+1, un nombre premier puis de n^2+5, un nombre premier.

	n^2+1	n^2+5
$[0\ ;10]$	5	2
$[0\ ;10^2]$	19	8
$[0\ ;10^3]$	112	49
$[0\ ;10^4]$	841	340
$[0\ ;10^5]$	6656	2568
$[0\ ;10^6]$	54110	20847
$[0\ ;10^7]$	456362	175991

Voici les 19 entiers de l'intervalle $[0\ ;10^2]$ qui font de n^2+1, un nombre premier :

$1\ ;2\ ;4\ ;6\ ;10\ ;14\ ;16\ ;20\ ;24\ ;26\ ;36\ ;40\ ;54\ ;56\ ;66;74\ ;84\ ;90\ ;94$

Par exemple : $84^2+1=7057$ est un nombre premier.

Puis les 8 entiers du même intervalle qui font de n^2+5, un nombre premier :

$0\ ;6\ ;12\ ;36\ ;48\ ;72\ ;78\ ;96$

Par exemple : $48^2+1=2309$ est un nombre premier.

Remarquons que 6 fait de n^2+1, un nombre premier et qu'il fait aussi de n^2+5, un autre nombre premier ($6^2+1=37$ *et* $6^2+5=41$, deux nombres premiers). Il en est de même avec 36. Mais, il y en a beaucoup d'autres. Par exemple, dans l'intervalle $[0\ ;10^7]$, nous trouvons 13 204 entiers comme 6 et 36, qui rendent à la fois, n^2+1 *et* n^2+5, des nombres premiers. Ainsi, 126 qui fait partie des 13 204 entiers, donne $126^2+1=15877$ *et* $126^2+5=15881$, deux nombres premiers.

Il est étonnant de voir qu'il existe **beaucoup** de nombres premiers qui ont la même structure. Par exemple, à partir de l'intervalle $[0\ ;10^6]$, nous trouvons 54 110 nombres premiers qui ont la structure n^2+1. À partir du même intervalle, nous trouvons 77 685 nombres premiers qui ont la structure n^2+7.

Dans l'intervalle $[10^{30};10^{30}+10^6]$, nous trouvons 14 340 entiers qui font de n^2+7, un nombre premier. Mais dans l'intervalle aussi lointain que $[10^{300};10^{300}+10^6]$, nous en trouvons encore 1396!!!

Nous croyons que très souvent, le mot «**beaucoup»** pourrait être remplacé par «**une infinité»**.

La théorie des nombres est très riche en conjectures!!!

Problème1 : Utilisez le programme « k-uplets de nombres premiers » afin de trouver :

a) Le nombre de triplets de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+6\ ;\ p+12)$ où p est contenu dans l'intervalle $[1\ ;\ 10^k]$ avec k , un entier qui varie de 1 à 8.
b) Au moins une centaine de ces triplets.
c) Des intervalles très lointains comme $[1+10^{20}; 1+10^{20}+10^7]$ qui contiennent de tels triplets (celui-ci en contient 564).
d) Une conjecture.

Problème 2 : Démontrez qu'il n'y a qu'un seul triplet de nombres premiers de la forme :

a) $(p\ ;\ p+4\ ;\ p+8)$ et trouvez-le.
b) $(p\ ;\ p+8\ ;\ p+16)$ et trouvez-le.
c) $(p\ ;\ p+10\ ;\ p+20)$ et trouvez-le.
d) $(p\ ;\ p+10\ ;\ p+14)$ et trouvez-le.

Problème 3 : Combien trouvons-nous de couples-SG parfaits à partir de l'intervalle $[1\ ;10^7]$?

Problème 4 : Pouvons-nous trouver des couples de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p^2+5)$?

Problème 5 : Le nombre $10^{30000}+10^{3000}+10^{300}+10^{30}+10^{10}+7$ est-il premier?

Problème 6 : Nous avons vu plus haut que 6 fait de n^2+1, un nombre premier et qu'il fait aussi de n^2+5, un nombre premier puis qu'il en est de même de 36. Pouvez-vous trouver 10 autres entiers positifs comme 6 et 36?

Problème 7 : Considérons les cinq nombres suivants où n est un entier ≥ 0 :

(*) $n^2+15\ ;\ n^2+55\ ;\ n^2+93\ ;\ n^2+123\ ;\ n^2+177$

Choisissons dans l'intervalle $[0\ ;\ 10^6]$, un entier qui fera un nombre premier des cinq nombres de (*). Le plus petit est 2 et nous vérifions sans peine que 4 + 15 = 19, 4 + 55 = 59, 4 + 93 = 97, 4 + 123 = 127 et 4 + 177 = 181 sont bien des nombres premiers. Le suivant est 4 et nous avons bien 16 + 15 = 31, 16 + 55 = 71, … encore cinq nombres premiers.

Trouvez tous les entiers de l'intervalle $[0\ ;\ 10^6]$ qui sont comme 2 et 4 donc tous les entiers tels que chacun rend premiers les cinq nombres de (*). Combien y en a-t-il?

Problème 8 : Considérons les cinq nombres suivants où n est un entier ≥ 0 :

$$(**) \qquad n^2 + a_1\ ;\ n^2 + a_2\ ;\ n^2 + a_3\ ;\ n^2 + a_4\ ;\ n^2 + a_5$$

où les a_i sont des nombres premiers impairs. Attribuez des valeurs aux a_i et trouvez tous les entiers de l'intervalle $[0\ ;\ 10^6]$ tels que chacun rend premiers les cinq nombres de (**). Combien en trouvez-vous?

Suggestion : vous pouvez faire vos propres essais pour attribuer des valeurs aux a_i et ensuite, vous pouvez essayer 7, 11, 19, 41 et 53 puis 19, 37, 59, 67 et 79.

Problème 9 : Nous connaissons les triplets de nombres premiers de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6)$ mais il y a aussi ceux de la forme $(p\ ;\ p+4\ ;\ p+6)$. Appelons A, l'ensemble des triplets de la forme $(p\ ;\ p+2\ ;\ p+6)$ *et* B, l'ensemble des triplets de la forme $(p\ ;\ p+4\ ;\ p+6)$. Les trois premiers de A sont $(5;7;11)$, $(11;13;17)$ et $(17;19;23)$. Les trois premiers de B sont $(7;11;13)$, $(13;17;19)$ *et* $(37;41;43)$.

a) Montrez que $A \cap B = \emptyset$.
b) Comparez le nombre de triplets de A issus de l'intervalle $[1\ ;\ 10^k]$ avec le nombre de triplets de B issus du même intervalle, k variant de 1 à 8.

Références:

[1] Biscuits of Number Theory, Arthur T. Benjamin and Ezra Brown, Editors, MAA 2009.

[2] Les mathématiciens, Bibliothèque pour la Science, Diffusion Belin, 1996.