# ANNEXE 3 : Carrés magiques emboîtés et bordures

Le but de l'annexe 3 est la construction de carrés magiques emboîtés. C'est un complément de la section 15.3.3 du chapitre 15 de la Partie 2.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 18 | 57 | 20 | 23 | 22 | 67 |
| 27 | 43 | 32 | 45 | 24 | 46 | 49 |
| 55 | 51 | 37 | 42 | 35 | 25 | 21 |
| 28 | 50 | 36 | 38 | 40 | 26 | 48 |
| 75 | 16 | 41 | 34 | 39 | 60 | 1 |
| 13 | 30 | 44 | 31 | 52 | 33 | 63 |
| 9 | 58 | 19 | 56 | 53 | 54 | 17 |

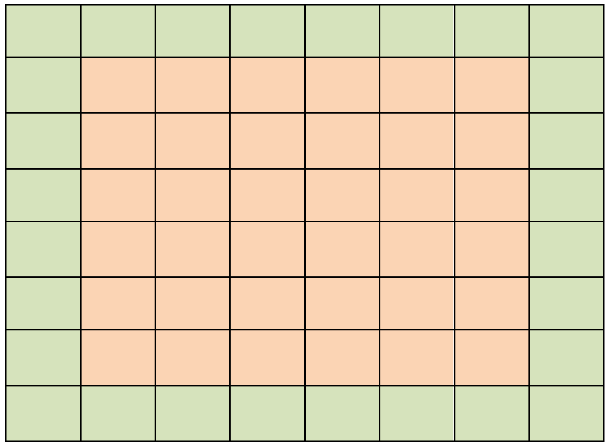
$S_1 = 38 \quad S_3 = 3\times 38 \quad S_5 = 5\times 38 \quad S_7 = 7\times 38$

Ces carrés emboîtés forment une **r-tour impaire** car tous les carrés sont magiques presque normaux d'ordres impairs. Si tous les carrés sont d'ordres pairs, nous aurons une **r-tour paire**.

Pour construire une r-tour, nous avons besoin (voir le carré 1, page 2):

1) D'un carré magique M presque normal d'ordre n (en orangé).
2) D'une bordure autour de M qui doit contenir des entiers (en vert).
3) Le nouveau carré M'd'ordre n + 2 doit être aussi magique presque normal.

Ci-haut se trouve une 4-tour impaire. La case centrale est considérée comme un carré magique presque normal d'ordre 1 et de somme magique S = 38. Nous passons d'un carré au suivant en plaçant une bordure autour de celui-ci. Ainsi, le carré d'ordre 5 est obtenu du carré d'ordre 3 en plaçant autour de lui une bordure (en vert).



Carré 1

Le carré M en orangé, d'ordre n, est appelé **carré central**; l'ensemble des cases vertes est la **bordure**. Le tout devient un **carré d'ordre n + 2 que nous voulons magique.**

Il se peut que nous placions une bordure autour de M sans vouloir pour autant construire une r-tour et que M ne soit pas un carré magique. Par exemple, placer une bordure autour d'un carré multiplicatif afin d'obtenir un carré magique (voir le carré d'Edwards dans 15.3.3).

Nous allons voir un premier théorème très important pour obtenir un carré magique M'd'ordre n + 2 à l'aide d'une bordure. Au départ, nous connaissons tous les nombres de M mais quelle est la somme magique S'de M'?

**Dans le carré central**, la somme des nombres de chaque colonne de gauche à droite est notée $c_1$, $c_2$,..., $c_n$, la somme des nombres de la grande diagonale principale est notée $d_1$ tandis que la somme des nombres de la grande diagonale secondaire est notée $d_2$ puis, la somme des nombres de chaque rangée de haut en bas est notée $r_1, r_2, ..., r_n$. Nous poserons :

$$S^* = c_1 + c_2 + ... + c_n + d_1 + d_2$$

Si M est un carré magique d'ordre $n$ et de somme $S$, alors nous aurons :

$$S^* = nS + 2S = (n+2)S$$

Voici quelques changements dans l'énoncé du théorème 15.11 :

**Théorème 15.11 :** section 15.3.3 du chapitre 15 devient :

Soit M, un carré d'ordre $n \geq 3$, formé de nombres quelconques. Nous lui ajoutons une bordure formée aussi de nombres quelconques afin que le nouveau carré M'd'ordre $n+2$ soit magique de somme $S'$.

Pour que cette bordure existe, il est **nécessaire** que $S' = \frac{S^*}{n}$.

**Théorème 15.12 :** section15.3.3 du chapitre 15 :

Soit donné un carré M d'ordre $n \geq 3$. Nous voulons construire une bordure autour de M afin d'obtenir un carré magique M'd'ordre $n+2$ et de somme $S'$.

M'existe **si et seulement si** sa somme magique est $S' = \frac{S^*}{n}$.

**Les preuves de ces deux théorèmes sont dans la section 15.3.3, chapitre 15, Partie 2.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 80 | 60 | 50 | 138 | 40 |
| 44 | 46 | 39 | 231 | 11 | 67 |
| 90 | 121 | 21 | 26 | 69 | 111 |
| 66 | 13 | 253 | 33 | 42 | 31 |
| 123 | 63 | 22 | 23 | 143 | 64 |
| 45 | 115 | 43 | 75 | 35 | 125 |

Carré d'Edwards avec une nouvelle bordure. La somme est $S' = 438$.

Le carré central (carré d'Edwards) est un carré multiplicatif. Pour trouver $S^*$, nous devons faire la somme des 16 entiers puis ajouter la somme des deux grandes diagonales ce qui donne :

$$S^* = 1156 + 243 + 353 = 1752 \qquad S' = \frac{1752}{4} = 438$$

Pour que le carré M'soit magique, il est **obligatoire** que $S' = 438$.

Si le carré M est magique, alors sa somme magique est notée $S$. Pour le nouveau carré magique M' (M + la bordure), sa somme magique est notée $S'$.

Pour le théorème 15.11, il est clair que si la somme magique de M'n'est pas un entier, alors la bordure ne peut pas contenir que des entiers. Quant au théorème 15.12, il nous garantit que nous pourrons construire un carré magique M'si $S' = \frac{S^*}{n}$ mais ne nous garantit pas que M'sera presque normal. Le **théorème alpha** qui suit nous garantit la construction des r- tours donc si M est magique presque normal, alors M' le sera également. Par exemple, la 4-tour impaire de la page 1 est formée de 4 carrés magiques presque normaux. Énonçons le théorème alpha :

**Théorème alpha :**

Le carré M est magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ et de somme $S$. Il est possible d'ajouter à M une bordure formée d'entiers afin d'obtenir un nouveau carré magique M' d'ordre $n + 2$ qui contiendra que des entiers tous différents.

Il se peut que nous utilisions un **entier correcteur** qui fera disparaitre tous les entiers négatifs et ainsi obtenir M' presque normal.

Ce théorème sert à nous montrer l'existence de M' formé d'entiers tous différents. L'idée de la démonstration est de partir de W, le plus grand entier de M puis de créer une suite strictement croissante d'entiers tous > W et une suite strictement décroissante d'entiers négatifs. Tous ces entiers tous différents formeront le carré M’. Nous aurons certainement besoin d’un entier correcteur d’où finalement M’ presque normal et nous aurons un nouveau carré M.

Quant au théorème bêta, celui-ci nous donne un algorithme pour fabriquer directement M’ presque normal et très souvent, sans entier correcteur. Le carré M est alors conservé.

**Théorème bêta :**

Soit M, un carré presque normal d’ordre $n$ qui n’est pas forcément magique. Nous pouvons construire une bordure autour de M formée d’entiers afin d’obtenir un carré magique M’de somme $S' = \frac{S^*}{n} = entier$
qui a de bonnes chances d’être presque normal tout en conservant M dans M’.

Nous démontrerons ces deux derniers théorèmes un peu plus loin mais avant, revenons à la 4-tour impaire de la page 1. Nous allons expliquer pourquoi ces sommes magiques.

Pour construire nos r-tours, nous convenons de toujours commencer avec
un 3x3 normal pour les carrés emboîtés d’ordres impairs
et un 4x4 normal pour les carrés emboîtés d’ordres pairs.

La somme magique du carré de départ est $S$.

Les théorèmes 15.11 et 15.12 énoncés à la page 3 nous conduisent aux résultats suivants :

Appelons $c$, l’entier de la case centrale. Nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
&S = S_1 = c \\
&S_3 = 3c \\
&S_5 = \frac{5S_3}{3} = \frac{5\times 3c}{3} = 5c \\
&S_7 = \frac{7S_5}{5} = \frac{7\times 5c}{5} = 7c \\
&S_9 = \frac{9S_7}{7} = \frac{9\times 7c}{7} = 9c
\end{aligned}
$$

Supposons $S_k = k\,c$. Alors $S_{k+2} = \frac{k+2}{k}\,k\,c = (k+2)\,c.$ Ainsi, nous voyons bien comment se calcule chaque somme magique. Nous aurions, en continuant avec d'autres bordures autour du carré précédent, par exemple, $S_{77} = 77\,c$.

Il est important de dire ici que nous commençons toujours avec un carré magique d'ordre 3 de centre $c$. Nous aurons alors :

$$S_k = k\,c$$

où $k \geq 3$ est un entier impair. Si le 3x3 est normal, alors nous aurons $c = 5$.

À la page 1, le carré central est magique d'ordre 1 et de somme 38. Nous avons utilisé une première bordure d'où le carré magique d'ordre 3 de somme 3 x 38. La deuxième bordure, en vert, nous conduit au carré magique d'ordre 5 de somme 5 x 38 et enfin, la dernière bordure nous donne le carré magique d'ordre 7 et de somme 7 x 38. Nous avons là une 4-tour impaire. Notez que les 4 carrés magiques sont presque normaux.

Pourquoi le carré de la page 1 a-t-il 38 pour centre et non 5? Nous verrons plus loin qu'avec l'apparition d'entiers négatifs, nous ajouterons un certain entier positif dans toutes les cases ce qui changera les entiers de tous les carrés y compris les entiers du 3x3. Ainsi de 5 nous pourrons passer à 38.

Qu'arrive-t-il si $k \geq 4$ est un entier pair et que nous commençons toujours avec un carré magique normal d'ordre 4?

Nous voulons construire des r-tours telles que chaque carré
soit magique et presque normal.
Avec les plus petits entiers possibles !!!

Posons $S$, la somme du carré magique d'ordre 4. Le procédé de construction des bordures nous donne le résultat suivant : $S_k = k\,\frac{S}{4}$ avec $k \geq 4$, un entier pair et $\frac{k\,S}{4}$, un entier.

Ici, le carré central d'ordre 4 a pour somme $S = 338 = 4 \times \frac{338}{4} = 4 \times 84{,}5.$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 104 | 64 | 106 | 70 | 108 | 60 | 110 | 54 |
| 116 | 93 | 75 | 95 | 73 | 100 | 71 | 53 |
| 52 | 101 | 80 | 91 | 90 | 77 | 68 | 117 |
| 118 | 67 | 81 | 86 | 87 | 84 | 102 | 51 |
| 50 | 103 | 85 | 82 | 83 | 88 | 66 | 119 |
| 120 | 45 | 92 | 79 | 78 | 89 | 124 | 49 |
| 1 | 98 | 94 | 74 | 96 | 69 | 76 | 168 |
| 115 | 105 | 63 | 99 | 61 | 109 | 59 | 65 |

$$S_4 = 338 \qquad S_6 = 507 \qquad S_8 = 676$$
$$S_4 = 4 \times 84,5 \qquad S_6 = 6 \times 84,5 \qquad S_8 = 8 \times 84,5$$

Si notre carré magique d'ordre 4 est de somme $S$, alors nous aurons :

$$S_4 = S = \frac{4S}{4}$$
$$S_6 = \frac{6S}{4}$$
$$S_8 = 8 \times \frac{6S}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{8S}{4}$$

Si $S_k = \frac{k\,S}{4}$, alors $S_{k+2} = \frac{k+2}{k}\,\frac{k\,S}{4} = \frac{(k+2)\,S}{4}$.

Ainsi nous avons : $$S_k = k\frac{S}{4}$$

où $k \geq 4$ est un entier pair. Si notre carré magique est d'ordre 3, de somme $S$, alors $c = \frac{S}{3}$.

1) Pour $k$ pair : $S_{k+2} = S_k + \frac{2S}{4}$.

2) Pour $k$ impair : $S_{k+2} = S_k + 2c = S_k + \frac{2S}{3}$.

**Pour le cas pair, il est nécessaire que $\frac{2S}{4}$ soit un entier** mais pour le cas impair, $\frac{2S}{3}$ est toujours un entier puisque notre carré de départ est d'ordre 3.

**Passons maintenant à la démonstration des théorèmes alpha et bêta.**

**Théorème alpha :**

1) Nous allons prendre M, un carré magique presque normal d'ordre $n$ et de somme magique $S$ puis nous allons construire une bordure, ici en vert.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W+k$ | $W+k+1$ | $W+k+2$ | … | … | … | … | … | $W+k+n$ | $X$ |
| $Y+u+n-2$ | | | | | | | | | $X-u-(n-2)$ |
| … | | | W | | | | | | … |
| … | | | | | | | | | … |
| … | | | | | | | | | … |
| $Y+u+2$ | | | | | | | | | $X-u-2$ |
| $Y+u+1$ | | | | | | | | | $X-u-1$ |
| $Y+u$ | | | | | | | | | $X-u$ |
| $R$ | | | | | | | | | $T$ |
| $Y$ | $A-W-k-1$ | $A-W-k-2$ | … | … | … | … | … | $A-W-k-n$ | $A-W-k$ |

L'entier $k \geq 1$ doit rendre $A-W-k < 0$ ; l'entier $u$ est $\geq 1$. Dans M, $W$ est le plus grand entier.

Appelons M’ le carré M muni de sa bordure et $S'$, sa somme magique. Nous trouvons :

$$S' = \frac{(n+2)S}{n} = S + \frac{2S}{n}.$$

Puisque nous voulons que M’ soit un carré magique presque normal,
alors il est nécessaire que $\frac{2S}{n}$ soit un entier.

Si $\frac{2S}{n}$ n’est pas un entier, alors $S'$ n’est pas un entier et la bordure ne peut pas être formée que d’entiers donc M’ peut être magique mais ne sera pas presque normal.

L’objectif du théorème alpha est de montrer l’existence d’un carré magique presque normal M’ si nous acceptons de modifier M.

2) Nous allons nous baser sur le carré de la page 8. Appelons $A$, la différence $S'-S$. Nous allons calculer $X$ et $Y$ puis montrer que $X+Y=A$.

$$X = S' - nW - W - nk - k - \sum_{1}^{n} i$$

$$Y = A - X = -S + nW + W + nk + k + \sum_{1}^{n} i$$

$$X + Y = A \quad \textit{évident!!!}$$

Mentionnons que pour l’instant, $(A-W-k-n)$ est le plus petit entier négatif mais $X$ deviendra encore plus petit. En effet :

$$X = (A-W-k-n) - (nW-S) - nk - \sum_{1}^{n-1} i$$

Puisque $(nW-S)>0$, $X$ devient le plus petit négatif. N’oublions pas que l’entier $W$ est le plus grand entier de M.

La quantité $W+k+n$ est pour l'instant le plus grand entier positif mais $Y$ deviendra encore plus grand. En effet :

$$Y=(w+k+n)+(nW-S)+nk+\sum_{1}^{n-1} i$$

Il est clair que $Y$ devient le plus grand entier positif. Voyons les entiers que nous avons maintenant :

Les positifs : suite strictement croissante :

$W+k$ ; $W+k+1$ ; $W+k+2$ ; … ; $W+k+n$ ; $Y$ ; $Y+u$ ; $Y+u+1$ ; $Y+u+2$ ;… ; $Y+u+(n-2)$

Les négatifs : suite strictement décroissante :

$A-W-k; A-W-k-1; A-W-k-2;…; A-W-k-n; X; X-u; X-u-1; X-u-2;…; X-u-(n-2)$

Il nous reste à trouver $R$ et $T$. Nous aurons alors $2n+2$ entiers positifs et $2n+2$ entiers négatifs car nous allons montrer que $R$ est le plus petit négatif et que $T$ est le plus grand positif.

**Trouvons** $R$ :

$$R=S'-nY-(n-1)u-W-k-\sum_{1}^{n-2} i = X+Y+S-nY-(n-1)u-W-k-\sum_{1}^{n-2} i =$$

$$=(X-u-(n-2)) + [S+(1-n)Y+(2-n)u-W-k-\sum_{1}^{n-3} i]$$

Dans les crochets, toutes les quantités sont négatives sauf $S$. En général, la quantité dans les crochets sera négative mais si jamais elle était positive, nous pourrions toujours choisir convenablement $u$ qui rendra négative $(<0)$ la quantité entre les crochets.

Ainsi, $R$ sera le plus petit entier négatif de M': …; $X-u-(n-2)$ ; $R$.

**Trouvons** $T$ :

$$T=S'-A+W+k-nX+(n-1)u+\sum_{1}^{n-2} i = S+W+k-nX+(n-1)u+\sum_{1}^{n-2} i > 0.$$

Nous allons montrer que $T>Y+u+(n-2)$. Ainsi, $T$ sera le plus grand entier de M'.

Donc, nous montrerons que $T-Y-u-(n-2)>0$.

$$S + W + k - nX + (n-1)u + \sum_{1}^{n-2} i + S - nW - W - nk - k - \sum_{1}^{n} i - u - (n-2) =$$

$$= 2S - nX - nW - nk + nu - 2u - (n-2) - (n-1) - n =$$

$$= (n^2W - nS) + n^2k + (n-2)u + (n-1)\sum_{1}^{n} i + \sum_{1}^{n-3} i \; > \; 0$$

Toutes ces quantités sont positives y compris $n^2W - nS$ (évident!!!)

Pour arriver à ce résultat, nous avons remplacé $X$ par sa valeur (voir page 9) puis $nS'$ par $nS + 2S$.

Donc $T$ est devenu le plus grand entier positif de M'. Enfin, le carré M'est bien magique. En effet :

1) Pour les colonnes centrales, chacune vaut $S + A = S'$.
2) Pour les rangées centrales, sauf celle qui contient $R et T$, chacune vaut $S + X + Y = S + A = S'$.
3) De même pour les deux grandes diagonales, chacune vaut $S + A = S'$.
4) La première rangée de M' vaut $S'$.
5) La rangée qui contient $R et T$ vaut :
   $(R + T) + S = (S' + S - nX - nY) + S = S' + S - nX - n(A - X) + S =$
   $= S' + 2S - nA = S' + 2S - n(S' - S) = S' + (nS + 2S) - nS' =$
   $= S' + nS' - nS' = S'$
6) La dernière rangée de M' vaut $S'$.
7) La première colonne à gauche vaut $A + S = S'$. De même avec la colonne de droite.

Le carré M'est non seulement magique mais il renferme que des entiers, tous différents. Dans sa bordure, nous trouvons $2n + 2$ entiers positifs et $2n + 2$ entiers négatifs.

Tous les entiers de M' sont dans l'intervalle fermé $[R \, ; \, T]$. Pour rendre M' presque normal, nous devons accepter que M subisse des modifications. Nous ajouterons $1 - R$ dans toutes les cases de M'lequel deviendra presque normal et tous ses entiers seront dans l'intervalle $[1 \, ; \, 1 - R + T]$.

Voyons un exemple. Le carré central est magique normal d'ordre 5. Nous avons S = 65, S' = 91, W = 25, k = 2, u = 1. Nous ajouterons 507 dans toutes les cases de M'd'où M' magique presque normal. Tous ses entiers sont dans l'intervalle fermé $[1 \, ; \, 1039]$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | -86 |
| 116 | 25 | 6 | 19 | 3 | 12 | -90 |
| 115 | 4 | 13 | 22 | 10 | 16 | -89 |
| 114 | 7 | 20 | 1 | 14 | 23 | -88 |
| 113 | 11 | 24 | 8 | 17 | 5 | -87 |
| -506 | 18 | 2 | 15 | 21 | 9 | 532 |
| 112 | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 | -1 |

Nous allons ajouter dans toutes les cases de M'l'entier 507. Le nouveau carré magique d'ordre 7 sera presque normal de somme S' = 3640, puis le carré magique normal d'ordre 5 deviendra presque normal de somme S = 2600.

**Théorème bêta :**

Soit M, un carré presque normal d'ordre $n$ qui n'est pas forcément magique. Nous pouvons construire une bordure autour de M formée d'entiers afin d'obtenir un carré magique M'de

somme $S' = \frac{S^*}{n} =$ entier

qui a de bonnes chances d'être presque normal tout en conservant M dans M'.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $D_2$ |
| $u$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | … | $x_n$ | $S'-u-\sum_1^n x_i$ | |
| $y_1$ | | | | | | | $B_1-y_1$ | $B_1$ |
| $y_2$ | | | | | | | $B_2-y_2$ | $B_2$ |
| … | | | | | | | … | $B_3$ |
| … | | | | | | | … | … |
| $y_{n-1}$ | | | | | | | $B_{n-1}-y_{n-1}$ | $B_{n-1}$ |
| $R$ | | | | | | | $T$ | |
| $u+\sum_1^n x_i-d_2$ | $A_1-x_1$ | $A_2-x_2$ | $A_3-x_3$ | … | … | $A_n-x_n$ | $S'-u-d_1$ | |
| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | … | … | $A_n$ | | $D_1$ |

Carré magique général M’

Le carré central, en orangé, n’est pas forcément magique mais il est presque normal et dans sa bordure en vert, nous placerons des entiers, si possible positifs. Dans le carré central, notons la somme des nombres de chaque colonne de gauche à droite par : $c_1, c_2, ..., c_n$. La somme magique de M’est $S'$. $d_1\, et\, d_2$ sont les sommes des cases de chaque diagonale. Posons :

$$D_1 = S'-d_1 \qquad D_2 = S'-d_2 \qquad A_i = S'-c_i \qquad i = 1,2,...,n$$

Dans le carré central, notons la somme des nombres de chaque rangée de haut en bas par : $e_1, e_2, ..., e_n$. Posons :

$$B_j = S'-e_j \qquad j = 1,2,...,n-1$$

Trouvons $R\, et\, T$ à partir de leur colonne respective:

$$R = S' - u - \sum_{1}^{n-1} y_j - u - \sum_{1}^{n} x_i + d_2$$

$$T = S' - S' + u + d_1 - S' + u + \sum_{1}^{n} x_i - \sum_{1}^{n-1} B_j + \sum_{1}^{n-1} y_j$$

Trouvons $R + T + e_n$ ;

$$R + T + e_n = d_1 + d_2 + e_n - \sum_{1}^{n-1} B_j = d_1 + d_2 + e_n - (n-1)S' + (e_1 + e_2 + ... + e_{n-1}) =$$

$$= d_1 + d_2 + \sum_{1}^{n} e_j - (n-1)S' = S^* - (n-1)S' = nS' - (n-1)S' = S'$$

Ainsi la rangée qui contient $R\, et\, T$ est magique. Voyons la somme de la dernière rangée. Nous trouvons :

$$-d_2 + S' - d_1 + nS' - \sum_{1}^{n} c_i = nS' + S' - (d_1 + d_2 + \sum_{1}^{n} c_i) =$$

$$= nS' + S' - S^* = nS' + S' - nS' = S'$$

La dernière rangée est aussi magique. Finalement, M'est magique !!!

Mais M'est-il presque normal? À l'aide des $A_i$ et des $B_j$, nous allons tenter de donner des valeurs entières pour les $x_i$ , les $y_j$ ainsi que pour $u$ tout en évitant les répétitions et les négatifs.

**Nous devons conserver le carré central !!!**

Voici comment nous allons procéder :

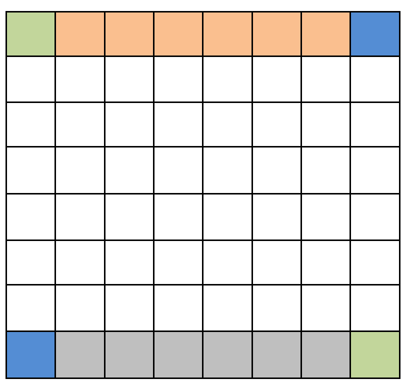
1) D'abord, trouvons $S' = \dfrac{S^*}{n}$ qui devra être un entier.
2) Ordonnons tous les entiers de M du plus petit au plus grand dans une liste L. Cela va nous aider à éviter les répétitions. Calculons les $A_i, B_j, D_1\, et\, D_2$.
3) Donnons une valeur entière à la variable $u$ qui n'est pas dans L en s'assurant que sa case opposée ne contienne pas un entier de L. Ensuite, ajoutons ces deux entiers à L.

4) De la même façon, donnons une valeur entière à $x_1$ qui n'est pas dans la nouvelle liste L en s'assurant que sa case opposée ne renferme pas un entier de L. Ensuite, ajoutons ces deux entiers à L. Et ainsi de suite…
5) De cette façon, nous n'aurons que des entiers dans M'excepté peut-être $R$ et $T$. Mais la définition de $R$ et $T$ vue plus haut montre que ces deux nombres sont entiers.

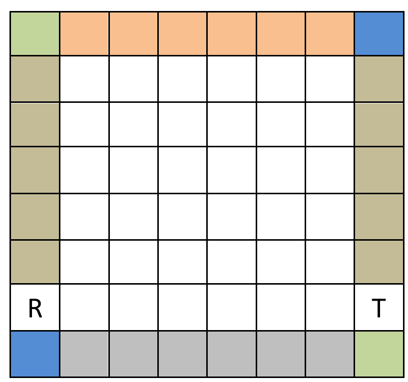
Ce procédé nous permet de construire un carré magique M' qui sera formé exclusivement d'entiers qui seront peut-être négatifs et il y aura peut-être des répétitions si nous ne faisons pas attention!!!

Mais, en général, nous pouvons éviter les répétitions et les négatifs donc nous conservons M.

Voyons, en couleurs, la marche à suivre avec notre modèle de la page 13 :



Carré A




Carré B

**Dans le carré A**, plaçons un entier dans la case verte du haut puis calculons l'entier qui ira dans la case verte du bas.
Ensuite, plaçons des entiers dans les cases orangés en haut puis calculons, avec les $A_i$, les entiers des cases grises correspondantes.
Calculons l'entier dans la case bleue du haut en utilisant sa rangée puis l'entier dans la case bleue correspondante du bas en se servant de la diagonale secondaire.
**Dans le carré B**, plaçons des entiers dans les cases de couleur kaki de la colonne de gauche et avec les $B_j$, les entiers dans les cases correspondantes de la colonne de droite. Enfin, il reste à calculer $R$ et $T$ avec leur colonne respective.
Selon le modèle de la page 13, nous trouvons notre carré magique.

En général, celui-ci est presque normal !!!

Voyons un exemple :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 67 | 8 | 9 | 62 | 19 | 32 | 25 |
| 2 | 72 | 18 | 17 | 16 | 49 | 47 | 71 |
| 61 | 13 | 52 | 36 | 5 | 50 | 63 | 12 |
| 14 | 38 | 35 | 7 | 66 | 15 | 58 | 59 |
| 46 | 20 | 53 | 34 | 39 | 69 | 4 | 27 |
| 22 | 55 | 1 | 57 | 56 | 26 | 24 | 51 |
| 29 | 21 | 60 | 68 | 37 | 10 | 23 | 44 |
| 48 | 6 | 65 | 64 | 11 | 54 | 41 | 3 |

Le carré central M est bi-magique presque normal avec $S_1 = 219 \; et \; S_2 = 10\,663$. Il a été construit par **Lee Morgenstern** en mai 2006. C'est le plus petit bi-magique d'ordre 6. Voir chapitre 13, page 18. Nous voulons M'magique presque normal. Aussi, nous voulons conserver M. Nous trouvons :

$$S' = \frac{8 \times 219}{6} = 292$$

La somme de M'doit obligatoirement être $292$ et $292 - 219 = 73$. Tous les $A_i \; et \; B_j$ valent donc $73$. Avec beaucoup d'attention, les répétitions ont été évitées !!! Et nous n'avons pas touché à M !!!

> Au cœur d'un carré magique presque normal d'ordre 8 se trouve un magnifique carré bi-magique d'ordre 6.

Voyons maintenant un exemple relatif au théorème alpha. Reprenons le carré de Lee Morgenstern. M'est toujours de somme $S'=292.$ Le plus grand entier est W = 72.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 74 | 75 | 78 | 81 | 84 | 87 | 90 | -277 |
| 355 | 72 | 18 | 17 | 16 | 49 | 47 | -282 |
| 354 | 13 | 52 | 36 | 5 | 50 | 63 | -281 |
| 353 | 38 | 35 | 7 | 66 | 15 | 58 | -280 |
| 352 | 20 | 53 | 34 | 39 | 69 | 4 | -279 |
| 351 | 55 | 1 | 57 | 56 | 26 | 24 | -278 |
| -1897 | 21 | 60 | 68 | 37 | 10 | 23 | 1970 |
| 350 | -2 | -5 | - 8 | -11 | -14 | -17 | -1 |

Nous avons :

$$S=219 \qquad A=\frac{2S}{n}=\frac{2\times 219}{6}=73 \qquad m=A-W=1 \qquad k_1=2 \qquad k=3 \qquad u=1$$

Nous avons utilisé le modèle de la page 8 et obtenu le carré magique ci-haut. Il reste à ajouter l'entier correcteur 1898. Les entiers du nouveau carré magique vont de 1 à 3868.

Nous préférons le carré de la page 16!!! Ici, nous venons de perdre le carré de Lee Morgenstern. Cependant, le nouveau carré central est toujours bi-magique (voir le théorème 13.2, chapitre 13, Partie 2).

Le modèle utilisé ici nous montre seulement que nous pouvons toujours trouver M' presque normal en plaçant une bordure autour de M même si M change.

**Nous préférons, évidemment, la démarche relative au théorème bêta qui nous a donné le carré de la page 16 avec des entiers tous différents qui vont de 1 à 72.**

En général, la bordure n'est pas unique. Avec le carré d'Edwards (Voir page 3 et la section 15.3.3 du chapitre 15), nous avons trouvé 4 bordures différentes formées d'entiers et la somme du 6x6 était toujours 438. Puis, une cinquième bordure formée de 8 nombres irrationnels et 12 rationnels non entiers avec toujours 438 pour somme du 6x6.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 65,2 | 118,71 $+\pi$ | 41,5 | 38,75 $-\pi$ | 139,21 | 34,63 |
| 27,4 | 46 | 39 | 231 | 11 | 83,6 |
| 79 $+\pi$ | 121 | 21 | 26 | 69 | 122 $-\pi$ |
| 60,22 $-\pi$ | 13 | 253 | 33 | 42 | 36,78 $+\pi$ |
| 155,81 | 63 | 22 | 23 | 143 | 31,19 |
| 50,37 | 76,29 $-\pi$ | 61,5 | 86,25 $+\pi$ | 33,79 | 129,8 |

Carré d'Edwards avec bordure qui ne renferme aucun entier !!! $S'=438$

Si la somme magique de M' n'est pas un entier et que M renferme seulement des entiers, alors la bordure ne peut pas contenir que des entiers.

Si la somme magique de M'est un entier et que M renferme que des entiers, alors la bordure ne contient pas obligatoirement que des entiers. Si celle-ci peut contenir que des entiers, alors nous la trouverons.

Un autre exemple avec le modèle de la page 13 :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 98 | 99 | 52 | 61 | 87 | 41 |
| 55 | 46 | 39 | 231 | 11 | 56 |
| 100 | 121 | 21 | 26 | 69 | 101 |
| 48 | 13 | 253 | 33 | 42 | 49 |
| 93 | 63 | 22 | 23 | 143 | 94 |
| 44 | 96 | 51 | 64 | 86 | 97 |

Une autre bordure autour du carré d'Edwards. S'= 438.

Ce carré d'ordre 6 est magique presque normal.

La bordure ci-haut est la meilleure car elle contient 101, le plus petit entier maximum !!! Puis 41, le plus grand entier minimum.

Le minimum est 41 d'où l'écart 101 – 41 = 60

Nous souhaitons que tous les entiers de la bordure soient dans le plus petit intervalle possible.

Revoyons, dans l'ordre, les couples d'entiers trouvés;

(98;97) (99;96) (52;51) (61;64) (87;86) (41;44)

Nous constatons que les 4 colonnes centrales, les 2 grandes diagonales, la première rangée et la dernière rangée, sont magiques. Terminons avec les 2 colonnes extrêmes :

$$(55;56)\ \ (100;101)\ \ (48;49)\ \ (93;94)$$

Nous vous **suggérons** de former chaque couple avec deux entiers les plus proches possibles.

Ainsi, au lieu de prendre (1 ; 194), nous avons pris (98 ; 97).

Enfin, notons que dans la troisième rangée, les cases extrêmes sont 100 et 101 et que 101 est le maximum. Dans la bordure (*), les cases qui contiennent 100 et 101 renfermeront toujours un entier plus grand ou égal à 101 donc un maximum ne sera jamais inférieur à 101 lequel est le plus petit maximum!!!

(*) Nous parlons ici des différentes bordures autour du même carré central.

Dans la grande diagonale secondaire, les cases extrêmes renferment 41 et 44 et 41 est le minimum. Dans ces deux cases, nous trouverons toujours un entier plus grand ou égal à 44 et un entier plus petit ou égal à 41. Ainsi aucun minimum dans la bordure ne peut être supérieur à 41 qui est donc le plus grand minimum!!!

La bordure autour du carré d'Edwards, page 19, est la meilleure qui soit car son plus petit maximum est 101 et son plus grand minimum est 41. Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[41\ ;\ 101]$ qui contient 61 entiers.

Que dire de la bordure autour du bi-magique de Lee Morgenstern, page 16? Est-elle la meilleure?
Voici une autre bordure :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 32 | 31 | 43 | 44 | 28 | 27 | 54 |
| 48 | 72 | 18 | 17 | 16 | 49 | 47 | 25 |
| 51 | 13 | 52 | 36 | 5 | 50 | 63 | 22 |
| 59 | 38 | 35 | 7 | 66 | 15 | 58 | 14 |
| 12 | 20 | 53 | 34 | 39 | 69 | 4 | 61 |
| 62 | 55 | 1 | 57 | 56 | 26 | 24 | 11 |
| 8 | 21 | 60 | 68 | 37 | 10 | 23 | 65 |
| 19 | 41 | 42 | 30 | 29 | 45 | 46 | 40 |

À la page 16, la bordure contient 71, le plus grand entier et 2, le plus petit d'où 71 – 2 = 69. Dans le carré ci-haut, la bordure renferme 65 comme plus grand entier et 8 comme plus petit d'où 65 – 8 = 57.

Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[8\ ;\ 65]$ lequel contient 58 entiers. Le carré ci-haut est magique presque normal de somme S' = 292 et contient le carré bi-magique d'ordre 6 de Lee Morgenstern!!!

Avons-nous la meilleure bordure?

Celle-ci est meilleure que celle de la page 16 mais **pouvons-nous faire mieux?**

**Pouvez-vous faire mieux?**

Avant de terminer avec quelques r-tours, voyons ce carré M formé de 9 entiers carrés parfaits (M n'est pas magique). La bordure autour de M conduit au carré magique M' presque normal de somme S' = 159.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 28 | 32 | 33 | 56 |
| 24 | 36 | 64 | 9 | 26 |
| 41 | 49 | 25 | 1 | 43 |
| 31 | 16 | 4 | 81 | 27 |
| 53 | 30 | 34 | 35 | 7 |

Les entiers du carré central sont :

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2 \quad 9^2$$

Le plus grand entier de la bordure est 56, le plus petit est 7. Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[7\ ;\ 56]$.

Avons-nous la meilleure bordure? Non, mais la suivante est meilleure !!!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 28 | 32 | 33 | 55 |
| 24 | 36 | 64 | 9 | 26 |
| 39 | 49 | 25 | 1 | 45 |
| 31 | 16 | 4 | 81 | 27 |
| 54 | 30 | 34 | 35 | 6 |

Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[6\ ;\ 55]$.

Voyons maintenant cet autre carré M formé de 9 entiers cubes parfaits (M n'est pas magique). La bordure autour de M conduit au carré magique M'presque normal de somme S' = 1021.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 38 | 198 | 251 | 69 | 465 |
| 132 | 216 | 512 | 27 | 134 |
| 275 | 343 | 1 | 125 | 277 |
| 112 | 64 | 8 | 729 | 108 |
| 464 | 200 | 249 | 71 | 37 |

Les entiers du carré central sont :

$$1^3 \quad 2^3 \quad 3^3 \quad 4^3 \quad 5^3 \quad 6^3 \quad 7^3 \quad 8^3 \quad 9^3$$

Il est facile de montrer que le plus petit maximum dans la bordure est 465. Le plus grand minimum est 37.

Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[37\ ;\ 465]$.

Nous ne connaissons pas de carré magique d'ordre 3 formé de 9 entiers carrés parfaits. Cependant, nous avons trouvé un carré formé des 9 premiers carrés parfaits, plongé dans un carré magique d'ordre 5.

Enfin, un carré central M presque normal qui contient les 32 premiers chiffres du nombre $\pi$**.** La bordure nous conduit à un carré magique M' d'ordre 6 dont la somme **doit être** 353,75. Dans M, nous lisons les chiffres de $\pi$ de gauche à droite et de haut en bas.

**Nous ne pouvons pas toucher au carré central non magique !!! Nous ne pouvons pas changer l'ordre des chiffres de $\pi$.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 54 | 106 | 44 | 52 | 39 | 58,75 |
| 98 | 31 | 41 | 59 | 26 | 98,75 |
| 32 | 53 | 58 | 97 | 93 | 20,75 |
| 60 | 23 | 84 | 62 | 64 | 60,75 |
| 54,75 | 33 | 83 | 27 | 95 | 61 |
| 55 | 107,75 | 43,75 | 56,75 | 36,75 | 53,75 |

Le carré magique M’ contient 26 entiers tous différents et positifs. Nous y trouvons aussi 10 nombres rationnels non entiers tous différents.

Voilà $\pi$ dans un carré d’ordre 4 plongé dans un carré magique d’ordre 6.

## Passons maintenant aux r-tours.

Nous avons construit une 8-tour impaire formée d’entiers situés dans l’intervalle fermé $[1\,;\,243]$. Le carré magique d’ordre 15 est presque normal donc de même pour les ordres 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1.

Les différentes sommes magiques ont la forme $(2k-1)\times 122$ où $k=1,2,\dots,7,8.$

Voici cette 8-tour impaire

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 228 | 20 | 223 | 24 | 219 | 26 | 217 | 28 | 215 | 31 | 211 | 34 | 237 | 55 | 62 |
| 183 | 201 | 44 | 199 | 46 | 197 | 48 | 195 | 50 | 193 | 30 | 191 | 14 | 178 | 61 |
| 60 | 15 | 99 | 158 | 81 | 164 | 79 | 167 | 76 | 169 | 74 | 73 | 202 | 229 | 184 |
| 185 | 36 | 172 | 131 | 152 | 91 | 154 | 89 | 156 | 87 | 160 | 78 | 72 | 208 | 59 |
| 35 | 227 | 71 | 150 | 143 | 102 | 141 | 104 | 107 | 106 | 151 | 94 | 173 | 17 | 209 |
| 187 | 226 | 174 | 95 | 111 | 127 | 116 | 129 | 108 | 130 | 133 | 149 | 70 | 18 | 57 |
| 56 | 225 | 69 | 148 | 139 | 135 | 121 | 126 | 119 | 109 | 105 | 96 | 175 | 19 | 188 |
| 186 | 40 | 176 | 98 | 112 | 134 | 120 | 122 | 124 | 110 | 132 | 146 | 68 | 204 | 58 |
| 39 | 41 | 65 | 161 | 159 | 100 | 125 | 118 | 123 | 144 | 85 | 83 | 179 | 203 | 205 |
| 206 | 52 | 180 | 82 | 97 | 114 | 128 | 115 | 136 | 117 | 147 | 162 | 64 | 192 | 38 |
| 37 | 23 | 63 | 67 | 93 | 142 | 103 | 140 | 137 | 138 | 101 | 177 | 181 | 221 | 207 |
| 12 | 212 | 231 | 166 | 92 | 153 | 90 | 155 | 88 | 157 | 84 | 113 | 13 | 32 | 232 |
| 233 | 222 | 42 | 86 | 163 | 80 | 165 | 77 | 168 | 75 | 170 | 171 | 145 | 22 | 11 |
| 1 | 66 | 200 | 45 | 198 | 47 | 196 | 49 | 194 | 51 | 214 | 53 | 230 | 43 | 243 |
| 182 | 224 | 21 | 220 | 25 | 218 | 27 | 216 | 29 | 213 | 33 | 210 | 7 | 189 | 16 |

$S_1 = 122 \quad S_3 = 3\times 122 \quad S_5 = 5\times 122 \quad S_7 = 7\times 122 \quad S_9 = 9\times 122$

$S_{11} = 11\times 122 \quad S_{13} = 13\times 122 \quad S_{15} = 15\times 122$

## Poursuivons :

À partir d'un carré M d'ordre n, magique ou pas, nous pouvons construire une bordure autour de M qui nous conduira à un carré magique M'd'ordre n + 2.

**Pour la suite, M sera presque normal** c'est-à-dire formé d'entiers $\geq 1$, tous différents.

**Le carré central est intouchable:**

Alors il se peut que la somme magique de M'ne soit pas un entier. Nous devrons accepter d'avoir des nombres non entiers dans la bordure.

Nous pourrons aussi avoir un entier pour somme de M'mais la bordure renfermera peut-être des négatifs que nous devrons accepter.

**Nous pouvons modifier le carré central :**

Si la somme de M'n'est pas un entier, alors elle est un nombre rationnel et nous pourrons, à l'aide d'un **facteur correcteur k (nous multiplions M' par k)**, obtenir que des entiers. S'il y a des négatifs, nous utiliserons **l'entier correcteur.**

Le carré magique qui suit possède dans son carré central les 9 premières puissances quatrièmes entières et sa somme magique est S = 7053.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2829 | 831 | 1972 | 112 | 1309 |
| 1549 | 1296 | 2401 | 256 | 1551 |
| 204 | 1 | 81 | 6561 | 206 |
| 1160 | 4096 | 625 | 16 | 1156 |
| 1311 | 829 | 1974 | 108 | 2831 |

Les trois carrés qui suivent sont magiques presque normaux. Aucun carré central n'est magique.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 28 | 32 | 33 | 55 |
| 24 | $6^2$ | $8^2$ | $3^2$ | 26 |
| 39 | $7^2$ | $5^2$ | $1^2$ | 45 |
| 31 | $4^2$ | $2^2$ | $9^2$ | 27 |
| 54 | 30 | 34 | 35 | 6 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 38 | 198 | 251 | 69 | 465 |
| 132 | $6^3$ | $8^3$ | $3^3$ | 134 |
| 275 | $7^3$ | $1^3$ | $5^3$ | 277 |
| 112 | $4^3$ | $2^3$ | $9^3$ | 108 |
| 464 | 200 | 249 | 71 | 37 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2829 | 831 | 1972 | 112 | 1309 |
| 1549 | $6^4$ | $7^4$ | $4^4$ | 1551 |
| 204 | $1^4$ | $3^4$ | $9^4$ | 206 |
| 1160 | $8^4$ | $5^4$ | $2^4$ | 1156 |
| 1311 | 829 | 1974 | 108 | 2831 |

Reprenons le carré de la page 26. Pour sa construction, il a fallu d'abord placer dans le carré central M les entiers 1, 16, 81, …, 4096, 6561. Selon la position des entiers dans M, nous avons trouvé que la somme magique S' de M' n'était pas un entier ou, lorsque S'était un entier, nous avons trouvé un négatif. Il fallait aussi éviter les répétitions dans la bordure. Mais le carré central est intouchable !!!

Finalement, après plusieurs essais, nous avons trouvé une disposition qui a permis l'obtention du carré magique M', presque normal.

Terminons avec ce carré magique presque normal d'ordre 7 dont le carré central est celui de Christian Boyer, un carré magique presque normal formé de 25 entiers carrés parfaits !!!

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 264 | 273 | 272 | 271 | 280 | 281 | 284 |
| 285 | $1^2$ | $2^2$ | $31^2$ | $3^2$ | $20^2$ | 265 |
| 260 | $22^2$ | $16^2$ | $13^2$ | $5^2$ | $21^2$ | 290 |
| 291 | $11^2$ | $23^2$ | $10^2$ | $24^2$ | $7^2$ | 259 |
| 258 | $12^2$ | $15^2$ | $9^2$ | $27^2$ | $14^2$ | 292 |
| 301 | $25^2$ | $19^2$ | $8^2$ | $6^2$ | $17^2$ | 249 |
| 266 | 277 | 278 | 279 | 270 | 269 | 286 |

La somme du carré central M est S = 1375 et celle du carré M'est S' = 1925. Le plus grand entier de la bordure est 301, le plus petit est 249.

Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[249\ ;\ 301]$qui contient 53 entiers.

Mais nous pouvons avoir mieux !!!

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 274 | 273 | 272 | 279 | 270 | 269 | 288 |
| 268 | $1^2$ | $2^2$ | $31^2$ | $3^2$ | $20^2$ | 282 |
| 283 | $22^2$ | $16^2$ | $13^2$ | $5^2$ | $21^2$ | 267 |
| 284 | $11^2$ | $23^2$ | $10^2$ | $24^2$ | $7^2$ | 266 |
| 264 | $12^2$ | $15^2$ | $9^2$ | $27^2$ | $14^2$ | 286 |
| 290 | $25^2$ | $19^2$ | $8^2$ | $6^2$ | $17^2$ | 260 |
| 262 | 277 | 278 | 271 | 280 | 281 | 276 |

Ici, les sommes sont les mêmes mais tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[260\ ;\ 290]$ qui contient 31 entiers. M et M'sont toujours magiques presque normaux.

**REMARQUE IMPORTANTE !!! Sur le plus grand minimum. Sur le plus petit maximum.**

Revoyons le deuxième carré de la page 27. Le maximum est 465 et dans la case opposée, sur la diagonale secondaire, nous trouvons 464. Dans ce cas, nous sommes assurés que 465 est le plus petit maximum. Si nous trouvons que m est le maximum et si nous avons m – 1 dans la case opposée à celle qui contient m, alors m est le plus petit maximum.

Le minimum est 37 et nous trouvons 38 dans sa case opposée. Nous sommes certains que 37 est le plus grand minimum.

De même dans le premier carré de la page 27. Le plus petit maximum est 55. Le minimum 6 a dans sa case opposée l'entier 11. Ici, nous ne sommes pas certains que 6 soit le plus grand minimum. Nous avons 6 et 11 mais aussi 7 et 10 avec 7 comme minimum. Donc 6 n'est pas le plus grand minimum. Voir le carré suivant qui a 7 comme minimum et 55 comme maximum.

Nous ne pouvons pas avoir 8 et 9 car 9 est déjà dans le carré central. Nous ne pouvons pas avoir 9 et 8 ou 10 et 7 car 9 et 10 ne sont plus des minimums.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 30 | 32 | 33 | 54 |
| 24 | $6^2$ | $8^2$ | $3^2$ | 26 |
| 31 | $7^2$ | $5^2$ | $1^2$ | 53 |
| 39 | $4^2$ | $2^2$ | $9^2$ | 19 |
| 55 | 28 | 34 | 35 | 7 |

Ce dernier carré renferme 55 comme plus petit maximum et 7 comme plus grand minimum.

Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[7\ ;\ 55]$ qui contient 49 entiers. Nous avons ici la meilleure bordure!!!

**Puis une autre preuve du théorème 15.11 :**

Nous avons comme carré central M, un n x n et avec la bordure, M', un n+2 x n+2 qui est magique. Alors la somme magique S'de M'est obtenu ainsi : nous nous baserons sur la somme de tous les nombres de M'. Nous trouvons :

$$(n+2)S' = nS' + 2S' = [(S'-d_1) + (S'-d_2) + (nS'-K) + (nS'-K)] + K$$

Ici, $K$, $d_1$, $d_2$ sont respectivement la somme de tous les nombres de M, de tous les nombres de la grande diagonale principale et de tous les nombres de la grande diagonale secondaire.

Dans les crochets, en rouge, nous avons la somme des nombres de la bordure. Finalement, nous trouvons :

$$nS' = d_1 + d_2 + K = S^*$$
$$S' = \frac{S^*}{n}$$

Si nous avons $S' \neq \dfrac{S^*}{n}$, alors M' ne peut pas être magique. Si nous avons $S' = \dfrac{S^*}{n}$, alors le théorème 15.12 nous assure que M'sera magique.

Pour M donné, S’est unique !!! Si N renferme les mêmes nombres que M mais ceux-ci sont placés différemment alors il se peut que S’ prenne une autre valeur.

Par exemple, M est presque normal et nous voulons M’magique presque normal. Si S’n’est pas un entier, alors en modifiant la position de certains entiers dans M, il se peut que S’ devienne entier.

C’est ce qui s’est produit avec le troisième carré de la page 27.

Pour changer S’, il est nécessaire de toucher au moins à une grande diagonale.

**Corollaire du théorème 15.11:**

Soit M, un carré magique normal d’ordre n. Nous voulons construire une bordure afin d’obtenir un carré magique M’normal d’ordre n + 2.

Cela est impossible !!!

Preuve :

La somme magique de M est $S = \frac{n(n^2+1)}{2}$. La somme magique du carré normal d’ordre n + 2 est $S' = \frac{(n+2)((n+2)^2+1)}{2} = \frac{(n+2)(n^2+4n+5)}{2}$.

Mais puisque M’provient de M avec une bordure, le théorème 15.11 nous indique que la somme magique de M’doit être $S' = \frac{(n+2)S}{n} = \frac{n+2}{n} \times \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{(n+2)(n^2+1)}{2}$ d’où la contradiction puisque $n^2+4n+5 \neq n^2+1$.

M’sera magique mais ne sera pas normal.

Si dans le carré M d'ordre $n$, nous trouvons un entier supérieur à $(n+2)^2$,
alors M' ne peut pas être normal.

Dans le carré suivant d'ordre 17, nous trouvons 27 carrés magiques !!! D'abord, le 17x17 de somme 5797 puis le 15x15 de somme 5115 et enfin, dans le 15x15, 25 carrés 3x3 dont les sommes vont de 699 à 1347. Tous les entiers de la bordure grise sont dans l'intervalle fermé $[1\,;\,681]$. Il en est de même de tous les entiers du 17x17.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 454 | 455 | 456 | 225 | 458 | 223 | 460 | 221 | 462 | 219 | 464 | 217 | 466 | 215 | 468 | 213 | 121 |
| 212 | 358 | 363 | 356 | 421 | 426 | 419 | 304 | 309 | 302 | 367 | 372 | 365 | 250 | 255 | 248 | 470 |
| 471 | 357 | 359 | 361 | 420 | 422 | 424 | 303 | 305 | 307 | 366 | 368 | 370 | 249 | 251 | 253 | 211 |
| 210 | 362 | 355 | 360 | 425 | 418 | 423 | 308 | 301 | 306 | 371 | 364 | 369 | 254 | 247 | 252 | 472 |
| 473 | 241 | 246 | 239 | 349 | 354 | 347 | 412 | 417 | 410 | 295 | 300 | 293 | 403 | 408 | 401 | 209 |
| 208 | 240 | 242 | 244 | 348 | 350 | 352 | 411 | 413 | 415 | 294 | 296 | 298 | 402 | 404 | 406 | 474 |
| 475 | 245 | 238 | 243 | 353 | 346 | 351 | 416 | 409 | 414 | 299 | 292 | 297 | 407 | 400 | 405 | 207 |
| 206 | 394 | 399 | 392 | 232 | 237 | 230 | 340 | 345 | 338 | 448 | 453 | 446 | 286 | 291 | 284 | 476 |
| 477 | 393 | 395 | 397 | 231 | 233 | 235 | 339 | 341 | 343 | 447 | 449 | 451 | 285 | 287 | 289 | 205 |
| 204 | 398 | 391 | 396 | 236 | 229 | 234 | 344 | 337 | 342 | 452 | 445 | 450 | 290 | 283 | 288 | 478 |
| 479 | 277 | 282 | 275 | 385 | 390 | 383 | 268 | 273 | 266 | 331 | 336 | 329 | 439 | 444 | 437 | 203 |
| 202 | 276 | 278 | 280 | 384 | 386 | 388 | 267 | 269 | 271 | 330 | 332 | 334 | 438 | 440 | 442 | 480 |
| 481 | 281 | 274 | 279 | 389 | 382 | 387 | 272 | 265 | 270 | 335 | 328 | 333 | 443 | 436 | 441 | 201 |
| 200 | 430 | 435 | 428 | 313 | 318 | 311 | 376 | 381 | 374 | 259 | 264 | 257 | 322 | 327 | 320 | 482 |
| 483 | 429 | 431 | 433 | 312 | 314 | 316 | 375 | 377 | 379 | 258 | 260 | 262 | 321 | 323 | 325 | 199 |
| 1 | 434 | 427 | 432 | 317 | 310 | 315 | 380 | 373 | 378 | 263 | 256 | 261 | 326 | 319 | 324 | 681 |
| 561 | 227 | 226 | 457 | 224 | 459 | 222 | 461 | 220 | 463 | 218 | 465 | 216 | 467 | 214 | 469 | 228 |

Appelons M, le carré magique de la page 33. Alors, le carré ci-haut s'écrit M + 228.

Mais pourquoi l'intervalle $[1\,;\,681]$? La première raison est que le carré magique d'ordre 15, avant de placer la bordure grise, était normal d'où nous avions déjà les entiers de 1 à 225.

Nous voulons que le carré M'd'ordre 17 soit presque normal. Le plus petit entier dans la bordure sera 226 soit 1921 – 1695 = 226. Mais 226 implique que nous aurons 0 dans la bordure.

Nous avons $S'-S=\frac{n+2}{n}\,\frac{n(n^2+1)}{2}-\frac{n(n^2+1)}{2}=\frac{(n^2+1)}{2}\,(n+2-n)=n^2+1.$

Le premier entier à placer dans la bordure est donc $n^2+1$, ici, 15x15 + 1 = 226. Nous aurons 226 avec 0 puis 227 avec – 1 puis 228 avec – 2, etc… Donc des négatifs dans la bordure. Nous aurons besoin de l'entier correcteur 228 ce qui agrandit les entiers. Le carré magique qui suit est celui obtenu avant d'utiliser l'entier correcteur déterminé par – 227 soit 228.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 226 | 227 | 228 | -3 | 230 | -5 | 232 | -7 | 234 | -9 | 236 | -11 | 238 | -13 | 240 | -15 | -107 |
| -16 | 130 | 135 | 128 | 193 | 198 | 191 | 76 | 81 | 74 | 139 | 144 | 137 | 22 | 27 | 20 | 242 |
| 243 | 129 | 131 | 133 | 192 | 194 | 196 | 75 | 77 | 79 | 138 | 140 | 142 | 21 | 23 | 25 | -17 |
| -18 | 134 | 127 | 132 | 197 | 190 | 195 | 80 | 73 | 78 | 143 | 136 | 141 | 26 | 19 | 24 | 244 |
| 245 | 13 | 18 | 11 | 121 | 126 | 119 | 184 | 189 | 182 | 67 | 72 | 65 | 175 | 180 | 173 | -19 |
| -20 | 12 | 14 | 16 | 120 | 122 | 124 | 183 | 185 | 187 | 66 | 68 | 70 | 174 | 176 | 178 | 246 |
| 247 | 17 | 10 | 15 | 125 | 118 | 123 | 188 | 181 | 186 | 71 | 64 | 69 | 179 | 172 | 177 | -21 |
| -22 | 166 | 171 | 164 | 4 | 9 | 2 | 112 | 117 | 110 | 220 | 225 | 218 | 58 | 63 | 56 | 248 |
| 249 | 165 | 167 | 169 | 3 | 5 | 7 | 111 | 113 | 115 | 219 | 221 | 223 | 57 | 59 | 61 | -23 |
| -24 | 170 | 163 | 168 | 8 | 1 | 6 | 116 | 109 | 114 | 224 | 217 | 222 | 62 | 55 | 60 | 250 |
| 251 | 49 | 54 | 47 | 157 | 162 | 155 | 40 | 45 | 38 | 103 | 108 | 101 | 211 | 216 | 209 | -25 |
| -26 | 48 | 50 | 52 | 156 | 158 | 160 | 39 | 41 | 43 | 102 | 104 | 106 | 210 | 212 | 214 | 252 |
| 253 | 53 | 46 | 51 | 161 | 154 | 159 | 44 | 37 | 42 | 107 | 100 | 105 | 215 | 208 | 213 | -27 |
| -28 | 202 | 207 | 200 | 85 | 90 | 83 | 148 | 153 | 146 | 31 | 36 | 29 | 94 | 99 | 92 | 254 |
| 255 | 201 | 203 | 205 | 84 | 86 | 88 | 147 | 149 | 151 | 30 | 32 | 34 | 93 | 95 | 97 | -29 |
| -227 | 206 | 199 | 204 | 89 | 82 | 87 | 152 | 145 | 150 | 35 | 28 | 33 | 98 | 91 | 96 | 453 |
| 333 | -1 | -2 | 229 | -4 | 231 | -6 | 233 | -8 | 235 | -10 | 237 | -12 | 239 | -14 | 241 | 0 |

Effectivement, nous trouvons l'entier – 227 à gauche dans l'avant dernière rangée. L'entier correcteur doit être $\geq 228$. Nous préférons prendre le plus petit !!!

## Résumons :

Soit M, un carré presque normal d'ordre n qui n'est pas obligatoirement magique. Nous voulons placer une bordure autour de M afin d'obtenir un carré magique M'd'ordre n + 2 presque normal et de somme magique S'. **Cela est-il toujours possible? La réponse est NON !!!**

**Cependant, nous verrons quand cela est possible.**

Prenons $S^* = c_1 + c_2 + ... + c_n + d_1 + d_2$ (voir page 2).

Si M'est magique, alors $S' = \frac{S^*}{n}$.

Donc si $S' \neq \frac{S^*}{n}$ alors M'ne sera pas magique.

Il est remarquable de constater que la somme magique S' de M' dépende uniquement des nombres contenus dans M ainsi que ceux qui occupent les deux grandes diagonales de M.

Si nous permutons dans M deux nombres qui ne sont pas sur les grandes diagonales, alors S'reste inchangée.

Avec les mêmes nombres dans M, si nous voulons changer S', alors il faudra toucher à au moins une des deux grandes diagonales.

Voici les quatre situations possibles :

**Situation 1 :** S'n'est pas un entier et nous pouvons modifier M.

S'est donc un nombre rationnel et la bordure ne peut pas contenir que des entiers.
Le **théorème 15.12** nous assure que M'existe. Le **théorème bêta** nous assure que nous aurons dans M'des entiers et quelques rationnels non entiers.

Si dans M', nous avons des négatifs, alors en ajoutant un entier convenablement choisi, nous n'aurons plus que des nombres positifs $(>0)$.

Quant aux rationnels, nous pourrons multiplier tous les nombres de M' par un entier convenablement choisi (le plus petit commun multiple des dénominateurs).

Ainsi M' contiendra que des entiers positifs et sera presque normal si nous avons su éviter les répétitions.

Nous avons modifié M et même si S' n'est pas un entier, M' presque normal est possible!!!

**Situation 2 :** S'n'est pas un entier et nous ne pouvons pas modifier M.

M'sera magique mais ne sera jamais presque normal !!!

En effet, nous aurons des rationnels non entiers dans la bordure et le carré central sera multiplié par un entier $\geq 2$ si nous voulons avoir que des entiers dans M'. Cela n'est pas possible puisque nous ne pouvons pas modifier M.

**Situation 3 :** S'est un entier et nous pouvons modifier M.

La somme magique de M'est donc $S' = \frac{S^*}{n}$ = entier. **Si M est magique**, alors le théorème alpha nous assure de trouver un M' qui sera magique presque normal.

Si M n'est pas magique, alors nous utiliserons l'algorithme du théorème bêta.

En général, que M soit magique ou pas, nous utiliserons l'algorithme du théorème bêta.

C'est ce que nous avons fait pour trouver les carrés magiques des pages 25, 27, 28, 29, 30 entre autres.

Nous verrons un exemple détaillé un peu plus bas.

## **Situation 4 :** S'est un entier et nous ne pouvons pas modifier M.

Nous allons utiliser l'algorithme du théorème bêta qui nous assure d'obtenir un carré magique M'.

L'algorithme du théorème bêta, voir page 13, constitue la meilleure façon de construire M' presque normal lorsque nous ne pouvons pas modifier M.

En respectant le modèle de la page 13, nous trouvons automatiquement un carré magique M'qui n'est peut-être pas presque normal. Cependant, M'pourra toujours contenir que des entiers.

Voyons l'exemple qui suit : un carré central M d'ordre 5 qui contient 25 nombres premiers plongé dans un carré magique M'presque normal d'ordre 7 et de somme magique S'= 427.

Observez que le carré central d'ordre 5 n'est pas magique !!!

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 72 | | | | | | | | 212 |
| | 34 | 106 | 44 | 24 | 58 | 54 | 107 | |
| | 52 | 59 | 73 | 17 | 151 | 13 | 62 | 114 |
| | 51 | 79 | 101 | 29 | 43 | 67 | 57 | 108 |
| | 10 | 31 | 109 | 83 | 37 | 149 | 8 | 18 |
| | 35 | 19 | 53 | 163 | 71 | 47 | 39 | 74 |
| | 140 | 23 | 11 | 89 | 7 | 41 | 116 | 256 |
| | 105 | 110 | 36 | 22 | 60 | 56 | 38 | |
| 212 | | 216 | 80 | 46 | 118 | 110 | | 72 |

Le plus grand entier de la bordure est 140, son plus petit est 8. Un seul nombre premier se trouve dans la bordure.

Dans les cases blanches, nous trouvons les $A_i$, les $B_j, D_1, D_2$ et $u = 34$ (voir page 13). Par exemple, les deux cases extrêmes de la diagonale principale doivent totaliser 72 et avec $u = 34$, nous avons 38 dans l'autre case. Dans la deuxième colonne à partir de la gauche, les cases extrêmes doivent totaliser 216 (106 + 110).

En général, ce procédé nous offre beaucoup de possibilités quant aux cases extrêmes (1 avec 215, 2 avec 214, …) par exemple.

Cela nous aide à éviter les répétitions et les négatifs !!!

Finalement, nous avons obtenu le carré magique presque normal suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 106 | 44 | 24 | 58 | 54 | 107 |
| 52 | 59 | 73 | 17 | 151 | 13 | 62 |
| 51 | 79 | 101 | 29 | 43 | 67 | 57 |
| 10 | 31 | 109 | 83 | 37 | 149 | 8 |
| 35 | 19 | 53 | 163 | 71 | 47 | 39 |
| 140 | 23 | 11 | 89 | 7 | 41 | 116 |
| 105 | 110 | 36 | 22 | 60 | 56 | 38 |

Ce carré magique n'est pas unique. Par exemple, nous pouvons prendre 30 et 42 pour les cases extrêmes de la diagonale principale.

Tous les entiers de la bordure sont dans l'intervalle fermé $[8\ ;\ 140]$ et tous les entiers de M'sont dans $[7\ ;\ 163]$.

## Problème 1:

Dans le carré suivant d'ordre 5, placez les entiers 23, 26, 31, 41, 53, 58, 59, 93 et 97 dans le carré central d'ordre 3 (les 9 cases vertes). Ensuite, complétez le carré d'ordre 5 en plaçant dans la bordure (les cases grises), des entiers > 0 de façon à obtenir un carré magique d'ordre 5 formé d'entiers tous > 0 et tous différents. Le carré cherché n'est pas unique !!!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

## **Problème 2** :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 109 | 29 | 151 | 211 | 157 | 13 | 127 |
| 197 | 229 | 83 | 23 | 103 | 31 | 131 |
| 67 | 11 | 89 | 227 | 163 | 233 | 7 |
| 113 | 139 | 61 | 107 | 37 | 239 | 101 |
| 191 | 47 | 179 | 167 | 17 | 137 | 59 |
| 79 | 149 | 181 | 19 | 97 | 73 | 199 |
| 41 | 193 | 53 | 43 | 223 | 71 | 173 |

Vous me dites que vous avez un carré magique M’, que je ne vois pas, presque normal d’ordre 7 formé de 49 nombres premiers.

Vous me donnez M son carré central d’ordre 5 qui est tout ce que je connais de votre carré :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 229 | 83 | 23 | 103 | 31 |
| 11 | 89 | 227 | 163 | 233 |
| 139 | 61 | 107 | 37 | 239 |
| 47 | 179 | 167 | 17 | 137 |
| 149 | 181 | 19 | 97 | 73 |

Dans la troisième colonne de M’, à partir de la gauche, une des cases extrêmes contient l’entier 53. Que renferme l’autre case extrême?

Voici la seule image que j'ai de M'.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ? | | | | |
| | 229 | 83 | 23 | 103 | 31 | |
| | 11 | 89 | 227 | 163 | 233 | |
| | 139 | 61 | 107 | 37 | 239 | |
| | 47 | 179 | 167 | 17 | 137 | |
| | 149 | 181 | 19 | 97 | 73 | |
| | | 53 | | | | |

## Problème 3 :

Complétez la bordure du carré incomplet du problème 2 afin que celui-ci soit magique presque normal. Il n'est pas nécessaire que tous les nombres de la bordure soient premiers.

Mais il n'est pas interdit d'essayer de placer seulement des nombres premiers dans la bordure !!! Votre carré pourrait être différent de celui de la page 39. Voici ce que nous avons tenté. En se servant de l'algorithme du théorème bêta et d'une table de nombres premiers, nous avons placé dans les cases bleues des nombres premiers en évitant les répétitions. Le carré central nous permet de trouver la somme magique du carré M'soit S'= 797.

## Rappelons que le carré M'est toujours le carré M muni d'une bordure.

Nous avons un certain contrôle sur les cases bleues mais pour que M'soit magique, nous n'avons pas de contrôle sur les cases vertes ni sur les cases oranges de la bordure.

Ainsi, nous avons réussi à placer 20 nombres premiers dans la bordure qui contient 24 cases. M'renferme 45 nombres premiers soit un peu plus de 91,8 %.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 277 | 193 | 151 | 3 | 109 | 43 | 21 |
| 131 | 229 | 83 | 23 | 103 | 31 | 197 |
| 7 | 11 | 89 | 227 | 163 | 233 | 67 |
| 101 | 139 | 61 | 107 | 37 | 239 | 113 |
| 59 | 47 | 179 | 167 | 17 | 137 | 191 |
| 75 | 149 | 181 | 19 | 97 | 73 | 203 |
| 147 | 29 | 53 | 251 | 271 | 41 | 5 |

Pour l’instant, nous avons un carré magique presque normal d’ordre 7 qui contient 45 nombres premiers sur 49 soit un peu plus de 91,8 %. Le carré M n’est pas magique et contient 25 nombres premiers. Nous savons que la bordure n’est pas unique.

Comment avons-nous placé 277 et 5? Nous avons S’ = 797 et 797 moins la somme des cases de la diagonale principale de M donne 282. Nous avons trouvé deux nombres premiers qui totalisent 282 soient 5 et 277 mais notre table de nombres premiers nous donne aussi 109 et 173 ou encore 131 et 151 ou encore 103 et 179 …

Nous voyons bien que nous avons le choix et que de choisir 5 et 277 n’est peut-être pas le meilleur !!! Mais comment choisir?

De même pour 193 et 29. Dans cette colonne, la somme des deux cases extrêmes est 222. Mais 71 + 151 = 222 est une autre possibilité. Aussi 73 + 149 = 222…

Pour remplir la bordure, les choix sont nombreux et il faut toujours éviter les répétitions !!!

Une fois faits, nos choix dans la première rangée nous conduisent à 21 dans la case verte et là, nous n’avons plus le choix !!! De même pour 147, 75 et 203. Une somme de nombres premiers n’est pas toujours un nombre premier. Par exemple, une somme d’un nombre pair de nombres premiers > 2 n’est jamais un nombre premier.

Nous avons tenté deux nouvelles bordures avec le maximum de nombres premiers. Les deux carrés qui suivent sont magiques presque normaux.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 241 | 271 | 79 | 428 |
| 127 | $6^3$ | $8^3$ | $3^3$ | 139 |
| 269 | $7^3$ | $1^3$ | $5^3$ | 283 |
| 122 | $4^3$ | $2^3$ | $9^3$ | 98 |
| 501 | 157 | 229 | 61 | 73 |

Dans la bordure du carré magique ci-haut, nous trouvons 12 nombres premiers sur 16. S'= 1021 est aussi un nombre premier. Donc 75% de nombres premiers dans la bordure.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2803 | 821 | 1949 | 113 | 1367 |
| 1499 | $6^4$ | $7^4$ | $4^4$ | 1601 |
| 199 | $1^4$ | $3^4$ | $9^4$ | 211 |
| 1299 | $8^4$ | $5^4$ | $2^4$ | 1017 |
| 1253 | 839 | 1997 | 107 | 2857 |

Dans la bordure du carré magique ci-haut, nous trouvons 13 nombres premiers. S'= 7053

Le treizième, 1367, n'était pas prévu !!! Donc, 81,25% de nombres premiers dans la bordure. Il arrivera très souvent qu'il manquera 4 nombres premiers dans les différentes bordures.

## Revoyez les carrés de la page 27.

Dans la bordure du deuxième, nous trouvons 4 nombres premiers (non recherchés) mais ici, nous en avons trouvé 12.

Dans la bordure du troisième, nous trouvons 2 nombres premiers (non recherchés) mais ici, nous en avons trouvé 13 dont un non recherché soit 1367.

**Nous pouvons avoir 100%** de nombres premiers dans une bordure. Par exemple, le carré d'ordre 7 du problème 2 ci-haut. Ce carré est magique et renferme 49 nombres premiers consécutifs (carré premier parfait). La bordure du carré central d'ordre 5 n'est formée que de nombres premiers !!!

De tels carrés premiers parfaits se trouvent sur Internet et les ordres vont de 4 à 63. Voir dans «Liens utiles», le site Libero Digiland. Il en est de même pour tous les carrés premiers d'ordres supérieurs à 2.

Soit M', un carré M d'ordre n muni d'une bordure. M'est magique d'ordre n + 2. La bordure est donc formée de 4n + 4 cases. Souvent, nous pourrons placer 4n nombres premiers dans la bordure.

Il faudra beaucoup de chance pour avoir 4n + 4 nombres premiers en utilisant l'algorithme du théorème bêta !!! Quelquefois, ce sera impossible.

| | | |
|---|---|---|
| 43 | 67 | 109 |
| 139 | 73 | 7 |
| 37 | 79 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 71 | 79 | 83 | 103 |
| 97 | 107 | 109 | 23 |
| 157 | 113 | 7 | 59 |
| 11 | 37 | 137 | 151 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 17 | 73 | 59 | 13 | 151 |
| 79 | 101 | 29 | 37 | 67 |
| 31 | 109 | 83 | 43 | 47 |
| 163 | 19 | 53 | 71 | 7 |
| 23 | 11 | 89 | 149 | 41 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 109 | 29 | 151 | 211 | 157 | 13 | 127 |
| 197 | 229 | 83 | 23 | 103 | 31 | 131 |
| 67 | 11 | 89 | 227 | 163 | 233 | 7 |
| 113 | 139 | 61 | 107 | 37 | 239 | 101 |
| 191 | 47 | 179 | 167 | 17 | 137 | 59 |
| 79 | 149 | 181 | 19 | 97 | 73 | 199 |
| 41 | 193 | 53 | 43 | 223 | 71 | 173 |

Tous ces carrés premiers impliquent « bordure formée exclusivement de nombres premiers ».

Vouloir une bordure formée exclusivement de nombres premiers à partir d'un carré central est une tout autre affaire !!!

**Solution du problème 1 :**

Plaçons les 9 entiers dans le carré central de façon que S* soit divisible par 3. Si ce n'est pas le cas, alors il faudra replacer les entiers de façon à changer la somme d'au moins une diagonale.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 78 | 55 | 39 | 57 | 40 |
| 68 | 31 | 41 | 59 | 70 |
| 65 | 26 | 58 | 5 3 | 67 |
| 43 | 97 | 93 | 23 | 13 |
| 15 | 60 | 38 | 77 | 79 |

Ensuite, nous utiliserons l'algorithme du théorème bêta. Avec ce carré central, la bordure contient le plus petit maximum soit 79. La somme magique du 5x5 est S'= 269.

## Solution du problème 2 :

De connaître le carré central M suffit pour trouver la somme magique S’ de M’. Nous trouvons S* = 3985 et $S' = \frac{3985}{5} = 797.$ Puis $797 - (83 + 89 + 61 + 179 + 181) - 53 = 151.$

## Solution du problème 3 :

Voir le carré de la page 41. Utilisez l’algorithme du théorème bêta.

**REMARQUE :**

Revenons à la situation 1 de la page 35. **Puisque nous pouvons modifier M**, nous pouvons à l’aide d’un **facteur correcteur** et d’un **entier correcteur,** rendre M’presque normal.

En effet, nous utiliserons le théorème alpha qui nous assure que M’contiendra que des entiers tous différents, si 2S/n est un entier. Rendre M’presque normal se fera à l’aide d’un entier correcteur (pour éliminer les négatifs).

Si 2S/n n’est pas un entier, alors 2S/n est un rationnel. Nous trouverons donc dans M’ quelques rationnels que nous éliminerons à l’aide d’un facteur correcteur. La nouvelle somme de M’sera devenue un entier. Enfin, si nécessaire, nous utiliserons un entier correcteur.

Va donc pour l’existence de M’, magique presque normal. Pratiquement, nous suggérons l’utilisation de l’algorithme du théorème bêta; ce que nous avons fait plusieurs fois dans cette annexe.

Si nous ne pouvons pas modifier M, alors nous suggérons de se servir de l’algorithme du théorème bêta.