Annexe 11 : Carrés magiques avec k nombres premiers

Pouvons-nous construire un carré magique presque normal d'ordre 7 qui renferme exactement cinq nombres premiers? La réponse est oui et la construction est toute simple :

a) Nous construisons d'abord un carré magique normal M d'ordre 7.
b) Puis nous ajoutons à chaque entier du carré, le nombre premier 491.
c) Le carré magique ainsi obtenu renferme exactement cinq nombres premiers qui sont 499, 503, 509, 521 et 523. De plus, celui-ci est formé de 49 entiers consécutifs.

Nous notons $p(M)$, le nombre de nombres premiers dans le carré magique normal M. Par exemple, si M est normal d'ordre 7, alors $p(M)=15$. Cela est équivalent au nombre de nombres premiers contenus dans la suite des entiers consécutifs allant de 1 à 49.

Aussi, nous notons $g_n(A)$, le nombre de nombres premiers contenus dans le carré magique presque normal A d'ordre n. Par exemple, nous avons $g_7(M+17)=11$.

Enfin, si nous ajoutons à tous les nombres du carré magique A, le nombre p, alors le nouveau carré magique ainsi obtenu se note $A+p$. Par exemple, $M+17$ est le carré magique M auquel nous avons ajouté le nombre 17 à tous les nombres de M.

Pour construire un carré magique A d'ordre $n \geq 3$ qui renferme k nombres premiers avec $0 \leq k \leq p(M)$, il suffit de trouver $M+p$ où p est un nombre premier à déterminer et M, un carré normal. **Ainsi nous obtiendrons un carré magique formé de n^2 nombres entiers consécutifs**. Nous allons présenter une démonstration de ce résultat mais avant, voyons les cas suivants :

$Ordre\ 3$

$g_3(M)=4=p(M)$

$g_3(M+3)=3$

$g_3(M+7)=2$

$g_3(M+19)=1$

$g_3(M+113)=0$

$Ordre\ 4$

$g_4(M)=6=p(M)$

$g_4(M+1)=7=p(M)+1$

$g_4(M+5)=5$

$g_4(M+11)=4$

$g_4(M+19)=3$

$g_4(M+79)=2$

$g_4(M+109)=1$

$g_4(M+523)=0$

$Ordre\ 5$

$g_5(M)=9=p(M)$

$g_5(M+2)=8$

$g_5(M+3)=7$

$g_5(M+11)=6$

$g_5(M+31)=5$

$g_5(M+71)=4$

$g_5(M+109)=3$

$g_5(M+197)=2$

$g_5(M+1123)=1$

$g_5(M+1327)=0$

Ordre 6

$g_6(M) = 11 = p(M)$

$g_6(M+1) = 12 = p(M)+1$

$g_6(M+3) = 10$

$g_6(M+13) = 9$

$g_6(M+19) = 8$

$g_6(M+59) = 7$

$g_6(M+89) = 6$

$g_6(M+109) = 5$

$g_6(M+293) = 4$

$g_6(M+503) = 3$

$g_6(M+1237) = 2$

$g_6(M+1321) = 1$

$g_6(M+15683) = 0$

Ordre 7

$g_7(M) = 15 = p(M)$

$g_7(M+2) = 14$

$g_7(M+3) = 13$

$g_7(M+7) = 12$

$g_7(M+17) = 11$

$g_7(M+43) = 10$

$g_7(M+47) = 9$

$g_7(M+107) = 8$

$g_7(M+113) = 7$

$g_7(M+281) = 6$

$g_7(M+491) = 5$

$g_7(M+887) = 4$

$g_7(M+1307) = 3$

$g_7(M+2153) = 2$

$g_7(M+9551) = 1$

$g_7(M+19609) = 0$

Ordre 8

$g_8(M) = 18 = p(M)$

$g_8(M+2) = 17$

$g_8(M+5) = 16$

$g_8(M+13) = 15$

$g_8(M+23) = 14$

$g_8(M+31) = 13$

$g_8(M+61) = 12$

$g_8(M+83) = 11$

$g_8(M+113) = 10$

$g_8(M+241) = 9$

$g_8(M+281) = 8$

$g_8(M+491) = 7$

$g_8(M+1301) = 6$

$g_8(M+1307) = 5$

$g_8(M+1327) = 4$

$g_8(M+5573) = 3$

$g_8(M+18593) = 2$

$g_8(M+19609) = 1$

$g_8(M+31397) = 0$

Ordre 9

$g_9(M) = 22 = p(M)$

$g_9(M+3) = 21$

$g_9(M+5) = 20$

$g_9(M+7) = 19$

$g_9(M+13) = 18$

$g_9(M+19) = 17$

$g_9(M+43) = 16$

$g_9(M+67) = 15$

$g_9(M+107) = 14$

$g_9(M+109) = 13$

$g_9(M+263) = 12$

$g_9(M+283) = 11$

$g_9(M+463) = 10$

$g_9(M+883) = 9$

$g_9(M+1129) = 8$

$g_9(M+1307) = 7$

$g_9(M+1321) = 6$

$g_9(M+1327) = 5$

$g_9(M+7351) = 4$

$g_9(M+17209) = 3$

$g_9(M+31393) = 2$

$g_9(M+38461) = 1$

$g_9(M+155921) = 0$

Pour les ordres de 10 à 13, nous allons utiliser la notation suivante par économie d'espace : nous écrirons $(10\ ;\ 19\ ;\ 22)$ pour indiquer que le carré est d'ordre 10, que nous avons $M+19$ et que ce dernier renferme 22 nombres premiers.

Ordre 10

(10 ; 0 ; 25) (10 ; 1 ; 26) (10 ; 5 ; 24) (10 ; 17 ; 23) (10 ; 19 ; 22) (10 ; 23 ; 21) (10 ; 43 ; 20)
(10 ; 47 ; 19) (10 ; 89 ; 18) (10 ; 109 ; 17) (10 ; 199 ; 16) (10 ; 241 ; 15) (10 ; 317 ; 14) (10 ; 461 ; 13)
(10 ; 467 ; 12) (10 ; 1109 ; 11) (10 ; 1297 ; 10) (10 ; 1303 ; 9) (10 ; 1307 ; 8) (10 ; 1321 ; 7)
(10 ; 5903 ; 6) (10 ; 18553 ; 5) (10 ; 18797 ; 4) (10 ; 35603 ; 3) (10 ; 35617 ; 2) (10 ; 155893 ; 1)
(10 ; 370261 ; 0)

Ordre 11

(11 ; 0 ; 30) (11 ; 2 : 29) (11 ; 3 ; 28) (11 ; 5 ; 27) (11 ; 13 ; 26) (11 ; 23 ; 25) (11 ; 41 ; 24) (11 ; 67 ; 23)
(11 ; 89 ; 22) (11 ; 101 ; 21) (11 ; 181 ; 20) (11 ; 241 ; 19) (11 ; 283 ; 18) (11 ; 433 ; 17) (11 ; 463 : 16)
(11 ; 683 ; 15) (11 ; 887 ; 14) (11 ; 1291 ; 13) (11 ; 1297 ; 12) (11 ; 1301 ; 11) (11 ; 3041 ; 10) (11 ; 5879 ; 9)
(11 ; 5881 ; 8) (11 ; 18539 ; 7) (11 ; 23371 ; 6) (11 ; 35593 ; 5) (11 ; 35597 ; 4) (11 ; 35603 ; 3)
(11 ; 204173 ; 2) (11 ; 370247 ; 1) (11 ; 1357201 ; 0)

Ordre 12

(12 ; 0 ; 34) (12 ; 2 ; 33) (12 ; 3 ; 32) (12 ; 11 ; 31) (12 ; 17 ; 30) (12 ; 31 ; 29) (12 ; 43 ; 28)
(12 ; 71 ; 27) (12 ; 73 ; 26) (12 ; 109 ; 25) (12, 181 ; 24) (12 ; 197 ; 23) (12 ; 199 ; 22) (12 ; 283 ; 21)
(12 ; 467 ; 20) (12 ; 659 ; 19) (12 ; 661 ; 18) (12 ; 1123 ; 17) (12 ; 1129 ; 16) (12 ; 2089 ; 15)
(12 ; 2393 ; 14) (12 ; 4273 ; 13) (12 ; 5233 ; 12) (12 ; 5879 ; 11) (12 ; 5881 ; 10) (12 ; 18523 ; 9)
(12 ; 23371 ; 8) (12 ; 33967 ; 7) (12 ; 35597 ; 6) (12 ; 66191 ; 5) (12 ; 69499 ; 4) (12 ; 268291 ; 3)
(12 ; 396719 ; 2) (12 ; 1561891 ; 1) (12 ; 2010733 ; 0)

Ordre 13

(13 ; 0 ; 39) (13 ; ; 38) (13 ; ;37) (13 ; ; 36) (13 ; 2 3 7 17 ; 35) (13 ; 19 ; 34) (13 ; 41 ; 33) (13 ; 47 ; 32)
(13 ; 53 ; 31) (13 ; 107 ; 30) (13 ; 137 ; 29) (13 ; 167 ; 28) (13 ; 197 ; 27) (13 ; 283 ; 26)
(13 ; 383 ; 25) (13 ; 467 ; 24) (13 ; 647 ; 23) (13 ; 683 ; 22) (13 ; 1097 ; 21) (13 ; 1103 ; 20)
(13 ; 1237 ; 19) (13 ; 1801 ; 18) (13; 2417 ; 17) (13 ; 2447 ; 16) (13 ; 2477 ; 15) (13 ; 5867 ; 14)
(13 ; 6373 ; 13) (13 ; 11503 ; 12) (13 ; 18541 ; 11) (13 ; 18803 ; 10) (13 ; 33941 ; 9)
(13 ; 35617 ; 8) (13 ; 69497 ; 7) (13 ; 69499 ; 6) (13 ; 175081 ; 5) (13 ; 250501 ; 4)
(13 ; 749471 ; 3) (13 ; 1320437 ; 2) (13 ; 4 652 317 ; 1) (13 ; 17 051 707 ; 0)

Démontrons maintenant les théorèmes 14.17 et 14.18 :

Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous pouvons construire un carré magique presque normal qui contiendra n^2 entiers consécutifs parmi lesquels il y aura exactement k nombres premiers et ce, pour toutes les valeurs de k qui vérifient :

$$0 \leq k \leq p(M)$$

Ce carré aura la forme $M + p$ avec M , un carré normal et p, un nombre premier.

Pour construire un carré magique presque normal formé de n^2 nombres entiers consécutifs, il suffit de considérer les suites suivantes :

1) Suite 1 : elle contient tous les entiers de 1 *à* n^2. Suite 2 : elle contient tous les entiers de 2 *à* n^2+1. De façon générale, la suite r contient tous les entiers de r *à* n^2+r-1.
2) La suite r est obtenue par un déplacement de ($r-1$) unités vers la droite, de la suite 1.
3) Nous savons construire un carré magique avec une suite de n^2 nombres entiers consécutifs.
4) Il existe une suite J d'entiers consécutifs tous ≥ 1 , **aussi longue que nous voulons**, laquelle ne renferme aucun nombre premier. (Voir (*) dans 14.13 et le problème 61 de 14.18).
5) Nous allons considérer ici toutes les suites de n^2 entiers consécutifs, tous ≥ 1, avec $n \geq 3$.
6) À chaque déplacement vers la droite, la suite peut perdre un seul nombre premier ou elle peut gagner un seul nombre premier ou son nombre de nombres premiers reste inchangé.
7) Puisqu'il y aura un déplacement qui conduira obligatoirement à une suite incluse dans J, alors nous sommes certains qu'il y aura au moins une suite qui contiendra k nombres premiers et ce, pour toutes les valeurs de k qui vérifient $0 \leq k \leq p(M)$.
8)

$$\boxed{p,\ p+1,\ p+2,\ p+3, \ldots,\ p+n^2-1} \qquad \boxed{q}$$

a) En vert, nous avons une suite de n^2 entiers consécutifs ≥ 1 qui contient exactement k nombres premiers. C'est la suite (1).
b) Nous allons la déplacer d'une unité vers la droite pour obtenir la suite (2) :

p	$p+1,\ p+2,\ p+3,\ldots,\ p+n^2-1,\ q$

c) Si $p\ et\ q$ sont premiers, alors la suite (2) contient k nombres premiers.
d) Si $p\ et\ q$ ne sont pas premiers, alors la suite (2) contient k nombres premiers.
e) Si p est premier et q est non premier, alors la suite (2) contient $k-1$ nombres premiers.
f) Si p n'est pas premier et si q est premier, alors la suite (2) contient $k+1$ nombres premiers.
g) Ainsi, nous voyons que la suite (2) qui contient $k-1$ nombres premiers est précédée par le nombre premier p. De plus, il est clair que $q = p+n^2$.
h) Les nombres de la suite (2) forment donc un carré magique de la forme $M + p$ où M est un carré magique normal et p, un nombre premier.

Nous venons de montrer que dès que deux suites consécutives $(1)\ et\ (2)$ formées de n^2 entiers consécutifs tous ≥ 1 renferment respectivement $k\ et\ k-1$ nombres premiers, alors la suite (2) est précédée par un nombre premier.

Voir le problème 6 à la fin de ce fichier.

Il est possible que $g_n(M+1) = p(M)+1$; pour $3 \leq n \leq 13$, cela se produit avec $n = 4, 6\ et\ 10.$ Par exemple, avec $n=10$, $p(M) = 25\ et\ g_{10}(M+1) = 26.$ Si A est un carré magique presque normal qui renferme cent entiers consécutifs, alors $g_{10}(A) \leq 50.$ Ainsi, nous savons :

a) Qu'un tel carré ne peut pas contenir 51 nombres premiers ou plus.
b) Qu'un tel carré peut contenir de 0 à 26 nombres premiers.
c) Que pour obtenir, par exemple, un tel carré avec trois nombres premiers, il suffit de faire $M + 35603.$

Toujours avec $n=10$, nous savons que le nombre maximum de nombres premiers est $50.$
Pouvons-nous améliorer cette borne supérieure? La réponse est oui.

Pour établir la borne 50, nous construisons cinquante couples avec les cent entiers consécutifs (les deux premiers, les deux suivants, etc.). Dans chaque couple, nous trouverons au plus un nombre premier sauf peut-être dans le couple (2 ; 3) mais avec $n \geq 3$, nous sommes certains d'avoir le couple (8 ; 9) si nous avons (2 ; 3); cela nous assure que nous aurons au maximum cinquante nombres premiers.

Trouvons une meilleure borne supérieure pour notre carré magique presque normal d'ordre n formé de n^2 entiers consécutifs. Appelons E, la partie entière de $\frac{n^2}{6}$. Nous aurons donc E groupes de six entiers consécutifs. Si le plus petit entier est ≥ 4, alors chaque groupe renfermera deux nombres premiers au plus. En effet, si nous avions trois nombres premiers, nous aurions alors un triplet de nombres premiers jumeaux ce qui est impossible car il n'en existe qu'un seul soit (3 ; 5 ; 7).

Voyons maintenant les trois cas suivants :

Cas 1 : le plus petit entier est ≥ 4

Le nombre maximum de nombres premiers est déterminé en fonction du reste obtenu en divisant n^2 par 6.

Reste = R; nombre maximum de nombres premiers = A

R	A
0	$2E$
1	$2E+1$
2	$2E+1$
3	$2E+2$
4	$2E+2$
5	$2E+2$

Par exemple :

Un carré A presque normal d'ordre 10 formé de cent entiers consécutifs dont le plus petit est 5 possède au maximum 34 nombres premiers. En effet, $100/6$ donne $E=16$ avec 4 comme reste. Le tableau ci-haut nous donne $2E+2=34$. Plus précisément, il en possède 25. Notez que $g_{10}(M+4) = 25 = g_{10}(M)$.

Nous avions $g_{10}(A) \leq 50$ mais maintenant, nous avons $g_{10}(A) \leq 34$, une bien meilleure borne supérieure!!

Cas 2 : le plus petit entier est 1 ou 3

Les six premiers entiers nous donnent trois nombres premiers d'où le tableau :

R	A
0	$2E+1$
1	$2E+2$
2	$2E+2$
3	$2E+3$
4	$2E+3$
5	$2E+3$

Cas 3 : le plus petit entier est 2

Dans ce cas, les six premiers entiers nous donnent quatre nombres premiers d'où le tableau :

R	A
0	$2E+2$
1	$2E+3$
2	$2E+3$
3	$2E+4$
4	$2E+4$
5	$2E+4$

Donc si nous avons un carré magique d'ordre $n \geq 3$, presque normal et formé de n^2 entiers consécutifs, alors $2E+4$ est le nombre maximum de nombres premiers que peut contenir notre carré magique (borne supérieure). De plus, la connaissance du reste de la division de n^2 par 6 permet d'améliorer cette borne supérieure.

Par contre, avec une information supplémentaire, soit le plus petit entier du carré, cela nous permet également d'améliorer la borne supérieure.

Exemple 1 :

Le carré magique est d'ordre 8, il est presque normal et renferme 64 entiers consécutifs dont le plus petit est 7. Nous trouvons $E=10$ avec 4 pour reste. Le premier tableau ci-haut nous indique que le nombre maximum de nombres premiers dans notre carré est 22.

a) Notre carré magique est $M+6$.
b) Il renferme 16 nombres premiers.
c) $g_8(M+5)=16=g_8(M+6)$.

d) Si vous nous dites que $g_8(M+5)=16$ et que c'est la première fois que vous trouvez 16, alors nous pouvons affirmer que $g_8(M+4)=17.$ (Voir ordre 8, page 3 ci-haut).

Exemple 2 :

Un carré magique normal d'ordre 60 possède au maximum 1201 nombres premiers, selon le deuxième tableau où $E=600$ avec 0 comme reste.

Pouvons-nous encore faire mieux? La réponse est oui!!!

Au lieu de prendre des groupes de six entiers consécutifs, nous allons prendre des groupes de trente. Puisque le carré magique est au moins presque normal, le plus petit entier sera $\geq 1.$ L'idée ici est la suivante : les entiers d'un groupe de trente entiers consécutifs ont la forme :

(1) $30k+1$; $30k+2$; $30k+3$; $30k+4$; $30k+5$; $30k+6$; ... ; $30k+29$; $30k+30$

Un entier de la forme $30k+3$ sera un nombre premier si et seulement si $k=0.$ Par contre, un entier de la forme $30k+7$ peut être premier même si $k\neq 0.$ Nous dirons que $30k+7$ est un **candidat** (peut donner un nombre premier si $k\neq 0$). Dans la liste (1), il est facile de vérifier que nous avons seulement huit candidats qui sont :

$$30k+1 \; ; \; 30k+7 \; ; \; 30k+11 \; ; \; 30k+13 \; ; \; 30k+17 \; ; \; 30k+19 \; ; \; 30k+23 \; ; \; 30k+29$$

Seulement $30k+2$, $30k+3 \, et \, 30k+5$ sont premiers si et seulement si $k=0.$

Voyons les cas suivants :

Cas 1 : le plus petit entier est ≥ 6

Les groupes de trente entiers consécutifs renferment au plus huit nombres premiers. Appelons $E,$ la partie entière de $\frac{n^2}{30}$ et R, le reste de la division de $n^2 \, par \, 30.$ Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E.$ Les R entiers consécutifs qui restent donnent au plus huit autres nombres premiers. Nous avons déjà une première borne supérieure :

$$8E+8$$

Dans un cas particulier, il est possible d'améliorer la borne supérieure. Par exemple, R = 1 lorsque $n=19.$ Dans ce cas, la borne supérieure est :

$$8E+1=97 \text{ au lieu de } 104.$$

Cas 2 : le plus petit entier est 5

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+1$ puisque le premier groupe de trente renferme neuf nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+9$$

Cas 3 : le plus petit entier est 4

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+1$ puisque le premier groupe de trente renferme neuf nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+9$$

Cas 4 : le plus petit entier est 3

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+2$ puisque le premier groupe de trente renferme dix nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+10$$

Cas 5 : le plus petit entier est 2

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+3$ puisque le premier groupe de trente renferme onze nombres premiers. Tous les autres groupes de trente en renferment huit au plus. Il faudra ensuite tenir compte des R entiers consécutifs qui restent et qui peuvent donner au maximum huit autres nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+11$$

Cas 6 : le plus petit entier est 1

Le nombre maximum de nombres premiers sera au moins $8E+2$ car le premier groupe de trente renferme dix nombres premiers. Notre première borne supérieure sera :

$$8E+10$$

La borne supérieure peut être améliorée comme dans le cas 1.

Exemple 3 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique normal d'ordre 12?

Nous avons $144/30 = 4 \; reste \; 24$. Nous sommes dans le cas 6 d'où le nombre maximum de nombres premiers est donné par $8E+10$ soit $8\times4+10 = 42$. Le nombre exact est 34.

Exemple 4 :

Comparez les trois procédés dans l'exemple 3.

$144/2 = 72$
$144/6 = 24 \; et \; 2\times24+1 = 49$
$144/30 = 4 \; avec \; reste \; 24 \; et \; 8\times4+10 = 42$

Exemple 5 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique normal d'ordre 60?

Nous sommes dans le cas 6 et $3600/30 = 120$ avec aucun reste. C'est pourquoi le nombre maximum de nombres premiers est $8E+2$ soit $8\times120 + 2 = 962$. Notez que $8E+10$ donnerait 972. Le nombre exact est 503. Comparons maintenant les trois procédés :

$3600/2 = 1800$
$3600/6 = 600 \; et \; 2E+1 \; donne \; 2\times600+1 = 1201$
$3600/30 = 120 \; et \; 8E+2 = 8\times120+2 = 962$

Exemple 6 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique normal d'ordre 11?

Nous sommes dans le cas 6 et $121/30 = 4$ avec 1 comme reste. Le nombre maximum de pour les nombres premiers est donc $8\times4 + 2 = 34$ quatre premiers groupes de trente. Puisque R = 1, la borne supérieure devient 35. Le nombre exact est 30. Les trois méthodes nous donnent : $61, \; 42 \; et \; 35$.

Exemple 7 :

Quel est le nombre maximum de nombres premiers dans un carré magique d'ordre 20 formé de 400 entiers consécutifs dont le plus petit est 2?

Nous sommes dans le cas 5 et $400/30 = 13$ avec 10 comme reste. Le nombre maximum de nombres premiers est $8E+3 = 8\times 13 + 3 = 107$ pour les treize premiers groupes de trente. Les 10 entiers qui restent donnent au maximum 4 nombres premiers. La borne supérieure est donc $107+4=111$. Le nombre exact est 79. Les trois méthodes nous donnent : $200, 136, 111$.

> Relativement aux groupes de trente entiers consécutifs, dans tous les cas, la première borne supérieure est $8E+11$.

Nous allons maintenant présenter une toute nouvelle conjecture qui sera justifiée par un grand nombre de résultats expérimentaux. La voici :

Conjecture 1 :

> Soit W un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ qui contient n^2 entiers consécutifs. Le nombre maximum de nombres premiers contenus dans W est $p(M)$ ou $p(M)+1$.

Avec MATHEMATICA, nous avons fabriqué un programme appelé **«nombre de premiers»** qui nous permet de trouver le nombre de nombres premiers dans la suite des entiers consécutifs allant de $1 \text{ à } n^2$, puis de $2 \text{ à } n^2+1$, $3 \text{ à } n^2+2$, etc. Autrement dit, nous déplaçons la première suite d'une unité vers la droite, puis la suite ainsi obtenue est déplacée d'une unité vers la droite et ainsi de suite. Pour chaque suite de $1 \text{ à } n^2$, $n \geq 3$, nous avons effectué 600 000 déplacements dont le premier est de zéro unité et tous les autres, d'une unité vers la droite. Cela permet de construire 600 000 carrés magiques dont le premier est normal.

Le programme compte le nombre de nombres premiers dans chaque suite, donc le nombre de nombres premiers dans chaque carré magique qui correspond à chaque suite. Vous trouverez ce programme sur le CD. Le problème 8 vous demande de démontrer que la conjecture est vraie pour $n = 3, 4, 5, 6, 7 \; et \; 8$.

Nous rappelons qu'il est toujours possible et facile de construire un carré magique d'ordre n avec n^2 entiers consécutifs.

Le tableau T_1 suivant montre, pour 600 000 carrés magiques observés pour chaque valeur de n :

Colonne 1 (à gauche), l'ordre du carré. Nous avons les ordres de 3 à 30.

Colonne 2, le nombre $p(M)$ de nombres premiers contenus dans M et entre parenthèses, le nombre de carrés qui possèdent $p(M)$ nombres premiers, parmi les 600 000 carrés magiques observés. Rappelons que M est un carré magique normal et que $W = M + k$ où k est un entier qui vérifie $0 \leq k \leq 599\ 999$.

Colonne 3, le nombre $p(M)+1$ de nombres premiers contenus dans $M+1$ et entre parenthèses, le nombre de carrés qui possèdent $p(M)+1$ nombres premiers, parmi les 600 000 carrés magiques observés.

Colonne 4, le nombre maximum de nombres premiers que possèdent tous les carrés magiques W.

Ainsi, pour $n = 12$, les 600 000 carrés magiques possèdent au maximum 34 nombres premiers. Nous voyons qu'il en existe seulement deux qui possèdent 34 nombres premiers soit le normal $M \ et \ M+1$.

Pour $n = 26$, les 600 000 carrés magiques possèdent au maximum 123 nombres premiers. Seul $M+1$ en possède 123 et deux seulement en possèdent 122 soit le normal $M \ et \ M+2$.

Le tableau T_2 est le même mais seulement pour quelques ordres supérieurs à 30.

Enfin, le programme «nombre de premiers» sur le CD permet de savoir combien de carrés magiques parmi les 600 000 possèdent λ nombres premiers avec $0 \leq \lambda \leq p(M) \ ou \ p(M)+1$.

Par exemple, avec $n = 4$, nous obtenons :

$$\{121\ 440\ ;\ 242\ 561\ ;\ 173\ 490\ ;\ 54\ 438\ ;\ 7698\ ;\ 368\ ;\ 4\ ;\ 1\}$$

ce qui signifie que 121 440 carrés magiques parmi les 600 000 renferment aucun nombre premier, 242 561 renferment un seul nombre premier, 173 490 renferment deux nombres premiers, 54 438 renferment trois nombres premiers, 7698 renferment quatre nombres premiers, 368 renferment cinq nombres premiers et enfin, quatre renferment $p(M) = 6$ nombres premiers et un seul renferme $p(M)+1 = 7$ nombres premiers (voir le tableau T_1, $n = 4$).

Notons que dans le programme «nombre de premiers», nous pouvons remplacer 600 000 par l'entier ≥ 2 que nous voulons.

n	$p(M)$	$p(M)+1$	Borne Sup
3	4(120)	5(0)	4
4	6(4)	7(1)	7
5	9(2)	10(0)	9
6	11(2)	12(1)	12
7	15(2)	16(0)	15
8	18(2)	19(0)	18
9	22(3)	23(0)	22
10	25(6)	26(1)	26
11	30(2)	31(0)	30
12	34(2)	35(0)	34
13	39(2)	40(0)	39
14	44(4)	45(1)	45
15	48(4)	49(0)	48
16	54(2)	55(1)	55
17	61(2)	62(0)	61
18	66(2)	67(0)	66
19	72(2)	73(0)	72
20	78(2)	79(1)	79
21	85(3)	86(0)	85
22	92(2)	93(0)	92
23	99(2)	100(0)	99
24	105(2)	106(1)	106
25	114(2)	115(0)	114
26	122(2)	123(1)	123
27	129(2)	130(0)	129
28	137(2)	138(0)	137
29	146(2)	147(0)	146
30	154(2)	155(0)	154

T_1

n	$p(M)$	$p(M)+1$	Borne sup
33	181(4)	182(0)	181
38	228(2)	229(0)	228
50	367(2)	368(0)	367
60	503(2)	504(0)	503
74	722(4)	723(1)	723
99	1208(3)	1209(0)	1208
100	1229(2)	1230(0)	1229
135	2088(2)	2089(0)	2088
142	2281(2)	2282(0)	2281

T_2

Le programme **«nombre de premiers»** nous apprend combien de nombres premiers se trouvent dans un intervalle de longueur n^2 donc dans un carré magique d'ordre n.

Il nous donne également le nombre de nombres premiers qui se trouvent dans tous les intervalles de longueur n^2 tels que le premier entier de l'intervalle varie de $1\ à\ 600\ 000$ ou tout autre entier désiré. Par exemple, nous pouvons remplacer $600000\ par\ 10\ 000000$.

Gardons $600\ 000$. Le premier résultat que nous obtenons (avec le programme) est une liste de 600000 nombres entiers qui indiquent le nombre de nombres premiers contenus dans chaque intervalle. Le premier entier de la liste indique le nombre de nombres premiers contenus dans l'intervalle de $1\ à\ n^2$, le deuxième entier indique combien de nombres premiers se trouvent dans l'intervalle de $2\ à\ n^2+1$, etc. Par exemple, pour $n=12$, le premier entier de la liste sera 34, le deuxième sera aussi 34, le troisième sera 33, puis 32, 32, etc.

Le second résultat est une liste d'entiers qui indiquent le nombre de carrés magiques presque normaux formés d'entiers consécutifs qui possèdent 0 nombre premier, 1 nombre premier, 2 nombres premiers, etc. **Voyons un exemple avec n = 5 :**

La première liste que nous obtenons renferme 600 000 entiers et commence par 9, 9, 8, 7, 8, 7, … . Elle nous indique que le premier carré magique contient neuf nombres premiers (c'est le carré normal), que le deuxième en contient neuf, que le troisième en contient huit, etc.

La seconde liste est la suivante :

(*) $\{45925\ ;153071\ ;\ 202816\ ;136478\ ;\ 50548\ ;10030\ ;1071\ ;\ 56\ ;\ 3\ ;\ 2\ ;\ 0\}$

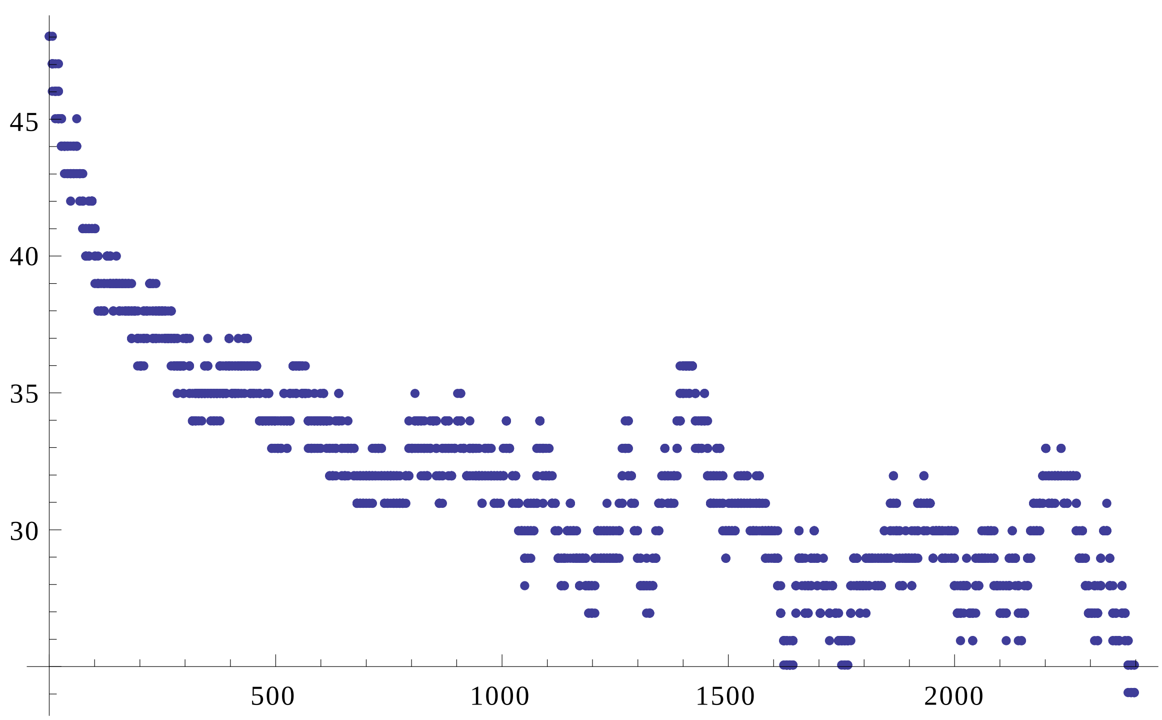
Cela nous apprend que:

45 925 carrés magiques, parmi les 600 000, possèdent aucun nombre premier; 153 071 en contiennent un seul; 202 816 en possèdent deux; 136 478 en contiennent trois; 50 548 en contiennent quatre; 10 030 en ont cinq; 1071 en ont six, 56 en ont sept; 3 en ont huit; 2 en ont 9 = p(M) et aucun en ont 10 = p(M) + 1.

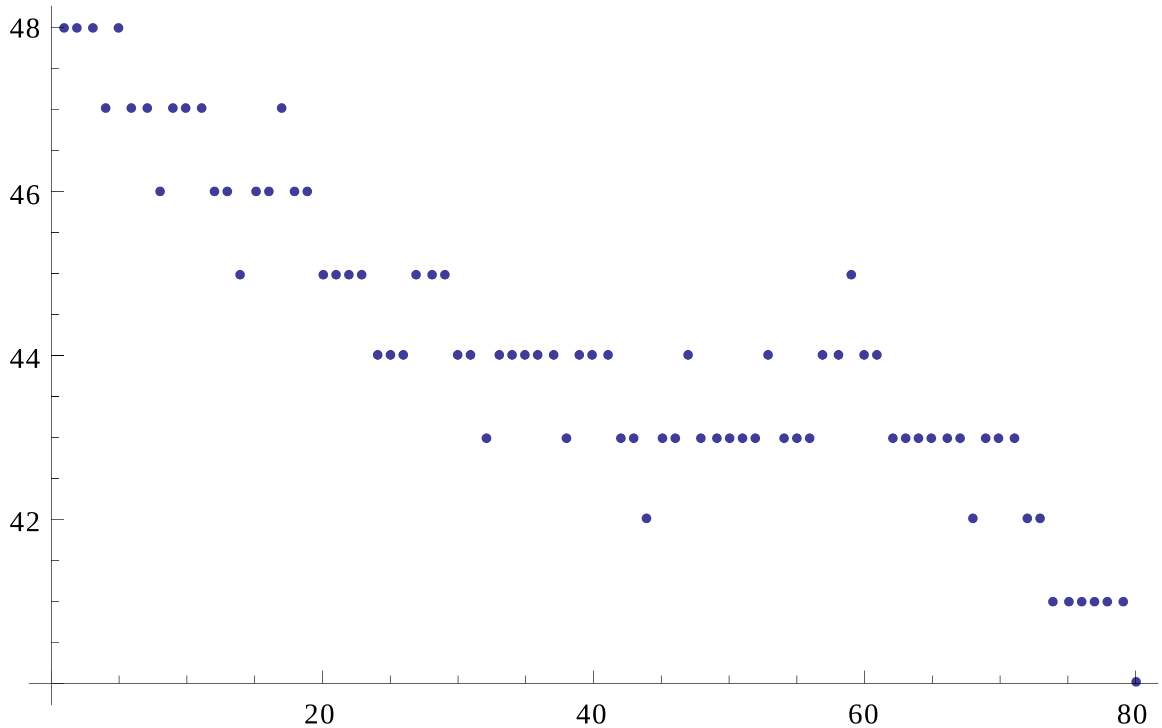
Puisque nous avons seulement deux 9, alors il est impossible d'avoir une suite de vingt cinq entiers consécutifs, parmi les 600 000 suites, qui contienne dix nombres premiers. En effet, après le second 9, nous sommes passés à 8. Donc pour avoir 10, il faudrait avoir un nouveau 9 (pourquoi?) or nous en avons que deux sur 600 000. Pourrait-il y avoir un 10 après 600 000 déplacements?

Pour n = 12, n = 15, n = 27 et n = 142, nous sommes passés de 600 000 à 10 000 000 de déplacements et nous n'avons pas dépassé p(M) dans chaque cas.

Avec n = 15, le graphique ci-dessous montre comment varie le nombre de nombres premiers dans les intervalles définis par k = 1 jusqu'à k = 2400, k étant le premier entier de l'intervalle :



Voyons de plus près avec k = 1 jusqu'à k = 80 :



Ce graphique montre le premier 80 déplacements et le nombre de nombres premiers dans chacun des 80 intervalles de 225 entiers consécutifs.

Ainsi, nous voyons que l'intervalle qui renferme les entiers de 1 à 225, lequel correspond à k = 1, contient 48 nombres premiers. L'intervalle qui contient les entiers de 2 à 226, lequel correspond à k = 2, contient aussi 48 nombres premiers, etc. Pour finir, l'intervalle qui contient les entiers de 80 à 304, lequel correspond à k = 80, contient 40 nombres premiers.

Sur l'horizontale qui passe par 48, nous trouvons 4 points donc 4 intervalles ou 4 carrés magiques qui renferment 48 nombres premiers. Sur l'horizontale qui passe par 44, nous trouvons 19 points d'où 19 carrés magiques qui contiennent 44 nombres premiers.

Voyons un dernier exemple avec n = 10 :

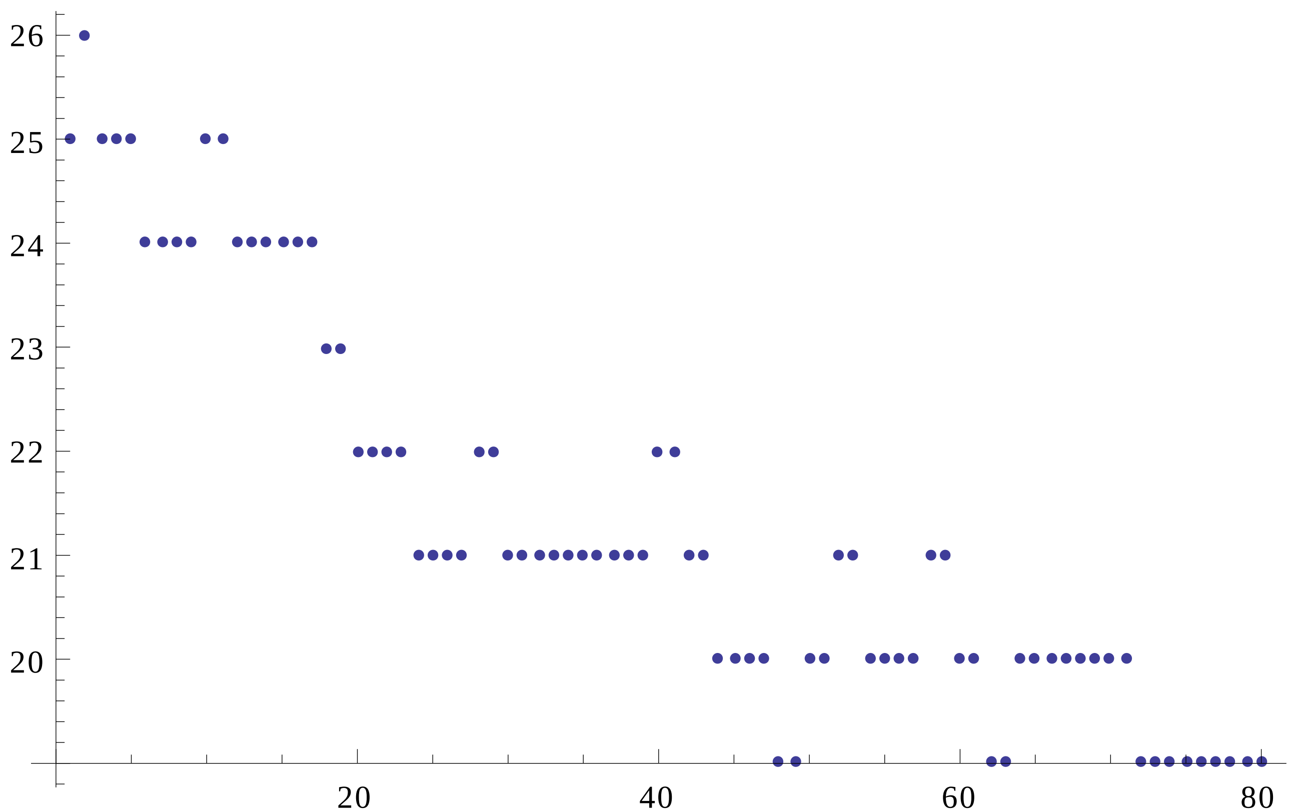
La première liste contient le nombre de nombres premiers contenus dans chacun des 600 000 intervalles considérés : 25, 26, 25, 25, 25, 24, etc.

La seconde liste nous donne le nombre de carrés magiques qui possèdent 0 nombre premier, 1 seul nombre premier, 2 nombres premiers, … ,24 puis 25 et enfin 26 nombres premiers.

{26 ; 264 ; 1326 ; 5630 ; 17 124 ; 38 336 ; 69 087 ; 97 162 ; 111 684 ; 102 294 ; 73 936 ; 44 362 ; 22 710 ; 9752 ; 3682 ; 1490 ;574 ; 298 ; 120 ; 64 ; 30 ; 22 ; 8 ; 2 ; 10 ; 6 ; 1}

Parmi les 600 000 carrés magiques, 26 contiennent 0 nombre premier, 264 en contiennent 1, 1326 en contiennent 2, …,10 en contiennent 24, 6 en contiennent 25 = p(M) et enfin, 1 en contient 26 = p(M) + 1.

La répartition est semblable à la précédente (cas n = 5). Nous présentons ici seulement 80 intervalles (en abscisses) et le nombre de nombres premiers (en ordonnées) dans chacun.



Nous voyons que le premier intervalle renferme 25 nombres premiers, le deuxième en contient 26, etc. Horizontalement, nous trouvons 6 points pour 25 d'où 6 intervalles qui contiennent 25 nombres premiers (donc 6 carrés magiques qui contiennent 25 nombres premiers.

Tous ces résultats renforcent la conjecture 1 ci-haut.

Voici une seconde conjecture, reliée à la conjecture 1.

Conjecture 2 :

Soit W un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$, qui contient n^2 entiers consécutifs. Si le carré W contient p(M) + 1 nombres premiers, alors celui-ci est le seul à contenir p(M) + 1 nombres premiers.

Nous avons refait les tableaux T_1 et T_2 en faisant 10 000 000 de déplacements au lieu de 600 000. Les deux tableaux restent identiques sauf pour n = 3.
Cependant, aucune borne supérieure n'a changé.

Pour n = 3, avec 600 000, nous avons dans la colonne p(M), 4 (120).
Pour n = 3, avec 10 000 000, nous avons dans la colonne p(M), 4 (902).

Cela signifie qu'avec 10 000 000 de déplacements, nous avons 902 carrés magiques presque normaux d'ordre 3 formés de neuf entiers consécutifs qui renferment quatre nombres premiers soit le maximum.

Voici maintenant le QUATUOR «12 P» formé de quatre carrés magiques presque normaux d'ordre 6 et de somme S = 306. Ils renferment tous exactement 12 nombres premiers; ceux-ci sont les mêmes dans les quatre carrés, ils sont consécutifs, dans le même ordre et sont situés respectivement dans les deux rangées centrales, les deux colonnes centrales, les deux grandes diagonales et dans deux colonnes tordues. Les 24 autres entiers sont tous pairs.

96	118	26	30	24	12
34	50	36	64	54	68
29	31	41	61	71	73
37	43	47	53	59	67
20	42	58	46	60	80
90	22	98	52	38	6

12P-1; S = 306; f(306) = 13 414

96	34	29	37	20	90
118	50	31	43	42	22
26	36	41	47	58	98
30	64	61	53	46	52
24	54	71	59	60	38
12	68	73	67	80	6

12P-2;   S = 306;   f(306) = 13 414

29	96	18	44	52	67
34	31	48	76	59	58
148	32	41	53	28	4
38	42	47	61	50	68
20	43	70	66	71	36
37	62	82	6	46	73

12P-3;   S = 306;   f(306) = 13 287

Remarquons que 12P-2 est un équivalent de 12P-1. De plus, 12P-3 possède 127 figures magiques de moins que les deux précédents et 127 est un nombre premier!!! Quant à 12P-4, il possède 2218 figures magiques de plus que 12P-1.

29	50	60	36	94	37
82	31	18	44	43	88
64	41	42	54	47	58
38	61	28	78	53	48
20	71	86	62	59	8
73	52	72	32	10	67

12P-4; S = 306; f(306) = 15 632

12P-1, 12P-3 et 12P-4 sont primitifs.

Enfin, en terminant, voyons comment nous pouvons, pour l'ordre $n = 5$, construire un carré magique presque normal qui renferme k nombres premiers avec $0 \leq k \leq 25$.

1) Nous avons vu plus haut que si les vingt-cinq entiers sont consécutifs, alors nous pouvons construire un carré magique formé de k nombres premiers où $0 \leq k \leq 9$.
2) Mais comment trouver un tel carré avec treize nombres premiers?
3) Nous allons utiliser le carré premier (3) de 10.2 qui est presque normal et nous allons nous servir de figures complètes afin d'enlever ou d'ajouter des nombres premiers.

Par exemple, voici le carré (3), (appelé aussi carré 25), et une figure complète en vert :

17	73	59	13	151
79	101	29	37	67
31	109	83	43	47
163	19	53	71	7
23	11	89	149	41

Carré 25

4) Dans la figure complète, nous ajoutons 1 dans les cinq cases. Ainsi nous perdons cinq nombres premiers. Le carré reste magique et sa somme magique passe de 313 à 314. Le carré 20 est noté ainsi car il contient 20 nombres premiers.

17	74	59	13	151
80	101	29	37	67
31	109	84	43	47
163	19	53	71	8
23	11	89	150	41

Carré 20

5) Nous allons nous servir du carré 20 pour construire le carré 15 à l'aide d'une autre figure complète, disjointe avec la première. Nous ajoutons 1 dans chacune des cinq cases. La somme devient 315.

17	74	59	13	152
80	101	30	37	67
32	109	84	43	47
163	19	53	72	8
23	12	89	150	41

Carré 15

6) Avec le carré 15, nous allons construire le carré 11 en utilisant une nouvelle figure complète qui possède une case déjà utilisée (celle qui contient 80). Le carré 11 est de somme 316. De plus les carrés 20, 15 et 11 sont presque normaux.

17	74	60	13	152
81	101	30	37	67
32	109	84	44	47
163	20	53	72	8
23	12	89	150	42

Carré 11

7) Le carré 16 est obtenu du carré 20 à l'aide de la figure complète illustrée dans le carré 11. La somme du carré 16 est 315 et il est presque normal.

17	74	60	13	151
81	101	29	37	67
31	109	84	44	47
163	20	53	71	8
23	11	89	150	42

Carré 16

8) Le carré 12 provient du carré 16 à l'aide de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 316.

18	74	60	13	151
81	101	29	38	67
31	110	84	44	47
163	20	53	71	9
23	11	90	150	42

Carré 12

9) Le carré 10 est obtenu du carré 15 avec la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 316.

17	74	59	14	152
80	102	30	37	67
32	109	84	43	48
163	19	54	72	8
24	12	89	150	41

Carré 10

10) Le carré 13 provient du carré 16 muni de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 319. Nous ajoutons 4 dans chaque case verte.

21	74	60	13	151
81	101	33	37	67
31	109	84	44	51
163	24	53	71	8
23	11	89	154	42

Carré 13

11) Le carré 14 est construit à partir du carré 16 avec la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 319. Nous ajoutons 4 dans chaque case verte.

17	74	64	13	151
81	105	29	37	67
31	109	84	48	47
163	20	53	71	12
27	11	89	150	42

Carré 14

12) Le carré 18 provient du carré 20 et de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 316. Nous ajoutons 2 dans chaque case verte.

17	76	59	13	151
80	101	29	37	69
31	109	86	43	47
165	19	53	71	8
23	11	89	152	41

Carré 18

13) Le carré 19 est construit à partir du carré 20 et de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 324. Nous ajoutons 10 dans chaque case verte.

17	84	59	13	151
80	101	29	37	77
31	109	94	43	47
173	19	53	71	8
23	11	89	160	41

Carré 19

14) Le carré 17 est construit à partir du carré 20 et de la figure complète suivante. Il est presque normal de somme 315. Nous ajoutons 1 dans chaque case verte.

17	74	59	13	152
80	102	29	37	67
32	109	84	43	47
163	19	54	71	8
23	11	89	151	41

Carré 17

15) Pour construire les carrés 21, 22, 23 et 24, nous partirons du carré 20. Nous allons ajouter aux cinq entiers pairs de la figure complète, un entier k de façon à obtenir le nombre de nombres premiers voulu. Pour déterminer la valeur de k, nous trouverons un nombre premier p supérieur à 151 et différent de 163. Le premier rencontré est 157. En ajoutant 7 dans la figure complète, les cinq entiers pairs deviennent :

15 ; 81 ; 87 ; 91 ; 157

Mais seulement 157 est premier. Nous venons donc de trouver un carré magique avec 21 nombres premiers. Il est presque normal de somme 321. Voici les quatre derniers carrés :

17	81	59	13	151
87	101	29	37	67
31	109	91	43	47
163	19	53	71	15
23	11	89	157	41

Carré 21

17	117	59	13	151
123	101	29	37	67
31	109	127	43	47
163	19	53	71	51
23	11	89	193	41

Carré 22

17	121	59	13	151
127	101	29	37	67
31	109	131	43	47
163	19	53	71	55
23	11	89	197	41

Carré 23

17	193	59	13	151
199	101	29	37	67
31	109	203	43	47
163	19	53	71	127
23	11	89	269	41

Carré 24

Ces quatre derniers carrés magiques sont presque normaux et ont respectivement pour sommes magiques, 321, 357, 361 et 433.

Notons que le carré 24 est le bel intrus-203. Le nombre composé 203 = 7 x 29 est au centre du carré et tous les autres nombres sont premiers. Le carré 25 est tout simplement le carré (3) du départ.

Cette démarche peut sans doute s'appliquer aux ordres supérieurs mais la difficulté grandira avec l'ordre!!! Il faut donc se retourner vers l'ordinateur!!!

Nous pouvons maintenant construire 26 carrés magiques presque normaux d'ordre 5 qui contiennent respectivement de 0 à 25 nombres premiers.

Pour l'ordre 4, avec le même procédé, nous avons construit 17 carrés magiques presque normaux qui renferment respectivement de 0 à 16 nombres premiers.

Pour $0 \leq k \leq 7$, les carrés sont presque normaux et renferment seize entiers consécutifs dont k sont premiers. Ils sont donnés au début de l'annexe 11.

Voici les autres :

37	53	89	79
83	61	67	47
97	71	59	31
41	73	43	101

Carré 16

139	53	89	79
83	61	67	149
97	173	59	31
41	73	145	101

Carré 15

147	53	89	79
83	61	67	157
97	181	59	31
41	73	153	101

Carré 14

141	53	89	79
83	61	67	151
97	175	59	31
41	73	147	101

Carré 13

38	53	89	79
83	61	67	48
97	72	59	31
41	73	44	101

Carré 12

69	53	89	80
83	62	67	79
98	103	59	31
41	73	76	101

Carré 11

45	53	89	80
83	62	67	55
98	79	59	31
41	73	52	101

Carré 10

38	53	89	80
83	62	67	48
98	72	59	31
41	73	45	101

Carré 9

38	54	89	79
83	61	68	48
98	72	59	31
41	73	44	102

Carré 8

Notons que tous les carrés d'ordre 4 et d'ordre 5 que nous venons de construire sont presque normaux.

Voici comment nous avons construit ces carrés d'ordre 4. Par exemple, le carré 12 provient du carré 16 de somme 258 qui renferme seize nombres premiers. Nous avons utilisé la figure complète illustrée dans le carré 12 et nous l'avons placée sur le carré 16. Nous avons ensuite ajouté 1 dans chaque case de cette figure complète d'où le carré 12 de somme 259.

Le carré 15 provient du carré 12. La figure complète illustrée dans le carré 15 est placée sur le carré 12 et dans chacune de ses quatre cases, nous avons ajouté le nombre 101. D'où le carré 15 de somme 360.

Nous allons noter notre action de la façon suivante :

$$(16 \rightarrow 12; +1; 259)$$

signifie qu'avec le carré 16 et la figure complète illustrée sur le carré 12 puis placée sur le carré 16, nous avons ajouté 1 dans les cases de la figure complète pour obtenir le carré 12 de somme 259.

$$(12 \rightarrow 15; +101; 360)$$

signifie qu'avec le carré 12 et la figure complète illustrée sur le carré 15 puis placée sur le carré 12, nous avons ajouté 101 dans les cases de la figure complète pour obtenir le carré 15 de somme 360.

Voici comment nous avons obtenu tous ces carrés :

$$\begin{gathered}
(16 \rightarrow 12;\ +1\ ;259) \\
(12 \rightarrow 15;\ +101\ ;360) \\
(12 \rightarrow 9;\ +1\ ;260) \\
(12 \rightarrow 8;\ +1;\ 260) \\
(9 \rightarrow 10;\ +7\ ;267) \\
(10 \rightarrow 11;\ +24\ ;291) \\
(15 \rightarrow 13;\ +2\ ;362) \\
(13 \rightarrow 14;\ +6\ ;368)
\end{gathered}$$

Pour l'ordre 3, nous avons procédé de façon différente car il n'existe pas de figure complète pour un carré d'ordre 3. Nous avons pris M, un carré magique premier et presque normal puis nous avons ajouté un entier k à tous les nombres de M jusqu'à ce que nous obtenions le nombre voulu de nombres premiers.

Pour $0 \leq k \leq 4$, les carrés sont presque normaux et renferment neuf entiers consécutifs. Ils sont donnés au début de l'annexe 11.

71	89	17
5	59	113
101	29	47

83	101	29
17	71	125
113	41	59

85	103	31
19	73	127
115	43	61

73	91	19
7	61	115
103	31	49

89	107	35
23	77	131
119	47	65

Dans ces cinq derniers carrés magiques, les nombres dans les cases vertes sont tous composés. Tous les autres sont premiers. Ces carrés contiennent respectivement de haut en bas et de gauche à droite 9, 8, 7, 6 et 5 nombres premiers.

Nous allons terminer avec l'ordre 6. Pour $0 \leq k \leq 12$, les carrés sont presque normaux et renferment trente-six entiers consécutifs dont k sont premiers. Ils sont donnés au début de l'annexe 11.

Pour les autres carrés magiques presque normaux qui contiennent $15 \leq k \leq 36$ nombres premiers, nous allons les fabriquer à partir d'un **carré premier** qui contient trente-six nombres premiers consécutifs à partir de 7. Puis avec quelques figures complètes, nous pourrons faire le travail. Pour obtenir un carré magique avec treize ou quatorze nombres premiers, il suffira d'utiliser le carré 8 de l'OCTUOR «12 P» suivant et la figure complète F1 (voir plus bas).

29	31	40	44	46	116
37	41	154	32	20	22
120	34	43	47	38	24
56	64	53	59	70	4
48	54	10	66	61	67
16	82	6	58	71	73

Carré 8 de l'OCTUOR «12 P»

Pour obtenir les carrés 13 et 14, lesquels vont contenir respectivement treize et quatorze nombres premiers, utilisons la figure complète F1 et ajoutons 49 ou 61 dans les six cases de F1. Nous trouverons alors deux carrés magiques presque normaux qui auront treize et quatorze nombres premiers.

Voici ces deux carrés :

29	31	89	44	46	116
37	41	154	32	69	22
169	34	43	47	38	24
56	113	53	59	70	4
48	54	10	115	61	67
16	82	6	58	71	122

Carré 13

29	31	101	44	46	116
37	41	154	32	81	22
181	34	43	47	38	24
56	125	53	59	70	4
48	54	10	127	61	67
16	82	6	58	71	134

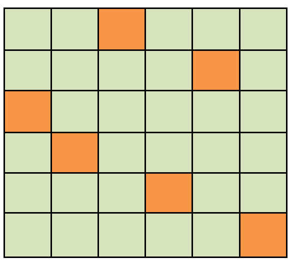
Carré 14

Voyons maintenant ce carré premier (appelé carré 36) et les neuf figures complètes que nous allons utiliser, notées F1, F3, F4, … Ici, nous n'avons pas utilisé les figures complètes F2 et F8.

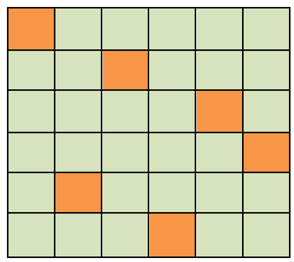
Nous vous invitons à trouver les carrés 15 à 35.

37	11	149	167	13	107
79	157	131	41	53	23
103	29	7	43	139	163
19	101	113	71	97	83
137	59	17	73	151	47
109	127	67	89	31	61

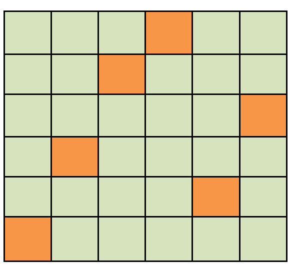
Carré 36



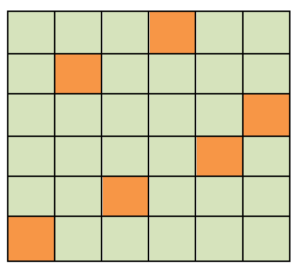
F1



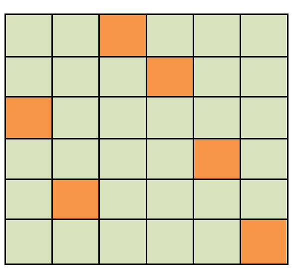
F3



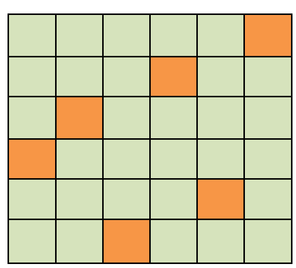
F4



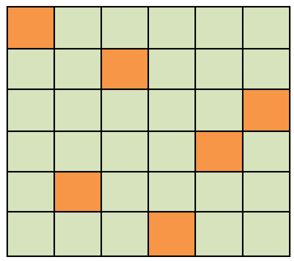
F5



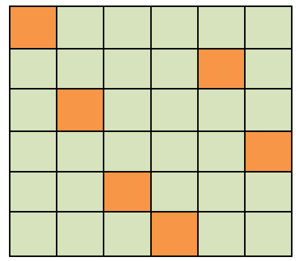
F6



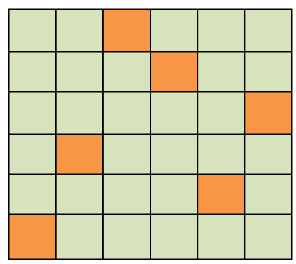
F7



F9



F10



F11

Il serait intéressant de continuer avec des ordres supérieurs et de trouver, pour l'ordre n, n^2+1 carrés presque normaux qui contiendraient de 0 à n^2 nombres premiers. C'est chose faite pour $n = 3, 4, 5, 6.$

Pour $n \geq 7$, il faudrait l'ordinateur et un bon programme!!!

Nous allons terminer avec deux des cent soixante carrés magiques d'ordre 4 formés des quinze premiers nombres premiers impairs et de l'entier 21. Ils sont tous presque normaux de somme 160. **Nous pourrions les appeler «Intrus-21».** Le plus petit entier est 3 et le plus grand 53.

3	21	29	47
53	19	23	5
31	17	41	11
13	43	7	37

47	21	29	3
23	5	53	19
17	31	11	41
13	43	7	37

Question 1 :

Comment construire un carré magique presque normal d'ordre 10 dans lequel il n'y aurait que 30 nombres premiers et sachant que les cent entiers du carré ne sont pas nécessairement consécutifs? **Ci-haut, nous avons tenté de répondre, en partie, à cette question.**

Problème 1 :

Construisez un carré magique presque normal d'ordre 9 qui est associatif, qui renferme 81 entiers consécutifs et qui contient exactement neuf nombres premiers.

Problème 2 :

Démontrez que si W est un carré magique presque normal formé d'entiers consécutifs, alors le nombre maximum de nombres premiers dans W est :

a) 4 pour l'ordre 3.
b) 7 pour l'ordre 4.
c) 9 pour l'ordre 5.
d) 12 pour l'ordre 6.
e) 15 pour l'ordre 7.
f) 18 pour l'ordre 8.
g) Ces nombres sont-ils atteints?

Problème 3 :

Soit donné un carré magique W d'ordre 10, presque normal, formé d'entiers consécutifs. Montrez qu'il ne peut pas y avoir plus de :

a) 28 nombres premiers en général.
b) Combien selon la conjecture 1?

Problème 4 :

Le nombre de nombres premiers contenus dans le carré normal M (k = 1) est p(M). Si pour k = 2, le nombre de nombres premiers est p(M) + 1, alors montrez que pour k = 3, le nombre de nombres premiers est de nouveau p(M). Ici, k indique le rang de la suite.

Problème 5 :

Un carré magique W est presque normal et renferme n^2 entiers consécutifs. Le carré normal M, d'ordre n, renferme p(M) nombres premiers (par définition). Montrez qu'il existe toujours un carré W différent de M qui possède p(M) nombres premiers.

Problème 6 :

Nous avons construit 200 carrés magiques presque normaux d'ordre 10. Le premier M est normal, le deuxième est $M+1$, le troisième est $M+2$, ..., $M+198$, $M+199$. Les 200 entiers qui suivent représentent, respectivement, le nombre de nombres premiers dans chaque carré.

{25,26,25,25,25,24,24,24,24,25,25,24,24,24,24,24,24,23,23,22,22,2
2,22,21,21,21,21,22,22,**21,21,21,21,21,21,21**,21,21,21,22,22,21,21,
20,20,20,20,19,19,20,20,21,21,20,20,20,20,21,21,20,20,19,19,20,20
,20,20,20,20,20,20,19,19,19,19,19,19,19,19,19,19,20,20,19,19,19,1
9,19,19,18,18,19,19,20,20,20,20,20,20,21,21,20,20,19,19,19,19,18,
18,17,17,18,18,17,17,17,17,17,17,17,17,17,17,18,18,18,18,18,18,19
,19,18,18,19,19,19,19,18,18,18,18,19,19,19,19,19,19,19,19,18,18,1
8,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,18,17,17,18,18,19,19,
18,18,18,18,19,19,18,18,18,18,19,19,19,19,19,19,19,19,18,18,18,18
,18,18,17,17,16}

Ainsi, $g_{10}(M)=25$; $g_{10}(M+1)=26$; $g_{10}(M+2)=25$; ... ; $g_{10}(M+17)=23$; ...

a) Observez que chaque fois que le nombre de nombres premiers passe de k *à* $k-1$, le carré magique qui contient $k-1$ nombres premiers est $M+p$ où p est premier.
b) Remarquez que nous avons 22 carrés magiques qui possèdent 21 nombres premiers. Parmi ceux-ci, cinq ont la forme $M+p$ où p est un nombre premier. Déterminez les cinq valeurs de p.
c) Nous avons aussi dix-sept carrés magiques qui possèdent 21 nombres premiers et qui ont la forme $M+q$ où q est un entier non premier. Déterminez les dix- sept valeurs de q.
d) Parmi les 200 carrés ci-haut, trouvez trois carrés magiques presque normaux d'ordre 10

$$M+p_1, M+p_2 \ et \ M+q$$

qui possèdent dix-sept nombres premiers avec $p_1 \ et \ p_2$, des nombres premiers et q, un entier non premier.

Problème 7 :

a) Dans 12P-4, trouvez combien de figures magiques parmi les 15 632, renferment les quatre cases centrales. Donnez-les.
b) Dans 12P-4, trouvez combien de figures magiques parmi les 15 632, renferment les quatre coins. Donnez-les.

Problème 8 :

Montrez que la conjecture 1 est vraie pour $n=3,4,5,6,7 \ et \ 8$.

Problème 9 :

a) Considérons tous les carrés magiques presque normaux d'ordre 6 formés de trente-six entiers consécutifs. Montrez que si le plus petit entier d'un carré est ≥ 6, alors le nombre maximum de nombres premiers dans ce carré est 10.
b) En déduire qu'il n'y a que deux carrés qui renferment onze nombres premiers et un seul qui renferme douze nombres premiers.

Problème 10 :

Pouvez-vous construire vingt-cinq intrus d'ordre 5 (voir 14.13) qui contiendraient un seul nombre premier 1129 et que des nombres composés dans ses vingt-quatre autres cases? Si le seul nombre premier, 1129, se trouve dans la case centrale, alors l'intrus sera qualifié de **«bel intrus».** Dans ces vingt-cinq carrés, le nombre 1129 aura occupé toutes les cases du carré!!!

Suggestion : voir 6.1 du chapitre 6.

Problème 11 :

Pouvez-vous construire quarante-neuf intrus d'ordre 7 qui contiendraient un seul nombre premier 9587 et que des nombres composés dans ses quarante-huit autres cases? Si le seul nombre premier, 9587, se trouve dans la case centrale, alors l'intrus sera qualifié de **«bel intrus».** Dans ces quarante-neuf carrés, le nombre 9587 aura occupé toutes les cases du carré!!!

Suggestions : utilisez le carré ultra-magique (associatif et pandiagonal) normal suivant :

1	47	27	29	39	15	17
44	12	13	28	4	48	26
19	32	14	42	20	43	5
9	40	34	25	16	10	41
45	7	30	8	36	18	31
24	2	46	22	37	38	6
33	35	11	21	23	3	49

Utilisez aussi le procédé 1-3-5-7-2-4-6 (6.1 du chapitre 6).

Problème 12 :

Considérez M, un carré magique pandiagonal d'ordres 5, 7 ou 9.

a) Pour l'ordre 5, démontrez que le procédé 1-3-5-2-4 appliqué à M donnera toujours un nouveau carré M' magique pandiagonal et que le nombre en position (5 ; 5) dans M se retrouve toujours dans la case centrale de M'.
b) Pour l'ordre 7, démontrez que le procédé 1-3-5-7-2-4-6 appliqué à M donnera toujours un nouveau carré M' magique pandiagonal et que le nombre en position (7 ; 7) dans M se retrouve toujours dans la case centrale de M'.
c) Pour l'ordre 9, démontrez que le procédé 1-3-5-7-9-2-4-6-8 appliqué à M donnera toujours un nouveau carré M' magique pandiagonal et que le nombre en position (9 ; 9) dans M se retrouve toujours dans la case centrale de M'.
d) Pour l'ordre impair $n \geq 5$, démontrez que le procédé :
$$1-3-5-...-n-2-4-6-...-(n-1)$$
déplacera le nombre de la case $(n;n)$ de M dans la case centrale de M'.
e) Pouvez-vous utiliser ce procédé pour l'ordre $n=3$? $n=4$?

f) Pensez-vous que ce procédé est valable pour tous les ordres impairs $n \geq 5$?

Problème 13 :

a) Est-il vrai que nous pouvons trouver une suite infinie de carrés magiques presque normaux pandiagonaux d'ordre 5 sachant que tous les entiers ≥ 1 seront le centre d'un carré de la suite?
b) Est-il vrai que nous pouvons trouver une suite infinie de carrés magiques presque normaux pandiagonaux d'ordre 7 sachant que tous les entiers ≥ 1 seront le centre d'un carré de la suite?

OBSERVATION : **nombre premier chasseur (Voir Texte 51 sur le site : mathtextes.com)**

Soit M, un carré magique normal d'ordre $n \geq 3$ et p, un nombre premier. M renferme p(M) nombres premiers. Si M + p contient aucun nombre premier, alors nous dirons que p est un **nombre premier chasseur** pour M.

Rappelons que M + p est obtenu de M en ajoutant p dans toutes ses cases.

Il existe un nombre premier chasseur pour M pour tous les ordres $n \geq 3$.

Nous ajouterons p, convenablement choisi, dans toutes les cases de M; il en résultera un carré magique sans nombre premier. Le nombre p est appelé **nombre premier chasseur**. Voir page 1, pour l'ordre 5, le nombre premier chasseur est 1327. **Suggestion : voir le Texte 51.**