15. Les carrés multiplicatifs

15.1 Introduction

Considérons un carré d'ordre n tel que le produit des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale soit toujours égal à un même nombre P appelé produit magique. Un tel carré se nomme **carré multiplicatif**.

> Notre objectif est de construire des carrés multiplicatifs d'ordre $n \geq 3$ presque normaux donc qui renferment que des entiers ≥ 1, tous différents deux à deux.

Si un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$ est presque normal, alors son produit magique est non nul. Il en est de même si les n^2 nombres d'un carré multiplicatif sont différents deux à deux, le produit sera toujours non nul. En effet, dans ce cas, si le carré contient le nombre 0, alors il n'en contient qu'un seul et ce carré ne pourra pas être multiplicatif.

> Nous décidons dès maintenant de construire seulement des carrés multiplicatifs d'ordre $n \geq 3$ et de produit $P > 0$, donc contenant aucun zéro.

Ces carrés multiplicatifs existent pour tous les ordres $n \geq 1$. Pour $n = 1$, l'unique case contient un seul nombre.

5

Ici, rangée, colonne et diagonales se confondent et le produit magique est $P = 5$.

Pour $n = 2$, il est facile de montrer que le carré a une des formes suivantes :

k	k
k	k

0	0
m	0

Le carré de droite renferme trois zéros et m est un nombre réel quelconque. Mais ces carrés ne sont pas presque normaux! (Voir problème 1 de 15.7)

Pour $n \geq 3$, nous pouvons utiliser l'exponentiation pour construire une infinité de carrés multiplicatifs à partir d'un seul carré magique, lequel existe toujours.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$S = 15$

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

$P = 2^{15} = 32\,768$

16	512	4
8	32	128
256	2	64

$P = 32\,768$

D'où le carré multiplicatif de produit magique $P = 32\,768.$ Ici, l'exponentiation était en base $a = 2.$

Nous aurions pu choisir une toute autre base et ainsi remplacer x dans le carré magique par $3^x \; ou \; 4^x \; ou \; 5^x$, …

Par contre, ce procédé d'exponentiation nous donne des carrés multiplicatifs qui renferment de très grands nombres. Que dire si la base était 60 ou 34567? Cependant, nous verrons plus loin que tout carré multiplicatif formé de nombres positifs (>0) s'obtient par exponentiation!!!

Notons que dans le procédé d'exponentiation, tous les nombres du carré multiplicatif ont la forme a^m où m est un nombre du carré magique et $a > 0$, un nombre réel fixe.

Si A et B sont deux carrés magiques différents d'ordre $n \geq 3,$ alors il est évident que les deux carrés multiplicatifs obtenus par exponentiation de base $0 < a < 1 \; ou \; a > 1,$ seront différents.

De plus, si M est un carré magique d'ordre n et N, le carré multiplicatif obtenu par exponentiation, alors M et N possèdent exactement les mêmes figures magiques. Une figure magique dans un carré magique d'ordre n et de somme S est un groupe de n cases distinctes de somme S tandis qu'une figure magique dans un carré multiplicatif d'ordre n et de produit P est un groupe de n cases distinctes de produit P.

Si nous utilisons le procédé d'exponentiation, alors a, la base choisie, vérifiera toujours la relation $0 < a < 1 \; ou \; a > 1$. Avec $a = 1$, nous obtiendrions un carré trivial formé de 1.

Soit maintenant E_n, l'ensemble des carrés magiques d'ordre n et F_n, l'ensemble des carrés multiplicatifs d'ordre n, formés de nombres > 0. Alors il existe une injection de $E_n \; dans \; F_n$. Il existe également une injection de $F_n \; dans \; E_n$. Donc nous avons bien une bijection de $E_n \; sur \; F_n$. En effet, la première injection se fait avec l'exponentiation tandis que la seconde se fait à l'aide du logarithme.

Il y a donc autant de carrés magiques d'ordre n que de carrés multiplicatifs formés de nombres > 0, également d'ordre n.

15.2 Les carrés multiplicatifs d'ordre 3

Nous allons trouver la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 3 et de produit magique $P \neq 0$. Pour cela, nous devons savoir que si $P \neq 0$, alors P est le cube du nombre central (théorème 13.6 de 13.3). Si le nombre de la case centrale est d, alors $P = d^3$ et donc, $d \neq 0$. Il est clair que $a, b, c, d \text{ et } x$ sont non nul sachant que P est non nul.

a	b	$\frac{P}{ab}$
c	d	$\frac{P}{cd}$
$\frac{P}{ac}$	$\frac{P}{bd}$	x

En se servant de la troisième colonne et de la troisième rangée, il est facile de montrer que $x = \frac{abcd}{P} = \frac{abcd}{d^3} = \frac{abc}{d^2}$ puisque $P = d^3$. De plus, les diagonales sont magiques et nous conduisent toutes les deux à l'égalité $a^2bc = d^4$. Nous prendrons $b = \frac{d^4}{a^2c}$. Avec ces valeurs de $x \text{ et } b$, il est facile de vérifier que le carré est multiplicatif. Voici donc une structure générale (*) des carrés multiplicatifs d'ordre 3 de produits non nuls.

(*)

a	$\frac{d^4}{a^2c}$	$\frac{ac}{d}$
c	d	$\frac{d^2}{c}$
$\frac{d^3}{ac}$	$\frac{a^2c}{d^2}$	$\frac{d^2}{a}$

Cette structure générale (*) génère tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 à produits non nuls. Si un carré multiplicatif M est presque normal, alors son produit est évidemment non nul et M sera issu de (*). Par exemple, avec $a = 40$, $c = 50 \text{ et } d = 20$, nous obtenons le carré multiplicatif :

40	2	100
50	20	8
4	200	10

Ce carré multiplicatif est presque normal et son produit est $P = 8000$. Puisque $P \neq 0$, le nombre central est bien $\sqrt[3]{8000} = 20$.

Dans (*), $P \neq 0$ implique que les variables $a, c \ et \ d$ ne peuvent pas prendre la valeur 0. Tous les nombres de (*) sont donc non nuls. Si $a, c \ et \ d$ sont non nuls, alors tous les nombres de (*) le sont aussi et ainsi, $P \neq 0$. Donc $P = d^3$. Enfin, si $P = 0$, alors nous trouvons dans (*) au moins trois cases qui renferment le nombre 0 et le carré n'est pas presque normal. De plus, il se peut que le centre soit non nul.

Maintenant, avec $a, c \ et \ d$ non nuls, il se peut que certains nombres du carré soient négatifs même si $P > 0$. Regardons avec $a = -40$, $c = 50 \ et \ d = 20$. Nous avons pris $d > 0$ car nous voulions $P > 0$. Le carré multiplicatif suivant n'est pas presque normal et $P = 8000$.

-40	2	-100
50	20	8
-4	200	-10

Enfin, dès que $a, c \ et \ d$ sont non nuls, nous savons aussitôt que $P = d^3$.

Par la suite, les variables $a, c \ et \ d$ seront toujours non nulles et ainsi le produit P sera toujours non nul.
Nous dirons aussi produit au lieu de produit magique.

Voyons maintenant ce qu'est un carré multiplicatif associatif. Un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 2$ et de produit P est **associatif** si le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[n]{P^2}$. Le carré (*) est associatif puisque le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est

$d^2 = \sqrt[3]{P^2} = \sqrt[3]{d^6}$. Notons que la case centrale a pour case symétrique par rapport au centre du carré, la case central elle-même d'où $d.d = d^2$.

Théorème 15.1 :

> Si un carré multiplicatif d'ordre impair $n \geq 3$ et de produit P est associatif, alors sa case centrale renferme le nombre $\sqrt[n]{P}$.

Preuve :

Sur une grande diagonale, nous avons $\frac{n-1}{2}$ paires de cases distinctes symétriques par rapport au centre du carré et la case centrale qui renferme le nombre m. Nous avons donc :

$$P = m\left(\sqrt[n]{P^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} = m\left(P^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = m\,P^{\frac{n-1}{n}} \quad d'où\ m = P^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{P} \qquad si\ P \neq 0$$

Si $P = 0$, alors $\sqrt[n]{P^2} = 0$ et le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est évidemment 0. Puisque la case symétrique par rapport au centre du carré de la case centrale est la case centrale elle-même, alors celle-ci renferme $0 = \sqrt[n]{P}$. De plus, nous avons bien $\sqrt[n]{P}\sqrt[n]{P} = \sqrt[n]{P^2}$.

Théorème 15.2 :

> Tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 avec $P \neq 0$, sont associatifs.

Preuve :

Voir la structure générale (*) ci-haut.

Un carré multiplicatif d'ordre 3 et de produit $P = 0$, peut être non associatif. Voici un exemple :

0	1	2
4	0	3
5	6	0

Théorème 15.3 :

Soit M, un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 2$ et de produit P. Si k est un nombre réel, alors le carré k M est multiplicatif de produit $k^n P$; de plus, si M est associatif alors k M est associatif. Si k M est associatif avec $k \neq 0$, alors M est associatif

Preuve : vous pouvez voir dans les deux lignes qui suivent comment se définit k M.

Si une figure magique dans M renferme les nombres $x_1, x_2, ..., x_n$ avec $x_1 x_2 ... x_n = P$, alors cette figure renferme dans k M les nombres $k x_1, k x_2, ..., k x_n$ et le produit est $k^n P$. Puisque ce que nous venons de faire s'applique aux rangées, colonnes et grandes diagonales, le carré k M est donc multiplicatif (le produit sera toujours $k^n P$).

Si M est associatif, alors le produit des nombres $u \, et \, v$ situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\sqrt[n]{P^2}$. Donc le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré k M est :

$$(k u)(k v) = k^2 \sqrt[n]{P^2} = \sqrt[n]{(k^2)^n P^2} = \sqrt[n]{(k^n P)^2}.$$

d'où k M est associatif. Si maintenant $k M$ est associatif avec $k \neq 0$, alors $M = \frac{1}{k}(k M)$ est associatif. Si $k = 0 \; alors \; k M$ est associatif et nous ne pouvons rien dire sur M.

Revenons à la structure générale (*). Pour construire un carré presque normal, nous devons attribuer aux variables libres $a, c \, et \, d$, des valeurs entières ≥ 1, différentes deux à deux. Les autres nombres obtenus seront des rationnels que nous pourrons facilement rendre entiers en multipliant notre carré par le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Par exemple, prenons $a = 1, c = 2 \; et \; d = 3$. Nous obtenons le carré multiplicatif M suivant :

1	81/2	2/3
2	3	9/2
27/2	2/9	9

M

18	729	12
36	54	81
243	4	162

18M

Le plus petit commun multiple de 2, 3 et 9 est 18 d'où le carré 18M est multiplicatif et associatif. Notons que le carré 18M peut s'obtenir directement de (*) avec $a=18, c=36 \; et \; d=54.$ Le théorème suivant nous dit pourquoi.

Théorème 15.4 :

> Soit M, un carré multiplicatif d'ordre 3 issu de (*) après avoir donné respectivement aux variables a, c et d les valeurs entières non nulles j, k et m. Soit maintenant u , le plus petit commun multiple des dénominateurs des rationnels contenus dans M. Si nous posons dans (*) $a=u\,j, c=u\,k \; et \; d=u\,m,$ alors les neuf nombres du carré multiplicatif ainsi obtenu, soit u M, seront tous des entiers.

Preuve :

Posons dans la structure générale (*) $a=u\,j, c=u\,k \; et \; d=u\,m.$ Il en résulte que le nombre de chaque case sera multiplié par u et sera évidemment un entier. Ce carré est donc u M.

Mais ce carré multiplicatif est-il presque normal? Il arrive souvent qu'il le soit mais voyons ce qui suit :

Exemple 1 :

Dans (*), posons $c=162, a=2 \; et \; d=6.$ Nous trouvons :

2	2	54
162	6	2/9
2/3	18	18

A

9	9	243
729	27	1
3	81	81

$\frac{9}{2}A$

En fait, pour obtenir le carré de droite, nous avons multiplié A par 648 et nous avons ensuite divisé 648 A par 144 ce qui est équivalent à multiplier A par 9/2. Pourquoi ces calculs? Revoici à nouveau (*) :

(*)

a	$\frac{d^4}{a^2c}$	$\frac{ac}{d}$
c	d	$\frac{d^2}{c}$
$\frac{d^3}{ac}$	$\frac{a^2c}{d^2}$	$\frac{d^2}{a}$

Le plus petit commun multiple des six dénominateurs dans (*) est le nombre u = 648 et uA ne contient plus que des entiers. Selon le théorème précédent, nous pourrions obtenir 648 A en posant dans (*) : $c = 162 \times 648;\ a = 2 \times 648\ et\ d = 6 \times 648.$

Le carré 648 A est divisible par 144 (chacun de ses nombres est divisible par 144). Nous obtenons alors le carré multiplicatif $\frac{9}{2}A$ lequel n'est pas presque normal puisqu'il y a deux répétitions.

Nous allons trouver une **condition suffisante** pour que notre carré multiplicatif d'ordre 3 soit presque normal. La voici :

1) Les variables $a, c\ et\ d$ vont prendre des valeurs entières $\geq 1.$
2) Celles-ci doivent vérifier : $c < a < d.$
3) Alors la suite des nombres de (*) :

$$\frac{a^2c}{d^2}\ ,\ \frac{ac}{d}\ ,\ c\ ,\ a\ ,\ d\ ,\ \frac{d^2}{a}\ ,\ \frac{d^2}{c}\ ,\ \frac{d^3}{ac}\ ,\ \frac{d^4}{a^2c}$$

est une suite strictement croissante et donc les neuf nombres du carré sont tous différents.

Le carré M issu de (*) sera formé de neuf nombres différents et il restera à faire partir les dénominateurs en multipliant le carré par le nombre u = le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions contenues dans notre carré. Puis, en terminant, le carré u M sera divisé par le plus grand commun diviseur de ses neuf entiers.

Ce dernier carré multiplicatif sera presque normal et ses neuf entiers seront tous premiers entre eux!!!

La condition ci-haut n'est pas nécessaire puisqu'avec $a = 18, c = 4\ et\ d = 6,$ le carré issu de (*) renferme déjà neuf entiers $\geq 1,$ tous différents deux à deux. Le carré est donc presque normal.

Si la partie 2) de la condition ci-haut n'est pas respectée, alors il faudra s'assurer qu'il n'y a pas de répétition (ce qui est facile dans un carré d'ordre 3). Si nous voulons construire un carré

multiplicatif presque normal en ne respectant pas la condition, alors il faudra peut-être recommencer quelques fois!!!

Exemple 2 :

Dans (*), nous posons $c=6, a=2 \ et \ d=10.$ La condition n'est donc pas respectée. Nous obtenons les carrés suivants :

2	$\frac{1250}{3}$	$\frac{6}{5}$
6	10	$\frac{50}{3}$
$\frac{250}{3}$	$\frac{6}{25}$	50

A

1200	250000	720
3600	6000	10000
50000	144	30000

$600A$

75	15625	45
225	375	625
3125	9	1875

$\frac{600}{16}A$

Avant les simplifications dans le carré A, le plus petit commun multiple des dénominateurs était $600.$ Plus précisément, celui-ci est le plus petit commun multiple des dénominateurs de (*). Le carré $600A$ renferme que des entiers et leur plus grand commun diviseur est $16.$ D'où le carré multiplicatif final qui renferme neuf entiers premiers entre eux. Ce dernier carré, de produit 52 734 375, est presque normal et peut être obtenu de (*) avec :

$$c=6\times\frac{600}{16}, a=2\times\frac{600}{16} \ et \ d=10\times\frac{600}{16} \ soit \ c=225, a=75 \ et \ d=375.$$

Pour trouver tous ces résultats, vous pouvez utiliser le fichier «Carré multiplicatif d'ordre 3» fait avec MATHEMATICA (Partie 3, annexe 22, fichier 9)).

Exemple 3 :

Dans (*), nous posons $c = 4, a = 18 \; et \; d = 6.$ La condition n'est donc pas respectée. Nous obtenons les carrés suivants :

18	1	12
4	6	9
3	36	2

A

23 328	1296	15 552
5184	7776	11 664
3888	46 656	2592

$1296A$

18	1	12
4	6	9
3	36	2

$\frac{1296}{1296}A$

Ce dernier carré est presque normal et son produit est $P = 216.$

Rappelons qu'un carré multiplicatif normal d'ordre $n \geq 2$ (qui contient tous les entiers de $1 \; à \; n^2$) n'existe pas (Voir chapitre 13, section 13.3).

Notre objectif sera de construire des carrés multiplicatifs presque normaux donc formés d'entiers ≥ 1 tous différents deux à deux.

Exemple 4 :

Dans (*), posons $c = 1, a = 2 \; et \; d = 3.$ Ici, la condition est respectée.

2	$\frac{81}{4}$	$\frac{2}{3}$
1	3	9
$\frac{27}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{2}$

A

72	729	24
36	108	324
486	16	162

$36A$

72	729	24
36	108	324
486	16	162

$\frac{36}{1}A$

Le carré $36A$ est presque normal puisque la condition est respectée. Les neuf entiers de $36A$ ont pour plus grand commun diviseur l'entier 1 (car ils sont premiers entre eux). Nous pouvons obtenir ce dernier carré de (*) en posant : $c = 36, a = 72 \ et \ d = 108.$

Résumons : pour construire un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3,

a) Dans (*), nous donnons aux variables $c, a \ et \ d$, des valeurs entières ≥ 1.
b) Celles-ci doivent vérifier : $c < a < d$.
c) Nous obtenons ainsi un carré multiplicatif A qui renferme neuf nombres différents deux à deux.
d) Appelons u , le plus petit commun multiple des dénominateurs de (*).
e) Le carré $u\,A$ est maintenant presque normal.
f) Appelons r, le plus grand commun diviseur des neuf entiers de $u\,A$.
g) Le carré $\frac{u}{r}A$ est multiplicatif, presque normal et renferme neuf entiers premiers entre eux. Le nombre rationnel $\frac{u}{r}$ est appelé le **« facteur correcteur».**

Plus précisément, u est le plus petit commun multiple des entiers :

$$\left\{a, c, d, d^2, ac, a^2c\right\}$$

Puis r est le plus grand commun diviseur des entiers :

$$\left\{u\,a, \frac{u\,d^4}{a^2 c}, \frac{u\,a\,c}{d}, u\,c, u\,d, \frac{u\,d^2}{c}, \frac{u\,d^3}{a\,c}, \frac{u\,a^2 c}{d^2}, \frac{u\,d^2}{a}\right\}$$

Nous allons maintenant améliorer la condition suffisante ci-haut. Dans le résumé que nous venons de faire, b) deviendra :

(%) $\quad c < a < d \;ou\; d < a < c \;ou\; a < c < d \;ou\; d < c < a.$

Dès qu'une de ces quatre conditions est respectée, alors nous sommes assurés que le carré multiplicatif issu de (*) renfermera que des nombres différents deux à deux. Nous trouverons ensuite notre carré multiplicatif presque normal formé de neuf entiers premiers entre eux.

Nous devrons seulement surveiller si nous avons :

(&) $\quad a < d < c \;ou\; c < d < a.$

Ce sont les deux cas qui peuvent conduire à des répétitions. Il y a en tout, six cas; les quatre premiers (%) nous assurent qu'il n'y aura pas de répétition, ce qui n'est pas certain pour les deux autres (&).

Comment trouver les quatre cas (%) qui nous assurent qu'aucune répétition n'aura lieu? Pour cela, nous avons construit un exemple pour chacun des quatre cas de (%). Nous avons ensuite classé les neuf nombres du carré par ordre croissant et nous avons construit la suite des neuf expressions correspondantes dans (*).

Ainsi, pour le cas $c < a < d$, nous avons pris le carré $36A$ de l'exemple 4 d'où la suite :

$$\{16\,,\,24\,,\,36\,,\,72\,,\,108\,,\,162\,,\,324\,,\,486\,,\,729\}$$

Puis la suite des expressions correspondantes dans (*) :

(%%) $$\left\{\frac{a^2 c}{d^2}\,,\,\frac{a\,c}{d}\,,\,c\,,\,a\,,\,d\,,\,\frac{d^2}{a}\,,\,\frac{d^2}{c}\,,\,\frac{d^3}{a\,c}\,,\,\frac{d^4}{a^2 c}\right\}$$

Si U et V sont deux expressions consécutives dans (%%), U à gauche de V, alors nous montrons facilement que U < V. La suite est donc strictement croissante d'où les neuf entiers du carré sont différents deux à deux et ce, après avoir utilisé le facteur correcteur.

Nous procédons de la même façon pour les trois autres cas de (%). Quant aux deux cas de (&), ce sont les seuls qui peuvent conduire à des répétitions!!!

ATTENTION!!! Les cas $a < d < c \; ou \; c < d < a$ sont les seuls qui peuvent conduire à des répétitions.

Nous savons maintenant comment construire avec (*), un carré multiplicatif d'ordre 3, presque normal formé de neuf entiers premiers entre eux.

Voyons une autre structure de carrés multiplicatifs d'ordre 3 qui n'est pas une structure générale (elle ne donne pas tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 à cause du 1 de la case centrale de la première rangée); pour cela, posons dans (*) $a = mn^2,\ c = m^2, d = mn$ d'où le carré multiplicatif suivant qui renferme deux variables libres. Puisque dans (*), les variables $a, c \; et \; d$ sont non nulles, alors il en sera de même pour les variables $m \; et \; n$.

(**)

mn^2	1	m^2n
m^2	mn	n^2
n	m^2n^2	m

Le carré (**) est plus facile à utiliser. Si $m \; et \; n$ sont des entiers, alors il est évident que les neuf nombres du carré sont des entiers. Mais (**) ne génère qu'une partie des carrés multiplicatifs d'ordre 3 puisqu'il renferme le nombre 1 dans l'une de ses cases. Cependant, si nous multiplions (**) par k, le carré deviendra :

(***)

kmn^2	k	km^2n
km^2	kmn	kn^2
kn	km^2n^2	km

Nous allons montrer que (***) est une structure générale équivalente à (*). Tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 avec $P \neq 0$, proviennent de (*) mais aussi, ils proviennent tous de (***). Pour se faire, nous posons dans (*) :

$$a = k\,m\,n^2;\ c = k\,m^2;\ d = k\,m\,n$$

avec $k, m\ et\ n$, qui ne peuvent prendre que des valeurs non nulles. Nous obtenons alors (***).

Puis en posant dans (***) :

$$m = \frac{a\,c}{d^2}\ ;\ n = \frac{a}{d}\ ;\ k = \frac{d^4}{a^2 c}$$

nous obtenons (*).

Les structures générales (*) et (***) sont donc équivalentes en ce sens qu'elles fournissent chacune, tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 avec $P \neq 0$.

Notons que si un carré issu de (*) renferme que des entiers, alors nous pourrons l'obtenir de (***) avec des valeurs de $m\ et\ n$ qui ne sont pas forcément des entiers, contrairement à k. Par exemple, avec $a = 18,\ c = 36\ et\ d = 54$, (*) nous donne :

18	729	12
36	54	81
243	4	162

Pour obtenir ce carré à partir de (***), il nous faut : $m = \frac{2}{9},\ n = \frac{1}{3}\ et\ k = 729.$

Si dans (***), les trois variables ne prennent que des valeurs entières, alors nous n'obtiendrons pas tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 formés d'entiers.

Il existe des carrés multiplicatifs d'ordre 3 formés d'entiers non nuls qui ne peuvent pas être obtenus de (***) en attribuant des valeurs entières aux variables $k, m\ et\ n$.
Le carré ci-haut en est un exemple.

Comment construire, avec (***), un carré multiplicatif formé d'entiers différents 2 à 2? Nous pouvons procéder comme suit :

a) Donnons des valeurs entières ≥ 1 aux 3 variables dans (***).
b) Prenons $n > 1,\ m > n,\ et\ n^2 > m.$
c) Les neuf entiers de (**) forment alors une suite strictement croissante.
d) D'où les neuf entiers de (***) forment aussi une suite strictement croissante.
e) Les neuf entiers de (***) sont donc différents deux à deux.
f) Voici cette suite strictement croissante de (**) :

$$\left\{1\ ,\ n\ ,\ m\ ,\ n^2\ ,\ nm\ ,\ m^2\ ,\ n^2m\ ,\ nm^2\ ,\ n^2m^2\right\}$$

Nous allons maintenant présenter les trois théorèmes suivants :

Théorème 15.5 :

Il n'existe pas de carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est $p\ ou\ p^2\ ou\ p^3$ avec p, un nombre premier.
Cependant, il existe toujours un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est p^k où k est un entier $\geq 4.$ En voici un :

p	p^{2k}	p^{k-1}
p^{2k-2}	p^k	p^2
p^{k+1}	1	p^{2k-1}

Preuve :

Essayons de construire un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 avec le nombre premier p dans la case centrale.

Dans la structure générale de (*), nous poserons $d = p.$ Puisque nous voulons un carré presque normal, alors il faut que $\frac{d^2}{a}\ et\ \frac{d^2}{c}$ soient des entiers ≥ 1 tout comme $a\ et\ c.$ Ainsi, $a\ et\ c$ sont des diviseurs entiers de $d^2 = p^2.$ Donc, les seules valeurs possibles de a et c sont :

$$a: 1,\ p,\ p^2$$
$$c: 1,\ p,\ p^2$$

Toujours parce que le carré à construire doit être presque normal, les seuls cas à considérer pour $a \; et \; c$ sont :

$$a = 1 \; et \; c = p^2 \; ou \; a = p^2 \; et \; c = 1$$

Ceux-ci sont les seuls cas à pouvoir nous donner des carrés presque normaux. Or ces valeurs mises dans (*) nous donnent deux carrés qui renferment chacun des répétitions. Cela nous indique que si le centre contient le nombre premier p, alors le carré multiplicatif d'ordre 3 ne peut pas être presque normal.

Nous procédons de la même façon avec $p^2 \; ou \; p^3$ dans la case centrale de (*).

Regardons maintenant ce qui se passe si la case centrale renferme $p^k où \; k \geq 4$ est un entier. Le carré illustré dans l'énoncé du théorème est presque normal dès que $k \geq 4$. En effet, voyons la suite des exposants des entiers de ce carré: $0, 1, 2, k-1, k, k+1, 2k-2, 2k-1, 2k$. Nous voyons bien que si k égale $0, 1, 2 \, ou \, 3$, alors il y a répétition dans les exposants donc dans les entiers du carré. Mais avec $k \geq 4$, la suite ci-haut des exposants est strictement croissante d'où le carré est presque normal.

Il n'existe donc pas de carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est un des entiers suivants :

$$\{2 \, , \, 4 \, , \, 8 \, , \; 3 \, , \, 9 \, , \, 27 \, , \; 5 \, , \, 25 \, , \, 125 \, , \; 7 \, , \, 49 \, , \, 343 \, , ...\}$$

Revoici les premiers nombres premiers :

$$\{2 \, , \, 3 \, , \, 5 \, , \, 7 \, , \, 11 \, , \, 13 \, , \, 17 \, , \, 19 \, , \, 23 \, , \, 29 \, , \, 31 \, , \, 37 \, , \, 41 \, , \, 43 \, , \, ...\}$$

Théorème 15.6:

> Le plus petit produit pour un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 est $P = 216$. De plus, il existe au moins un carré multiplicatif presque normal dont le produit est 216.

Preuve :

Nous connaissons déjà un carré multiplicatif presque normal de produit $P = 216$ (Voir l'exemple 3 ci-haut). Nous savons que son centre est $\sqrt[3]{P} = \sqrt[3]{216} = 6$.

Essayons de construire avec (*), un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre d est 5, 4, 3, 2 ou 1.

Si $d=1$, alors il est évident que $a=c=1$. Le carré ne sera pas presque normal; en fait, il renfermera l'entier 1 dans toutes ses cases.

Si $d=5, d=4, d=3$ *ou* $d=2$, alors le théorème précédent nous assure qu'il n'existe pas de carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 puisque $2, 3$ *et* 5 sont des nombres premiers et 4 est le carré d'un nombre premier.

Cela montre bien que le plus petit produit magique pour un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 est $P=6^3=216$. Le carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 qui a le deuxième plus petit produit a pour centre $d=10$. Le deuxième plus petit produit est donc $P=1000$. Les deux suivants sont $P=1728$ *et* $P=2744$. (Voir à la fin de 15.2).

Théorème 15.7:

Il existe, aux équivalents près, un seul carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 qui renferme dans sa case centrale, le nombre pq *où* p *et* q sont des nombres premiers distincts.
Voici un des équivalents :

p	p^2q^2	q
q^2	pq	p^2
p^2q	1	pq^2

Il est facile de vérifier que les neuf entiers du carré sont différents deux à deux; évidemment, ils sont tous ≥ 1. Ce carré et ses équivalents sont donc tous presque normaux.

Preuve :

Nous allons construire un tel carré en posant dans (*), $d=pq$. Les diviseurs entiers de $d^2=p^2q^2$ sont :

$$1, p, q, p^2, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2$$

Les valeurs possibles de a et c sont :

$$a: \ 1, p, q, p^2, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2$$
$$c: \ 1, p, q, p^2, q^2, pq, pq^2, p^2q, p^2q^2$$

Pour que notre carré soit presque normal, il faut considérer les seuls cas suivants pour a et c :

$$a = 1 \text{ et } c = p, q, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2$$
$$a = p \text{ et } c = 1, q, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2$$
$$etc...$$

Rappelons que deux carrés sont primitifs si l'un n'est pas un équivalent de l'autre.

Nous invitons le lecteur à compléter cette preuve (Voir problème 3 de 15.7). En plaçant toutes les valeurs possibles de a et c dans (*), vous trouverez 56 carrés dont 48 qui ne sont pas presque normaux. Les huit autres carrés seront les seuls susceptibles de donner des carrés presque normaux. De plus, ce sont huit équivalents dont l'un est illustré dans l'énoncé du théorème 15.7. Les neuf entiers du carré sont évidemment ≥ 1. Enfin, puisque p et q sont des nombres premiers différents, cela implique que les neuf entiers du carré sont différents deux à deux. Pour voir cela, considérez sans perte de généralité, $p < q$ et les deux cas : $q < p^2$ et $p^2 < q$. Le carré, et ses équivalents, sont donc tous presque normaux.

Nous savons maintenant qu'il n'existe qu'un seul carré multiplicatif, presque normal, primitif, d'ordre 3 dont le centre est 6. De même si le centre est 10 ou 35 ou 77, …

Nous pourrons toujours nous servir du carré illustré dans l'énoncé du théorème ci-haut afin de construire un tel carré.

Voici, en terminant, la liste des douze plus petits produits pour un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3, s'il existe :

$$\{216 ; 1000 ; 1728 ; 2744 ; 3375 ; 4096 ; 5832 ; 8000 ; 9261 ; 10\,648 ; 13824 ; 17\,576\}$$

Nous connaissons un carré presque normal qui a pour produit $P = 216$. De même pour $P = 1000$. Comment avons-nous trouvé cette liste de douze produits?

Pour ce faire, nous avons utilisé le théorème 15.5 et avons trouvé les entiers (en rouge) susceptibles d'occuper le centre d'un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26}

De cette liste, nous avons éliminé tous les nombres premiers p ainsi que $p^2 et\ p^3$. Nous avons aussi éliminé 1. Nous avons donc éliminé 2, 4 et 8 puis 3 et 9, 5 et 25, …

Le tableau suivant nous indique, pour chaque centre, la façon de construire le carré multiplicatif presque normal en précisant dans la structure générale (*) la valeur attribuée à $a, c\ et\ d$, dans cet ordre :

Le centre d	Le produit $P = d^3$	Les coordonnées (a, c, d)
6	216	(18, 4, 6)
10	1 000	(5, 4, 10)
12	1 728	(24, 2, 12)
14	2 744	(28, 1, 14)
15	3 375	(45, 1, 15)
16	4 096	(32, 1, 16)
18	5 832	(36, 3, 18)
20	8 000	(40, 50, 20)
21	9 261	(63, 1, 21)
22	10 648	(44, 1, 22)
24	13 824	(48, 1, 24)
26	17 576	(52, 1, 26)

Il n'existe qu'un seul carré multiplicatif, presque normal, primitif, d'ordre 3 dont le centre est $d = p\,q$ où $p\ et\ q$ sont des nombres premiers. (Voir les entiers d en rouge).

15.3 Les carrés multiplicatifs d'ordre 4

Nous allons commencer par trouver la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 4. Avec celle-ci, nous pourrons construire tous les carrés multiplicatifs d'ordre 4.

Ensuite, nous allons construire la structure générale des m-Dürer et des m-super-Dürer.

Pour terminer, nous allons voir les carrés multiplicatifs d'Edwards, lesquels possèdent une propriété remarquable.

Construisons la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 4 dont le produit est non nul. Donc si $P \neq 0$, alors les variables seront toutes différentes de zéro.

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	e	f	$\frac{P}{def}$
g	h	m	$\frac{P}{ghm}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{P}{beh}$	$\frac{P}{cfm}$	A

Il est facile de montrer que $A = \frac{abcdefghm}{P^2}$. Pour que la diagonale secondaire soit magique, il faut $\frac{P}{abc} f h \frac{P}{adg} = P$ d'où $h = \frac{a^2bcdg}{fP}$. Enfin, pour que la diagonale principale soit magique, il faut $aemA = P$ d'où $m^2 = \frac{P^4}{(a^2bcdeg)^2}$ ce qui nous donne deux valeurs pour m soit $m = \frac{\pm P^2}{a^2bcdeg}$. Il est facile de vérifier qu'avec ces valeurs pour $A, h \text{ et } m$, le carré est multiplicatif.

Et voilà qu'ici, notre structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 4 à produits non nuls, est formée de deux structures puisque nous avons deux valeurs de m.

Voici donc ces deux structures :

(*)

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	e	f	$\frac{P}{def}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$\frac{P^2}{a^2bc\deg}$	$\frac{ef}{g}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP^2}{a^2b^2c\deg}$	$\frac{a^2b\deg}{fP}$	$\frac{abcdg}{P}$

(**)

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	e	f	$\frac{P}{def}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$-\frac{P^2}{a^2bc\deg}$	$-\frac{ef}{g}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP^2}{a^2b^2c\deg}$	$-\frac{a^2b\deg}{fP}$	$-\frac{abcdg}{P}$

Ces deux structures génèrent tous les carrés multiplicatifs d'ordre 4 à produits non nuls.
Ensemble, (*) et (**) forment la structure générale.

Attention!!! (**) ne peut pas générer un carré multiplicatif formé exclusivement de nombres > 0.
Cependant, notre objectif de construire un presque normal est atteint avec (*).

Donc, tout carré multiplicatif d'ordre 4, avec $P \neq 0$, presque normal, est issu de (*).

Par exemple, $a=1, b=105, c=28, d=140, e=12, f=5, g=15, P=176\,400$, nous avons :

1	105	28	60
140	12	5	21
15	7	420	4
84	20	3	35

M

Ce carré M est multiplicatif avec $P=176\,400$. Il est presque normal. Nous verrons plus loin pourquoi $P=176\,400=420^2$. M possède de très belles propriétés.

Le nombre de figures magique de M est 52. Cela signifie que nous pouvons choisir de 52 façons différentes, quatre cases distinctes dont le produit des nombres qui s'y trouvent est $P=176\,400$.

M est pandiagonal puisque ses diagonales brisées sont magiques.

C'est aussi un m-hyper-magique car :

1) Il est d'ordre pair.
2) Le produit des nombres situés dans les cases de tous les sous-carrés d'ordre 2 est toujours égal à P.
3) Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, le produit des nombres situés dans deux cases séparées par une seule case, est toujours égal à $\sqrt{P}$.

Nous verrons que M est un **m-super-Dürer**.

Nous verrons aussi dans ce chapitre, une définition générale des carrés m-hyper-magiques.

Maintenant, montrons qu'un carré multiplicatif d'ordre 4 issu de (*) a les propriétés suivantes. Comme référence, utilisons le carré multiplicatif qui suit:

(&)

A	B	C	D
E	F	G	H
J	K	M	N
Q	R	T	W

Théorème 15.8:

Dans tout carré multiplicatif d'ordre 4 de produit $P \neq 0$, issu de (*), nous avons :

$$ADQW = FGKM = BCRT = EJHN = P$$

D'où quatre nouvelles figures magiques que possèdent tous les carrés multiplicatifs d'ordre 4 dont le produit est non nul et qui proviennent de (*).

Preuve :

La preuve est immédiate!!! Il suffit de vérifier à partir de la structure (*).

Cependant, si le carré provient de (**), alors le théorème est faux. En effet, dans (**), le produit est P mais le produit des quatre coins donne $-P$. Les quatre coins ne forment donc pas une figure magique.

Autre preuve :

Toujours à partir du carré (&) ci-haut, considérons les figures magiques suivantes de (*) :

$$AEJQ = P$$
$$DHNW = P$$
$$DGKQ = P$$
$$AFMW = P$$

Nous avons donc :

$$(ADQW)\,(ADQW)\,(EFGH)\,(JKMN) = P^4 = (ADQW)^2\,P^2$$
$$d'où \qquad (ADQW)^2 = P^2$$
$$et \qquad ADQW = P$$

Ce qui est conforme avec $ADQW = P$ dans (*).

Nous voyons bien que les quatre coins dans la structure (**) ne forment jamais une figure magique puisque $ADQW = -P.$

En fait, de $(ADQW)^2 = P^2$, nous devons conclure que $ADQW = \pm P.$

Avec la structure (*), nous prenons le signe $+$ et avec la structure (**), nous prenons le signe $-$.

Montrons que $FGKM = P.$ Nous avons :

$$AFMW = P$$
$$DGKQ = P$$

D'où $(AFMW)\,(DGKQ) = P^2 = (FGKM)\,(ADQW) = (FGKM)\,P$

Nous avons donc $FGKM = P.$ Nous vous laissons compléter la preuve de ce théorème.

Comment pouvons-nous construire un carré multiplicatif issu de (*) qui soit presque normal?

Commençons par trouver un algorithme qui va nous permettre de construire, à partir de (*), un carré multiplicatif d'ordre 4 formé de seize nombres $> 0,$ différents deux à deux. Nous allons attribuer aux variables libres, les valeurs suivantes > 0 et P sera un nombre > 0 :

$$a = a\ ;\ b = a + m\ ;\ c = a + 2m\ ;\ d = a + 3m\ ;\ e = a + 4m\ ;\ f = a + 5m\ ;\ g = a + 6m$$

où $a\ et\ m$ sont des nombres $> 0.$ Ainsi, nous aurons $a < b < c < d < e < f < g.$

Nous allons montrer que les nombres de (*) forment la suite strictement croissante suivante :

$$\frac{a^2bcdg}{fP} < \frac{a^2bdeg}{fP} < \frac{abcdg}{P} < a < b < c < d < \frac{ef}{g} < e < f < \frac{P}{def} < g < \frac{P}{adg} <$$
$$< \frac{P}{abc} < \frac{P^2}{a^2bcdeg} < \frac{fP^2}{a^2b^2cdeg}.$$

Pour que cette suite soit strictement croissante, certaines conditions devront être respectées.

Par exemple, avons-nous (1) $\frac{a^2bcdg}{fP} < \frac{a^2bdeg}{fP}$? La réponse est oui puisque :

$$\frac{a^2bcdg}{fP} < \frac{a^2bdeg}{fP} \quad \Leftrightarrow \quad c < e$$

Mais nous avons $c < e$, par construction. L'inégalité (1) est donc exacte.

Avons-nous (2) $\frac{a^2bdeg}{fP} < \frac{abcdg}{P}$? La réponse est oui puisque :

$$\frac{a^2bdeg}{fP} < \frac{abcdg}{P} \quad \Leftrightarrow \quad ae < cf$$

Mais l'inégalité de droite est vrai d'où (2) est exacte.

Avons-nous (3) $\frac{abcdg}{P} < a$? Puisque $\frac{abcdg}{P} < a \quad \Leftrightarrow \quad P > bcdg$, alors l'inégalité de droite devient une condition à être respectée. Nous devons donc avoir : $P > bcdg$.

En continuant ainsi, nous avons trouvé les conditions suivantes (incluant celle ci-dessus) :

(4)
$$\begin{aligned} &P > bcdg \\ &dg < ef \\ &P > def^2 \\ &P < defg \\ &P > adg^2 \\ &P > adeg \end{aligned}$$

Dès que les six inégalités de (4) seront vérifiées, alors les seize nombres de (*) seront différents deux à deux car ils formeront une suite strictement croissante.

L'inégalité $dg < ef$ de (4) est toujours vérifiée puisque $ef - dg = 2m^2 > 0, (m > 0)$.
Considérons maintenant les membres de droite des cinq inégalités dans lesquelles se trouve P.
Calculons les quatre différences suivantes :

$$\begin{aligned} defg - def^2 &= a^3m + 12a^2m^2 + 47am^3 + 60m^4 \\ def^2 - adg^2 &= 2a^3m + 35a^2m^2 + 187am^3 + 300m^4 \\ def^2 - bcdg &= 5a^3m + 60a^2m^2 + 223am^3 + 264m^4 \\ def^2 - adeg &= 4a^3m + 53a^2m^2 + 223am^3 + 300m^4 \end{aligned}$$

Les quatre membres de droite sont toujours > 0. Cela signifie que nous avons toujours:

$adeg, bcdg$ *et* adg^2, strictement plus petits que def^2 et que $def^2 < defg$.

Il est maintenant évident qu'avec $def^2 < P < defg$, les six conditions de (4) soient respectées. Enfin, les seize nombres de (*) seront différents deux à deux.

Ce procédé constitue une **condition suffisante** pour avoir seize nombres >0 différents dans le carré issu de (*).

Maintenant, pour avoir un carré multiplicatif presque normal, il suffit de donner des valeurs entières ≥ 1 aux variables $a \; et \; m$ puis de donner à P une valeur entière ≥ 1 telle que :

$$def^2 < P < defg$$

Appelons A, le carré ainsi obtenu qui contient seize nombres différents. Celui-ci peut contenir neuf nombres rationnels. En appliquant le facteur correcteur $\frac{u}{r}$, le carré $\frac{u}{r}A$ sera presque normal. Notons que u est le plus petit commun multiple (p p c m) des dénominateurs des rationnels de (*) soit des entiers suivants :

$$u = (ppcm)\left\{abc\,,\, def\,,\, g\,,\, a^2bcdeg\,,\, fP\,,\, P\,,\, a^2b^2cdeg\,,\, adg\right\}$$

Quant à r, c'est le plus grand commun diviseur (p g c d) des entiers de $u\,A$.

Ce procédé nous assure l'existence d'une infinité de carrés multiplicatifs d'ordre 4 presque normaux.

Exemple 1 :

Si $a = m = 1$, nous trouvons $def^2 = 4\times5\times36 = 720 \; et \; defg = 4\times5\times6\times7 = 840$. Avec $720 < P < 840$, nous sommes certains d'obtenir un carré multiplicatif presque normal.

Pour construire un carré multiplicatif presque normal d'ordre 4 avec (*), il suffit de prendre :

1) $a = a$; $b = a+m$; $c = a+2m$; $d = a+3m$; $e = a+4m$; $f = a+5m$; $g = a+6m$ où $a \; et \; m$ sont des entiers ≥ 1.
2) P, un entier tel que : $def^2 < P < defg$
3) Nous obtenons ainsi un carré A formé de seize nombres rationnels tous différents.
4) Le carré $u\,A$ sera presque normal.
5) Le carré $\frac{u}{r}A$ sera presque normal avec seize entiers premiers entre eux.

La structure (*) permet donc de construire des carrés multiplicatifs presque normaux!!!

Exemple 2 :

Dans l'exemple 1, prenons $P = 800.$ Nous obtenons le carré :

4 200	8 400	12 600	560 000
16 800	21 000	25 200	28 000
29 400	147	3 200 000	18 000
120 000	9 600 000	245	882

M_1

Le premier carré obtenu, formé de rationnels, avait pour produit $P = 800.$ Avec le facteur correcteur, ici 4200, nous avons maintenant le carré M_1 ci-haut qui est presque normal dont le produit est :

$$P = 248\ 935\ 680\ 000\ 000\ 000$$

Exemple 3 :

Dans le carré M_1 de l'exemple 2, les quatre cases vertes forment une figure complète ainsi que les quatre cases grises et les quatre cases bleues. Nous divisons par 800, chaque entier dans les cases vertes, par 21, chaque entier dans les cases grises et par 200, chaque entier dans les cases bleues. Le nouveau carré obtenu, M_2, est toujours multiplicatif, presque normal et de produit 800 x 21 x 200 = 3 360 000 fois plus petit.

Voici ce carré :

4 200	400	63	700
21	105	1 200	28 000
1 400	147	4 000	90
600	12 000	245	42

M_2

Le produit du carré M_2 est $74\ 088\ 000\ 000$.

Rappelons que dans un carré d'ordre $n \geq 4$, un groupe de n cases distinctes est appelé **figure complète** si nous retrouvons ces cases, une seule par rangée, par colonne et par grande diagonale.

Le carré M_2 nous montre que tout carré d'ordre 4 se décompose en quatre figures complètes!!! Voir le problème 39 de 15.7

Le procédé que nous venons de voir pour construire un carré multiplicatif d'ordre 4 presque normal, nous donne seize entiers différents ≥ 1 et tous premiers entre eux. Pour cela, nous avons utilisé le facteur correcteur. Dans l'exemple 2 ci-dessus, nous avons obtenu un produit très grand. Grâce aux figures complètes, nous avons construit à partir de M_1, un nouveau carré M_2 de produit $3\ 360\ 000$ fois plus petit que celui de M_1. Très intéressant!!! Mais attention aux répétitions. Ici, nous avons vérifié qu'en utilisant chacune des trois figures complètes, le carré restait toujours presque normal.

Après avoir utilisé une figure complète afin de réduire le produit magique, assurez-vous que le carré presque normal reste presque normal!!!

Pour construire un carré multiplicatif presque normal, nous pouvons nous servir de la structure (*) avec ses huit variables $a, b, c, d, e, f, g \ et \ P$. Il arrive souvent, en attribuant des valeurs entières ≥ 1 aux huit variables, que nous trouvions déjà seize nombres tous différents. Il restera ensuite à se servir du facteur correcteur afin de trouver un carré presque normal formé d'entiers premiers entre eux. De plus, il peut arriver que le facteur correcteur ne soit pas nécessaire; les seize nombres sont déjà des entiers (pas obligatoirement premiers entre eux).

Exemple 4 :

Posons dans (*) :

$a = 46$, $b = 39$, $c = 231$, $d = 121$, $e = 21$, $f = 26$, $g = 13 \ et \ P = 4\ 558\ 554.$

Nous trouvons le carré multiplicatif de Ronald Edwards lequel est vraiment exceptionnel et nous y reviendrons plus loin (voir 15.3.3).

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards

64	93	132	11
121	12	62	96
31	352	33	24
36	22	32	341

Son renversé

Ce carré est presque normal et a la propriété suivante : si on renverse l'ordre des chiffres de chaque entier, le nouveau carré obtenu, en vert, est toujours multiplicatif!!! Le produit du carré en vert est $P = 8\ 642\ 304.$

Exemple 5 :

Dans (*), posons; $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5, f = 6, g = 7 \ et \ P = 20.$ Nous allons voir le carré M obtenu avant l'utilisation du facteur correcteur. Le deuxième carré sera $u\,M$ et le troisième carré sera $(u / r)\,M$.

Puis, nous pourrons utiliser les figures complètes afin de diminuer le produit P.

1	2	3	10/3
4	5	6	1/6
7	7/5	10/21	30/7
5/7	10/7	7/3	42/5

M

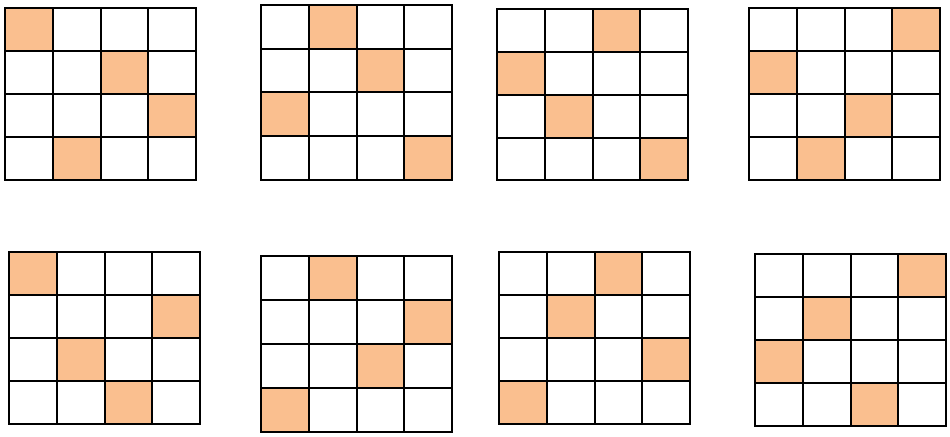
1 680	3 360	5 040	5 600
6 720	8 400	10 080	280
11 760	2 352	800	7 200
1 200	2 400	3 920	14 112

$u\,M$

210	420	630	700
840	1 050	1 260	35
1 470	294	100	900
150	300	490	1 764

$\frac{u}{r}M$

Le carré multiplicatif M renferme seize nombres rationnels différents dont sept sont des entiers. Son produit est 20. Le carré $u\,M$ est presque normal de produit $1680^4 \times 20$. Le carré $\frac{u}{r}M$ est aussi presque normal de produit $210^4 \times 20 = 38\ 896\ 200\ 000$. De plus, ses seize entiers sont premiers entre eux. Enfin, en se servant de figures complètes, nous avons réussi à réduire de beaucoup le produit; celui-ci est passé de $38\ 896\ 200\ 000\ à\ 37\ 800$. Voici les seules figures complètes possibles pour un carré d'ordre 4; ce sont les huit équivalents!!!



Prenons les figures complètes ci-haut et numérotons-les de 1 *à* 8, de gauche à droite et de haut en bas. Nous allons indiquer par quel entier nous avons divisé les quatre entiers de chaque figure complète :

$$1(7)\quad 2(7)\quad 3(7)\quad 4(10)\quad 5(5)\quad 6(5)\quad 7(2)\quad 8(6)$$

Notez que ces figures ont été placées sur le carré $\frac{u}{r}M$. Nous avons divisé les quatre entiers de la figure complète 1 *par* 7, 2 *par* 7, 3 *par* 7 , 4 *par* 10, ...

Voici donc notre carré multiplicatif presque normal de produit $P = 37\ 800$:

5	12	9	70
60	21	30	1
42	6	10	15
3	25	14	36

Nous avons vérifié après l'utilisation de chaque figure complète que le carré obtenu était toujours presque normal. Ce produit de $37\ 800$ est $1\ 029\ 000$ fois plus petit que le produit de $\frac{u}{r}M$. Pouvons-nous faire mieux?

Enfin, nous constatons que les huit figures complètes ci-haut sont les huit équivalents d'une d'entre elles.

Voici, en terminant, le carré multiplicatif publié en 1913 par Harry Sayles. Nous l'obtenons avec (*) en posant : $a = 1$, $b = 15$, $c = 24$, $d = 12$, $e = 28$; $f = 3$, $g = 21$, $P = 5040$.

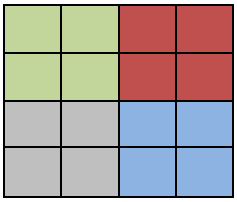
1	15	24	14
12	28	3	5
21	6	10	4
20	2	7	18

H. Sayles $P = 5040$

Nous verrons plus loin que le carré de Sayles est un m-Dürer puisque les quatre entiers dans le sous-carré d'ordre 2 dans le coin haut-gauche est $1 \times 12 \times 15 \times 28 = 5040$, le produit magique.

15.3.1 Les carrés m-Dürer

Ce sont des carrés multiplicatifs d'ordre 4 qui ont comme figure magique le petit sous-carré d'ordre 2 situé dans le coin haut-gauche du grand carré (le carré vert).



Le produit des nombres situés dans les cases vertes est donc P. Il s'ensuit qu'il en est de même pour les quatre cases en rouge, en bleu et en gris. Ce sont trois autres figures magiques qui découlent de la première.

Les m-Dürer sont caractérisés par vingt quatre figures magiques, les mêmes que celles qui caractérisent les Dürer. Nous y reviendrons.

Nous allons maintenant trouver une structure de **m-Dürer avec produits non nuls**. Pour ce faire, nous allons utiliser (*) plutôt que (**) car nous voulons construire des m-Dürer presque normaux. Nous devons donc avoir $abde = P\ d'où\ e = \frac{P}{abd}$.

(M D)

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
d	$\frac{P}{abd}$	f	$\frac{ab}{f}$
g	$\frac{a^2bcdg}{fP}$	$\frac{P}{acg}$	$\frac{fP}{abdg}$
$\frac{P}{adg}$	$\frac{fP}{abcg}$	$\frac{ag}{f}$	$\frac{abcdg}{P}$

Par exemple, cette fois, nous retrouvons le carré de Sayles à l'aide de sept coordonnées au lieu de huit : $a=1$, $b=15$, $c=24$, $d=12$, $f=3$, $g=21$, $P=5040$. Le carré de Sayles est donc un m-Dürer. Nous trouvons que (M D) possède exactement vingt-quatre figures magiques et il est facile de les trouver. Ce sont précisément les vingt-quatre figures magiques qui caractérisent les Dürer. Celles-ci caractérisent aussi les m-Dürer issus de (MD).

Pour construire un m-Dürer presque normal avec (MD), il suffit d'attribuer aux variables des valeurs entières ≥ 1, d'utiliser le facteur correcteur si nécessaire et de s'assurer d'aucune répétition.

Afin de réduire le produit magique d'un m-Dürer, nous pourrons toujours utiliser les figures complètes car après avoir utilisé une telle figure, le carré qui en résulte est toujours un m-Dürer (Voir les problèmes 9 et 10 de 15.7).

Vous pouvez vérifier que le carré d'Edwards, vu plus haut, est aussi un m-Dürer.

Pour savoir si un carré multiplicatif d'ordre 4 formé uniquement de nombres > 0 est un m-Dürer, alors il suffit de vérifier que le produit des nombres situés dans les cases du sous-carré d'ordre 2 du coin haut-gauche est égal au produit magique P.

En référence avec le carré (&) de 15.3, il s'agit de vérifier que le produit des nombres situés dans les cases A, B, E et F est égal à P.

Dans la structure (MD), posons :

$$a = mn; b = uv; c = xy; d = yr; f = mu; g = us; P = mnuvxyrs$$

Nous obtenons :

(MD*)

mn	uv	xy	rs
ry	sx	mu	nv
su	ny	rv	mx
vx	mr	ns	uy

Cette nouvelle structure (MD*), génère que des m-Dürer. Puisque cette structure provient de (MD), il est clair que le produit doit être non nul et donc les huit variables non nulles.

Maintenant, dans (MD*), posons :

$$u = \frac{abc}{P};\ y = dg;\ m = \frac{fP}{abc};\ n = \frac{a^2bc}{fP};\ v = \frac{P}{ac};\ x = \frac{c}{dg};\ r = \frac{1}{g};\ s = \frac{gP}{abc}$$

Nous obtenons alors la structure (MD)!!!

Notons que dans (MD), toutes les variables sont non nulles. Puisque (MD*) provient de (MD), toutes les variables de (MD*) doivent être non nulles.

Les structures (MD) et (MD*) sont équivalentes lorsque toutes leurs variables sont non nulles.

Mais la structure (MD*) se manipule beaucoup plus facilement. Nous donnons des valeurs entières aux variables et nous sommes certains que le m-Dürer sera formé que d'entiers. (MD*) et (MD) ne sont pas des structures équivalentes si certaines variables peuvent être nulles. (MD*) peut générer un carré multiplicatif de produit nul avec $m=0$ par exemple, ce que (MD) ne peut pas faire.

Retrouvons le carré de Sayles avec (MD*) en posant :

$$m=42\ ;\ n=\frac{1}{42}\ ;\ u=\frac{1}{14}\ ;\ v=210\ ;\ x=\frac{2}{21}\ ;\ y=252\ ;\ r=\frac{1}{21}\ ;\ s=294$$

1	15	24	14
12	28	3	5
21	6	10	4
20	2	7	18

Mais nous pourrions obtenir le même carré avec :

$$m=1\ ;\ n=1\ ;\ u=3\ ;\ v=5\ ;\ x=4\ ;\ y=6\ ;\ r=2\ ;\ s=7$$

Nous avons donc deux façons différentes de construire le même carré multiplicatif avec (MD*). Pour comprendre cela, nous vous recommandons fortement le problème 40 de 15.7).

Nous allons terminer en trouvant une condition suffisante pour obtenir de (MD*) un m-Dürer presque normal.

Les seize nombres dans (MD*) peuvent se regrouper ainsi :

$$\begin{array}{cccc} mn & vu & yx & sr \\ mu & vn & yr & sx \\ mx & vr & yn & su \\ mr & vx & yu & sn \end{array}$$

Dans chaque colonne, les nombres de droite sont les mêmes. Aussi, ces quatre colonnes forment chacune une figure complète.

	n	u	x	r
m	mn	mu	mx	mr
v	vn	vu	vx	vr
y	yn	yu	yx	yr
s	sn	su	sx	sr

Nous allons attribuer des valeurs entières ≥ 1 à ces huit variables avec :

$$n < u < x < r$$

Nous allons ensuite attribuer à $v, y \; et \; s$ des valeurs qui vont nous permettre d'avoir :

$$vn > mr$$
$$yn > vr$$
$$sn > yr$$

De cette façon, nous sommes assurés d'avoir seize entiers tous différents dans notre m-Dürer.

Cette condition est **suffisante** pour avoir seize entiers différents mais elle n'est **pas nécessaire**. En effet, avec $m=1$; $n=1$; $u=3$; $v=5$; $x=4$; $y=6$; $r=2$; $s=7$, le carré multiplicatif obtenu (celui de Sayles vu plus haut) avec (MD*) renferme 16 entiers différents et nous observons que la condition n'est pas respectée.

Voyons cet exemple :

$$n=1 \; ; \; u=2 \; ; \; x=3 \; ; \; r=4 \; ; \; m=1 \; ; \; v=5 \; ; \; y=21 \; ; \; s=85$$

	n	u	x	r
$m=1$	1	2	3	4
$v=5$	5	10	15	20
$y=21$	21	42	63	84
$s=85$	85	170	255	340

Le carré multiplicatif obtenu est un m-Dürer presque normal avec $P = 214\ 200$.

Puis nous avons utilisé deux figures complètes : $3(3) \; et \; 8(5)$, en référence avec les huit figures complètes vues plus haut. Le produit est devenu quinze fois plus petit pour le nouveau m-Dürer.

1	10	63	340
84	255	2	5
170	21	20	3
15	4	85	42

$P = 214\ 200$

1	10	21	68
28	51	2	5
34	7	20	3
15	4	17	14

$P = 14\ 280$

Ces deux carrés multiplicatifs sont des m-Dürer presque normaux et il est impossible de réduire le produit $P = 14\ 280$ à l'aide d'une figure complète si nous voulons toujours un presque normal (problème 12 de 15.7).

Le procédé que nous venons d'utiliser pour construire un m-Dürer avec (MD*) nous assure qu'il n'y aura aucune répétition. Puis, une figure complète transforme toujours un m-Dürer en un autre m-Dürer.

Maintenant, nous sommes en mesure de construire des m-Dürer presque normaux sans problème!!!

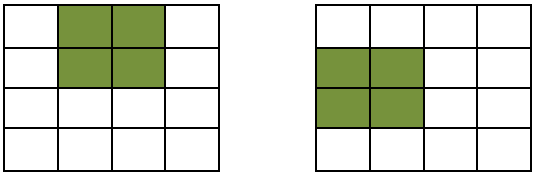
Tous les m-Dürer issus de (MD) ou de (MD*) ont en commun les mêmes vingt-quatre figures magiques qui sont celles qui caractérisent les Dürer. (&)

Si nous établissions une structure de m-Dürer à partir de (**), ceux-ci auraient en commun seulement 16 figures magiques. Ces derniers nous intéressent beaucoup moins puisqu'en plus, ils ne peuvent jamais être formés que de nombres > 0 donc ils ne peuvent jamais être presque normaux.

(&) Démontrez-le en vous servant des structures générales (MD) ou (MD*).

15.3.2 Les carrés m-super-Dürer

Nous allons construire ici de très beaux carrés multiplicatifs à partir de la structure (MD). Un carré multiplicatif **m-super-Dürer** est un m-Dürer issu de (MD) qui possède les deux figures magiques suivantes :



À partir de la structure (MD) dans laquelle toutes les variables sont non nulles, rendons magique la figure du carré de gauche ci-haut. Nous trouvons :

$$\frac{bc\,f\,P}{a\,b\,d} = P \text{ d'où } d = \frac{c\,f}{a}$$

Le carré devient :

a	b	c	$\frac{P}{abc}$
$\frac{c\,f}{a}$	$\frac{P}{bc\,f}$	f	$\frac{ab}{f}$
g	$\frac{abc^2g}{P}$	$\frac{P}{ac\,g}$	$\frac{P}{bc\,g}$
$\frac{P}{c\,f\,g}$	$\frac{f\,P}{abcg}$	$\frac{a\,g}{f}$	$\frac{bc^2f\,g}{P}$

Dans cette structure, rendons magique la figure du carré de droite ci-haut. Nous trouvons :

$$\frac{c\,f\,P\,g\,abc^2g}{abc\,f\,P} = P \text{ d'où } P = c^2g^2$$

Le carré devient :

(MSD)

a	b	c	$\frac{c\,g^2}{a\,b}$
$\frac{c\,f}{a}$	$\frac{c\,g^2}{b\,f}$	f	$\frac{a\,b}{f}$
g	$\frac{a\,b}{g}$	$\frac{c\,g}{a}$	$\frac{c\,g}{b}$
$\frac{c\,g}{f}$	$\frac{c\,f\,g}{a\,b}$	$\frac{a\,g}{f}$	$\frac{b\,f}{g}$

Voici donc la structure (MSD), issue de (MD), des **m-super-Dürer**. Toutes ses variables sont non nulles. Celle-ci possède de très belles propriétés :

a) Le produit magique est $P = c^2 g^2$. Avec ses variables non nulles, nous avons toujours $P > 0$, peu importe que les variables soient > 0 ou < 0 ou les deux.

b) Elle est m-hyper-magique. Ce qui signifie que tous les sous-carrés d'ordre 2 ont pour produit $\sqrt[4]{P^4} = P = c^2 g^2$. De plus, sur chaque diagonale, grande ou brisée, le produit des nombres situés dans deux cases séparées d'une case, est toujours le même soit $\sqrt[4]{P^2} = c\,g,$ lorsque $c > 0$ et $g > 0.$ Enfin, le carré est d'ordre pair.

c) Elle est pandiagonale puisque toutes les diagonales, grandes ou brisées, sont des figures magiques.

d) Elle possède cinquante deux figures magiques qui sont les mêmes que celles que possède la structure générale des super-Dürer.

e) Le produit magique est donc indépendant des variables a, b et f.

f) Si les variables c et g sont des entiers non nuls, alors le produit est un carré parfait dans les entiers naturels.

Vous voulez construire un carré multiplicatif pandiagonal d'ordre 4, alors servez-vous de la structure (MSD)!!!

Attention!!! L'utilisation d'une figure complète dans un m-super-Dürer nous assure que le résultat ne sera plus un m-super-Dürer. Mais il restera un m-Dürer. Vérifiez avec un exemple.

En nous servant de la structure (MSD), nous allons construire un groupe formé de cinq carrés m-super-Dürer. Ils sont tous presque normaux, renferment tous les mêmes seize entiers, sont tous primitifs et ont tous comme produit magique $P = 14\,400$. Le premier carré trouvé est défini par $a = 1$; $b = 24$; $c = 15$; $f = 4$; $g = 8$. Le voici :

1	24	15	40
60	10	4	6
8	3	120	5
30	20	2	12

$P = 14\,400$

Puis les quatre autres :

1	24	10	60
40	15	4	6
12	2	120	5
30	20	3	8

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

10	60	6	4
24	1	40	15
20	30	12	2
3	8	5	120

1	24	10	60
30	20	3	8
12	2	120	5
40	15	4	6

Nous verrons plus loin qu'il existe encore 43 tels carrés. Le dernier carré, en bas à droite, est celui de Harry Sayles.

Nous voulons savoir si (MSD) peut produire des carrés presque normaux. La réponse est oui et voici comment nous pouvons y arriver avec le facteur correcteur.

Si nous multiplions (MSD) par $a\,b\,f\,g$, alors nous obtenons le m-super-Dürer suivant :

(MSD – 1)

$a^2b\,f\,g$	$a\,b^2\,f\,g$	$a\,b\,c\,f\,g$	$c\,f\,g^3$
$b\,c\,f^2g$	$a\,c\,g^3$	$a\,b\,f^2g$	a^2b^2g
$a\,b\,f\,g^2$	a^2b^2f	$b\,c\,f\,g^2$	$a\,c\,f\,g^2$
$a\,b\,c\,g^2$	$c\,f^2g^2$	$a^2b\,g^2$	$a\,b^2f^2$

Puisque dans (MSD), nous trouvons seize expressions différentes, alors dans (MSD – 1), nous trouvons aussi seize expressions différentes.

Si les cinq variables prennent des valeurs entières ≥ 1, alors les seize nombres du carré sont tous des entiers ≥ 1. Une condition suffisante pour avoir un carré presque normal est la suivante :

Pour obtenir de (MSD – 1) un carré presque normal, il est suffisant que les cinq variables prennent des valeurs qui sont des nombres premiers tous différents deux à deux.

Par exemple : $a=2; b=3; c=5;\ f=7; g=11$ nous donnent le m-super-Dürer suivant de produit 137 813 981 936 400 :

924	1 386	2 310	46 585
8 085	13 310	3 234	396
5 082	252	12 705	8 470
3 630	29 645	1 452	882

Nous ne cherchions pas ici à trouver un m-super-Dürer avec un très petit produit; nous voulions seulement montrer que nous pouvions construire un presque normal et même une infinité de presque normaux!!!

Nous pouvons donc construire une infinité de m-super-Dürer presque normaux.

Essayons maintenant de construire des m-super-Dürer presque normaux, toujours avec (MSD – 1), sans forcément se servir de nombres premiers. En voici trois :

40	80	120	1500
480	375	160	20
200	16	600	300
150	1200	50	64

48	72	120	20
240	10	96	36
24	144	60	40
30	80	12	288

24	36	60	10
120	5	48	18
12	72	30	20
15	40	6	144

Ceux-ci sont obtenus, de gauche à droite, avec $a=1; b=2; c=3; f=4; g=5$ puis $a=2; b=3; c=5; f=4; g=1$ pour les deux premiers carrés. Le troisième à droite est le deuxième que nous avons multiplié par ½. Les produits sont respectivement 576 000 000, 8 294 400 et 518 400.

Notez que les deux premiers carrés sont formés à partir des cinq plus petits entiers ≥ 1 mais qu'ils ont des produits très différents, l'un est plus que soixante-neuf fois plus grand que l'autre! Nous

verrons un peu plus bas que le plus petit produit pour un m-super-Dürer presque normal est 14 400. Vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 29, quarante-huit m-super-Dürer primitifs presque normaux de produit 14 400.

Nous en avons illustré cinq un peu plus haut.

Théorème 15.9 :

La structure générale des m-super-Dürer presque normaux (MSD) d'ordre 4 est la même que celle des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 et est la même que celle des carrés multiplicatifs pandiagonaux presque normaux d'ordre 4.

Preuve :

La structure (MSD) est celle des m-super-Dürer presque normaux d'ordre 4. En construisant la structure des carrés multiplicatifs pandiagonaux presque normaux d'ordre 4, nous trouvons

quatre structures dont (MSD) et trois autres. Mais ces trois autres nous donnent que des carrés pandiagonaux qui renferment toujours des nombres négatifs. **Un presque normal doit donc provenir de (MSD).**

Le problème 29 de 15.7 vous demande de compléter la preuve.

Théorème 15.10 :

Si un carré multiplicatif d'ordre 4 est presque normal et pandiagonal, alors son produit est $P \geq 14\ 400.$
De plus, nous en connaissons plusieurs de produit $P = 14\ 400.$

Preuve :

Un tel carré doit provenir de la structure (MSD). De plus, celui-ci est un m-hyper-magique selon le théorème 15.9 d'où son produit $P = (c\,g)^2 = k^2$. Soit $X\ et\ Y,$ deux nombres situés dans deux cases d'une diagonale (grande ou brisée), séparées d'une case située sur cette même diagonale. Nous avons donc :

$$X\,Y = c\,g = k$$

Puis, si le carré est presque normal, alors $X\ et\ Y$ sont des diviseurs entiers ≥ 1 de l'entier k. **Il en résulte que tous les entiers du carré sont des diviseurs entiers** ≥ 1 **de** k.

Pour que le carré soit presque normal, il est donc nécessaire que k possède au moins seize diviseurs entiers $\geq 1.$

Mais voilà que le nombre de diviseurs entiers ≥ 1 de k ne dépasse pas 12 lorsque k varie de $1\ à\ 119.$ Cela nous montre que pour un presque normal, le plus petit produit possible est :

$$120^2 = 14\,400$$

Notons ici que 120 possède exactement seize diviseurs.

Notre programme dans MAPLE nous a permis de trouver 48 carrés multiplicatifs pandiagonaux presque normaux et primitifs d'ordre 4 dont le produit est 14 400. Nous en avons illustré cinq un peu plus haut. Vous trouverez les 48 dans la Partie 3, annexe 23, programme 29. Ce sont les 48 meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 donc les 48 meilleurs m-super-Dürer presque normaux et enfin les 48 meilleurs m-pandiagonaux presque normaux.

Il est remarquable que ces 48 carrés renferment les mêmes seize entiers (voir problème 31 de 15.7). Le tableau suivant nous indique les produits possibles avec k qui varie de $1 \text{ à } 500$:

k	Nombre de diviseurs de k	$P = k^2$	Nombre de carrés	Nombre de primitifs	Nombre de groupes de 48
120	16	14 400	384	48	1
168	16	28 224	384	48	1
180	18	32 400	0	0	0
210	16	44 100	384	48	1
216	16	46 656	384	48	1
240	20	57 600	1920	240	5
252	18	63 504	0	0	0
264	16	69 696	384	48	1
270	16	72 900	384	48	1
280	16	78 400	384	48	1
288	18	82 944	0	0	0
300	18	90 000	0	0	0
312	16	97 344	384	48	1
330	16	108 900	384	48	1
336	20	112 896	1920	240	5
360	24	129 600	3 072	384	8
378	16	142 884	384	48	1
384	16	147 456	384	48	1
390	16	152 100	384	48	1
396	18	156 816	0	0	0
408	16	166 464	384	48	1
420	24	176 400	2 688	336	7
432	20	186 624	1920	240	5
440	16	193 600	384	48	1
450	18	202 500	0	0	0
456	16	207 936	384	48	1
462	16	213 444	384	48	1
468	18	219 024	0	0	0
480	24	230 400	5 760	720	15

Par produit possible, nous entendons un produit k^2 où l'entier k possède au moins seize diviseurs entiers ≥ 1.

La première colonne indique les valeurs de k qui possèdent au moins 16 diviseurs ≥ 1.

La deuxième colonne indique le nombre de diviseurs ≥ 1 de k.

La troisième colonne indique le produit du carré m-hyper-magique presque normal.

La quatrième colonne indique le nombre de carrés m-hyper-magiques presque normaux de produit k^2.

La cinquième colonne indique le nombre de primitifs.

La sixième colonne indique le nombre de groupes de 48 primitifs. Il est remarquable que dans chaque groupe, nous trouvions 48 carrés primitifs lesquels renferment tous les mêmes seize entiers!!!

Par exemple, avec $k = 420$, nous trouvons $2\,688$ m-hyper-magiques presque normaux de produit $P = 420^2 = 176\,400$. Ce qui donne 336 primitifs regroupés en sept groupes de 48 carrés. Dans chaque groupe, les 48 carrés renferment les mêmes entiers. Si A et B sont dans deux groupes différents, alors A et B ne renferment pas les mêmes seize entiers.

Ce que nous venons d'observer concerne les valeurs de k allant de $1 \text{ à } 500$. Cela laisse croire qu'il en sera **peut-être** toujours ainsi. Allons un peu plus loin et regardons encore dix autres valeurs de k prises aléatoirement.

k	Nombre de diviseurs de k	$P = k^2$	Nombre de carrés	Nombre de primitifs	Nombre de groupes de 48
520	16	270 400	384	48	1
560	20	313 600	1920	240	5
720	30	518 400	11 904	1 488	31
840	32	705 600	12 288	1 536	32
960	28	921 600	13 440	1 680	35
1 200	30	1 440 000	11 904	1 488	31
1 260	36	1 587 600	17 664	2 208	46
4 000	24	16 000 000	6 528	816	17
10 000	25	100 000 000	4 224	528	11
16 000	32	256 000 000	36 480	4 560	95

Toutes ces données nous conduisent à la conjecture suivante :

Conjecture :

Tous les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 donc de produit $P = k^2$, se retrouvent, lorsqu'ils existent, en groupes de quarante-huit carrés. Dans chaque groupe, tous les carrés renferment exactement les mêmes seize entiers, des diviseurs de k.

Nous dirons que deux m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 sont équivalents s'ils renferment les mêmes entiers; les groupes de quarante-huit sont les classes d'équivalence.

Attention!!!

Ne pas confondre ici avec les 8 équivalents d'un carré.

En terminant, voici comment nous pouvons construire une structure de m-hyper-magiques qui nous conduira à de tels carrés formés d'entiers ≥ 1.

Soit le m-hyper-magique presque normal suivant :

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

C'est l'un des cinq vus plus haut de produit 14 400. Ici : a = 60, b = 10, c = 4, f = 15 et g = 30. Le produit s'écrit : $14\,400 = 120^2 = (2^3 \times 3 \times 5)^2$.

Tous les entiers du carré sont des diviseurs de 120. Posons :

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ *et* $a = p^2 q\, r$

$10 = 2 \times 5$ *et* $b = p\, r$

$4 = 2^2$ *et* $c = p^2$

$15 = 3 \times 5$ *et* $f = q\, r$

$30 = 2 \times 3 \times 5$ *et* $g = p\, q\, r$

En plaçant ces valeurs dans (MSD), nous obtenons :

(MSD*)

$p^2 q\, r$	$p\, r$	p^2	$p\, q$
1	$p^3 q$	$q\, r$	$p^3 r$
$p\, q\, r$	$p^2 r$	p	$p^2 q$
p^3	q	$p^3 q\, r$	r

Il est évident que ce carré renferme que des entiers dès que $p, q \, et \, r$ sont des entiers.

Pour que (MSD*) soit presque normal, il est suffisant d'avoir :

$1 < p < q < p^2 < r < p\, q$

où $p, q \; et \; r$ sont des entiers ≥ 2.

En effet, les seize nombres de (MSD*) forment une suite strictement croissante, ce qui nous assure seize nombres différents. Voici deux carrés déterminés par :

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

p = 2 ; q = 3 ; r = 5

140	14	4	10
1	40	35	56
70	28	2	20
8	5	280	7

p = 2 ; q = 5 ; r = 7

La condition de l'encadré est suffisante, mais non nécessaire. Elle est respectée avec le carré de gauche mais ne l'est pas avec le carré de droite qui est tout de même presque normal!!!

Voici la suite strictement croissante **(SSC)** que forment les seize expressions du carré (MSD*) :

$$1 < p < q < p^2 < r < pq < p^3 < pr < p^2q < qr < p^2r < p^3q < pqr < p^3r < p^2qr < p^3qr$$

Le problème 32 de 15.7 nous demande de montrer que la condition suffisante, en rouge dans la suite **(SSC)**, implique toutes les inégalités qui suivent.

Nous pourrions construire d'autres structures comme (MSD*); c'est l'objet du problème 13 de 15.7. En fait, nous pourrions construire 48 structures primitives qui permettraient d'obtenir un carré presque normal de produit magique 14 400.

La partie en rouge (la condition suffisante), est toujours réalisable; par exemple, en prenant :

$$q = p+1 \; et \; r = p^2+1.$$

Donc, à partir du carré (MSD*), nous sommes assurés qu'avec
$q = p+1 \; et \; r = p^2+1,$
nous obtiendrons un m-hyper-magique presque normal d'ordre 4.

Avec $p = 2, q = p+1 = 3 \; et \; r = p^2+1 = 5$, nous obtenons un carré du plus petit produit soit $14\,400$.

Voici le carré obtenu; nous l'appellerons **«carré polynôme»**

(MSD +)

$p^2+p^3+p^4+p^5$	$p+p^3$	p^2	$p+p^2$
1	p^3+p^4	$1+p+p^2+p^3$	p^3+p^5
$p+p^2+p^3+p^4$	p^2+p^4	p	p^2+p^3
p^3	$1+p$	$p^3+p^4+p^5+p^6$	$1+p^2$

Carré m-hyper-magique presque normal; $p \geq 2$

Son produit est :

$$P = 1\,p^6 + 2\,p^7 + 3\,p^8 + 4\,p^9 + 3\,p^{10} + 2\,p^{11} + 1\,p^{12} = (p^3 + p^4 + p^5 + p^6)^2$$

Avec $p = 2$, nous obtenons le presque normal suivant de produit $P = 14\,400$.

60	10	4	6
1	24	15	40
30	20	2	12
8	3	120	5

Dès que $p \geq 2$ est un entier, alors le carré est un m-hyper-magique presque normal !!! (MSD+) permet de trouver l'un des meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 soit un carré du plus petit produit $P = 14\,400$. Nous trouvons :

$$p = 2 \qquad P = 14\ 400$$
$$p = 3 \qquad P = 1\,166\ 400$$
$$p = 4 \qquad P = 29\ 593\ 600$$
$$p = 5 \qquad P = 380\ 250\ 000$$

La croissance du produit P est donc très rapide.

15.3.3 Le carré d'Edwards

Ronald Edwards a publié en 1957 un carré multiplicatif d'ordre 4 qui possède une propriété remarquable, sans toutefois nous indiquer sa méthode. Nous allons présenter ici un procédé pour construire un tel carré. Le carré d'Edwards est presque normal de produit $P = 4\ 558\ 554$.

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards

64	93	132	11
121	12	62	96
31	352	33	24
36	22	32	341

Son renversé

Si nous lisons de droite à gauche tous les nombre du carré d'Edwards, alors nous obtenons son renversé soit le carré de droite. Ainsi, 46 devient 64, 253 devient 352, 11 reste 11 et ainsi de suite. Notez ici que le carré d'Edwards et son renversé sont des m-Dürer!!!

Ce qui est extraordinaire ici est que le renversé soit encore un carré multiplicatif, de produit $P = 8\ 642\ 304$!!! En général, cela n'arrive pas. De plus, Edwards a mis une bordure autour de son carré multiplicatif de façon à obtenir un carré magique d'ordre 6 et de somme $S = 438$.

Nous allons présenter une méthode pour construire des carrés comme celui d'Edwards, et nous allons même améliorer celui d'Edwards en diminuant son produit de $4\ 558\ 554\ à\ 414\ 414$.

Voici donc cette méthode, peut-être celle employée par Edwards?!? Nous allons nous servir de la structure (MD*) pour construire notre premier carré.

(MD*)

mn	uv	xy	rs
ry	sx	mu	nv
su	ny	rv	mx
vx	mr	ns	uy

Divisons chaque nombre situé dans les cases vertes du carré d'Edwards (figure complète) par 11. Ainsi, le nouveau carré obtenu est toujours un m-Dürer et son produit est 11 fois plus petit soit $414\ 414$.

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards

46	39	231	1
11	21	26	69
13	253	3	42
63	2	23	143

Carré d'Edwards amélioré

Nous allons partir du carré d'Edwards amélioré que nous appelons A. Puisque nous utiliserons la structure (MD*) pour construire un carré d'Edwards, nous allons considérer que les nombres du carré que nous cherchons sont le produit de deux entiers formés chacun de deux chiffres. Nous avons donc :

$$m = 10m_1 + m_2 \ ; \ n = 10n_1 + n_2 \ ; \ u = 10u_1 + u_2 \ ; \ ...$$

Puis le très important résultat que voici avec : $a, b, c \ et \ d,$ des chiffres non nuls:

$$(1) \quad (10a+b)\ (10c+d) = 100\ ac + 10(ad+bc) + bd$$
$$(2) \quad (10b+a)\ (10d+c) = 100\ bd + 10(ad+bc) + ac$$
$$(3) \quad (10a+b)d = 10ad + bd$$
$$(4) \quad (10b+a)d = 10bd + ad$$
$$(5) \quad bd = bd$$

Avec la condition $(*)$ que voici :

$$(*) \quad 0 \le ac \le 9 \ ; \ 0 \le ad+bc \le 9 \ ; \ 0 \le bd \le 9$$

Ce sont les cas que nous allons rencontrer dans la construction de carrés d'Edwards. L'égalité (2) montre que si nous lisons à l'envers les deux entiers formés de deux chiffres de (1), alors le résultat de (2) est le résultat de (1) lu à l'envers.

De même avec l'égalité (4) en observant que le chiffre d, lu à l'envers, est toujours le chiffre d. Si nous lisons à l'envers les chiffres des deux entiers dont l'un est formé de deux chiffres et l'autre, d'un seul chiffre, alors le résultat de (4) est le résultat de (3) lu à l'envers.

Enfin, l'égalité (5) nous indique que même si $b\ et\ d$ sont lus à l'envers, le produit des chiffres $b\ et\ d$ reste inchangé.

Nous pouvons écrire :

$$(10a+b)(10c+d) = (ac)(ad+bc)(bd)$$
$$(10b+a)(10d+c) = (bd)(ad+bc)(ac)$$
$$(10a+b)\times d = (ad)(bd)$$
$$(10b+a)\times d = (bd)(ad)$$
$$bd = bd$$

où (ac) représente le chiffre des centaines, $(ad+bc)$ représente le chiffre des dizaines et (bd), celui des unités. De même dans les autres égalités.

Nous pouvons maintenant construire le carré A en posant:

$m=2$; $n=23$; $u=13$; $v=3$; $x=21$; $y=11$; $r=s=1$, et ainsi, nous avons :

$$m_1=0\ ;\ m_2=2\ ;\ n_1=2\ ;\ n_2=3\ ;\ u_1=1\ ;\ u_2=3\ ;\ v_1=0\ ;\ v_2=3$$
$$x_1=2\ ;\ x_2=1\ ;\ y_1=1\ ;\ y_2=1\ ;\ r_1=0\ ;\ r_2=1\ ;\ s_1=0\ ;\ s_2=1$$

La condition $(*)$ est respectée pour tous les nombres de (MD*). Par exemple : avec

$m=2\ et\ n=23$, nous avons $ac=0$, $ad+bc=4$, $bd=6$. Puis, avec $n=23\ et\ y=11$, nous avons $ac=2, ad+bc=5, bd=3$, et ainsi de suite.

Pour avoir le carré B, il suffit d'inverser les chiffres de $m et n$ qui déterminent 46 et ainsi obtenir 64 en faisant 2×32. De même pour tous les autres nombres.

46	39	231	1
11	21	26	69
13	253	3	42
63	2	23	143

Carré A

64	93	132	1
11	12	62	96
31	352	3	24
36	2	32	341

Carré B

Le carré B provient de (MD*) donc c'est un m-Dürer. C'est le renversé de A. Le produit du carré A est $P=414\ 414$ et celui du carré B est $P=785\ 664$.

Nous allons trouver maintenant le carré d'Edwards et son renversé en posant :

$$m=2\ ;\ n=23\ ;\ u=13\ ;\ v=3\ ;\ x=21\ ;\ y=11\ ;\ r=11\ ;\ s=1$$

La condition $(*)$ est respectée pour tous les nombres de (MD*). Voici donc le carré d'Edwards et son renversé :

46	39	231	11
121	21	26	69
13	253	33	42
63	22	23	143

Carré d'Edwards (EDW)

64	93	132	11
121	12	62	96
31	352	33	24
36	22	32	341

Son renversé (EDW*)

Voici un troisième exemple de carré d'Edwards déterminé par :

$$m=3\ ;\ n=23\ ;\ u=22\ ;\ v=2\ ;\ x=12\ ;\ y=11\ ;\ r=3\ ;\ s=1$$

La condition $(*)$ est respectée pour tous les nombres de (MD*). Voici donc ce carré et son renversé :

69	44	132	3
33	12	66	46
22	253	6	36
24	9	23	242

Carré C

96	44	231	3
33	21	66	64
22	352	6	63
42	9	32	242

Carré D

Le carré D est le renversé de C. Le produit de C est $P=1\ 202\ 256$ et celui de D est $P=2\ 927\ 232.$

Terminons avec un quatrième et un cinquième exemple :

69	44	132	3
12	33	46	66
6	36	22	253
242	23	9	24

Carré E

96	44	231	3
21	33	64	66
6	63	22	352
242	32	9	42

Carré F

Le carré E se construit avec :

$$m=23\ ;\ n=3\ ;\ u=2\ ;\ v=22\ ;\ x=11\ ;\ y=12\ ;\ r=1\ ;\ s=3$$

Le produit de E est $P=1\ 202\ 256.$ Le produit de F, le renversé de E, est $P=2\ 927\ 232.$

26	69	132	2
22	12	6	299
3	143	46	24
276	4	13	33

Carré G

62	96	231	2
22	21	6	992
3	341	64	42
672	4	31	33

Carré H

Le carré G se construit avec :

$$m=2\ ;n=13\ ;\ u=3\ ;\ v=23\ ;\ x=12\ ;\ y=11\ ;\ r=2\ ;\ s=1$$

Le produit de G est $P=473\ 616.$ Le produit de H, le renversé de G, est $P=2\ 749\ 824.$

Nous venons de construire cinq carrés m-Dürer qui ont la propriété de nous donner le renversé de chacun, renversé qui est toujours un m-Dürer. Nous allons présenter sous forme d'un tableau, les principales caractéristiques de ces cinq carrés ainsi que des cinq renversés. Mais voyons ceci d'abord.

Edwards a placé une bordure autour de son carré afin d'obtenir un carré magique presque normal d'ordre 6.

Voyons comment en établissant d'abord une condition nécessaire pour qu'une bordure existe autour d'un carré d'ordre n. Puis ensuite, nous préciserons cette condition nécessaire dans le cas où nous voudrions un carré magique presque normal d'ordre $n+2$.

m	a_1	a_2	...	...	...	...	...	a_n	W
X	b_1	b_2	...	...	...	...	...	b_n	Y

Dans le carré central, en orangé, la somme des nombres des colonnes de gauche à droite est notée c_1, c_2,..., c_n, la somme pour la grande diagonale principale est notée d_1 tandis que la somme pour la grande diagonale secondaire est notée d_2. Si le carré d'ordre $n+2$ est magique de somme S, alors nous avons :

$$W = S - m - (a_1 + a_2 + ... + a_n)$$
$$Y = S - m - d_1$$
$$X = S - W - d_2$$
$$b_i = S - a_i - c_i$$

La dernière rangée nous donne les égalités suivantes :

$$X + \sum b_i + Y = S$$
$$(S - S + m + \sum a_i - d_2) + (nS - \sum a_i - \sum c_i) + (S - m - d_1) = S$$
$$nS = d_1 + d_2 + \sum c_i = S^*$$

La quantité S^* est donc égale à la somme des nombres situés sur les deux grandes diagonales du carré central d'ordre n en orangé plus la somme de tous les nombres situés dans le carré central.

Enfin, si le carré d'ordre $n+2$ est magique, alors **obligatoirement** sa somme doit être $S = \frac{S^*}{n}$.

C'est une condition nécessaire.

Théorème 15.11 :

Soit M, un carré d'ordre $n \geq 3$, formé seulement d'entiers. Nous lui ajoutons une bordure formée d'entiers afin que le nouveau carré d'ordre $n+2$ soit magique. Pour que cette bordure existe, il est nécessaire que $S = \frac{S^*}{n} = entier$.

Dans le théorème 15.11, il n'est pas nécessaire que M soit magique ou multiplicatif; il peut contenir n^2 nombres quelconques.

Pour que le carré d'Edwards possède une bordure formée d'entiers qui rend magique le carré d'ordre 6, il est nécessaire que $S = 438$. Nous présenterons un peu plus bas deux bordures différentes dont l'une est celle d'Edwards.

Pour que le carré d'ordre $n+2$ soit magique et presque normal, il est nécessaire que le carré central d'ordre n soit formé que d'entiers ≥ 1, tous différents. Nous pourrons ensuite trouver S^* et ainsi déterminer l'unique somme magique pour le carré d'ordre $n+2$. La connaissance de cette somme $S = \frac{S^*}{n}$ va nous guider pour le choix des entiers à placer dans la bordure. Il faudra faire attention aux répétitions!!!

Avec le carré A ci-haut, il est impossible de construire une bordure qui donnera un carré magique d'ordre 6 presque normal puisque la somme doit être $\frac{1542}{4} = 385,5$. Pour le carré C, la somme doit être 423,75 d'où l'impossibilité.

98	102	51	64	79	44
58	46	39	231	11	53
95	121	21	26	69	106
50	13	253	33	42	47
96	63	22	23	143	91
41	93	52	61	94	97

Carré d'Edwards et sa bordure. Le carré d'ordre 6 est magique de somme $S = 438$.

70	80	60	50	138	40
44	46	39	231	11	67
90	121	21	26	69	111
66	13	253	33	42	31
123	63	22	23	143	64
45	115	43	75	35	125

Carré d'Edwards avec une nouvelle bordure. La somme est toujours $S = 438$.

Quelle beauté!!! De voir ce carré multiplicatif qui possède une très belle propriété, plongé en plein cœur d'un carré magique!!!

Voici le tableau annoncé :

	P	S^*	S	*bordure*
A	414 414	1542	$385,5$	*non*
B	785 664	2163	$540,75$	*non*
(EDW)	4 558 554	1752	438	*oui*
(EDW^*)	8 642 304	2373	$593,25$	*non*
C	1 202 256	1695	$423,75$	*non*
D	2 927 232	2154	$538,5$	*non*
E	1 202 256	1495	$373,75$	*non*
F	2 927 232	1891	$472,75$	*non*
G	473 616	1654	$413,5$	*non*
H	2 749 824	3823	$955,75$	*non*

Parmi ces dix carrés multiplicatifs, seul celui d'Edwards peut avoir une bordure qui rendra magique et presque normal le carré d'ordre 6 obtenu avec la bordure. La colonne S nous indique la somme magique que devra avoir le carré magique d'ordre $n+2$. Excepté pour le carré d'Edwards, aucun carré de ce tableau, formé d'entiers ne peut avoir une telle somme magique (évident!!!).

D'un autre côté, le carré d'Edward et son renversé sont ceux qui ont les plus grands produits parmi ces dix carrés. Notons que le renversé du carré d'Edwards ne peut pas avoir une bordure qui donnerait un carré formé d'entiers seulement.

Dans la colonne «bordure», le non signifie qu'il n'est pas possible d'avoir une bordure qui ferait que le carré d'ordre 6 obtenu soit formé exclusivement d'entiers.

Par exemple, la seule façon d'ajouter une bordure autour du carré A est de la remplir avec au moins six nombres rationnels non entiers car la somme magique du carré d'ordre 6 que nous voulons construire doit **obligatoirement** avoir comme somme magique $S = 385,5.$

Donnons-nous un carré d'ordre 4 dans lequel il y a seize entiers quelconques tous ≥ 1 avec $\frac{S^*}{4}$,

un entier, ce qui est toujours possible. En effet, par exemple, si $S^* = 201,$ alors il suffira

d'ajouter 3 à un entier qui n'est pas sur une grande diagonale. Construisez alors une bordure afin d'obtenir un carré magique d'ordre 6.

Théorème 15.12 :

Soit donné un carré M d'ordre $n \geq 3$. Nous voulons construire une bordure autour de M afin d'obtenir un carré magique M' d'ordre $n+2$. M'existe si et seulement si sa somme magique est $S = \frac{S^*}{n}$.

Preuve :

Nous avons vu plus haut que si M'est magique, alors sa somme est $S = \frac{S^*}{n}$. Nous allons montrer que si $S = \frac{S^*}{n}$, alors nous pourrons construire M'en plaçant une bordure autour de M et ce, d'une façon fort simple. Nous verrons, pendant la démonstration, un algorithme pour construire M'.

Dans le carré central, en orangé, la somme des nombres de chaque colonne de gauche à droite est notée c_1, c_2, ..., c_n, la somme pour la grande diagonale principale est notée d_1 tandis que la somme pour la grande diagonale secondaire est notée d_2, puis, la somme des nombres de chaque rangée de haut en bas est notée $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

m	a_1	a_2	....	....	....	....	....	a_n	W
h_1									j_1
h_2									j_2
....									....
....									....
....									....
....									....
h_{n-1}									j_{n-1}
R									T
X	b_1	b_2	....	....	....	....	....	b_n	Y

Nous allons attribuer une valeur à $m, a_1, a_2, \ldots, a_n, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$. Connaissant S, les valeurs de $W, X, Y, j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont aussitôt déterminées de façon unique. Nous trouvons :

$$W = S - m - \sum a_i$$
$$Y = S - m - d_1$$
$$X = m + \sum a_i - d_2$$
$$b_i = S - a_i - c_i$$
$$j_i = S - h_i - r_i$$

Ainsi, les n premières rangées, les n colonnes centrales et les deux grandes diagonales de M'sont magiques.

Montrons que la dernière rangée de M'est magique :

$$(m + \sum a_i - d_2) + (nS - \sum a_i - \sum c_i) + (S - m - d_1) = S + nS - (d_1 + d_2 + \sum c_i) =$$
$$S + nS - nS = S$$

En effet, puisque $S = \frac{S^*}{n}$, nous avons $d_1 + d_2 + \sum c_i = S^* = nS.$

Il reste à compléter l'avant-dernière rangée en trouvant la valeur de R et celle de T à partir de leur colonne respective. Nous trouvons :

$$R = S - m - \sum h_i - m - \sum a_i + d_2$$
$$T = S - S + m + \sum a_i - nS + \sum h_i + (r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}) + m + d_1$$

Avec ces valeurs de $R \; et \; T$, toutes les colonnes de M' sont maintenant magiques. Enfin, montrons que l'avant-dernière rangée est magique.

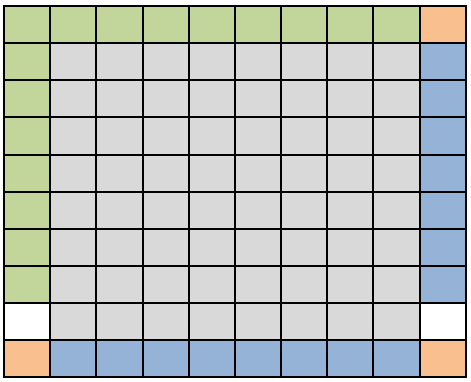
$$R + T + r_n = S - nS + d_1 + d_2 + \sum r_i = S - nS + (d_1 + d_2 + \sum c_i) = S - nS + nS = S$$

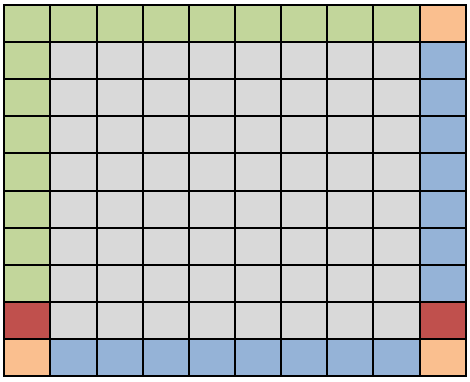
Le carré M'est donc magique. Nous aimerions qu'il soit presque normal!!!

Le carré qui suit montre comment construire le carré M'.

1) Trouvez d'abord la somme magique de M' soit $S = \frac{S^*}{n}$.
2) Dans le carré de gauche, remplir d'abord les cases vertes et déduire le coin haut droit, en orangé, avec la première rangée. Ensuite, déduire les deux autres coins, en orangé, avec les grandes diagonales.
3) Puis déduire le contenu des cases bleues à partir des cases vertes correspondantes.

4) Toujours dans le carré de gauche, trouvez le contenu des deux cases blanches en utilisant les nombres de leur colonne respective.
5) Le carré de droite est devenu M', un carré magique!!!





Les cases grises renferment les nombres de M à partir desquels nous calculons S^* *puis* S.

Si nous voulons construire un carré M' presque normal, alors le carré central, en gris, doit être presque normal. De plus, S doit être un entier. Nous vous suggérons de remplir une case verte à la fois puis sa case correspondante (en bleu) et s'assurer qu'il n'y a pas de répétition. Si c'était le cas, il faudrait changer le nombre de la case verte et toujours surveiller les répétitions. Une fois M donné, il se peut que des entiers négatifs soient nécessaires pour construire M'. Dans ce cas, nous allons quand même compléter M'en évitant les répétitions.

Pour éliminer les entiers négatifs, il suffira d'ajouter un même entier dans toutes les cases de M'. Ce sera **l'entier correcteur**, celui qui fera disparaître les négatifs!!! Et il n'est pas unique. **Mais M ne sera plus contenu dans M'.**

Dans la bordure, nous remplissons les cases vertes avec les nombres que nous voulons, de préférence avec des entiers ≥ 1, tous différents.

La façon de construire la bordure n'est pas unique.

Il est intéressant de voir que seul le carré M détermine l'unique somme que doit avoir M'pour être magique.

Nous venons de trouver une méthode pour construire le carré d'Edwards et quelques-autres semblables. En plus, nous savons comment mettre une bordure autour d'un carré quelconque d'ordre n, (pas nécessairement magique ou multiplicatif) afin d'obtenir un carré magique d'ordre $n+2$.

Nous terminons ici avec cette question :

> Pouvons-nous toujours construire un carré magique M' qui soit presque normal ou même normal, en plaçant une bordure autour de M? La réponse est non si nous exigeons que M soit contenu dans M'.

Disons seulement qu'il arrive que M' soit presque normal mais cela dépend bien entendu de M.

Voyons l'exemple suivant :

	w				
	4	15	14	1	
	5	10	11	8	
	9	6	7	12	
	16	3	2	13	
	z				

M'

M est le carré magique central normal d'ordre 4. Puisque $S^* = 204$, la somme magique de M'est $S = 51$. La plus petite valeur pour w est 17. Le nombre z est donc 0 et M' n'est pas presque normal. Si w est le nombre 18, alors z = -1 et si w = 17 + k avec k, un entier > 0, alors z = -k. Le carré M' ne sera donc jamais presque normal, ni normal. (Voir le problème 18 de 15.7).

15.4 Les carrés multiplicatifs d'ordres ≥ 5 et des m-ultra-magiques d'ordre 5

Nous vous suggérons de revoir les carrés multiplicatifs de Christian Boyer, section 13.3. Nous présentons ici un autre carré multiplicatif d'ordre 5, celui publié par Harry Sayles en 1913.

1	10	21	32	54
28	48	9	2	15
18	3	20	42	8
30	7	16	27	4
24	36	6	5	14

Sayles 1913; P = 362 880

Ce carré multiplicatif est pandiagonal. Cependant, Christian Boyer, en 2005, a construit un carré multiplicatif du plus petit produit possible soit P = 302 400. Mais il n'est pas pandiagonal.

Nous allons maintenant construire une structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 5 à variables non nulles.

Puis une structure générale de carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 5 qui sera la seule (aux structures équivalentes près) à pouvoir nous donner des carrés formés de nombres > 0. Chaque fois que nous rencontrerons la situation $A^2 = B$, nous choisirons $A = \sqrt{B}$.

Enfin, nous terminerons avec la structure générale des carrés m-ultra-magiques d'ordre 5 qui est la seule (aux structures équivalentes près) à fournir des carrés formés de nombres > 0.

Allons-y pour la première structure :

a	b	c	d	
e	f	g	h	
i	j	k	m	
n	q	r	t	
				A

Le produit magique est P et de là, il est facile de remplir les cases vides. Ainsi, nous trouvons $\frac{P}{ijkm}$ sur la troisième rangée. Si nous appelons φ, le produit des seize variables du sous-carré d'ordre 4 ci-haut, alors il est facile de montrer que $A=\frac{\varphi}{P^3}$. Puis nous ferons disparaître la variable q en exigeant que la grande diagonale secondaire soit magique et nous ferons disparaître la variable k en exigeant que la grande diagonale principale soit magique. En continuant ainsi afin de rendre magiques toutes les diagonales brisées, nous trouvons la structure suivante des carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 5 à variables non nulles.

a	b	c	d	$\frac{P}{abcd}$
e	$\frac{dm}{e}$	$\frac{ai}{h}$	h	$\frac{P}{adim}$
i	$\frac{hP}{abdim}$	$\frac{eP}{acdim}$	m	$\frac{a^2bcd^2im}{ehP}$
$\frac{P}{acdi}$	$\frac{a^2bcdim}{hP}$	$\frac{abcd^2im}{eP}$	$\frac{P}{abdm}$	$\frac{ehP}{abcdim}$
$\frac{cd}{e}$	$\frac{eP}{abcdm}$	$\frac{hP}{abcdi}$	$\frac{ab}{h}$	$\frac{abcdim}{P}$

Cette structure générale permet de construire **tous** les carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 5 à variables non nulles, qui sont **formés de vingt cinq nombres** >0.

Allons maintenant vers la structure des m-ultra-magiques donc des carrés multiplicatifs qui sont à la fois pandiagonaux et associatifs.

Un carré multiplicatif d'ordre $n\geq 3$ est **associatif** si et seulement si toutes les paires de cases symétriques par rapport au centre du carré ont pour produit des nombres qui s'y trouvent, le nombre $\sqrt[n]{P^2}$.

(Voir problème 19 de 15.7). Nous trouvons alors la structure générale suivante qui génère tous les m-ultra-magiques formés de vingt-cinq nombres > 0.

(UM*)

a	$\frac{P^{\frac{3}{5}}}{a\,e}$	$\frac{e^2}{m}$	d	$\frac{m\,P^{\frac{2}{5}}}{d\,e}$
e	$\frac{d\,m}{e}$	$\frac{a\,e}{d}$	$\frac{P^{\frac{4}{5}}}{a\,e^2}$	$\frac{e\,P^{\frac{1}{5}}}{m}$
$\frac{P^{\frac{4}{5}}}{a\,d\,e}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{m}$	$P^{\frac{1}{5}}$	m	$\frac{a\,d\,e}{P^{\frac{2}{5}}}$
$\frac{m\,P^{\frac{1}{5}}}{e}$	$\frac{a\,e^2}{P^{\frac{2}{5}}}$	$\frac{d\,P^{\frac{2}{5}}}{a\,e}$	$\frac{e\,P^{\frac{2}{5}}}{d\,m}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{e}$
$\frac{d\,e}{m}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{d}$	$\frac{m\,P^{\frac{2}{5}}}{e^2}$	$\frac{a\,e}{P^{\frac{1}{5}}}$	$\frac{P^{\frac{2}{5}}}{a}$

Structure des m-ultra-magiques d'ordre 5 à variables non nulles

La case centrale de la structure (UM*) montre clairement que le produit P d'un tel carré formé d'entiers >0 doit avoir la forme $P=k^5$ où k est un entier ≥ 1. De plus, les valeurs des variables a, d, e et m doivent être des diviseurs entiers de k^2.

Si vous avez un carré m-ultra-magique formé de vingt-cinq nombres > 0, alors celui-ci provient de la structure (UM*) ci-haut. Cette structure renferme cinq variables a, d, e, m et P.

Le problème 20 de 15.7 généralise ce résultat.

Le carré suivant, UM*-1, est un premier exemple de carré m-ultra-magique presque normal; son produit est $120^5 = 24\ 883\ 200\ 000$. Il est déterminé en posant dans (UM*) :

$$a=72\ ;\ d=480\ ;\ e=240\ ;\ m=360\ ;\ P=24\ 883\ 200\ 000.$$

Le plus petit entier est 20 et le plus grand est 720, tous les deux situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré!!!

Voici ce carré :

72	100	160	480	45
240	720	36	50	80
25	40	120	360	576
180	288	400	20	60
320	30	90	144	200

UM*-1

Pouvons-nous trouver un meilleur m-ultra-magique? Plus précisément, un m-ultra-magique M dont le produit serait le plus petit avec les plus petits entiers dans M?

Par exemple, nous avons un autre m-ultra-magique presque normal d'ordre 5, UM*-2, également de produit $P = 120^5$ mais, son plus grand entier est 14 400 au lieu du 720 dans le carré ci-haut (720 est vingt fois plus petit que 14 400). Ce dernier carré est obtenu de (UM*) avec :

$$a = 20\ ;\ d = 12\ ;\ e = 60\ ;\ m = 40\ ;\ P = 24\ 883\ 200\ 000.$$

Nous préférons, évidemment, UM*-1 à UM*-2.

Mais il nous faut le meilleur m-ultra-magique presque normal. Celui-ci aura donc le plus petit produit et contiendra les plus petits entiers.

Nous avons trouvé un meilleur m-ultra-magique presque normal de produit $P = 90^5$ et ce, avec : $a = 9\ ;\ d = 135\ ;\ e = 540\ ;\ m = 108\ et\ P = 90^5 = 5\ 904\ 900\ 000.$

Puis, à nouveau, encore un meilleur m-ultra-magique presque normal de produit $P = 60^5$ et ce, avec : $a = 4\ ;\ d = 40\ ;\ e = 360\ ;\ m = 72\ et\ P = 60^5 = 777\ 600\ 000.$

Puisque $P > \sqrt[5]{25!} = 109\ 176,49\ldots$, il s'ensuit que $k \geq 11.$ Il reste à regarder les cas où $k = 11,12,\ldots,59.$ De cette liste, il faut enlever tous les entiers qui sont des nombres premiers p

car les seuls diviseurs entiers > 0 de p^2 sont $1, p \ et \ p^2$. Puisque nous voulons un presque normal et qu'il nous faut au moins quatre diviseurs de k^2 soit $a, d, e, m,$ alors le presque normal n'est pas possible. Il reste donc à regarder les 36 cas suivants :

$$k = 12;14;15;16;18;20;21;22;24;25;26;27;28;30;32;33;34;35;36;38;39;$$
$$40;42;44;45;46;48;49;50;51;52;54;55;56;57;58$$

Voyons ce que nous obtenons avec $k = 30.$ Notre programme construit avec MAPLE nous indique qu'il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

Puis pour toutes les valeurs de $k < 30,$ nous trouvons aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

Il faut donc regarder maintenant les valeurs de $k > 30.$ Avec $k = 32, 33, 34 \ et \ 35,$ nous trouvons aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

Mais quelle surprise avec $k = 36.$ Nous trouvons 128 m-ultra-magiques presque normaux de produit $P = 36^5 = 60\ 466\ 176.$ Le plus grand entier est 1296 et le plus petit est $1.$

Théorème 15.13:

Si A est un carré m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit P, alors $P \geq 36^5 = 60\ 466\ 176.$

De plus, nous en connaissons au moins un de produit $P = 36^5.$

Voici un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 ayant le plus petit produit possible :

1	144	162	12	216
324	24	27	16	18
432	2	36	648	3
72	81	48	54	4
6	108	8	9	1296

$a = 1$; $d = 12$; $e = 324$; $m = 648$; $P = 36^5$

Puis quelques résultats :

1) Avec $1 \leq k \leq 35$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
2) Avec $k = 36$, nous trouvons 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 16 primitifs.
3) Avec $37 \leq k \leq 59$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
4) Avec $k = 60$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 160 primitifs.
5) Avec $61 \leq k \leq 71$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
6) Avec $k = 72$, nous trouvons 1408 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 176 primitifs.
7) Avec $73 \leq k \leq 83$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
8) Avec $k = 84$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 160 primitifs.
9) Avec $85 \leq k \leq 89$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
10) Avec $k = 90$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 160 primitifs.
11) Avec $91 \leq k \leq 95$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
12) Avec $k = 96$, nous trouvons 768 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 96 primitifs.
13) Avec $97 \leq k \leq 99$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
14) Avec $k = 100$, nous trouvons 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 16 primitifs.
15) Avec $101 \leq k \leq 107$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.
16) Avec $k = 108$, nous trouvons 1408 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 176 primitifs.
17) Avec $109 \leq k \leq 119$, il n'y a aucun m-ultra-magique presque normal d'ordre 5.

$36^5 = 60\ 466\ 176$
$60^5 = 777\ 600\ 000$
$72^5 = 1\ 934\ 917\ 632$
$84^5 = 4\ 182\ 119\ 424$ *Ce sont les neuf plus petits*
$90^5 = 5\ 904\ 900\ 000$ *produits pour des*
$96^5 = 8\ 153\ 726\ 976$ *presque normaux.*
$100^5 = 10\ 000\ 000\ 000$
$108^5 = 14\ 693\ 280\ 768$
$120^5 = 24\ 883\ 200\ 000$

Nous en trouvons respectivement :

$$\begin{array}{rlrl} 128 & d'où & 16 & primitifs \\ 1280 & d'où & 160 & primitifs \\ 1408 & d'où & 176 & primitfs \\ 1280 & d'où & 160 & primitifs \\ 1280 & d'où & 160 & primitifs \\ 768 & d'où & 96 & primitifs \\ 128 & d'où & 16 & primitifs \\ 1408 & d'où & 176 & primitifs \\ 17\,664 & d'où & 2208 & primitifs \end{array}$$

Vous trouverez les primitifs dans la Partie 3 avec le programme « Les meilleurs m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 ». Voir 04 de l'annexe 23 : le nouveau nom est MUM-5.

Une grande question!!!
Pourquoi pouvons-nous prévoir qu'avec $k = 150$, nous trouverons 1280 carrés m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et qu'avec $k = 675$, nous en trouverons 1408? Voir le problème 43 de 15.7

En terminant, voici un m-ultra-magique d'ordre 5 de produit $30^5 = 24\ 300\ 000$. Il n'est pas presque normal. Cependant, ses vingt-cinq nombres sont tous des entiers ≥ 1.

12	75	6	10	450
30	50	36	75	6
225	6	30	150	4
150	12	25	18	30
2	90	150	12	75

Parmi ceux-ci, cinq entiers différents apparaissent chacun trois fois et les dix autres, également différents apparaissent chacun une fois. Remarquez qu'avec deux mouvements de cavalier (en référence au jeu d'échecs), nous rencontrons les trois 6. Il en est de même pour les trois 30 et les trois 150. Avec un seul mouvement de cavalier, nous rencontrons deux 12 et deux 75.

Enfin, puisque $k = 36$ nous conduit à des m-ultra-magiques presque normaux, alors il est certain que nous en trouverons avec $k = 36\lambda$ où $\lambda \geq 1$ est un entier.

De même avec $k = 60\ ;\ 72\ ;\ 84\ ;\ 90\ ;\ 96\ et\ 100$. Nous en avions avec $k = 36$ d'où notre certitude d'en trouver avec $k = 72,\ k = 108, \ldots$ Par contre, nous n'en trouvons pas avec $k = 30$. Mais il se peut que nous en trouvions avec $k = 60$. Ce qui est le cas. Nous en trouvons aussi avec $k = 90$.

Il n'y a que 16 m-ultra-magiques presque normaux primitifs d'ordre 5 et de produit $P = 36^5 = 60\ 466\ 176$.
C'est le plus petit produit possible pour un presque normal.
Ils sont tous formés des mêmes vingt-cinq entiers.
Donc, ils ont tous le même plus petit entier soit 1 et le même plus grand soit 1296.

Ce sont les 16 meilleurs m-ultra-magiques presque normaux primitifs d'ordre 5.

$k\ et\ P = k^5$	Nombre de presque normaux	Nombre de primitifs	Entier minimum (*)	Entier maximum (*)	Nombre de primitifs avec (*)
36 ; 60 466 176	128	16	1	1296	16
60 ; 777 600 000	1280	160	5	720	16
72 ; 72^5	1408	176	4	1296	32
84 ; 84^5	1280	160	7	1008	16
90 ; 90^5	1280	160	4	2025	16
96 ; 96^5	768	96	2	4608	32
100 ; 100^5	128	16	1	10000	16
108 ; 108^5	1408	176	8	1458	16
120 ; 120^5	17664	2208	20	720	16

Le tableau précédent présente les neuf plus petits produits pour les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5.

Par exemple, avec $k = 60$, nous trouvons 1280 m-ultra-magiques presque normaux donc 160 primitifs. Parmi ces primitifs, 16 renferment l'entier minimum 5 en même temps que l'entier maximum 720, qui est le plus petit des maximums pour tous les carrés presque normaux obtenus avec ces neuf produits.

Dans le tableau ci-haut, il est intéressant de regarder de plus près le produit $P = 120^5$. Nous trouvons $17\,664$ m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 2208 primitifs. Ceux-ci se répartissent en 138 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes 25 entiers!!! Les carrés de deux groupes ne renferment pas les mêmes 25 entiers.

Minimum	Maximum	Primitifs	Groupes de 16
20	720	16	1
18	800	16	1
12	1200	48	3
10	1440	80	5
9	1600	48	3
8	1800	96	6
6	2400	144	9
5	2880	144	9
4	3600	336	21
3	4800	256	16
2	7200	496	31
1	14 400	528	33
		2208	138

Ce dernier tableau nous indique le nombre de m-ultra-magiques presque normaux primitifs d'ordre 5 et de produit $P = 120^5$. Par exemple, nous voyons qu'il y en a 336 qui renferment l'entier minimum 4 en même temps que l'entier maximum 3600. Ces 336 forment 21 groupes de 16 carrés. Dans chaque groupe, les 16 carrés renferment les mêmes entiers; ce qui n'est pas le cas avec deux groupes différents.

Voici maintenant le meilleur carré m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 trouvé avant l'utilisation d'un programme fait avec MAPLE, lequel trouve tous les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et de produit donné.

5	180	400	120	18
240	72	10	45	100
90	25	60	144	40
36	80	360	50	15
200	30	9	20	720

Ce carré est du deuxième meilleur produit soit $P = 60^5 = 777\ 600\ 000$. Son entier maximum est 720, le plus petit maximum de tous les m-ultra-magiques presque normaux obtenus avec les neuf produits du tableau ci-haut.

Puis, l'utilisation du programme a permis de trouver cent-vingt-huit m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 dont le produit est le plus petit soit :

$$36^5 = 60\ 466\ 176$$

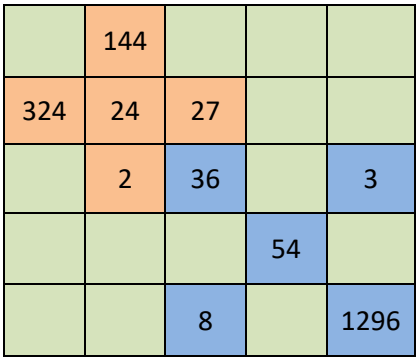
Ces cent-vingt-huit ont tous 1296 comme entier maximum et 1 comme entier minimum. Ceux-ci nous conduisent à seize primitifs qui sont les seize meilleurs m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5. De plus, ils renferment tous les mêmes 25 entiers!!! Pourquoi?

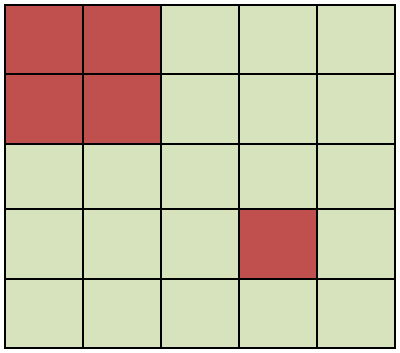
Vous trouverez la réponse dans l'annexe 32.

Voici un de ces seize meilleurs, déjà présenté plus haut. Nous allons voir que celui-ci possède au moins trois très jolies super-figures.

1	144	162	12	216
324	24	27	16	18
432	2	36	648	3
72	81	48	54	4
6	108	8	9	1296

m-ultra-magique presque normal du plus petit produit $P = 36^5$





La croix, en orangé, est une **super-figure**!!! Cela signifie que peu importe la position de cette croix dans le carré (9 cas possibles), en autant qu'elle couvre parfaitement cinq cases, le produit des nombres situés dans ces cinq cases est $P = 36^5 = 60\ 466\ 176$. Vérifiez que la figure en bleu est aussi une super-figure (9 cas à regarder) ainsi que la figure en rouge (16 cas à regarder). Ces super-figures, et il y en a d'autres, sont aussi des super-figures de la structure générale (UM*). Donc tous les m-ultra-magiques d'ordre 5 issus de (UM*) possèdent ces trois super-figures.

Théorème 15.13.1 (voir le problème 41 de 15.7)

Dans un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit $P = k^5$, chaque entier du carré est un diviseur de k^2.

15.5 Les carrés m-hyper-magiques et des m-hyper-magiques d'ordre 6

Un m-hyper-magique est un carré qui possède les caractéristiques suivantes :

1) Il est d'ordre $n =$ entier pair.
2) Il est multiplicatif.
3) Le produit des nombres dans tout sous-carré d'ordre 2 est toujours $\sqrt[n]{P^4}$.
4) Sur toute diagonale, grande ou brisée, le produit des nombres situés dans deux cases séparées par $\frac{n-2}{2}$ cases est toujours $\sqrt[n]{P^2}$.

La caractéristique 4) implique que tous les m-hyper-magiques sont pandiagonaux.

Nous avons construit la structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre 6 à variables non nulles. Ensuite, nous avons construit la structure générale des carrés multiplicatifs pandiagonaux d'ordre 6 à variables non nulles. En fait, nous avons trouvé deux structures suite à une égalité de la forme $A^6 = B^6$. Nous avons choisi $A = B$, ce qui nous a conduit à la structure suivante qui nous permet d'avoir trente-six nombres > 0 dans notre carré. Le choix $A = -B$ nous conduirait à une structure générant des carrés qui renfermeraient obligatoirement au moins un nombre < 0. Nous avons rejeté cette dernière structure.

Enfin, nous avons trouvé la structure générale que voici, qui est m-hyper-magique d'ordre 6, à variables non nulles et qui est la seule (aux structures équivalentes près) à pouvoir générer des m-hyper-magiques formés de trente-six nombres > 0.

Vous voulez un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de trente-six nombres > 0, alors celui-ci ne peut être généré que par la structure générale (HM*) suivante :

$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{t}$	$\frac{n^2t^3wy}{P}$	$\frac{P^{\frac{11}{6}}}{n^3t^4wy^2}$	$\frac{n^2t^3y^2}{P}$	$\frac{P^{\frac{1}{3}}w}{ty}$	$\frac{\sqrt{P}}{nw}$
$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{y}$	$\frac{P}{n^2t^2w}$	$\frac{n^3t^3wy}{P^{\frac{7}{6}}}$	$\frac{P}{n^2t^2y}$	$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{w}$	$\frac{ntwy}{\sqrt{P}}$
$\frac{nt^2y^2}{P^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{nw}{y}$	$\frac{P^{\frac{5}{6}}}{n^2tw}$	n	$\frac{nt^2wy}{P^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{P^{\frac{3}{2}}}{n^2t^3wy^2}$
$\frac{P^{\frac{4}{3}}}{n^2t^3y^2}$	$\frac{ty}{w}$	$\frac{nw}{P^{\frac{1}{6}}}$	t	$\frac{P^{\frac{4}{3}}}{n^2t^3wy}$	$\frac{n^3t^4wy^2}{P^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{n^2t^2y}{P^{\frac{2}{3}}}$	w	$\frac{P^{\frac{5}{6}}}{ntwy}$	y	$\frac{n^2t^2w}{P^{\frac{2}{3}}}$	$\frac{P^{\frac{3}{2}}}{n^3t^3wy}$
$\frac{P^{\frac{1}{3}}}{n}$	$\frac{P}{nt^2wy}$	$\frac{n^2t^3wy^2}{P^{\frac{7}{6}}}$	$\frac{P}{nt^2y^2}$	$\frac{P^{\frac{1}{3}}y}{nw}$	$\frac{n^2tw}{\sqrt{P}}$

(HM*) Structure générale des m-hyper-magiques d'ordre 6

Dans (HM*), nous trouvons l'expression $\frac{P^{\frac{5}{6}}}{n^2tw}$ en position $(3;3)$. Pour que le carré soit formé de trente-six entiers > 0, il est nécessaire que $\frac{P^{\frac{5}{6}}}{n^2tw}$ soit un entier > 0 et que les cinq variables prennent également des valeurs entières > 0. Nous aurons $P^{\frac{5}{6}} = E$, un entier > 0. Donc, $P^5 = E^6$ ce qui implique que P est une puissance sixième; plus précisément, $P = k^6$ où k est un entier ≥ 1. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que si P n'est pas une puissance sixième, alors P^5 n'est pas une puissance sixième, ce qui contredit $P^5 = E^6$. (Voir problème 21 de 15.7).

Soit A, un carré m-hyper-magique d'ordre 6 formé exclusivement d'entiers > 0. Alors le produit est $P = k^6$ où $k \geq 1$ est un entier.

Voici la structure générale (HM), obtenue de (HM*) dans laquelle nous avons remplacé P par k^6.

Les quatre cases grises nous montrent que si le carré est formé de trente-six entiers > 0, alors les valeurs que prendront les quatre variables $n, t, w \; et \; y$, devront être parmi les diviseurs entiers > 0 de k^2.

$\frac{k^2}{t}$	$\frac{n^2t^3wy}{k^6}$	$\frac{k^{11}}{n^3t^4wy^2}$	$\frac{n^2t^3y^2}{k^6}$	$\frac{k^2w}{ty}$	$\frac{k^3}{nw}$
$\frac{k^2}{y}$	$\frac{k^6}{n^2t^2w}$	$\frac{n^3t^3wy}{k^7}$	$\frac{k^6}{n^2t^2y}$	$\frac{k^2}{w}$	$\frac{ntwy}{k^3}$
$\frac{nt^2y^2}{k^4}$	$\frac{nw}{y}$	$\frac{k^5}{n^2tw}$	n	$\frac{nt^2wy}{k^4}$	$\frac{k^9}{n^2t^3wy^2}$
$\frac{k^8}{n^2t^3y^2}$	$\frac{ty}{w}$	$\frac{nw}{k}$	t	$\frac{k^8}{n^2t^3wy}$	$\frac{n^3t^4wy^2}{k^9}$
$\frac{n^2t^2y}{k^4}$	w	$\frac{k^5}{ntwy}$	y	$\frac{n^2t^2w}{k^4}$	$\frac{k^9}{n^3t^3wy}$
$\frac{k^2}{n}$	$\frac{k^6}{nt^2wy}$	$\frac{n^2t^3wy^2}{k^7}$	$\frac{k^6}{nt^2y^2}$	$\frac{k^2y}{nw}$	$\frac{n^2tw}{k^3}$

(HM) Structure générale des m-hyper-magiques d'ordre 6 avec $P = k^6$

Nous allons chercher les m-hyper-magiques presque normaux dont le produit sera le plus petit possible et idéalement, tel que le plus grand entier du carré soit le plus petit possible. Nous voulons trouver tous les carrés m-hyper-magiques presque normaux dont le produit est le plus petit.

Voici le m-hyper-magique de Sayles et deux m-hyper-magiques de Christian Boyer :

729	192	9	46656	3	576
32	486	2592	2	7776	162
11664	12	144	2916	48	36
1	15552	81	64	242	5184
23328	6	288	1458	96	18
16	972	1296	4	3888	324

Sayles 1913 ; $P = 216^6$

5	720	160	45	80	1440
4800	12	150	192	300	6
9	400	288	25	144	800
320	180	10	2880	20	90
75	48	2400	3	1200	96
576	100	18	1600	36	50

Christian Boyer 2006 ; $P = 120^6$

14	2100	63	350	84	1575
4410	15	980	90	735	20
50	588	225	98	300	441
126	525	28	3150	21	700
490	60	2205	10	2940	45
450	147	100	882	75	196

Christian Boyer 2006 ; $P = 210^6$

Dans les trois m-hyper-magiques ci-haut, celui de produit $P = 120^6$ est le meilleur car c'est lui qui a le plus petit produit d'entre les trois. De plus, ils sont tous presque normaux.

Nous présentons ici les cinq plus petits produits pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6. Vous trouverez dans un tableau un peu plus loin, les onze plus petits produits.

	Produit	Plus grand entier
Boyer 2006 ; *Bégin*, *St – Hilaire* 2015	120^6	4800
Bégin, *St – Hilaire* 2015	168^6	9408
Boyer 2006 ; *Bégin*, *St – Hilaire* 2015	210^6	4410
Sayles 1913 ; *Bégin*, *St – Hilaire* 2015	216^6	46656
Bégin, *St – Hilaire* 2015	240^6	4800

Pour chaque produit, nous avons trouvé 36 carrés primitifs qui renferment tous le plus petit entier maximum. De plus, ces 36 carrés contiennent les mêmes 36 entiers!!!

En 2014, Oscar Lanzi à démontré que si A est un carré multiplicatif pandiagonal presque normal d'ordre 6, alors son produit $P \geq 60^6$.

De plus, nous connaissons un tel carré de produit $P = 60^6$.

Pour le moment, cela signifie que le plus petit produit pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 est $P = 60^6$.

Nous allons utiliser un programme (05 de l'annexe 23 : MHM-6) construit avec MAPLE afin de trouver tous les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 et de produit $P = 60^6$. Nous chercherons ensuite le ou les meilleurs parmi ceux-ci (ceux qui renferment le plus petit entier maximum). Puis, nous illustrerons de très belles propriétés des m-hyper-magiques.

Mais voilà que notre programme nous donne aucun m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 dont le produit est 60^6. De la même façon, nous n'obtenons aucun m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 dont le produit est $P = k^6$ où l'entier k vérifie $61 \leq k \leq 119$.

Nous savons qu'il y en a avec $P = 120^6$. Notre programme nous donne tous les presque normaux qui ont ce produit. Il sera très facile de choisir les meilleurs avec ce qui suit!!!

Soit A, un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6. Nous savons maintenant que son produit vérifie $P \geq 120^6$.

De plus, nous connaissons déjà soixante-douze carrés primitifs de produit $P = 120^6$.

Il existe 576 m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 de produit 120^6 soit 72 primitifs que vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 05. L'entier maximum est soit 4800 soit 14 400.

Parmi les 72 primitifs, 36 ont 4800 pour entier maximum et 3 pour entier minimum. Ces 36 carrés renferment les mêmes entiers.

Parmi les 72 primitifs, 36 ont $14\,400$ pour entier maximum et 1 pour entier minimum. Ces 36 carrés renferment les mêmes entiers.

Soit A, un carré m-hyper-magique d'ordre 6 formé exclusivement d'entiers > 0, de produit $P = k^6$. Alors, le produit des neuf nombres situés dans tout sous-carré d'ordre 3 est toujours le même soit $P^{\frac{3}{2}} = k^9$.

Que pouvons-nous espérer avec un produit inférieur à 120^6 ou même inférieur à 60^6 ? La structure générale (HM) nous assure que le carré obtenu avec celle-ci sera toujours un m-hyper-magique donc un carré pandiagonal. Il pourra être formé d'entiers > 0 mais il ne pourra pas être presque normal, donc il contiendra des répétitions. Voyons le carré qui suit de produit $P = 30^6$:

225	4	450	1	900	2
60	15	30	60	15	30
1	900	2	225	4	450
900	1	450	4	225	2
15	60	30	15	60	30
4	225	2	900	1	450

m-hyper-magique de produit 729 000 000.

Ce carré renferme neuf entiers différents > 0, chacun apparaissant quatre fois!!! Ces neuf entiers sont : $4\ \{1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 15\ ;\ 30\ ;\ 60\ ;\ 225\ ;\ 450\ ;\ 900\}$.

Voici maintenant un autre m-hyper-magique, cette fois de produit $P = 60^6$. Il est formé de dix-huit entiers différents > 0, chacun apparaissant deux fois. Ces entiers sont :
$2\ \{1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ 20\ ;\ 30\ ;\ 36\ ;\ 50\ ;\ 72\ ;\ 100\ ;\ 120\ ;\ 180\ ;\ 300\ ;\ 600\ ;\ 720\ ;\ 1800\ ;\ 3600\}$

600	36	100	6	3600	1
30	20	180	120	5	720
12	1800	2	300	72	50
600	1	3600	6	100	36
30	720	5	120	180	20
12	50	72	300	2	1800

m-hyper-magique de produit $46\ 656\ 000\ 000$

Voici deux des trente-six meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6.

5	720	160	45	80	1440
4800	12	150	192	300	6
9	400	288	25	144	800
320	180	10	2880	20	90
75	48	2400	3	1200	96
576	100	18	1600	36	50

Christian Boyer 2006: $P = 120^6$

3	1600	45	192	25	2880
1200	36	80	300	144	20
96	50	1440	6	800	90
75	576	5	4800	9	320
48	100	720	12	400	180
2400	18	160	150	288	10

Claude Bégin, Claude St-Hilaire: juillet 2015 : $P = 120^6$

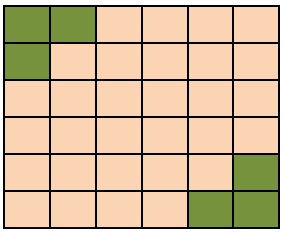
Quelques propriétés des m-hyper-magiques d'ordre 6 :

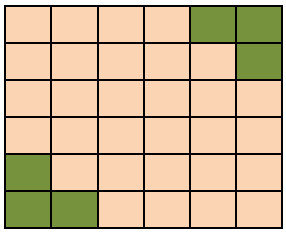
1) Ils sont tous pandiagonaux.
2) Soit A, un carré m-hyper-magique d'ordre 6 formé exclusivement d'entiers > 0, de produit $P = k^6$.
   a) Alors, le produit des neuf entiers situés dans tout sous-carré d'ordre 3 est toujours le même soit $P^{\frac{3}{2}} = k^9$.

b) Le produit des quatre coins de tous les sous-carrés d'ordre 4 est toujours $\sqrt[3]{P^2} = k^4$.

c) Le produit des quatre coins du carré d'ordre 6 est toujours $\sqrt[3]{P^2} = k^4$.

d) A possède les deux figures magiques suivantes et bien d'autres :





e) La structure générale (HM) possède 5052 figures magiques donc tous les m-hyper-magiques formés de trente-six entiers > 0 possèdent au moins 5052 figures magiques!!! Nous en avons trouvé qui avaient 8046 figures magiques!!!

f) C'est le cas des deux derniers carrés ci-haut de produit $P = 120^6$.

g) Les m-hyper-magiques d'ordre 6 possèdent de nombreuses super-figures (voir problème 22 de 15.7).

Tous les carrés du tableau suivant ont un produit de la forme $P = k^6$. La première colonne à gauche indique la valeur de k et sa décomposition en facteurs premiers.

k	Presque normaux	Primitifs	Plus grand entier minimum *	Plus petit entier maximum *	Primitifs avec *	Groupes de 36
$120 = 2^3 \times 3 \times 5$	576	72	3	4800	36	2
$168 = 2^3 \times 3 \times 7$	576	72	3	9408	36	2
$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$	3456	432	10	4410	36	12
$216 = 2^3 \times 3^3$	288	36	1	46 656	36	1
$240 = 2^4 \times 3 \times 5$	9216	1152	12	4800	36	32
$264 = 2^3 \times 3 \times 11$	576	72	3	23 232	36	2
$270 = 3^3 \times 2 \times 5$	576	72	2	36 450	36	2
$280 = 2^3 \times 5 \times 7$	576	72	5	15 680	36	2
$312 = 2^3 \times 3 \times 13$	576	72	3	32 448	36	2
$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$	3456	432	10	10 890	36	12
$336 = 2^4 \times 3 \times 7$	9216	1152	14	8064	36	32

Ce tableau indique les onze plus petits produits pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 soient 120^6, 168^6, 210^6, 216^6, 240^6, 264^6, 270^6, 280^6, 312^6, 330^6, 336^6.

Par exemple, pour le deuxième produit, nous trouvons 576 m-hyper-magiques presque normaux d'où 72 primitifs. Nous constatons que ceux-ci sont regroupés en deux groupes de 36 et que tous les carrés d'un même groupe renferment les mêmes 36 entiers!!! Dans le premier groupe, les carrés renferment donc le même entier minimum 3 et le même entier maximum 9408. Dans le second groupe, tous les carrés renferment donc le même entier maximum $28\,224$.

Pour le troisième produit, nous trouvons 432 primitifs répartis en douze groupes de 36 carrés. Dans chaque groupes, les 36 carrés renferment les mêmes 36 entiers. Puis parmi les douze groupes, nous trouvons un seul groupe tel que tous les carrés dans celui-ci renferment le plus petit entier maximum soit 4410. **Notons que dans ce tableau, le plus grand entier minimum est celui qui se trouve avec le plus petit entier maximum.**

Il est surprenant de constater, pour tous les produits du tableau, que les groupes renferment tous 36 carrés formés des mêmes 36 entiers!!! Deux carrés provenant de deux groupes différents ne renferment pas les mêmes 36 entiers.

Le tableau nous montre que les 36 meilleurs m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 ont pour produit $P = 120^6$ et renferment tous l'entier minimum 3 et l'entier maximum 4800.
Meilleur signifie ici : le plus petit entier maximum pour le plus petit produit.

Voyons maintenant ces deux m-hyper-magiques presque normaux de produit 168^6 :

576	98	36	3136	18	196
147	96	2352	3	4704	48
448	126	28	4032	14	252
9	1568	144	49	288	784
9408	6	588	192	294	12
7	2016	112	63	224	1008

$$P = 168^6;\ entier\min = 3\ ;\ entier\max = 9408$$

4032	28	126	448	252	14
1	7056	32	441	16	14112
9408	12	294	192	588	6
63	112	2016	7	1008	224
64	1764	2	28224	4	882
147	48	4704	3	2352	96

$$P = 168^6 \ ; \ entier \min = 1 \ ; \ entier \max = 28224$$

Le premier fait partie du groupe de 36 qui ont tous 9408 comme entier maximum et le second fait partie du groupe de 36 qui ont tous 28224 comme entier maximum.

Revenons au tableau ci-haut. Nous trouvons que six valeurs de k nous donnent 576 carrés m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6. La décomposition en facteurs premiers de ces six entiers montre que chaque décomposition à la forme $a^3 b\, c$ où $a, b\, et\, c$ sont des nombres premiers évidemment différents deux à deux.

VOILÀ ce qui explique que nous obtenions les mêmes résultats!!! Pour l'instant, notre approche est purement intuitive. Le programme dans MAPLE traite de la même façon $2^3 \times 5 \times 7$ que $5^3 \times 11 \times 19$.

La prédiction que toute valeur entière de k de la forme $a^3 b\, c$ donnera 576 carrés a toujours été exacte!!!

La décomposition de la forme $a^2 b\, c$ ne nous donne aucun carré pour $k = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Nous prétendons qu'il en sera de même pour $k = 84\ ,\ 132\ ,\ 140\ ,\ 156\ ,\ 204\ ,\ 228 \ldots$ ce qui a été vérifié.

La décomposition de la forme $a^6 b$ ne nous donne aucun carré pour $k = 192 = 2^6 \times 3$. Nous pensons qu'il en sera de même pour $k = 320 = 2^6 \times 5$, ce qui est exact.

Le tableau suivant nous présente un certain nombre de décompositions qui nous donnent des carrés et un certain nombre de décompositions qui ne nous donnent aucun carré.

Décomposition de la forme	Presque normaux	Primitifs	Carrés avec le plus petit maximum	Groupes de 36 carrés primitifs
a^3bc	576	72	36	2
a^4bc	9216	1152	36	32
$abcd$	3456	432	36	12
a^3b^3	288	36	36	1
a^4b^3	2304	288	72	8
a^2bc	0	0	0	0
a^2b^2c	0	0	0	0
a^4b^2	0	0	0	0
a^5b^2	0	0	0	0
a^6b	0	0	0	0

Par exemple, si $k = a^4bc$, alors **nous prétendons** obtenir 9216 m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 donc 1152 primitifs répartis en 32 groupes de 36 carrés. Dans chaque groupe, les 36 carrés renferment les mêmes 36 entiers et un seul groupe contient 36 carrés ayant le plus petit maximum.

Nous avons des résultats semblables pour les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 et pour les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5.

Pourrions-nous augmenter le tableau ci-haut? Oui avec a^{24}; a^{25}; a^4b^3... , nous trouvons des carrés. Nous ne trouvons aucun carré avec a^7b.

Nous venons de trouver que le douzième meilleur produit pour un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 est 360^6. Pour y arriver, nous avons utilisé le problème 45 de 15.7.

Remarque :

Pour montrer que le plus petit produit d'un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 est 120^6, nous avons vérifié avec notre programme dans MAPLE que pour $1 \le k \le 59$, nous n'avions aucun m-hyper-magique presque normal de produit k^6. Nous avions aussi vérifié qu'il en était de même pour $60 \le k \le 119$.

Ce résultat est conforme avec celui d'Oscar Lanzi vu un peu plus haut. Un m-hyper-magique est pandiagonal et il n'existe pas de carré multiplicatif pandiagonal presque normal de produit

inférieur à 60^6 selon Lanzi. Donc il n'existe pas de m-hyper-magique presque normal de produit inférieur à 60^6.

Puis le :

Théorème 15.13.2 (voir le problème 42 de 15.7)

Dans un m-hyper-magique presque normal d'ordre 6 donc de produit $P = k^6$, chaque entier du carré est un diviseur de k^2.

Grâce à ce théorème, nous avons maintenant un moyen de trouver seulement les valeurs de k susceptibles de nous donner des carrés m-hyper-magiques presque normaux.

Si le nombre de diviseurs entiers ≥ 1 est inférieur à 36, alors nous ne trouverons aucun m-hyper-magique presque normal d'ordre 6.

Il est facile avec MATHEMATICA ou MAPLE de construire une table qui indique le nombre de diviseurs positifs de k^2. Avec MATHEMATICA, nous avons :

Table[Length[Divisors[k^2]], {k, 1, 120}]

Nous obtenons un nombre de diviseurs positifs supérieur ou égal à 36 pour $k = 60\ ; 84\ ;\ 90\ et\ 120$. Nous allons donc utiliser notre programme quatre fois au lieu de 120.

Mais seulement $k = 120$ nous donne des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 d'où $P = 120^6$ est le plus petit produit pour obtenir des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6. Il y en a 576 soit 72 primitifs.

Voir le problème 44 de 15.7.

Enfin, voici les vingt-deux valeurs de $1 \leq k \leq 500$ qui nous conduisent à des m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 ; en rouge, celles du tableau ci-haut :

120 ; 168 ; 210 ; 216 ; 240 ; 264 ; 270 ; 280 ; 312 ; 330 ;336 ; 360 ; 378 ;
384 ; 390 ; 408 ; 420 ; 432 ; 440 ; 456 ; 462 ; 480

Pour toutes les autres valeurs de $k \leq 500$, aucune nous permet de trouver des presque normaux. Les valeurs suivantes de $k > 500$, prises aléatoirement, nous conduisent à des presque normaux :

520 ; 560 ; 720 ; 840 ; 960 ; 1000 ; 1200 ; 1260 ; 4000 ; 10 000 ; 16 000

15.6 Relation entre les carrés magiques et les carrés multiplicatifs

Nous avons observé que plusieurs figures magiques dans des carrés magiques étaient aussi des figures magiques dans des carrés multiplicatifs!!! Pourquoi?

Nous allons établir quelques très beaux résultats. Mais d'abord, un rappel :

Considérons la fonction exponentielle $y = a^x$ avec $0 < a < 1 \; ou \; a > 1$. Nous avons alors

$$a^{\log_a y} = y$$

Soit maintenant E_n, l'ensemble des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels et F_n, l'ensemble des carrés multiplicatifs d'ordre n, formés de nombres réels > 0. Nous allons montrer que chaque carré de F_n est obtenu par exponentiation d'un carré de E_n et que chaque carré de E_n est obtenu en logarithmant un carré de F_n. Voyons d'abord ces définitions :

L'exponentiation en base a d'un carré A signifie que nous allons remplacer chaque nombre x_i de A par a^{x_i}. Ce nouveau carré B est appelé **l'associé** de A.

Logarithmer en base a un carré A signifie que nous allons remplacer chaque nombre x_i de A par $\log_a x_i$. Ce nouveau carré B est aussi appelé **l'associé** de A.

Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. Nous dirons que M et N sont **associés** si et seulement si : N est obtenu de M par exponentiation en base a de M ou M est obtenu de N en logarithmant N en base a.

N est obtenu de M par exponentiation en base a de M

$\Leftrightarrow$

M est obtenu de N en logarithmant N en base a

Théorème 15.14 :

Chaque carré multiplicatif dans F_n est obtenu par exponentiation en base a d'un carré magique de E_n.

Preuve :

Soit N, un carré multiplicatif de F_n dont le produit magique est P. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les nombres situés dans une rangée, colonne ou grande diagonale. En logarithmant en base a le carré N, nous obtenons le carré M qui renfermera dans les cases correspondantes les nombres $\log_a x_1, \log_a x_2, \ldots, \log_a x_n$.

Dans le carré multiplicatif N, nous avons : $x_1 x_2 \ldots x_n = P$.

Dans M, nous avons : $\log_a x_1 + \log_a x_2 + \ldots + \log_a x_n = \log_a x_1 x_2 \ldots x_n = \log_a P$.

Puisqu'il en sera ainsi pour toutes les rangées, colonnes et grandes diagonales, nous concluons que M est un carré magique de E_n dont la somme magique est $S = \log_a P$. Il est clair que N est obtenu de M par exponentiation en base a de M. En effet, $a^{\log_a x_i} = x_i$.

Théorème 15.15:

Chaque carré magique de E_n est obtenu en logarithmant en base a un carré multiplicatif de F_n..

Preuve :

Soit M, un carré magique de E_n de somme magique S. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les nombres situés dans une rangée, colonne ou grande diagonale. Par exponentiation en base a du carré M, nous obtenons le carré N qui renfermera dans les cases correspondantes les nombres $a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_n}$.

Dans le carré magique M, nous avons : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$.

Dans N, nous avons $a^{x_1}a^{x_2}...a^{x_n} = a^{x_1+x_2+...+x_n} = a^S$.

Puisqu'il en sera ainsi pour toutes les rangées, colonnes et grandes diagonales, nous concluons que N est un carré multiplicatif de F_n dont le produit magique est $P = a^S$. Il est clair que M est obtenu de N en le logarithmant en base a. En effet, $\log_a a^{x_i} = x_i$.

La bijection entre E_n *et* F_n est donc évidente. Par exponentiation des carrés de E_n, nous obtenons tous les carrés de F_n (la surjection) et si A et B sont deux carrés différents de E_n, alors par exponentiation, nous obtenons deux carrés différents de F_n (l'injection).

Ainsi, nous obtenons tous les couples d'associés (A ; B) où A est dans E_n et B dans F_n.

Théorème 15.16:

Soient M et N, deux carrés associés respectivement de E_n et de F_n. Alors nous avons :

$$P = a^S$$

Preuve :

Soient $x_1, x_2, ..., x_n$, les nombres de la première rangée de M d'où les nombres de la première rangée de N sont $a^{x_1}, a^{x_2}, ..., a^{x_n}$. Nous avons :

$$a^{x_1}a^{x_2}...a^{x_n} = a^{x_1+x_2+...+x_n} = a^S.$$

Puisque nous avons le même résultat pour chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale de N, alors nous pouvons poser :

$$P = a^S$$

De façon semblable, nous pourrions montrer que $S = \log_a P$.

Théorème 15.17:

Deux carrés associés ont les mêmes propriétés.

Preuve :

Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. Pour montrer que N a les mêmes propriétés que M, montrons ceci :

Prenons k cases dans M qui renferment les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Par exponentiation de M, nous trouvons dans les cases correspondantes de N, les nombres $a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_k}$.

Si $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = u = \lambda S$, alors dans N, nous trouvons :

$$a^{x_1} a^{x_2} \ldots a^{x_k} = a^{\lambda S} = (a^S)^{\lambda} = P^{\lambda}.$$

Ainsi, pour tout groupe de k cases dans M dont la somme est λS, nous trouvons avec les cases correspondantes de N, que le produit des k nombres est P^{λ}.

Donc avec $k = n \; et \; \lambda = 1$, nous montrons qu'une figure qui est magique dans M est une figure de N qui est magique.

Réciproquement, nous pouvons montrer que M a les mêmes propriétés que N. Pour cela, montrons ceci :

Prenons k cases dans N qui renferment les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_k$. En logarithmant N, nous trouvons dans les cases correspondantes de M, les nombres $\log_a y_1, \log_a y_2, \ldots, \log_a y_k$. Si $y_1 y_2 \ldots y_k = v = \varphi P$, alors dans M, nous trouvons :

$$\log_a y_1 + \log_a y_2 + \ldots + \log_a y_k = \log_a \varphi P = \log_a \varphi + \log_a P = S + \log_a \varphi.$$

Ainsi, pour tout groupe de k cases dans N dont le produit est φP, nous trouvons avec les cases correspondantes de M, que la somme des k nombres est $S + \log_a \varphi$.

Donc avec $k = n \; et \; \varphi = 1$, nous montrons qu'une figure de N qui est magique est une figure de M qui est magique.

Exemple 1 :

Nous savons que les quatre coins de tout carré magique d'ordre 4 et de somme S forment une figure magique. Ainsi, le produit des quatre coins de tout carré multiplicatif d'ordre 4 et de produit P est aussi une figure magique.

Les quatre coins du carré multiplicatif N renferment les nombres $w, x, y et\ z$. Nous voulons montrer que le produit $w\,x\,y\,z = P$. Puisqu'il existe un carré magique M, l'associé de N, qui contient dans ses quatre coins, les nombres $\log_a w,\ \log_a x,\ \log_a y\ et\ \log_a z$, alors nous avons :

$$S = \log_a w + \log_a x + \log_a y + \log_a z = \log_a wxyz\ d'où\ wxyz = a^S = P$$

M est un carré de E_n de somme S et N est un carré de F_n de produit P. Les carrés M et N sont-ils obligatoirement associés relativement à une base a ?

La réponse est non!!!

4	9	2
3	5	7
8	1	6

M

18	1	12
4	6	9
3	36	2

N

Ces deux carrés ne peuvent pas être associés puisque $a^9 = 1$ implique $a = 1$ et $1^4 = 1 \neq 18$.

Exemple 2 :

Soit donné N, un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de nombres > 0. Montrons que son associé est un hyper-magique. Voir problème 33 de 15.7.

Exemple 3 :

Dans un m-hyper-magique N d'ordre 6 formé de nombres > 0, le produit des neuf nombres de tout sous-carré d'ordre 3 est toujours $P^{\frac{3}{2}}$. Que se passe-t-il dans tout sous-carré d'ordre 3 d'un hyper-magique d'ordre 6?

D'abord en trouvant M, son associé, nous trouvons un hyper-magique (exemple 2). Dans tout sous-carré d'ordre 3, la somme des neuf nombres est :

$$\sum_{i=1}^{9} \log_a x_i = \log_a P^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right) \log_a P = \left(\frac{3}{2}\right) S$$

où les x_i sont les neuf nombres d'un sous-carré d'ordre 3 de N.

Exemple 4 :

Nous pouvons obtenir le carré B à l'aide de plusieurs exponentiations.

Par exponentiation en base $a = 2$, vous construisez un carré multiplicatif B à partir d'un carré magique A :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

B

En prenant le logarithme de B en base $a = 3$, nous obtenons le carré magique C :

$\log_3 2^4$	$\log_3 2^9$	$\log_3 2^2$
$\log_3 2^3$	$\log_3 2^5$	$\log_3 2^7$
$\log_3 2^8$	$\log_3 2^1$	$\log_3 2^6$

C

Celui-ci peut être mis sous la forme suivante :

$(\log_3 2)$

4	9	2
3	5	7
8	1	6

C

Maintenant, par exponentiation en base $a = 3$ du carré C, nous obtenons le carré multiplicatif B. Ainsi, par exemple, nous trouvons :

$$3^{\log_3 2^8} = 2^8$$

Exemple 5 :

Soit la fonction définie par $f(x) = a^x \; et \; M$, un carré magique de E_n. Nous définissons $f(M)$ comme étant le carré obtenu en remplaçant chaque nombre x de M par a^x. Puis la fonction $g(x) = \log_a x \; et \; N$, un carré multiplicatif de F_n. Nous définissons $g(N)$ comme étant le carré obtenu en remplaçant chaque nombre x de N par $\log_a x$.

Nous allons représenter par $f(E_n)$, l'ensemble des carrés multiplicatifs obtenus par exponentiation en base a de tous les carrés magiques de E_n. Puis, par $g(F_n)$, l'ensemble des carrés magiques obtenus en logarithmant en base a tous les carrés multiplicatifs de F_n. Alors, nous avons :

$$f(E_n) = F_n$$

$$g(F_n) = E_n$$

Exemple 6 :

Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. De plus, M et N sont associés. Alors, le carré M est un Dürer si et seulement si le carré N est un m-Dürer. De plus, par exponentiation de tous les Dürer, nous obtenons tous les m-Dürer de F_n. Voir problème 34 de 15.7.

Exemple 7 :

Nous allons appliquer l'exponentiation en base a à la structure générale des Dürer. Qu'allons obtenir?

Nous allons obtenir une structure générale des m-Dürer à variables non nulles. Voir problème 35 de 15.7.

E_n et F_n sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Ils sont isomorphes!!!

Voir le problème 36 de 15.7.

Nous avons dans MATHEMATICA, EXCEL et MAPLE, des fichiers qui vous permettent de construire des carrés arithmétiques d'ordres $3 \le n \le 24$ avec MATHEMATICA et un peu plus avec EXCEL et MAPLE. Dans tous les cas, nous avons besoin que de trois variables.

Nous allons terminer ici en montrant comment nous pouvons construire une structure de carrés multiplicatifs d'ordre $n \ge 3$ également à l'aide de trois variables seulement.

Par exemple, prenons la structure de carrés arithmétiques d'ordre 4 (fichier «Ordre 4») :

a	$a+3r+2t$	$a+3r+t$	$a+3t$
$a+2r+3t$	$a+r+t$	$a+r+2t$	$a+2r$
$a+r+3t$	$a+2r+t$	$a+2r+2t$	$a+r$
$a+3r$	$a+2t$	$a+t$	$a+3r+3t$

La somme de ce carré est $S = 4a+6r+6t$.

Par exponentiation en base 2, par exemple, nous trouvons pour les cases de la première rangée, les nombres suivants :

$$2^a;\ 2^{a+3r+2t};\ 2^{a+3r+t};\ 2^{a+3t}$$

soit

$$2^a;\ 2^a 2^{3r} 2^{2t};\ 2^a 2^{3r} 2^t;\ 2^a 2^{3t}$$

Puis en posant : $u = 2^a, v = 2^r, w = 2^t$, nous trouvons dans les quatre cases de la première rangée, les nombres suivants :

$$u\ ,\ u v^3 w^2,\ u v^3 w,\ u w^3$$

En procédant de la même façon avec les trois autres rangées, nous obtenons le carré multiplicatif suivant de produit $P = u^4 v^6 w^6 = (u^2 v^3 w^3)^2$:

u	$u v^3 w^2$	$u v^3 w$	$u w^3$
$u v^2 w^3$	$u v w$	$u v w^2$	$u v^2$
$u v w^3$	$u v^2 w$	$u v^2 w^2$	$u v$
$u v^3$	$u w^2$	$u w$	$u v^3 w^3$

Il est clair que les valeurs permises pour les variables u, v, w sont les nombres réels > 0. En effet, voir quelques lignes plus haut, la définition de celles-ci. Pour construire un tel carré multiplicatif presque normal, il suffira d'attribuer des valeurs entières ≥ 1 pour u et des valeurs entières ≥ 2 pour $v et\ w$, puis pour éviter les répétitions, de prendre $w > v^{n-1}\ ou\ v > w^{n-1}$, condition suffisante pour avoir un presque normal.

Cette structure nous permet de construire une infinité de carrés multiplicatifs presque normaux. Nous pourrions les appeler **«carrés géométriques»** puisque les seize nombres du carré forment un **tableau géométrique** :

(TG)
$$\begin{matrix} u & uv & uv^2 & uv^3 \\ uw & uvw & uv^2w & uv^3w \\ uw^2 & uvw^2 & uv^2w^2 & uv^3w^2 \\ uw^3 & uvw^3 & uv^2w^3 & uv^3w^3 \end{matrix}$$

Vous pouvez voir les quatre suites géométriques horizontales de raison v et les quatre suites géométriques verticales de raison w.

Le procédé employé ici consiste à partir d'une structure de carrés arithmétiques et de traduire celle-ci en une structure de carrés géométriques, comme nous venons de le faire pour l'ordre $n=4$. En général, cette structure de carrés géométriques ne nous donne pas, **avec des valeurs entières des variables**, les carrés du plus petit produit.

Pour $n=3$, le produit est $P=(uvw)^3$. Avec $u=1, v=2, w=3$, nous obtenons un carré multiplicatif presque normal du plus petit produit $P=6^3=216$.

Pour $n=4$, le produit est $P=(u^2v^3w^3)^2$. Avec $u=1, v=2, w=3$, nous obtenons un carré multiplicatif presque normal de produit $P=46656$. Mais nous en connaissons un de produit $P=5040$, voir 15.3, le carré de Sayles. Il a été démontré par Borkovitz et Hwang, en 1983, que le plus petit produit pour un multiplicatif presque normal d'ordre 4 est $P=5040$.

Ici notre produit ne peut pas donner 5040 puisque nous aurions $u^2v^3w^3=\sqrt{5040}$, un nombre irrationnel. Or, puisque nous voulons un carré presque normal, les trois variables doivent être des nombres rationnels d'où le rationnel $u^2v^3w^3$ et la contradiction qui suit. Donc, 5040 ne peut pas avoir la forme $P=(u^2v^3w^3)^2$.

1	72	24	27
108	6	18	4
54	12	36	2
8	9	3	216

Carré géométrique $P=46656$

Ce carré multiplicatif de produit $P=46656$ est un carré géométrique presque normal.

La structure précédente est un carré m-Dürer associatif donc un m-A-Dürer. C'est aussi un carré géométrique. Il en est donc de même du carré précédent.

Pour tous les ordres $n \geq 3$, nous pouvons construire une infinité de carrés géométriques presque normaux à l'aide de trois variables seulement!!!

Notre aventure avec les carrés multiplicatifs se termine ici. Nous retenons surtout ce lien insupçonné avec les carrés magiques. Cette étude des carrés multiplicatifs (les m-carrés), pourrait se poursuivre encore sur plusieurs années!!! Il nous reste beaucoup de questions et beaucoup de problèmes à résoudre.

Par exemple, pourquoi les m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 et de produit P se retrouvent-ils par groupes de trente-six carrés qui renferment les mêmes trente-six entiers???

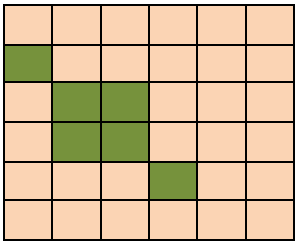
Il faudrait regarder de plus près les espaces vectoriels de carrés multiplicatifs (voir annexe 26).

15.7 Problèmes

1) Montrez qu'un carré multiplicatif d'ordre 2 prend obligatoirement l'une des deux formes de 15.1.
2) Soient A et B, deux carrés magiques différents d'ordre $n \geq 3$. Montrez que les deux carrés multiplicatifs obtenus par exponentiation de base $a > 1$, sont différents.

3) Complétez la preuve du théorème 15.7de 15.2. N'oubliez pas de vérifier que les neuf entiers du carré sont différents deux à deux.
4) Dans la structure générale (*) de 15.2, posez $c = p^3$, $a = p^4$ *et* $d = p^5$ où p est un nombre > 0. Pouviez-vous construire autrement ce carré?
5) Trouvez cinq carrés multiplicatifs presque normaux d'ordre 3 dont la case centrale renferme le nombre 270.
6) Il existe seulement huit carrés multiplicatifs d'ordre 3 qui sont presque normaux et qui ont comme centre l'entier 21. Vrai ou faux? Expliquez.
7) Trouvez un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 dont le centre est l'entier 81.
8) Démontrez que nous pouvons toujours construire un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$ et de produit nul, qui contiendra exactement n zéros.
9) Montrez que dans un carré d'ordre 4, chaque sous-carré d'ordre 2 situé dans un coin contient toujours une seule case de toute figure complète.
10) Montrez que si nous utilisons une figure complète dans un m-Dürer, alors le carré qui en résulte est toujours un m-Dürer.
11) À la fin de 15.3, retrouvez les huit figures complètes puis montrez que ce sont les seules possibles pour un carré d'ordre 4.
12) À la fin de 15.3.1, retrouvez le carré de produit P = 14 280 et montrez que nous ne pouvons plus réduire le produit à l'aide d'une figure complète si nous voulons que notre carré reste presque normal.
13) En vous référant aux cinq carrés multiplicatifs pandiagonaux de produit $P = 14\,400$, vus plus haut, trouvez :
    a) Deux autres structures de carrés multiplicatifs pandiagonaux comme (MSD*). Vous aurez alors trois structures.
    b) La condition qui rendra chacune de ces trois structures presque normale.
14) Construisez un carré multiplicatif d'ordre 4 qui contient autant d'entiers > 0 que d'entiers < 0.
15) Soit donné un carré M d'ordre n, formé exclusivement d'entiers. Nous voulons construire une bordure autour de M afin d'obtenir un carré magique M'd'ordre $n+2$, lui aussi formé que d'entiers. Puis, de nouveau avec M, et avec une autre bordure, nous voudrions construire un autre carré magique M'', aussi formé que d'entiers et d'ordre $n+2$. Les carrés M' et M'' peuvent-ils avoir des sommes magiques différentes?

16) Soit donné un carré magique M d'ordre $n \geq 3$ et de somme S_1. Quelle est la somme magique S de M'obtenu à l'aide d'une bordure autour de M?
17) Soit M, un carré magique normal d'ordre $n \geq 3$. Montrez qu'à l'aide d'une bordure autour de M, nous pourrons toujours obtenir M' magique formé exclusivement d'entiers.
18) En référence avec le problème 17 précédent, montrez que M' ne pourra jamais être normal.
19) Pourquoi, dans un carré multiplicatif associatif d'ordre $n \geq 3$, le produit des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré, doit être $\sqrt[n]{P^2}$?
20) Montrez qu'un m-ultra-magique d'ordre impair $n \geq 3$, formé de n^2 entiers > 0, doit avoir un produit magique $P = k^n$ où k est un entier ≥ 1.
21) Montrez que si $P^5 = E^6$ où P *et* E sont des entiers > 0, alors $P = k^6$ où $k \geq 1$ est un entier.
22) Le carré suivant est un m-hyper-magique d'ordre 6. Montrez que la figure illustrée en vert est une super-figure.



23) Soit A, un carré multiplicatif non trivial, d'ordre $n \geq 3$, qui est associatif et formé de nombres > 0. Montrez que le plus petit nombre du carré et le plus grand, sont situés dans des cases symétriques par rapport au centre du carré.

24) Nous voulons trouver un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5. Nous savons qu'alors, le produit est k^5. Est-il possible d'en trouver un si :
    a) $k = 144$?
    b) $k = 240$?
    c) $k = 127$?

25) Dans le tableau de 15.4, le dernier produit est 120^5. Quel est le prochain produit que nous pourrions ajouter au tableau.

26) Soient M et N, deux carrés multiplicatifs d'ordre $n \geq 3$. En général, M + N n'est pas multiplicatif.
   a) Donnez un exemple où M + N n'est pas multiplicatif.
   b) Donnez un exemple où M + N est multiplicatif.

27) Trouvez une condition suffisante pour que $A_1 + A_2 + ... + A_m$ soit un carré multiplicatif, les A_i étant tous multiplicatifs.

28) Montrez qu'un carré multiplicatif presque normal d'ordre 3 ne peut pas être pandiagonal. Il ne peut donc pas être m-ultra-magique.

29) Complétez la preuve du théorème 15.9 de 15.3.2.

30) Montrez que (MSD), voir 15.3.2, est un m-hyper-magique.

31) Pourquoi les 48 carrés m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 et de produit $P = 14\,400$, renferment-ils les mêmes seize entiers?

32) Dans 15.3.2, montrez que la condition suffisante pour que (MSD*) soit presque normal implique toutes les inégalités dans la suite strictement croissante (SSC).

33) Soit donné N, un m-hyper-magique d'ordre 6 formé de nombres > 0. Montrez que son associé est un hyper-magique.

34) Soit M, un carré magique de E_n et N, un carré multiplicatif de F_n. De plus, M et N sont associés. Alors, le carré M est un Dürer si et seulement si le carré N est un m-Dürer. Puis par exponentiation de tous les Dürer, nous obtenons tous les m-Dürer de F_n. Montrez-le.

35) Nous allons appliquer l'exponentiation de base a à la structure générale des Dürer. Montrez que nous allons obtenir une structure générale des m-Dürer à variables non nulles.

36) Nous savons que l'ensemble E_n des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n(n-2)$. Que pouvons-nous dire au sujet de F_n, l'ensemble des carrés multiplicatifs d'ordre n, formés de nombres réels > 0? Avons-nous là un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? La réponse est oui et voyons cela de plus près en considérant d'abord M et N, deux carrés multiplicatifs de F_n.

   Puis nous allons définir l'opération de groupe, notée $*$, comme suit :
   M * N = W est le carré multiplicatif obtenu en multipliant terme à terme les nombres des cases correspondantes de M et N. Ainsi, $m_{i,j}\, n_{i,j} = w_{i,j}$.

   Pour la multiplication par un scalaire, t ∘ M = Z est le carré multiplicatif obtenu en affectant tous les nombres de M de l'exposant t. Ainsi, pour $n = 3$, nous aurions :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA & bB & cC \\ dD & eE & fF \\ gG & hH & kK \end{pmatrix}$$

$$t \circ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t & b^t & c^t \\ d^t & e^t & f^t \\ g^t & h^t & k^t \end{pmatrix}$$

a) Montrez que F_n est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

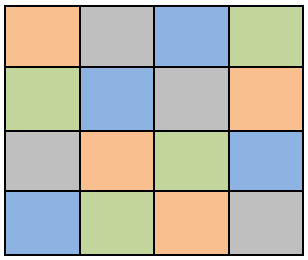
b) Montrez qu'il existe un isomorphisme entre E_n *et* F_n.

c) Montrez que la dimension de F_n est $n(n-2)$.

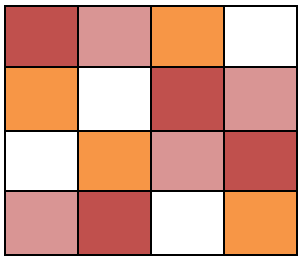
37) Trouvez un carré magique A tel que par exponentiation en base 2, vous obteniez le carré multiplicatif B. Pouvez-vous trouver un autre carré magique C, différent de A, tel que par exponentiation, vous retrouviez B?

38) Dans 15.3.2, nous avons énoncé dans un encadré vert : «Pour obtenir de (MSD – 1) un carré presque normal, il est suffisant que les cinq variables prennent des valeurs qui sont des nombres premiers tous différents.» Démontrez.

39) Nous vous présentons deux carrés d'ordre 4 qui renferment, ensemble, les huit figures complètes des 4x4. Vérifiez que c'est bien le cas avec les deux carrés suivants :



Carré réducteur 1



Carré réducteur 2

a) Les quatre cases de chaque figure complète sont de même couleur.

b) Avec chaque figure complète, vous pouvez diminuer le produit de votre carré multiplicatif, si possible.

c) Après avoir utilisé une figure complète, assurez-vous que le carré est toujours presque normal si bien entendu le carré original était presque normal.

d) Vous avez là, huit façons de diminuer le produit du carré.

e) Les deux carrés ci-haut sont appelés carrés réducteurs (1 et 2).

40) Dans 15.3.1, nous avons présenté les structures (MD) et (MD*) qui permettent la construction des carrés m-Dürer à produits non nuls.
   a) Cependant, avec (MD*), nous pouvons construire des m-Dürer à produits nuls. Pourquoi l'ensemble de tous les carrés issus de (MD*) n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
   b) Que pouvons-nous dire si les nombres dans (MD) et dans (MD*) sont toujours > 0?
   c) Considérons tous les carrés issus de (MD*) qui sont formés exclusivement de nombres réels > 0. Montrez que l'ensemble de ces carrés forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 7.
   d) La structure (MD*) renferme huit variables et elle s'obtient comme combinaison linéaire de huit carrés linéairement dépendants. Montrez-le.
   e) Expliquez pourquoi le carré de Sayles peut s'obtenir de deux façons différentes.
41) Démontrez le théorème 15.13.1.
42) Démontrez le théorème 15.13.2.
43) **Nous vous proposons ici un projet de recherche**. Vous voulez construire tous les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et de produit $P = k^5$ où $k = a^2\, b\, c$, sa décomposition en facteurs premiers.
   a) En vous servant du programme dans MAPLE pour construire des m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5, trouvez tous les presque normaux lorsque k = 60, k = 84 et k = 90. Dans chaque cas, vous trouvez 1280. Savez-vous pourquoi? Suggestion : décomposez en facteurs 60, 84 et 90.
   b) Combien en auriez-vous avec k = 350? Avec k = 7007? Vérifiez vos réponses.
   c) Combien en auriez-vous avec k = 150? Avec k = 675? Vérifiez vos réponses.
   d) Aurons-nous toujours des groupes de 16 primitifs qui renferment les mêmes 25 entiers dans chaque groupe?
44) Pouvez-vous prévoir combien nous aurons de m-hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 dont le produit est 456533^6 ? Notre prédiction s'est avérée exacte!!!
45) Soit M, un m-hyper-magique d'ordre n.
   a) Montrez que r M est toujours un m-hyper-magique avec r > 0, un nombre réel.
   b) Montrez qu'il en est de même si M est un m-ultra-magique.
46) Pouvons-nous construire des carrés multiplicatifs de tous les ordres $n \geq 3$ à l'aide de seulement trois variables? À l'aide de seulement deux variables. (Voir annexe 30).
47) Soit M, un carré multiplicatif presque normal et associatif dont l'ordre est impair ≥ 5. Montrez que la case centrale est $P^{\frac{1}{n}}$. En déduire que $P = k^n$ avec $k \geq 1$, un entier.