13. Les carrés magiques de Christian Boyer

13.1 Introduction

Christian Boyer est né en France, près de Bordeaux, en mai 1958. Il est ingénieur, informaticien et mathématicien. Parmi ses centres d'intérêts, mentionnons les nombres premiers, les algorithmes de factorisation et les mathématiques récréatives, en particulier, les carrés, cubes et hyper-cubes magiques.

Ses carrés et cubes magiques sont extraordinaires et d'une grande beauté!!! Nous allons les voir sous peu mais avant, parlons de multi-magie, de carrés multiplicatifs et de carrés additifs-multiplicatifs.

Soit A, un carré magique d'ordre n. Si, dans chaque case, nous élevons au carré le nombre qui s'y trouve, alors nous obtenons un nouveau carré. Celui-ci, en général, n'est pas magique mais quand il l'est, nous disons alors que A est un **carré bi-magique**.

Si nous mettons au carré chaque nombre d'un carré magique A et que le carré qui en résulte est encore magique et si en plus, nous mettons au cube chaque nombre de A et que le carré qui en résulte est toujours magique, alors nous disons que A est un **carré tri-magique.**

Si nous mettons tous les nombres d'un carré magique A, respectivement à la puissance 2, 3, 4, …, k et que tous les carrés qui en résultent sont magiques, alors nous disons que A est un **carré k-multi-magique**.

Un carré bi-magique est donc un carré 2-multi-magique et un carré tri-magique est un carré 3-multi-magique.

Voyons maintenant un autre type de carrés : les **carrés multiplicatifs**. La multiplication remplace ici l'addition.

Si, dans un carré, le produit de tous les nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale donne toujours le même nombre P, alors nous disons que notre carré est un **carré multiplicatif.** Le nombre P est appelé **produit magique.**

Si, en plus d'être magique, notre carré est multiplicatif, alors nous disons que c'est un **carré additif-multiplicatif** ou encore, **un carré magique multiplicatif.**

13.2 Les carrés k-multi-magiques

Voici un objet mathématique exceptionnel; c'est un carré bi-magique d'ordre 11 formé de 121 nombres premiers consécutifs allant de 5 à 701, en excluant 523, 641 et 677. Il est donc formé de 121 nombres premiers choisis parmi les 126 premiers nombres premiers. Les deux sommes magiques sont : S_1 **= 3 497** et S_2 **= 1 578 251**.

C'est le premier carré bi-magique formé exclusivement de nombres premiers tous différents. Il a été construit par Christian Boyer en novembre 2006. Le voici :

137	131	317	47	5	457	541	359	467	353	683
401	277	239	647	23	421	229	181	7	419	653
463	269	701	59	157	257	563	557	179	191	101
593	311	379	503	197	83	53	521	149	619	89
307	617	397	241	571	661	109	107	79	127	281
373	443	29	587	383	61	19	409	631	389	173
73	11	607	433	613	577	263	97	227	313	283
43	599	151	199	509	487	223	163	293	691	139
673	37	113	271	193	31	601	431	331	337	479
67	233	103	439	499	251	547	659	491	41	167
367	569	461	71	347	211	349	13	643	17	449

Christian Boyer, novembre 2006

En mai 2001, Christian Boyer et André Viricel ont construit un **carré tétra-magique (4-multi-magique)** d'ordre 512; Il renferme 262 144 entiers consécutifs allant de 0 à 262 143. Pour le rendre normal, il suffit d'ajouter 1 à chaque nombre du carré et le nouveau carré sera toujours tétra-magique (voir le théorème 13.2). Dans le carré normal, nous trouverons aux extrémités de la première rangée, le plus petit et le plus grand entier du carré et sur la dernière rangée, à l'extrémité droite, nous trouverons l'ordre 512 du carré.

0	139938	18244	…	243899	122205	262143
140551	1957	156227	…	105916	260186	121592
18959	157869	3403	…	258740	104274	243184
…	…	…	…	…	…	…
242703	104109	258891	…	3252	158034	19440
121607	260517	105539	…	156604	1626	140536
261632	122018	244036	…	18107	140125	511

Christian Boyer et André Viricel, mai 2001

Les quatre sommes magiques de ce carré tétra-magique sont :

S_1 = 67 108 608

S_2 = 11 728 056 920 832

S_3 = 2 305 825 417 061 203 968

S_4 = 483 565 716 171 561 366 524 160

S_5 = 105 636 341 097 042 573 844 228 866 048

En plus d'être tétra-magique, ce carré a la propriété suivante : la somme des puissances 5 des entiers de chacune des 512 rangées est toujours égale à S_5 !!! Si le carré était normal, les sommes magiques seraient évidemment différentes des précédentes.

Puis, un mois plus tard, en juin 2001, Christian Boyer et André Viricel trouvent un carré magique incroyable!!! **Le premier carré penta-magique (5-multi-magique) connu**; il est d'ordre 1024.

Ses sommes magiques sont :

S_1 = 536 870 400

S_2 = 375 299 432 076 800

S_3 = 295 147 342 229 667 840 000

S_4 = 247 587 417 561 640 996 243 120 640

S_5 = 216 345 083 469 423 421 673 932 062 720 000

0	733632	419712	…	628863	314943	1048575
866545	395569	745329	…	303246	653006	182030
685538	82978	791138	…	257437	965597	363037
…	…	…	…	…	…	…
685597	83933	790941	…	257634	964642	362978
867086	395982	744590	…	303985	652593	181489
1023	733759	418943	…	629632	314816	1047552

Christian Boyer et André Viricel, juin 2001

Ce carré penta-magique renferme 1 048 576 entiers consécutifs allant de 0 à 1 048 575. Pour le rendre normal, il suffit d'ajouter 1 à chaque nombre du carré et le nouveau carré sera toujours penta-magique (voir le théorème 13.2). Dans le carré normal, nous trouverons aux extrémités de la première rangée, le plus petit et le plus grand entier du carré et sur la dernière rangée, à l'extrémité gauche, nous trouverons l'ordre 1024 du carré. Évidemment, pour le carré normal, les cinq sommes seront différentes de celles citées plus haut.

Le 31 janvier 2003, Christian Boyer nous présente un nouveau carré tétra-magique d'ordre 256.

2003	63 073	58 550	…	7094	2401	63 699
64 256	2738	6245	…	59 237	62 898	1024
65 140	4038	7441	…	57 873	61 638	372
…	…	…	…	…	…	…
65 163	3897	7662	…	58 094	61 497	395
64 511	2637	6298	…	59 290	62 797	1279
1836	63 134	58 441	…	6985	2462	63 532

Christian Boyer, janvier 2003

Ce tétra-magique renferme 65 536 entiers consécutifs allant de 0 à 65 535. Le nombre 2003, année de sa construction, se trouve à l'extrémité gauche de la première rangée. Les sommes magiques sont :

S_1 = 8 388 480 S_2 = 366 495 487 360 S_3 = 18 013 848 757 862 400

S_4 = 944 437 268 143 413 954 688

Voici Les principaux objectifs poursuivis en multi-magie :

a) Construire un carré k-multi-magique pour tout entier k > 1.
b) Construire un carré k-multi-magique dont l'ordre sera le plus petit.
c) Être le premier à construire un carré k-multi-magique pour un k donné.
d) Être le premier à construire un carré k-multi-magique du plus petit ordre.
e) Plus généralement, obtenir le maximum de propriétés dans le minimum de place et avec les plus petits entiers possibles.

Par exemple, nous connaissons un carré tri-magique d'ordre 128 (Gaston Tarry, France, 1905), d'ordre 64 (Général Eutrope Cazalas, France, 1933), d'ordre 32 (William H. Benson, États-Unis, 1976) et **d'ordre 12** (Walter Trump, Allemagne, 2002). Ce dernier, d'ordre 12, est du plus petit ordre!!!

Christian Boyer et André Viricel ont été les premiers à trouver un carré penta-magique en juin 2001; il est d'ordre 1024. Mais en juin 2003, Li Wen , de Chine, trouve un penta-magique d'ordre 729, formé de 531 441 entiers consécutifs allant de 0 à 531 440. Puis, Li Wen trouve un penta-magique presque normal (formé d'entiers positifs tous différents) d'ordre 36. C'est l'ordre le plus petit **connu** pour un penta-magique presque normal. (Voir Partie 3).

Mais pouvons-nous atteindre l'objectif a)? La réponse est oui puisque dans «The American Mathematical Monthly» d'octobre 2007, Harm Derksen, Christian Eggermont et Arno van den Essen ont démontré le résultat suivant :

Théorème 13.1 :

Il existe un carré k-multi-magique pour tout ordre p^k où p est un nombre premier $\geq 2k-1$.

Seulement, les ordres sont très élevés. Avec le théorème précédent, le plus petit tri-magique est d'ordre $5^3 = 125$ alors que celui de Walter Trump est d'ordre 12. Toujours avec le théorème précédent, le plus petit 10-multi-magique est d'ordre $19^{10} = 6\,131\,066\,257\,801$. L'objectif b) est donc vraiment justifié!!!

Les recherches en multi-magie consistent donc à trouver des carrés k-multi-magiques pour des nouvelles valeurs de k et à trouver le plus petit ordre pour un k-multi-magique. Puis à trouver des carrés k-multi-magiques spéciaux. Par exemple, trouver un carré tri-magique formé de nombres premiers distincts, ou de nombres triangulaires, …, trouver un carré penta-magique presque normal d'ordre < 36.

Théorème 13.2 :

Soit A, un carré k-multi-magique d'ordre n. Si nous ajoutons le nombre u à chaque nombre du carré A, alors nous obtenons un nouveau carré B qui est lui aussi k-multi-magique.

Preuve :

Elle est basée sur le développement du binôme de Newton :

$$(a+u)^k = C_0^k a^k + C_1^k a^{k-1} u + C_2^k a^{k-2} u^2 + \dots C_r^k a^{k-r} u^r + \dots + C_{k-1}^k a u^{k-1} + C_k^k u^k$$

où $C_r^k = \dfrac{k!}{r!(k-r)!}$.

Prenons dans A, une rangée ou une colonne ou une grande diagonale et notons ses nombres a_i puis prenons dans B, la même rangée ou colonne ou grande diagonale et notons ses nombres b_i. Nous pouvons alors écrire, quelle que soit la rangée, colonne ou grande diagonale :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = S_1 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = S_2 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = S_3 \; ;\dots; \; \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-1} = S_{k-1} \; ; \; \sum_{i=1}^{n} a_i^k = S_k$$

Puisque A est k-multi-magique, alors pour $j = 1, 2, 3, \dots, k$, S_j prend la même valeur quelle que soit la rangée, colonne ou grande diagonale. Dans le carré B, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^k = \sum_{i=1}^{n} (a_i + u)^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k + C_1^k u \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-1} + C_2^k u^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-2} + \dots + C_{k-1}^k u^{k-1} \sum_{i=1}^{n} a_i + n u^k =$$
$$S_k + C_1^k u \, S_{k-1} + C_2^k u^2 S_{k-2} + \dots + C_{k-1}^k u^{k-1} S_1 + n u^k$$

ce qui montre que dans le carré B, la somme des puissances k est la même pour toutes les rangées, colonnes et grandes diagonales. Le carré B est donc k-multi-magique puisque l'égalité précédente est vraie pour tous les exposants entiers du membre de gauche allant de 1 *à* k.

Notons ici que $S_0 = n$.

Terminons en disant qu'à ce jour, nous connaissons des carrés k-multi-magiques où k est un entier tel que $1 \le k \le 14$.

13.3 Les carrés multiplicatifs

Nous allons utiliser, dans tout carré multiplicatif, que des entiers positifs (> 0).

Voici un carré multiplicatif d'ordre 5 ayant le plus petit produit magique possible.

12	35	1	40	18
36	2	24	7	25
14	45	15	4	8
5	16	42	30	3
10	6	20	9	28

Christian Boyer, 2005

Ce carré a pour produit magique le nombre **P = 302 400**; son plus petit entier est 1, son plus grand est 45.

Puis les meilleurs carrés magiques additifs-multiplicatifs connus d'ordre 8 et 9 (meilleurs signifie plus petit S, plus petit P et plus petit nombre maximum) :

222	66	225	63	5	7	68	104
1	35	52	136	198	74	189	75
132	296	21	175	9	15	78	34
45	3	102	26	148	264	25	147
51	117	10	6	200	84	259	33
168	100	231	37	39	153	2	30
91	17	8	20	42	150	99	333
50	126	111	297	119	13	40	4

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 8x8, ***P = 51 407 948 592 000****,* ***S = 760****, le plus petit entier est 1 et le plus grand est 333.*

75	38	207	102	11	20	91	56
5	44	49	104	57	50	153	138
133	200	17	92	45	66	21	26
99	30	39	14	175	152	23	68
78	63	22	15	184	119	100	19
136	161	76	25	42	117	10	33
28	13	40	77	34	69	114	225
46	51	150	171	52	7	88	35

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 8x8, ***P = 67 463 283 888 000***, ***S = 600***, *le plus petit entier est 5 et le plus grand est 225.*

38	150	248	10	7	65	44	153	69
4	63	39	22	102	184	190	25	155
110	17	115	76	225	93	2	42	104
186	152	50	13	5	70	207	33	68
117	3	28	138	88	34	31	95	250
23	55	170	279	57	100	78	8	14
200	62	114	35	130	1	51	92	99
21	52	9	136	46	66	125	310	19
85	230	11	75	124	171	56	26	6

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 9x9, ***P = 2 987 659 715 040 000, S = 784,*** *le plus petit entier est 1 et le plus grand est 310.*

84	145	133	80	11	6	104	243	34
40	99	2	78	135	119	224	29	114
208	27	102	112	261	38	30	55	7
95	196	87	1	60	88	153	52	108
9	20	44	85	182	81	19	168	232
17	156	216	171	56	116	5	70	33
203	57	140	66	8	10	54	68	234
22	4	90	189	51	130	174	152	28
162	136	26	58	76	252	77	3	50

Christian Boyer, 2005

Carré magique additif-multiplicatif 9x9, ***P = 7 349 391 483 033 600, S = 840****,*
le plus petit entier est 1 et le plus grand est 261.

En août 2016, **Sébastien Miquel** a trouvé un carré magique additif-multiplicatif d'ordre 7. Celui-ci est presque normal et son ordre est le plus petit connu. Voici ce magnifique carré :

126	66	50	90	48	1	84
20	70	16	54	189	110	6
100	2	22	98	36	72	135
96	60	81	4	10	49	165
3	63	30	176	120	45	28
99	180	14	25	7	108	32
21	24	252	18	55	80	15

Sa somme magique est S = 465 et son produit magique est P = 150 885 504 000. Le plus petit entier du carré est 1 et le plus grand, 252. Pour trouver ce carré, il aura fallu environ six cents heures de calcul avec un ordinateur muni d'un processeur i7-920!!!

#$%&'( ) " !

Si nous élevons à la puissance k tous les nombres d'un carré multiplicatif de produit P, alors nous obtenons un nouveau carré multiplicatif de produit P^k et ce, quel que soit l'entier k > 1.

Nous pourrions dire que les carrés multiplicatifs sont **infiniment multi-magiques**!!!

Il est évident que si nous multiplions par k tous les nombres d'un carré multiplicatif d'ordre n et de produit P, alors nous obtenons un nouveau carré multiplicatif de produit $k^n P$. Terminons avec ces quelques résultats :

Théorème 13.4 :

Un carré multiplicatif normal d'ordre $n \geq 2$ n'existe pas.

Preuve :

Soit λ, le produit des n^2 nombres d'un carré magique multiplicatif, alors $P = \sqrt[n]{\lambda}$. Si les n^2 nombres sont les entiers consécutifs de 1 à n^2, alors $P = \sqrt[n]{(n^2)!}$. Il est évident que P doit être un entier or $\sqrt[n]{(n^2)!}$ n'est jamais un entier lorsque n est un entier ≥ 2. Il en résulte qu'un **carré multiplicatif normal n'existe pas**. Montrons que $\sqrt[n]{(n^2)!}$ n'est jamais un entier lorsque $n \geq 2$.

Supposons que $\sqrt[n]{(n^2)!}$ soit un entier k. Alors $(n^2)! = k^n$ et cela implique que si p est un facteur premier de $(n^2)!$, alors dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$, l'exposant de p sera un multiple non nul de n. Or, le plus grand nombre premier dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$ n'apparaîtra qu'une seule fois!!! Voyons pourquoi mais rappelons d'abord le célèbre postulat de Bertrand démontré par Tchebychev :

Il existe au moins un nombre premier p qui vérifie $n < p \leq 2n$ quel que soit l'entier $n \geq 1$.

___ p ___________________ n^2 _____________________ $2p$ ___________________________

Parmi les entiers $1, 2, 3, \ldots, n^2 - 1, n^2$, choisissons p, le plus grand nombre premier tel que $p < n^2$. Nous pouvons alors observer que:

a) $2p$ et n^2 ne sont jamais des nombres premiers dès que $n \geq 2$.
b) $2p \neq n^2$ dès que $n \geq 2$; en effet, nous avons $p \geq 3$.
c) $2p < n^2$ contredit le postulat de Bertrand.
d) $2p > n^2$ est obligatoire.
e) aucun entier inférieur à p possède p comme facteur premier.
f) n ne peut pas contenir un facteur premier $p_1 \geq p$ puisque nous aurions $n^2 > 2p$.
g) tout nombre composé m tel que $p < m < n^2$ ne peut pas contenir un facteur premier $p_1 \geq p$. Si c'était le cas, nous aurions $m = a\,p_1$ avec l'entier $a \geq 2$. Or, il est évident que m serait supérieur ou égal à $2p$, ce qui contredit que $m < n^2$.
h) le nombre p fait partie des nombres premiers que nous trouvons dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$. Le prochain facteur p n'apparaîtra que dans $2p$ qui est tel que $2p > n^2$.

Nous pouvons donc conclure si $n \geq 2$:

1) que tous les facteurs premiers dans $(n^2)!$, excepté p, sont tous strictement inférieurs à p.
2) que dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$, p ne s'y trouve qu'une seule fois.
3) que dans la décomposition en facteurs premiers de $(n^2)!$, p est le plus grand.
4) que $\sqrt[n]{(n^2)!}$ n'est jamais un entier.
5) **qu'aucun carré multiplicatif normal ne peut exister.**

Par exemple, aucun carré multiplicatif normal d'ordre $n = 9$ ne peut exister. En effet, dans la décomposition en facteurs premiers de $81!$, nous trouvons que 79, le plus grand nombre premier inférieur à 81, est unique. Tous les autres facteurs premiers sont strictement inférieurs à 79.

Théorème 13.5 :

Il existe un carré multiplicatif pour tous les ordres $n \geq 1$.

Preuve :

Le cas $n = 1$ ne présente aucun intérêt. Le cas $n = 2$ nous donne :

$$\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} ou \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, soit un carré trivial (celui de gauche) de produit $P = k^2$, soit un carré qui contient trois zéros (celui de droite) de produit $P = 0$ où m occupe un des quatre coins.

Pour le cas $n \geq 3$, nous allons nous servir des carrés magiques. Pour construire un carré multiplicatif d'ordre n, nous allons d'abord trouver un carré magique presque normal d'ordre n, lequel existe toujours. Dans chaque case du carré magique, nous allons remplacer l'entier x qui s'y trouve par l'entier 2^x. Ainsi nous obtiendrons un nouveau carré qui sera évidemment multiplicatif formé de n^2 nombres positifs différents. Si la somme du carré magique est S, alors le produit du carré multiplicatif sera 2^S.

Nous aurions pu choisir une toute autre base et ainsi remplacer x par 3^x ou 4^x ou 5^x ou π^x, ...

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$S = 15$

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

$P = 2^{15} = 32\,768$

D'où le carré multiplicatif de produit $P = 32\,768$ suivant :

16	512	4
8	32	128
256	2	64

Enfin, un dernier résultat :

Théorème 13.6 :

Un carré multiplicatif d'ordre 3 et de produit $P \neq 0$ a obligatoirement comme centre le nombre $\sqrt[3]{P}$.

Dans l'exemple précédent, nous voyons bien que $\sqrt[3]{32\,768} = 32$ ou encore que $32^3 = 32\,768$.

La preuve est laissée en exercice (problème 3 de 13.7). Si $P = 0$, alors il se peut que le nombre central soit non nul. Donnez un exemple.

13.4 Carrés magiques de puissances

Ce sont des carrés magiques formés de n^2 nombres, tous affectés d'un même exposant. Le premier carré magique connu d'ordre 4, formé de carrés, a été construit par Euler en 1770.

68^2	29^2	41^2	37^2
17^2	31^2	79^2	32^2
59^2	28^2	23^2	61^2
11^2	77^2	8^2	49^2

Euler 1770; $S_2 = 8515$

Les premiers carrés magiques connus d'ordre 5 formés de carrés, ont été construits par Christian Boyer en 2004 :

1^2	2^2	31^2	3^2	20^2
22^2	16^2	13^2	5^2	21^2
11^2	23^2	10^2	24^2	7^2
12^2	15^2	9^2	27^2	14^2
25^2	19^2	8^2	6^2	17^2

Christian Boyer, 2004, $S_2 = 1375$

Les premiers carrés magiques d'ordre 6 de carrés, ont été construits par Christian Boyer en juin 2005 :

2^2	1^2	36^2	5^2	0^2	35^2
6^2	33^2	20^2	29^2	4^2	13^2
25^2	7^2	14^2	24^2	31^2	12^2
21^2	32^2	11^2	15^2	22^2	16^2
34^2	18^2	23^2	10^2	19^2	9^2
17^2	8^2	3^2	28^2	27^2	26^2

Christian Boyer, 2005, $S_2 = 2551$

Les premiers carrés magiques d'ordre 7 formés de carrés ont été construits par Christian Boyer en juin 2005; celui-ci contient tous les entiers de 0 à 48, tous affectés de l'exposant 2.

25^2	45^2	15^2	14^2	44^2	5^2	20^2
16^2	10^2	22^2	6^2	46^2	26^2	42^2
48^2	9^2	18^2	41^2	27^2	13^2	12^2
34^2	37^2	31^2	33^2	0^2	29^2	4^2
19^2	7^2	35^2	30^2	1^2	36^2	40^2
21^2	32^2	2^2	39^2	23^2	43^2	8^2
17^2	28^2	47^2	3^2	11^2	24^2	38^2

Christian Boyer, 2005, $S_2 = 5432$

De plus, si nous enlevons tous les exposants 2, alors nous pourrons constater que les sept rangées sont magiques, donc bi-magiques.

Quant aux carrés magiques d'ordre 3, formés de carrés distincts, le problème reste ouvert.

Voici maintenant le premier carré semi-magique connu d'ordre 5, formé de cubes positifs distincts, publié en 2005 par Christian Boyer. Le carré magique d'ordre 5 formé de cubes positifs distincts existe-t-il? En juillet 2017, nous n'en savions toujours rien.

9^3	47^3	54^3	64^3	96^3
23^3	97^3	6^3	48^3	72^3
10^3	14^3	67^3	101^3	42^3
110^3	36^3	21^3	3^3	28^3
40^3	70^3	98^3	18^3	38^3

Christian Boyer, 2005, $S_3 = 1\ 408\ 896$

Puis en terminant, voici le plus petit carré magique connu de puissances 4, il est d'ordre 15. Il a été construit par Christian Boyer et François Labelle en septembre 2011. Le plus grand nombre du carré est 3683^4 et le plus petit est 2^4. Enfin, sa somme magique est $232\ 666\ 823\ 866\ 022$. Voici ce carré presque normal; **n'oubliez pas, tous ses entiers doivent être mis à la puissance 4.**

1424	89	2581	374	272	2337	3198	850	782	1230	612	1068	2583	445	861
3509	1936	121	216	675	1974	1786	486	297	2444	621	605	658	1452	940
109	545	1308	46	22	777	1110	16	36	2109	50	3161	2886	1744	2331
544	34	986	1353	984	1691	2314	3075	2829	890	2214	408	1869	170	623
2	10	24	2553	1221	763	1090	888	1998	2071	2775	58	2834	32	2289
732	1769	305	3175	2286	1716	1386	2921	1016	462	1397	976	660	61	1254
792	1914	330	1525	1098	3302	2667	1403	488	889	671	1056	1270	66	2413
1968	123	3567	979	712	646	884	2225	2047	340	1602	1476	714	615	238
490	1176	1568	378	483	1190	833	231	525	2499	168	98	2261	2842	3094
783	432	27	752	2350	2541	2299	1692	1034	3146	2162	135	847	324	1210
595	1428	1904	1764	2254	210	147	1078	2450	441	784	119	399	3451	546
2726	1504	94	968	3025	567	513	2178	1331	702	2783	470	189	1128	270
105	252	336	2142	2737	980	686	1309	2975	2058	952	21	1862	609	2548
111	555	1332	2507	1199	14	20	872	1962	38	2725	3219	52	1776	42
1524	3683	635	1650	1188	1586	1281	1518	528	427	726	2032	610	127	1159

13.5 Le plus petit tri-magique, un petit penta-magique et deux bi-magiques

Nous présentons ici le carré tri-magique normal du plus petit ordre. Il a été construit par **Walter Trump** en juin 2002 et il est **d'ordre 12**. Christian Boyer a déjà démontré qu'il n'existe pas de tri-magiques normaux d'ordres inférieurs à 10 et de son côté, Walter Trump a démontré qu'il n'existe pas de tri-magiques normaux d'ordres 10 et 11. Le tri-magique normal qui suit est donc du plus petit ordre et c'est en ce sens que nous pouvons dire qu'il est le meilleur tri-magique normal. Sa somme magique est 870.

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

Premier tri-magique normal connu d'ordre 12 de Walter Trump, juin 2002 :

Les sommes magiques sont : $S_1 = 870 \quad S_2 = 83\,810 \quad S_3 = 9\,082\,800$

Ce carré a une propriété intéressante : si $u\ et\ v$ sont dans les cases $(i\ ;\ j)\ et\ (i\ ; 13-j)$, alors $u+v=145=\dfrac{2S}{n}=\dfrac{2\times 870}{12}$. Par exemple, nous avons : $1+144=127+18=68+77=145$.

Dans un carré magique associatif, la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours $\dfrac{2S}{n}$. Ici, la somme des nombres situés dans deux cases symétriques par rapport à la verticale, qui sépare le carré en deux parties égales, est toujours $\frac{2S}{n}$.

Voici maintenant un carré penta-magique presque normal du plus petit ordre connu. Il a été construit par **Li Wen** le 31 août 2008 et il est d'ordre 36. Ses sommes magiques sont :

$$S_1 = 242\,172 \quad S_2 = 2\,404\,039\,764 \quad S_3 = 26\,598\,135\,571\,308$$
$$S_4 = 309\,190\,059\,075\,899\,988 \quad S_5 = 3\,697\,835\,586\,559\,070\,794\,572$$

Vous trouverez ce penta-magique d'ordre 36 dans la Partie 3.

Li Wen a aussi trouvé en juin 2003, un penta-magique d'ordre 729, formé des entiers consécutifs allant de 0 à 531 440.

En février 2009, Li Wen trouve un super penta-magique d'ordre 396 qui est aussi un tri-magique pandiagonal!!!

Puis, **voici le plus petit carré bi-magique d'ordre 6**; il est presque normal :

72	18	17	16	49	47
13	52	36	5	50	63
38	35	7	66	15	58
20	53	34	39	69	4
55	1	57	56	26	24
21	60	68	37	10	23

Carré bi-magique de Lee Morgenstern

$$S_1 = 219 \quad S_2 = 10663$$

Lee Morgenstern a construit ce carré bi-magique d'ordre 6 en mai 2006. C'est le plus petit pour les raisons suivantes :

1) Aucun carré bi-magique presque normal d'ordre 6 ne peut contenir comme plus grand nombre, un nombre inférieur à 72.
2) Aucun carré bi-magique presque normal d'ordre 6 ne peut avoir une somme magique S_1 inférieure à 219.

3) Aucun carré bi-magique presque normal d'ordre 6 ne peut avoir comme seconde somme magique, S_2, un nombre inférieur à 10 663.

C'est pourquoi nous disons que ce carré est **le meilleur carré bi-magique presque normal d'ordre 6.** Il est très intéressant de voir que $f(219)=16\,058$ tandis que $f(10\,663)=351$. L'élévation au carré des 36 nombres du carré bi-magique ci-haut, entraîne une perte de 15 707 figures magiques!!!

En terminant, voici le **carré bi-magique normal d'ordre 8**, de Georges Pfeffermann :

56	34	8	57	18	47	9	31
33	20	54	48	7	29	59	10
26	43	13	23	64	38	4	49
19	5	35	30	53	12	46	60
15	25	63	2	41	24	50	40
6	55	17	11	36	58	32	45
61	16	42	52	27	1	39	22
44	62	28	37	14	51	21	3

Carré bi-magique de Georges Pfeffermann

Le premier carré bi-magique normal fut trouvé par Georges Pfeffermann en 1890; il est d'ordre 8. De plus, nous savons aujourd'hui qu'il n'existe pas de carrés bi-magiques normaux d'ordre 3, 4, 5, 6 et 7. L'ordre le plus petit est donc $n=8$.

Vous trouverez tous ces carrés multi-magiques sur le site de Christian Boyer : **multimagie.com**.

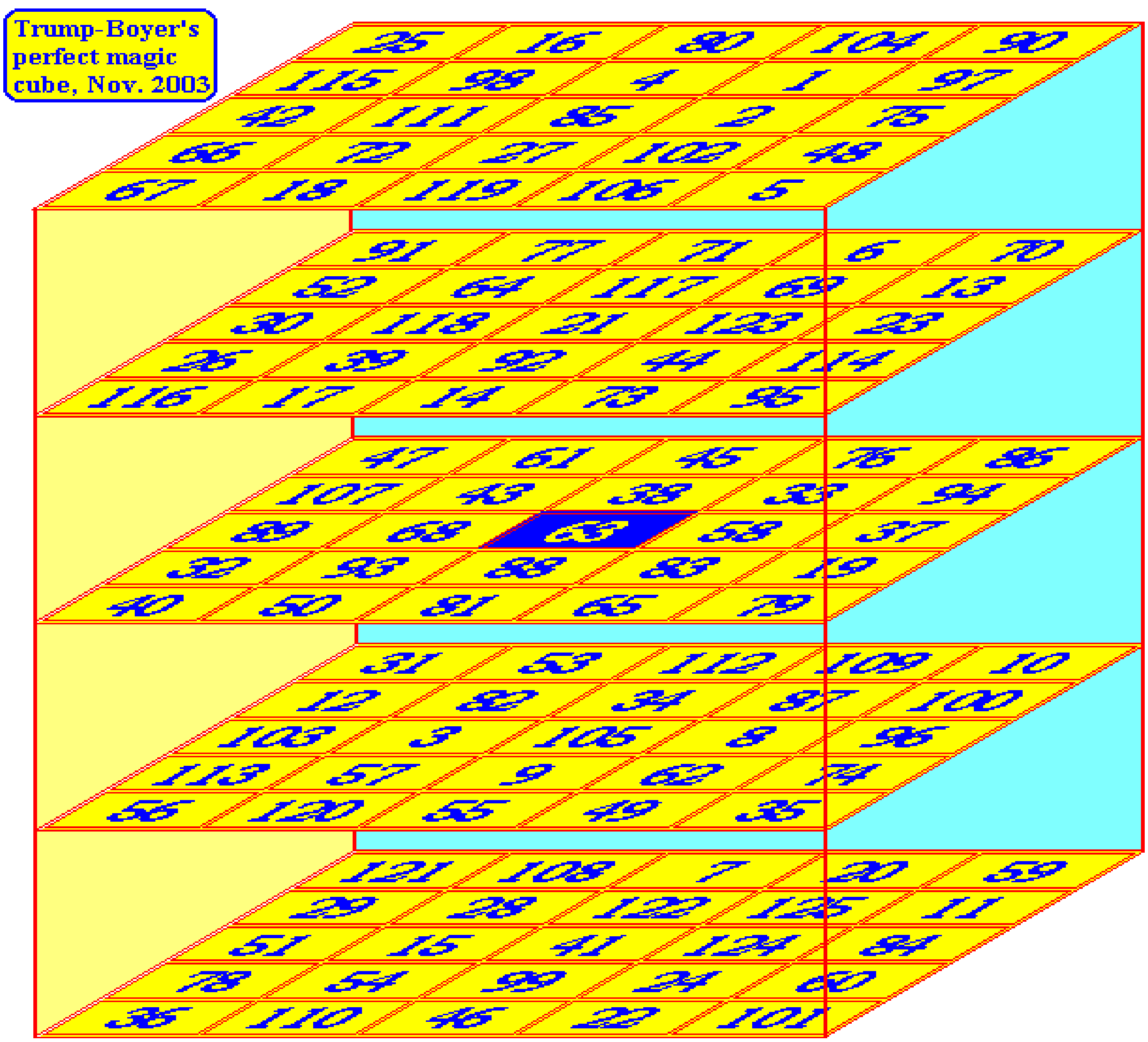
13.6 Les cubes magiques parfaits

Christian Boyer et Walter Trump ont construit en novembre 2003 **le plus petit cube magique parfait normal d'ordre 5**. Il a été démontré que les cubes magiques parfaits normaux d'ordres 2, 3 et 4 n'existent pas. Pour qu'un cube soit magique parfait normal, il faut :

a) qu'il renferme tous les entiers consécutifs de 1 à n^3.
b) chaque fois que n petits cubes (cases) ont leurs centres alignés, la somme des entiers qui s'y trouvent est toujours égale au même nombre $S=\dfrac{n(n^3+1)}{2}$.

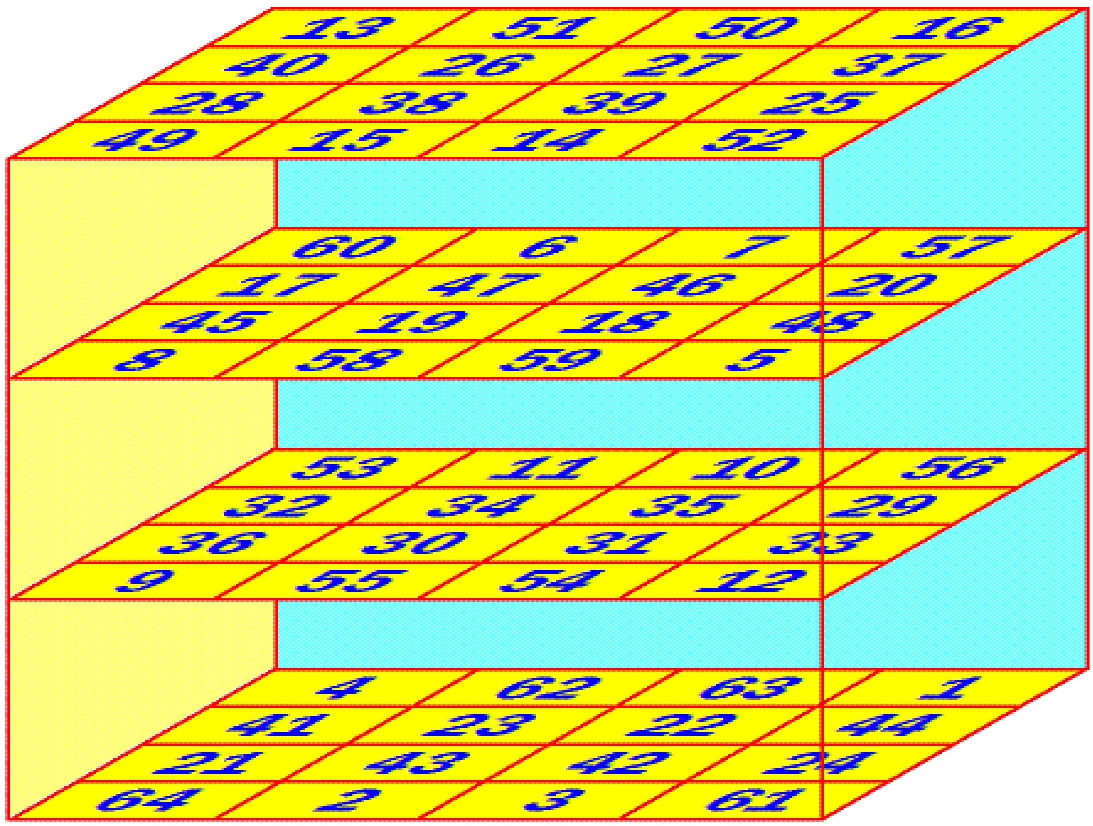
Cela signifie que nous trouvons dans le cube $3n+6$ carrés magiques de somme S soit $3n$ carrés magiques planaires parallèles aux faces du cube et six carrés magiques planaires obliques. De façon plus précise, le nombre NA d'alignements dans un cube magique parfait d'ordre n, est donné par : $NA = 3n^2 + 6n + 4$. **Si tous ces alignements sont magiques, alors le cube est dit magique parfait.**

Voici donc ce cube magique parfait normal d'ordre 5; sa somme magique est $S = 315$ et $f(315) = 1\,142\,341$. Cela signifie que nous pouvons choisir cinq cases de somme 315 de $1\,142\,341$ façons différentes. C'est la fréquence de ce cube magique parfait normal ou encore, c'est le nombre de figures magiques (groupes de cinq cases de somme magique $S = 315$) que possède ce cube.



Un des plus beaux objets du monde mathématique!!!

On s'intéresse aux cubes magiques déjà depuis plusieurs siècles. En 1640, Pierre Simon de Fermat (1601-1665) construisit un cube magique presque parfait d'ordre 4.



Ici, 64 alignements sur les 76 possibles, sont magiques. C'est déjà extraordinaire pour l'époque!!!

Nous allons terminer en présentant les premiers cubes magiques parfaits normaux publiés depuis 1866.

Comme pour les carrés magiques, un cube magique d'ordre n est **presque normal** s'il renferme n^3 entiers ≥ 1 tous différents deux à deux.

Dans le tableau qui suit, seul celui de Fermat, publié en 1640, n’est pas parfait.

Ordre	Inventeur	Pays	Date
3	Cube magique parfait presque normal : impossible		
4	Presque parfait, par Pierre de Fermat	France	1640
	Parfait presque normal : impossible, prouvé par Richard Schroeppel	États-Unis	1972
5	Walter Trump - Christian Boyer	Allemagne - France	Nov. 2003
6	Walter Trump	Allemagne	Sept. 2003
7*	Reverend Andrew H. Frost	Angleterre (1)	1866
8	Gustavus Frankenstein	États-Unis (2)	1875
9*	Charles Planck	Angleterre	1905
10	Li Wen	Chine	1988 (3)
11*	Frederick A. P. Barnard	États-Unis	1888
12	William H. Benson	États-Unis	1981
...	...	...	...
8192**	Christian Boyer	France	2003

(*) Ces cubes ont des caractéristiques supplémentaires de pandiagonalité (diagonales brisées et/ou triagonales brisées également magiques).
(**) Ce cube a des caractéristiques supplémentaires de multi-magie (reste magique parfait quand ses nombres sont élevés au carré ou au cube ou à la puissance 4).
(1) Et aussi Inde: Frost était anglais, mais était à cette époque missionnaire à Nasik, en Inde.
(2) Et aussi Allemagne: Frankenstein est né en Allemagne, et avait 2 ans quand sa famille a émigré à Cincinnati, États-Unis.
(3) Li Wen nous a envoyé ce cube en déc. 2003. Il ne l'avait jamais publié avant. Li indique qu'il l'avait construit dès 1988.

13.7 Problèmes

1) Construisez un carré multiplicatif d'ordre 4 et trouvez son produit magique.
2) Démontrez qu'un cube magique parfait presque normal d'ordre 3 n'existe pas.
3) Démontrez le théorème 13.6 de 13.3.
4) Démontrez qu'un cube magique parfait presque normal d'ordre 4 n'existe pas.
5) Vérifiez que le cube magique presque parfait de Fermat possède bien 64 alignements magiques sur ses 76 possibles.
6) Quelle est la somme magique d'un cube magique parfait normal d'ordre 12?
7) Quel est le nombre de figures magiques dans un cube magique normal d'ordre 3?
8) Quel est le nombre de figures magiques dans un cube magique normal d'ordre 4?
9) Trouvez les sommes magiques d'un carré 6-multi-magique normal d'ordre 4096. Ce carré renferme tous les entiers consécutifs de 1 à 16 777 216.
10) Prenez chaque carré k-multi-magique de la section 13.2 (excepté le premier), rendez-le normal et trouvez ses sommes magiques.
11) Si nous vous donnons un carré multiplicatif, alors pouvez-vous le transformer en carré magique? Se peut-il que le carré magique obtenu soit normal?
12) Pouvez-vous construire un carré magique presque normal A formé exclusivement de nombres irrationnels tel que $A \neq k\,B$ où B est un carré magique et k un nombre réel?
13) Démontrez qu'un carré magique d'ordre 3 ne peut pas être bi-magique s'il est presque normal.
14) Soit le carré magique d'ordre 3 suivant :

	A	
B		C

    a) Montrez que $A \neq B$ et $A \neq C$ implique que le carré n'est pas bi-magique.
    b) En déduire qu'un carré bi-magique d'ordre 3 presque normal n'existe pas.

15) En vous servant uniquement du carré magique M, pouvez-vous construire une infinité de carrés multiplicatifs?
16) Si dans un carré multiplicatif d'ordre $n \geq 3$, les n^2 nombres sont différents deux à deux, alors le produit magique est non nul. Montrez-le.