Annexe 18 : Carrés magiques d'ordre 3 avec 9 nombres premiers consécutifs

Reprenons ce carré premier parfait d'ordre 3 du chapitre 10, obtenu d'Harry L. Nelson en 1988.

1 480 028 201	1 480 028 129	1 480 028 183
1 480 028 153	1 480 028 171	1 480 028 189
1 480 028 159	1 480 028 213	1 480 028 141

Harry L. Nelson, 1988

Harry L. Nelson a été le premier à trouver un carré premier parfait d'ordre 3. Il est formé de neuf nombres premiers de dix chiffres. De ces neuf nombres premiers consécutifs, 1 480 028 129 est le plus petit. Dans la liste des nombres premiers, il occupe le rang 73 780 392.

Comme pour l'annexe 8, nous avons construit un programme dans MAPLE qui regarde toutes les suites de neuf nombres premiers consécutifs et qui nous donne celles qui conduisent à des carrés magiques ainsi que ces carrés. Ce programme se nomme **«Premiers parfaits-3».**

Nelson, en 1988, a-t-il trouvé le carré premier parfait de la plus petite somme magique?

Celui-ci a été obtenu avec la suite 73 780 392.

Nous allons tenter ici de montrer :

a) Que Nelson a trouvé celui de la plus petite somme.
b) Que nous venons de trouver celui de la plus petite somme.

Une suite de neuf nombres premiers consécutifs est une **suite favorable** si la somme des neuf nombres de la suite est divisible par 9. En effet, pour former un carré magique d'ordre 3 avec ceux-ci, il faut que cette somme T soit d'abord divisible par 3. Puisque le centre u est donné par S/3, alors T = 3S et S = 3u d'où T = 9u. C'est une condition nécessaire pour que le carré magique existe.

Une suite favorable qui nous permet de construire un carré magique est une **suite magique.**

Grâce à Nelson, nous savons que la suite de rang 73 780 392 est une suite magique.

La grande question :

Pouvons-nous trouver une suite magique de rang < 73 780 392 ?

Avant d'utiliser notre programme afin de répondre à cette grande question, voyons de plus près les suites favorables.

Le rapport $\frac{sf(k)}{k} = 0{,}1073634$ lorsque $k = 500\ 000\ 000$. Ce nombre est voisin de $\frac{1}{9}$. Nous pouvons affirmer qu'en moyenne, avec les $500\ 000\ 000$ premières suites, une suite sur neuf est favorable.

Voyons le tableau 1 suivant, dans lequel la première colonne à gauche indique le nombre de suites considérées à partir de la suite 1, celle qui commence par 2.

La deuxième colonne indique le nombre, noté $sf(k)$, de suites favorables parmi les suites allant de 1 à k.

La troisième colonne nous donne le rapport $\frac{sf(k)}{k}$.

Dans ce tableau, nous voyons que le rapport augmente toujours. Il se rapproche de $0{,}11111...$ mais très lentement. **C'est une observation intuitive et expérimentale!!!**

Avons-nous $\lim_{k\to\infty} \frac{sf(k)}{k} = \frac{1}{9} = 0{,}11111...$???

De toute façon, une suite favorable sur neuf suites semble être une bonne estimation du nombre de suites favorables parmi les k premières suites de neuf nombres premiers consécutifs!!! Par exemple, avec les 9 000 000 premières suites, nous devrions avoir environ 1 000 000 de suites favorables. Précisément, nous en trouvons 952 783.

De la suite1 à la suite k	$sf\,(\mathrm{k})$	$\frac{sf\,(k)}{k}$
1000	86	0,086
10 000	961	0,0961
100 000	10 163	0,10163
200 000	20 460	0,1023
300 000	30 919	0,10306
400 000	41 265	0,10316
500 000	51 764	0,103528
1 000 000	104 589	0,104589
2 000 000	209 874	0,104937
10 000 000	1 059 198	0,1059198
15 000 000	1 592 145	0,106143
20 000 000	2 124 940	0,106247
25 000 000	2 658 027	0,106321
30 000 000	3 191 563	0,106385
35 000 000	3 724 907	0,1064259
40 000 000	4 260 062	0,106502
100 000 000	10 687 787	0,10687787
250 000 000	26 795 962	0,1071838
400 000 000	42 920 272	0,10730068
500 000 000	53 681 709	0,1073634
800 000 000	85 986 889	0,1074836
1 100 000 000	118 312 300	0,1075566
1 400 000 000	150 649 556	0,1076068
1 700 000 000	182 985 395	0,10763847
2 000 000 000	215 336 046	0,10766802

Tableau 1

Avec notre programme **«Premiers parfaits-3»,** nous allons maintenant partir à la recherche d'une suite magique dont le rang sera le plus petit possible d'où la plus petite somme magique.

Regardons les 75 000 000 premières suites. Nous constatons qu'il n'y a qu'**une seule suite magique** soit la suite de rang **73 780 392** qui nous donne huit carrés premiers parfaits donc un seul primitif. De cette suite, nous retrouvons le meilleur carré premier parfait d'ordre 3, le carré suivant trouvé par Nelson en 1988. Sa somme magique est donc la plus petite possible.

(1)

1 480 028 183	1 480 028 189	1 480 028 141
1 480 028 129	1 480 028 171	1 480 028 213
1 480 028 201	1 480 028 153	1 480 028 159

Carré premier parfait associé à la suite 73 780 392

Ensuite, nous regardons les suites au-delà de la suite 75 000 000. Nous avons rencontré sept suites magiques qui sont de rangs : 91 233 987, 243 732 111, 261 821 730, 268 755 906, 281 692 209, 286 252 067, 434 056 891. Nous avons donc ici les rangs des huit premières suites magiques : 73 780 392, 91 233 987, 243 732 111, 261 821 730, 268 755 906, 281 692 209, 286 252 067, 434 056 891.

(2)

1 850 590 111	1 850 590 117	1 850 590 069
1 850 590 057	1 850 590 099	1 850 590 141
1 850 590 129	1 850 590 081	1 850 590 087

Carré premier parfait associé à la suite 91 233 987

(3)

5 196 186 001	5 196 186 007	5 196 185 959
5 196 185 947	5 196 185 989	5 196 186 031
5 196 186 019	5 196 185 971	5 196 185 977

Carré premier parfait associé à la suite 243 732 111

(4)

5 601 567 241	5 601 567 247	5 601 567 199
5 601 567 187	5 601 567 229	5 601 567 271
5 601 567 259	5 601 567 211	5 601 567 217

Carré premier parfait associé à la suite 261 821 730

(5)

5 757 284 551	5 757 284 557	5 757 284 509
5 757 284 497	5 757 284 539	5 757 284 581
5 757 284 569	5 757 284 521	5 757 284 527

Carré premier parfait associé à la suite 268 755 906

(6)

6 048 371 083	6 048 371 089	6 048 371 041
6 048 371 029	6 048 371 071	6 048 371 113
6 048 371 101	6 048 371 053	6 048 371 059

Carré premier parfait associé à la suite 281 692 209

(7)

6 151 077 323	6 151 077 329	6 151 077 281
6 151 077 269	6 151 077 311	6 151 077 353
6 151 077 341	6 151 077 293	6 151 077 299

Carré premier parfait associé à la suite 286 252 067

	9 517 122 313	9 517 122 319	9 517 122 271
(8)	9 517 122 259	9 517 122 301	9 517 122 343
	9 517 122 331	9 517 122 283	9 517 122 289

Carré premier parfait associé à la suite 434 056 891

Ce sont les huit meilleurs carrés premiers parfaits d'ordre 3, aux équivalents près.

Enfin, le tableau 2 suivant nous indique le rang des suites magiques, le nombre de carrés premiers parfaits primitifs obtenus et la somme magique des carrés correspondants. Ce tableau nous montre les huit plus petites suites magiques d'où les huit carrés premiers parfaits ayant les huit plus petites sommes.

Rang de la suite magique	Nombre de carrés premiers parfaits primitifs	Somme magique
73 780 392	1	4 440 084 513
91 233 987	1	5 551 770 297
243 732 111	1	15 588 557 967
261 821 730	1	16 804 701 687
268 755 906	1	17 271 853 617
281 692 209	1	18 145 113 213
286 252 067	1	18 453 231 933
434 056 891	1	28 551 366 903

Tableau 2

C'est donc Harry L. Nelson qui a trouvé, en 1988, le premier carré premier parfait d'ordre 3. À l'aide d'un ordinateur CRAY, il a trouvé vingt deux suites magiques!!!

Puis, en janvier 2018, Claude Bégin et Claude St-Hilaire trouvent, avec «Premiers parfaits-3», huit carrés premiers parfaits d'ordre 3 soient le premier carré de Nelson et ses sept équivalents.

Toujours en janvier 2018, ils trouvent sept autres suites magiques qui conduisent aux carrés (2), (3), (4), (5), (6), (7) et (8) ci-haut.

Après les huit premières suites magiques qui conduisent aux carrés (1) à (8), nous vous présentons les carrés (21) et (22) obtenus avec les suites 21 et 22 trouvées par Harry L. Nelson. Ils correspondent aux suites de neuf nombres premiers consécutifs de rangs 1 042 374 622 et 2 090 654 856.

Nous avons trouvé ces deux derniers carrés sur le site de Harvey Heinz. Les voici :

(21)

23 813 359 751	23 813 359 673	23 813 359 667
23 813 359 613	23 813 359 697	23 813 359 781
23 813 359 727	23 813 359 721	23 813 359 643

Carré premier parfait associé à la suite 1 042 374 622 soit la suite 21 de Nelson

(22)

49 285 771 793	49 285 771 739	49 285 771 721
49 285 771 679	49 285 771 751	49 285 771 823
49 285 771 781	49 285 771 763	49 285 771 709

Carré premier parfait associé à la suite 2 090 654 856 soit la suite 22 de Nelson

Nous savons que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont des carrés arithmétiques et peuvent donc être obtenus avec le fichier «Ordre 3» (voir problèmes 21 et 22 de 4.3.8 et problème 20 de 11.4). Le tableau suivant nous indique comment construire les dix carrés ci-haut.

Pour les construire, il suffit, dans «Ordre 3» dans MATHEMATICA ou EXCEL, d'attribuer aux variables a, r et t, les valeurs du tableau suivant. Il en est de même avec le programme CM-arith-2 k + 1 dans MAPLE qui vous permet de construire tous les carrés magiques d'ordre 3.

Rang de la suite	a	r	t
(1) 73 780 392	1 480 028 129	12	30
(2) 91 233 987	1 850 590 057	12	30
(3) 243 732 111	5 196 185 947	12	30
(4) 261 821 730	5 601 567 187	12	30
(5) 268 755 906	5 757 284 497	12	30
(6) 281 692 209	6 048 371 029	12	30
(7) 286 252 067	6 151 077 269	12	30
(8) 434 056 891	9 517 122 259	12	30
(21) 1 042 374 622	23 813 359 613	54	30
(22) 2 090 654 856	49 285 771 679	42	30

Tableau 3

Poursuivons en mentionnant qu'il existe au moins deux carrés premiers parfaits d'ordre 3 formés de neuf nombres premiers consécutifs formant une suite arithmétique!!! Ils ont été trouvés en mars 1998 par Manfred Toplic d'Autriche.

Plus précisément, Manfred Toplic a trouvé une suite arithmétique de raison 210 formée de dix nombres premiers consécutifs. **Tout simplement extraordinaire!!!** Voici ces deux carrés trouvés sur le site de Harvey Heinz : Prime magic squares :

p + 1470	p	p + 1050
p + 420	p + 840	p + 1260
p + 630	p + 1680	p + 210

p + 1680	p + 210	p + 1260
p + 630	p + 1050	p + 1470
p + 840	p + 1890	p + 420

Celui de gauche contient les neuf premiers nombres premiers de cette suite tandis que celui de droite contient les neuf derniers. Le nombre premier p est formé de 93 chiffres!!!

p = 100 99697 24697 14247 63778 66555 87969 84032 95093 24689 19004 18036 03417 75890 43417 03348 88215 90672 29719.

Nous vous suggérons fortement de consulter l'excellent site : Prime Magic Squares d'Harvey Heinz.

Réflexion sur le nombre premier p ci-haut :

Sommes-nous certains à 100% que le nombre p ci-haut, formé de 93 chiffres, est bien un nombre premier?

La certitude est-elle absolue?

Théorème 1:

Si un carré magique d'ordre 3 contient **neuf nombres premiers consécutifs,** alors sa somme magique vérifie $S \geq 4\ 440\ 084\ 513$.

De plus, aux équivalents près, il existe un seul carré de somme $4\ 440\ 084\ 513$ soit le carré (1).

La case centrale d'un tel carré doit contenir un nombre premier $\geq 1\ 480\ 028\ 171$.

Rappelons ces trois théorèmes pour les ordres de 4 à 8 vus au chapitre 10 :

Théorème 10.3

Si un carré magique d'ordre 4 renferme **seize nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 258$.

De plus, nous savons qu'il existe, aux équivalents près, quatre carrés de somme $S = 258$.

Théorème 10.5 :

Si un carré magique d'ordre 5 renferme **vingt-cinq nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 313$.

De plus, nous connaissons des carrés premiers parfaits de somme $S = 313$.

Théorème 10. 6 :

La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 6 vérifie $S \geq 484$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 6 de somme $S = 484$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 7 vérifie $S \geq 797$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 7 de somme $S = 797$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 8 vérifie $S \geq 2016$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 8 de somme $S = 2016$.

Le tableau 3 de la page 8 nous indique que les carrés (2), (3), (4), (5), (6), (7) et (8) proviennent tous du carré (1) et ce, en ajoutant un même entier pair 2m dans toutes les cases de celui-ci.

Appelons S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 la suite des 9 nombres premiers consécutifs des carrés (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) et (8) respectivement. Rappelons que si M est un carré magique, alors M + k est le carré magique obtenu de M en ajoutant le nombre k dans toutes ses cases. D'où le tableau 4 suivant :

$$S_2 = S_1 + 370\ 561\ 928$$
$$S_3 = S_1 + 3\ 716\ 157\ 818$$
$$S_4 = S_1 + 4\ 121\ 539\ 058$$
$$S_5 = S_1 + 4\ 277\ 256\ 368$$
$$S_6 = S_1 + 4\ 568\ 342\ 900$$
$$S_7 = S_1 + 4\ 671\ 049\ 140$$
$$S_8 = S_1 + 8\ 037\ 094\ 130$$

Tableau 4

Nous venons de trouver huit suites extraordinaires de 9 nombres premiers consécutifs. Les sept dernières étant obtenues de la première en ajoutant un même entier positif (qui doit être pair) à tous les nombres de celle-ci. **Ce qui est extraordinaire!!!**

D'abord, que les 9 nouveaux nombres soient premiers est déjà tout un exploit!!! De plus, qu'ils soient consécutifs est encore un autre exploit!!! Voyons la remarque suivante.

Remarque :

Nous avons pris la suite des 9 nombres premiers consécutifs allant de 23 à 59 puis nous avons ajouté l'entier 2 m à chacun des 9 nombres premiers. Nous voulons obtenir ainsi une nouvelle suite de 9 nombres premiers et pour y arriver, il a fallu que m = 808 290 donc 2 m = 1 616 580. Pour toutes les valeurs de m inférieures à 808 290, nous avons obtenu au mieux une suite qui contenait 8 nombres premiers.

De plus, cette nouvelle suite obtenue en ajoutant 1 616 580 est formée de 9 nombres premiers consécutifs!!!

Nous avons fait varier m de 1 à 600 000 000 et nous avons trouvé seulement 4 nouvelles suites de 9 nombres premiers (avec m = 808 290, m = 3 158 295, m = 167 194 125 et m = 558 226 305). Dans les quatre cas, les 9 nombres premiers sont consécutifs et les quatre suites ne sont pas favorables.

Si les 9 nombres premiers de la suite de départ sont consécutifs, alors en ajoutant 2 m à tous, nous avons de bonnes chances de trouver, s'ils sont premiers, 9 nombres premiers consécutifs.

Ensuite, nous avons pris une suite de 16 nombres premiers consécutifs allant de 23 à 89 puis nous avons ajouté l'entier 2 m à chacun des 16 nombres premiers. Nous voulons obtenir ainsi une nouvelle suite de 16 nombres premiers. Nous avons fait varier m de 1 à 2 600 000 000 mais nous n'avons obtenu aucune nouvelle suite de 16 nombres premiers. Cependant, avec m =

808 290, nous obtenons une suite qui contient 11 nombres premiers, avec m = 3 158 295, nous trouvons une suite qui contient 12 nombres premiers, avec m = 167 194 125, nous trouvons une suite qui contient 11 nombres premiers et avec m = 558 226 305, nous en trouvons 10.

Nous avons fait de même avec la **suite magique** allant de 31 à 101. Nous avons fait varier m de 1 à 6 000 000 000 mais nous n'avons obtenu aucune nouvelle suite de 16 nombres premiers.

Puis, je reçois de Christian Boyer 27 suites magiques formées de 9 nombres premiers consécutifs donc 27 carrés premiers parfaits. Vous les trouverez dans le tableau 5 un peu plus bas. Ces suites proviennent du site http://oeis.org/A256891 et ont été trouvées par Arkadiusz Wesolowski.

Rappelons que tous les carrés magiques d'ordre 3 proviennent de la structure générale suivante, laquelle n'est pas unique :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} a+2r+t & a+2t & a+r \\ a & a+r+t & a+2r+2t \\ a+r+2t & a+2r & a+t \end{array}$$

Dans la première colonne à gauche dans le tableau 5 suivant, nous trouvons le numéro de la suite et son rang.

Dans les trois colonnes suivantes, nous trouvons les valeurs de $a, r\, et\, t$ qui vont permettre la construction du carré magique à partir de (*). Le nombre a est le plus petit des 9 nombres premiers consécutifs de la suite.

Dans la dernière colonne, nous trouvons le nombre d. Par exemple, prenons la suite de la rangée (4). Nous avons d = 4 121 539 058. Pour obtenir la suite (4), il suffit d'ajouter à tous les nombres de la suite (1), l'entier d.

Quant à la suite (1), c'est une suite de 9 nombres premiers consécutifs qui commence par :

a = 1 480 028 129

Notez que le rang d'une suite de n^2 nombres premiers consécutifs est le rang de son plus petit nombre premier.

Donc, pour construire le carré magique (4), il suffit de prendre le carré magique (1) formé de 9 nombres premiers consécutifs et d'ajouter le nombre d = 4 121 539 058 à chaque nombre du carré (1).

Soient A et B, deux carrés premiers parfaits. Nous dirons que A et B sont des **carrés premiers parfaits cousins** si et seulement si A – B est trivial.

Il est clair que si A – B est trivial, alors B – A est trivial donc si A et B sont premiers parfaits cousins, alors B et A le sont aussi.

Il existe des carrés premiers parfaits cousins d'ordre 3.

Le tableau 5 qui suit nous donne un premier groupe de 190 paires de carrés premiers parfaits cousins et un second groupe de 6 paires de carrés premiers parfaits cousins.

Les 20 rangées roses du tableau 5 nous donnent les $\binom{20}{2} = 190$ paires et les 4 rangées vertes nous donnent les $\binom{4}{2} = 6$ paires.

Nous avons ici le plus grand groupe de carrés premiers parfaits cousins connu soit celui formé des 20 carrés magiques correspondant aux 20 rangées du tableau 5 dans lesquelles nous trouvons r = 12 et t = 30.

La grande question :

Existe-t-il des carrés premiers parfaits cousins d'ordres $n \geq 4$?

Pour l'instant, nous n'en connaissons aucun, même avec des milliards d'essais!!!

Puis, je reçois de Christian Boyer l'article d'Harry L. Nelson dans la revue «J. Recreational Mathematics», Vol. 20(3), 1988 dans lequel il nous présente ses 22 suites magiques formées de 9 nombres premiers consécutifs d'où 22 carrés premiers parfaits. Dans le tableau 5, Nelson a d'abord trouvé les suites de (1) à (10) puis les suites (12), (14), (15), (16), (18), (19), (21), (22), (24) et (26). Il a ensuite trouvé les suites (11) et (17).

Les 27 suites du tableau 5 ont été trouvées par Arkadiusz Wesolowski. Ce dernier a retrouvé les 22 suites de Nelson plus cinq autres.

Quant à nous, avec notre programme« Premier parfait-3», nous avons trouvé les huit premières suites du tableau 5. Nous savons que ce sont les huit premières. **Parmi les suites de rang 1 au rang 434 056 891, il n'y a que ces huit suites magiques. Elles sont donc d'une grande rareté!!!**

Rang de la suite	a	r	t	d
(1) 73 780 392 N	1 480 028 129	12	30	
(2) 91 233 987 N	1 850 590 057	12	30	370 561 928
(3) 243 732 111 N	5 196 185 947	12	30	3 716 157 818
(4) 261 821 730 N	5 601 567 187	12	30	4 121 539 058
(5) 268 755 906 N	5 757 284 497	12	30	4 277 256 368
(6) 281 692 209 N	6 048 371 029	12	30	4 568 342 900
(7) 286 252 067 N	6 151 077 269	12	30	4 671 049 140
(8) 434 056 891 N	9 517 122 259	12	30	8 037 094 130
(9) 842 207 042 N	19 052 235 847	12	30	17 572 207 718
(10) 902 344 164 N	20 477 868 319	12	30	18 997 840 190
(11) 1 042 374 622 N	23 813 359 613	54	30	
(12) 1 051 311 615 N	24 026 890 159	12	30	22 546 862 030
(13) 1 164 898 483	26 748 150 199	84	30	
(14) 1 238 594 408 N	28 519 991 387	12	30	27 039 963 258
(15) 1 499 228 081 N	34 821 326 119	12	30	33 341 297 990
(16) 1 892 656 056 N	44 420 969 909	12	30	42 940 941 780
(17) 2 090 654 856 N	49 285 771 679	42	30	
(18) 3 078 816 357 N	73 827 799 009	12	30	72 347 770 880
(19) 3 084 687 241 N	73 974 781 889	12	30	72 494 753 760
(20) 3 094 505 961	74 220 519 319	42	30	24 934 747 640
(21) 3 184 881 661 N	76 483 907 837	12	30	75 003 879 708
(22) 3 187 929 454 N	76 560 277 009	12	30	75 080 248 880
(23) 3 330 758 121	80 143 089 599	42	30	30 857 317 920
(24) 3 559 417 516 N	85 892 025 227	12	30	84 411 997 098
(25) 3 688 049 402	89 132 925 737	42	30	39 847 154 058
(26) 3 940 838 317 N	95 515 449 037	12	30	94 035 420 908
(27) 4 117 163 273	99 977 424 653	18	60	

Tableau 5

Dans le tableau 5, la lettre N signifie qu'Harry L. Nelson a été le premier à trouver cette suite.

Avec les 27 suites magiques de 9 nombres premiers consécutifs d'Arkadiusz Wesolowski, il fallait construire les 27 carrés magiques associés à ces suites mais comment? Pour cela, il suffit de poser a = le plus petit nombre de la suite puis en construisant le tableau arithmétique correspondant à chaque suite, nous trouvons le r > 0 et le t > 0 qui déterminent avec a, le carré magique. Rappelons qu'une suite de n^2 nombres, $n \geq 3$, est dite magique si nous pouvons construire un carré magique avec ses n^2 nombres.

Si le carré magique d'ordre 3 existe, alors son tableau arithmétique existe et réciproquement. Puisque les 27 carrés magiques de Wesolowski existent, alors nous pouvons construire un tableau arithmétique pour chacun, lequel nous permet de trouver r et t. Mais a n'est pas toujours le plus petit nombre de la suite. Alors, deux valeurs différentes de a peuvent-elles nous conduire à deux carrés magiques formés des mêmes nombres? La réponse est oui.

Voyons cela de plus près.

Théorème 2

Soit M, un carré magique d'ordre 3 qui contient m, son seul plus petit nombre. Alors, m ne peut pas être situé sur les grandes diagonales de M.

Preuve :

Nous devons montrer que dans la structure générale (*) des carrés magiques d'ordre 3, les nombres a + 2r + t, a + r + 2t, a + r + t, a + r et a + t ne peuvent pas être le plus petit nombre.

Si a + 2r + t est le plus petit, alors nous aurons :

a + 2r + t < a + 2r d'où t < 0 puis a + 2r + t < a + 2r + 2t d'où t > 0. Contradiction!!!

Si a + r + 2t est le plus petit, alors nous aurons :

a + r + 2t < a + 2r + 2t d'où r > 0 puis a + r + 2t < a + 2t d'où r < 0. Contradiction!!!

Si a + r est le plus petit, alors nous aurons :

a + r < a d'où r < 0 puis a + r < a + 2r d'où r > 0. Contradiction!!!

Si a + t est le plus petit, alors nous aurons :

a + t < a d'où t < 0 puis a + t < a + 2t d'où t > 0. Contradiction!!!

71	5	101
89	59	29
17	113	47

Carré magique A

101	29	47
5	59	113
71	89	17

Carré magique B

$a = 89$
$r = 101 - 89 = 12$
$t = 47 - 89 = -42$

$a = 5$
$r = 47 - 5 = 42$
$t = 17 - 5 = 12$

Nous trouvons le carré B à l'aide d'une rotation de 90°du carré A. Maintenant, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3 :

Soit M, un carré magique d'ordre 3 qui contient l'unique plus petit nombre m. Alors, nous pouvons toujours construire un équivalent de M qui sera déterminé par a = m et r et t par a + r et a + t.

Théorème 4 :

Soit M un carré premier presque normal d'ordre 3. Alors M ne peut pas contenir 3.

Preuve :

Rappelons qu'un tel carré ne peut pas contenir 2. En effet, la somme de la rangée qui contient 2 serait paire tandis que la somme de chacune des deux autres rangées serait impaire. Le carré ne peut donc pas être magique.

Supposons que ce carré contienne le nombre 3. Alors nous savons, selon le théorème 3, que nous pouvons trouver un carré magique équivalent donc formé des mêmes 9 nombres premiers avec a = 3, r et t des entiers > 0.

Nous savons que tous les entiers sont de la forme : 6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5 où k parcourt $\mathbb{Z}$. Or ici, puisque r et t sont positifs, alors k doit être un entier ≥ 0.

Si r = 6k, alors k > 0 car k = 0 implique r = 0 mais ici, r > 0. **De plus, k = 0 implique r = 0 implique une répétition.** Il s'ensuit que 3 + r = 3 + 6k n'est pas premier.

Si r = 6k + 1, alors 3 + r = 4 + 6k n'est pas premier.

Si r = 6k + 3, alors 3 + r = 6 + 6k n'est pas premier.

Si r = 6k + 5, alors 3 + r = 8 + 6k n'est pas premier. Nous savions que r et t doivent être pairs.

Donc r = 6k + 2 ou 6k + 4. Il en est de même avec t. Nous écrirons t = 6m + 2 ou 6m + 4.

Si r = 6k + 2 et t = 6m + 2, alors a + r + 2t = 9 + 6k + 12m n'est pas premier.

Si r = 6k + 2 et t = 6m + 4, alors a + r + t = 9 + 6k + 6m n'est pas premier.

Si r = 6k + 4 et t = 6m + 2, alors a + r + t = 9 + 6k + 6m n'est pas premier.

Si r = 6k + 4 et t = 6m + 4, alors a + r + 2t = 15 + 6k + 12m n'est pas premier.

Si r = 6m + 2 et t = 6k + 2, alors a + r + 2t = 9 + 6m + 12k n'est pas premier.

Si r = 6m + 2 et t = 6k + 4, alors a + r + t = 9 + 6m + 6k n'est pas premier.

Si r = 6m + 4 et t = 6k + 2, alors a + r + t = 9 + 6m + 6k n'est pas premier.

Si r = 6m + 4 et t = 6k + 4, alors a + r + 2t = 15 + 6m + 12k n'est pas premier.

Dans tous les cas, le carré magique formé de 9 nombres premiers distincts, va contenir au moins un nombre non premier. Contradiction!!! Le nombre 3 ne peut donc pas être dans le carré.

Rappelons que k et m sont des entiers ≥ 0.

Si notre carré d'ordre 3 est premier parfait, alors les conditions du théorème 4 sont respectées et le carré ne peut pas contenir 3.

De plus, ce résultat est conforme avec le fait que la suite de 9 nombres premiers consécutifs qui commence par 3 ne peut pas donner un carré magique puisque cette suite n'est pas favorable. En effet, 3 + 5 + … + 29 = 127 et 127 ne se divise pas par 9.

Enfin, nous pouvons démontrer le :

Théorème 5 :

Soit M, un carré premier presque normal d'ordre 3. Les nombres r et t qui définissent M sont obligatoirement des multiples de 6.

Preuve :

Nous savons que les 9 nombres de tout carré magique d'ordre 3 nous donne le tableau arithmétique suivant selon (*), page 12 :

$$\begin{array}{ccc} a & a+r & a+2r \\ a+t & a+t+r & a+t+2r \\ a+2t & a+2t+r & a+2t+2r \end{array}$$

Si ces 9 nombres sont premiers, alors r est un entier multiple de 6. En effet, r, comme tout entier, a la forme 6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4 ou 6k + 5. Nous allons montrer que r ne peut par être de la forme 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4 ou 6k + 5. Il est donc de la forme 6k.

	a	$a+r$	$a+2r$
$r=6k+1$	a	$a+1+6k$	$a+2+12k$
$r=6k+2$	$3m+1$	$3m+3+6k$	$a+4+12k$
	$3m+2$	$a+2+6k$	$3m+6+12k$
$r=6k+3$	a	$a+3+6k$	$a+6+12k$
$r=6k+4$	$3m+1$	$a+4+6k$	$3m+9+12k$
	$3m+2$	$3m+6+6k$	$a+10+12k$
$r=6k+5$	a	$a+5+6k$	$a+10+12k$

Dans chaque cas, nous devons avoir 3 nombres premiers or le nombre en rouge n'est pas premier!!! Il est soit pair (différent de 2) puisque le nombre premier a est impair ≥ 5, soit multiple de 3 différents de 3.

Tout entier peut aussi se mettre sous la forme 3m, 3m + 1 ou 3m + 2. Le nombre premier a ne peut donc pas être sous la forme 3m.

L'entier r est donc un multiple de 6. De la même façon, l'entier t est aussi un multiple de 6.

Question :

Dans un carré magique d'ordre 3, le plus petit nombre est-il toujours unique?

Regardez : $\begin{pmatrix} 19 & 3 & 11 \\ 3 & 11 & 19 \\ 11 & 19 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 11 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 11 \\ 8 & 11 & 5 \end{pmatrix}$

Un des trois 3 se trouve sur une grande diagonale!!! De même, un des trois 5.

Terminons en présentant 11 carrés premiers d'ordre 3. Ceux-ci renferment tous le nombre 5 comme unique plus petit nombre. Le 5 occupe toujours la même position. De plus, 9 carrés sont presque normaux (les carrés en noir).

$$\begin{pmatrix} 101 & 29 & 47 \\ 5 & 59 & 113 \\ 71 & 89 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 41 & 29 & 17 \\ 5 & 29 & 53 \\ 41 & 29 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 131 & 89 & 47 \\ 5 & 89 & 173 \\ 131 & 89 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 941 & 29 & 467 \\ 5 & 479 & 953 \\ 491 & 929 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1151 & 89 & 557 \\ 5 & 599 & 1193 \\ 641 & 1109 & 47 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2591 & 89 & 1277 \\ 5 & 1319 & 2633 \\ 1361 & 2549 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4091 & 89 & 2027 \\ 5 & 2069 & 4133 \\ 2111 & 4049 & 47 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5351 & 89 & 2657 \\ 5 & 2699 & 5393 \\ 2741 & 5309 & 47 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 55061 & 29 & 27527 \\ 5 & 27539 & 55073 \\ 27551 & 55049 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 34\,337 & 53 & 17159 \\ 5 & 17183 & 34\,361 \\ 17\,207 & 34\,313 & 29 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2\,596\,637 & 53 & 1298\,309 \\ 5 & 1298\,333 & 2\,596\,661 \\ 1298\,357 & 2\,596\,613 & 29 \end{pmatrix}$$

Problème 1 : Trouvez les coordonnées (a, r, t) de chacun des 11 carrés précédents.

Théorème 6 :

Soit donné un carré magique presque normal d'ordre 3. Formons une suite avec ses 9 nombres et ordonnons-les de gauche à droite, du plus petit au plus grand. Alors le cinquième occupera toujours la case centrale du carré magique.

Preuve :

Nous savons que notre carré magique sera défini avec a = le plus petit nombre, r et t étant des entiers ≥ 1 avec $r \neq t$.

Nous allons montrer que 4 nombres seront plus petits que $a+r+t$ et les 4 autres nombres, plus grands que $a+r+t$, le nombre central.

Cas 1 : $r<t$

De façon évidente, nous trouvons à gauche de $a+r+t$, les nombres $a, a+r, a+t$. Puisque $r<t$, le nombre $a+2r$ se trouve à gauche.

De façon évidente, nous trouvons à droite de $a+r+t$, les nombres $a+r+2t, a+2r+t$, $a+2r+2t$. Puisque $r<t$, le nombre $a+2t$ est à droite.

Cas 2 : $r>t$

De façon évidente, nous trouvons à gauche de $a+r+t$, les nombres $a, a+r, a+t$. Puisque $r>t$, le nombre $a+2r$ se trouve à droite.

De façon évidente, nous trouvons à droite de $a+r+t$, les nombres $a+r+2t, a+2r+t$, $a+2r+2t$. Puisque $r>t$, le nombre $a+2t$ est à gauche

Dans la suite ordonnée des 9 nombres du carré magique, seul le cinquième possède cette propriété. Donc, $a+r+t$, le centre du carré, est bien le cinquième nombre de la suite.

Nous venons de trouver quelques propriétés remarquables des carrés magiques d'ordre 3.

Revenons sur la définition de la page 12 :

Soient A et B, deux carrés magiques presque normaux d'ordre $n \geq 3$.

Nous dirons que A et B sont des **carrés cousins** si et seulement si A – B est trivial.

Si A et B sont premiers avec A – B trivial, alors nous dirons que A et B sont des **carrés premiers cousins**.
Si A et B sont premiers parfaits avec A – B trivial, alors nous dirons que A et B sont des **carrés premiers parfaits cousins**.

Voici A et B, deux carrés premiers cousins :

A =

10 107 062 243	10 107 062 267	10 107 062 129
10 107 062 099	10 107 062 213	10 107 062 327
10 107 062 297	10 107 062 159	10 107 062 183

a = 10 107 062 099 r = 30 t = 84

B =

26 748 150 343	26 748 150 367	26 748 150 229
26 748 150 199	26 748 150 313	26 748 150 427
26 748 150 397	26 748 150 259	26 748 150 283

a = 26 748 150 199 r = 30 t = 84

Le carré B n'est rien d'autre que le carré (13) du tableau 5 ci-haut. Nous avons donc :

B = A + 16 641 088 100

A est un nouveau carré premier presque normal d'ordre 3. Il n'est pas premier parfait car ses 9 nombres premiers ne sont pas consécutifs. En effet, voici les rangs de ceux-ci dans l'ordre du plus petit à gauche au plus grand à droite :

459 701 082 ; 459 701 084 ; 459 701 086 ; 459 701 088 ; 459 701 090 ; 459 701 091 ;
459 701 092 ; 459 701 094 ; 459 701 096

Dans MATHEMATICA, le rang d'un nombre premier se trouve ainsi :

PrimePi [10 107 062 099] = 459 701 082

Ici, nous avons ajouté un même entier à une suite magique de 9 nombres premiers non consécutifs pour obtenir une nouvelle suite magique de 9 nombres premiers consécutifs.

Très intéressant!!!

En fait, nous avons transformé un carré premier, le carré A, en un carré premier parfait, le carré B.

Nous pourrions dire que les nombres premiers de A sont **presque consécutifs**!!!

Voici C et D, deux autres carrés premiers cousins:

C =

10 951 836 559	10 951 836 583	10 951 836 481
10 951 836 463	10 951 836 541	10 951 836 619
10 951 836 601	10 951 836 499	10 951 836 523

a = 10 951 836 463 r = 18 t = 60

D =

99 977 424 749	99 977 424 773	99 977 424 671
99 977 424 653	99 977 424 731	99 977 424 809
99 977 424 791	99 977 424 689	99 977 424 713

a = 99 977 424 653 r = 18 t = 60

Le carré D n'est rien d'autre que le carré (27) du tableau 5 ci-haut. Nous avons donc :

D = C + 89 025 588 190

Encore une fois, nous avons transformé un carré premier, le carré C, en un carré premier parfait, le carré D. Les nombres premiers de C sont presque consécutifs tandis que ceux de D sont consécutifs.

Tentons une dernière fois de trouver deux carrés premiers cousins d'ordre 4. Pour ce faire, nous avons pris la suite magique suivante laquelle ne présente qu'un seul couple de nombres premiers jumeaux :

7 ; 11 ; 23 ; 37 ; 59 ; 71 ; 79 ; 83 ; 97 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 137 ; 151 ; 157

Puis nous additionnons l'entier pair 2m à chaque nombre premier et souhaitons ainsi trouver une autre suite magique formée de seize nombres premiers.

Nous avons fait varier m de 1 à 17 000 000 000 mais, aucun succès!!!

Nous n'avons trouvé aucune autre suite de seize nombres premiers.

Souhaitez-vous poursuivre la recherche?

Les questions suivantes deviennent légitimes :

Existe-t-il au moins deux carrés premiers cousins d'ordre 4? Voir page 39.

Existe-t-il au moins deux carrés premiers cousins d'ordre $n \geq 5$?

Nous commençons sérieusement à croire que pour les ordres $n \geq 5$, nous ne trouverons pas deux carrés premiers cousins!!!

Le problème est maintenant posé.

Et pourquoi pas une autre conjecture!!!

Nous terminerons avec la notion de p-générateur.

Un **p-générateur** est un carré premier presque normal G qui peut générer au moins un nouveau carré premier en ajoutant un même entier pair 2m (m entier) dans toutes ses cases.

Il est clair que l'entier qui sera ajouté dans toutes les cases de G doit être pair.

Tous les carrés ainsi générés seront presque normaux.

Nous dirons que G se génère lui-même.

Deux carrés premiers générés par G sont donc des carrés premiers cousins.

L**es 27 carrés du tableau 5 ci-haut sont notés (1) à (27).**

Nous allons essayer de trouver un plus petit p-générateur à partir du carré (1) du tableau 5 ci-haut.

Déjà, nous savons que le carré (1) est un p-générateur, En effet, il génère les 20 carrés premiers parfaits de Nelson, ceux définis par r = 12 et t = 30 dans le tableau 5.

Pouvons-nous trouver des carrés premiers en ajoutant l'entier 2m à tous les nombres de (1) de façon à obtenir ceux-ci entre les carrés (1) et (2)? La réponse est oui avec m, un entier positif.

Pour trouver le carré (1), consultez le tableau 5 et utilisez le fichier «Ordre 3» donc la structure générale des carrés magiques d'ordre 3.

Voici la commande avec MATHEMATICA :

Count[Table[PrimeQ[{1480028183 + 2m, 1480028189 + 2m, 1480028141 + 2m, 1480028129 + 2m,1480028171 + 2m, 1480028213 + 2m, 1480028201 + 2m, 1480028153 + 2m, 1480028159 + 2m}],{m,1,200 000 000}],{True,True,True,True,True,True,True,True,True}] (**)

Par exemple, ici, m varie de 1 à 200 000 000. Si la réponse obtenue est l'entier 3, cela signifie que parmi les 200 000 000 de carrés magiques obtenus, seulement 3 carrés sont premiers.

Comment les trouver avec la commande (**)? Essayez de localiser un intervalle dans lequel vous trouverez un seul carré puis diminuez cet intervalle jusqu'à ce que vous trouviez la valeur de m qui définit le carré.

Ou encore, construisez un programme plus efficace que (**).

Pour trouver les carrés premiers cousins entre (2) et (3), vous placerez les nombres du carré (2) dans (**).

Nous dirons qu'un groupe de carrés premiers est un groupe de carrés premiers cousins si toutes les paires de carrés pris dans ce groupe contiennent deux carrés cousins.

Si un carré premier G est un p-générateur d'ordre 3, alors nous dirons que c'est un gen-(u ; v). Cela signifie que G est défini avec r = u et t = v.

Nous allons trouver un gen-(12 ; 30) et un gen-(42 ; 30).

Le carré (1) est un gen-(12 ; 30) et le carré (17), un gen-(42 ; 30).

Dire que G génère le carré A, c'est dire que A est obtenu de G en ajoutant le même entier pair 2m dans toutes les cases de G donc A = G + 2m avec m entier.

Premier groupe de carrés premiers cousins :

Nous partons du carré (1) qui est un gen-(12 ; 30). Le tableau 5 nous montre comment (1) génère tous les carrés définis avec r = 12 et t = 30.

Par exemple, (14) = (1) + 27 039 963 258. Puis, toujours avec (1), nous avons enlevé 2m dans toutes les cases de (1) et nous avons ainsi obtenu 13 nouveaux carrés premiers, notés (-1), (-2), (-3), …, (-13). Enlever 2m revient à ajouter 2m avec m, un entier négatif. Dans le tableau 6 suivant, nous indiquons le carré (-k) et la valeur de m telle que :

(-k) = (1) – 2m.

Le carré (-14), en rouge dans le tableau 6, renferme 9 nombres premiers négatifs car MATHEMATICA considère les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. Un nombre premier dans $\mathbb{Z}$ est un entier qui n'admet que 4 diviseurs distincts soient $\pm 1 \ et \ \pm$ lui-même.

Il est très intéressant de comparer (-14) avec (-13). Nous verrons cela après le tableau 6.

Le carré (-14) n'est pas conforme avec la définition de p-générateur; cependant, nous pourrions le considérer, exceptionnellement, comme étant notre plus petit gen-(12 ; 30).

$(-1) \quad m = 5\ 848\ 436$

$(-2) \quad m = 121\ 433\ 340$

$(-3) \quad m = 166\ 243\ 385$

$(-4) \quad m = 276\ 686\ 031$

$(-5) \quad m = 312\ 305\ 615$

$(-6) \quad m = 329\ 466\ 605$

$(-7) \quad m = 379\ 210\ 271$

$(-8) \quad m = 492\ 960\ 936$

$(-9) \quad m = 510\ 229\ 566$

$(-10) \quad m = 546\ 044\ 835$

$(-11) \quad m = 581\ 527\ 260$

$(-12) \quad m = 669\ 564\ 671$

$(-13) \quad m = 740\ 014\ 050$

$(-14) \quad m = 740\ 014\ 121$

Tableau 6

Voyons les carrés (-13) et (-14) :

83	89	41
29	71	113
101	53	59

Carré (-13)

-59	-53	-101
-113	-71	-29
-41	-89	-83

Carré (-14)

Nous avons :

$$(-13) = (-14) + 142$$

Donc, jusqu'à maintenant, (1) a généré les 20 carrés premiers parfaits définis par r = 12 et t = 30 du tableau 5 (les 20 de Nelson) ainsi que 13 carrés premiers ce qui nous fait déjà un groupe de 33 carrés premiers cousins. Également, (1) génère 16 nouveaux carrés premiers comme suit :

3 carrés entre (1) et (2).
5 carrés entre (2) et (3).
Aucun entre (3) et (4).
Aucun entre (4) et (5).
1 carré entre (5) et (6).
Aucun entre (6) et (7).
7 carrés entre (7) et (8).

Ce qui veut dire que le carré (-13) est le plus petit gen-(12 ; 30) qui génère **au moins** 49 carrés premiers dont 20 carrés premiers parfaits (ceux de Nelson).

C'est le plus grand groupe de carrés premiers cousins que nous connaissons maintenant.

Voyons les 3 carrés premiers entre (1) et (2). Nous allons ajouter l'entier positif 2m à tous les nombres du carré (1).

Les entiers m = 30 024 505, m = 53 001 459 et m = 160 503 904 nous donnent les trois carrés premiers entre (1) et (2) puisque (2) = (1) + 370 561 928 d'où m = 185 280 964 détermine le carré (2).

Existe-t-il d'autres carrés premiers entre (1) et (2)?

Nous allons construire un deuxième groupe de carrés premiers cousins et tenter d'en trouver un entre (1) et (2).

Second groupe de carrés premiers cousins :

Nous partons cette fois du carré (17) qui est un gen-(42 ; 30). Celui-ci génère les carrés (20), (23) et (25) du tableau 5. Il génère d'autres carrés premiers dont un seul entre (1) et (2) qui est différent des trois autres générés par (-13). Nous y reviendrons un peu plus bas.

La réponse à la question ci-haut est donc oui.

Le plus petit gen-(42 ; 30) est le carré M suivant :

254 941	254 887	254 869
254 827	254 899	254 971
254 929	254 911	254 857

M = G_{30}^{42}

Pour l'obtenir, nous avons d'abord enlevé 49 000 000 000 à tous les nombres du carré (17). Puis, avec ce nouveau carré, nous avons enlevé l'entier pair 2m à tous ses entiers.

Avec m = 142 758 426, nous avons obtenu le carré premier M. C'est le plus petit généré par (17). Les deux autres ci-dessous, générés aussi par (17), sont encore plus petits mais ne sont pas presque normaux. Nous trouvons P, celui de gauche avec m = 142 885 846 et Q, celui de droite avec m = 142 885 905.

101	47	29
-13	59	131
89	71	17

P

-17	-71	-89
-131	-59	13
-29	-47	-101

Q

Nous présentons P et Q car nous les trouvons sympathiques!!! En valeur absolue, ces 18 nombres sont des nombres premiers, les mêmes dans P et Q. Nous pouvons les voir comme des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$. **Ce qui est remarquable est que Q soit l'inverse additif d'un équivalent de P (rotation de 180° de P donne -Q).**

Nous pouvons écrire :

P = Q + 118

M = P + 254 840

(17) = M + 49 285 516 852

Nous noterons le plus petit gen-(12 ; 30) par G_{30}^{12} et le plus petit gen-(42 ; 30) par G_{30}^{42}.

Nous pouvons donc écrire : $(-13) = G_{30}^{12} \ et \ M = G_{30}^{42}$.

Il est facile de voir que G_{30}^{42} + 2m est un carré premier situé entre les deux carrés premiers parfaits (1) et (2) si m = 877 977 555. Il est différent des 3 carrés premiers situés entre (1) et (2), ceux-ci étant générés par $(-13) = G_{30}^{12}$.

Voyons maintenant les résultats suivants :

Tous les carrés premiers d'ordre 3 générés par G_v^u sont définis avec $r = u \ et \ t = v$.

Preuve :

Nous savons que les carrés magiques d'ordre 3 sont des carrés arithmétiques. Tout carré magique d'ordre 3 s'écrit donc $aC + rA + tB$ où $\{C \ ; \ A \ ; \ B\}$ est une base ordonnée de l'espace vectoriel des carrés magiques d'ordre 3 avec C, un carré trivial formé de l'entier 1.
Donc :

$$G_v^u + k = aC + uA + vB + k = (a+k)C + uA + vB$$

Ce carré est bien défini avec le même $r = u \ et \ t = v$.

Tous les carrés premiers d'ordre 3 générés par G_v^u forment un groupe de carrés premiers cousins. De plus, chaque carré du groupe est un p-générateur qui génère tout le groupe.

Preuve :

Laissée au lecteur.

Soient deux groupes de carrés premiers cousins générés respectivement par G_v^u et $G_{v'}^{u'}$ avec $(u\ ;\ v) \neq (u';\ v')$. Alors les deux groupes sont disjoints.

Preuve :

Si un carré premier M est généré par G_v^u, alors $M = G_v^u + k = (a+k)C + u\,A + v\,B$. Si M est aussi généré par $G_{v'}^{u'}$, alors $M = G_{v'}^{u'} + k' = (a'+k')C + u'\,A + v'\,B$. Les coordonnées de M sont donc $(a+k\,; u\,; v)\,et\,(a'+k';\ u';\ v')$ ce qui est une contradiction puisque les coordonnées doivent être uniques. En effet, M est dans un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3. Les deux groupes sont donc disjoints.

Revoyons G_{30}^{12} et G_{30}^{42}.

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

1) C'est le plus petit p-générateur, lequel est défini avec $a = 29,\ r = 12\ et\ t = 30.$
2) Il génère **au moins** 116 carrés premiers dont les 20 carrés premiers parfaits de Nelson et les 10 carrés premiers parfaits de Claude Bégin trouvés en avril, mai et juin 2020. Voir le nouveau tableau 5 de l'annexe 18.1.
3) Il génère trois carrés premiers (compris dans les 116 ci-haut) entre les carrés premiers parfaits (1) et (2).

254 941	254 887	254 869
254 827	254 899	254 971
254 929	254 911	254 857

G_{30}^{42}

1) C'est le plus petit p-générateur, lequel est défini avec $a = 254\ 827,\ r = 42\ et\ t = 30.$
2) Il génère **au moins** 205 carrés premiers dont 6 carrés premiers parfaits soient les carrés (17), (20), (23), (25), (38) et (39) du nouveau tableau 5 de l'annexe 18.1.
3) Il génère un seul carré premier (compris dans les 205 ci-haut) entre les carrés premiers parfaits (1) et (2).

Exemple 1 : Comment G_{30}^{42} génère-t-il le carré (20)?

Il suffit de trouver $(20) - G_{30}^{42}$ et de s'assurer que ce carré est trivial de nombre $k.$ C'est le cas ici. De $(20) - G_{30}^{42} = k,$ nous trouvons $(20) = G_{30}^{42} + k$:

$$k = 74\ 220\ 519\ 433 - 254\ 941 = 74\ 220\ 264\ 492$$

Exemple 2 : Comment $G_{30}^{12}\ et\ G_{30}^{42}$ génèrent-ils les 4 carrés premiers situés entre (1) et (2)?

Nous avons vu plus haut que (1) génère 3 carrés premiers entre (1) et (2). Nous les appelons (a), (b) et (c). De plus, $(1) = G_{30}^{12} + 1\ 480\ 028\ 100.$ Nous avons donc :

$$(a) = G_{30}^{12} + 1\ 540\ 077\ 110$$
$$(b) = G_{30}^{12} + 1\ 586\ 031\ 018$$
$$(c) = G_{30}^{12} + 1\ 801\ 035\ 908$$

Le carré (d), situé entre (1) et (2), est un carré premier généré par G_{30}^{42}. C'est le seul entre (1) et (2). Nous avons : $(17) - 49\ 285\ 516\ 852 = G_{30}^{42}$ et $(d) = G_{30}^{42} + 2m$ avec $m = 877\ 977\ 555.$

$$(d) = G_{30}^{42} + 1\ 755\ 955\ 110$$

Résumons l'annexe 18.

Nous ne connaissions pas de carrés premiers parfaits d'ordre 3 avant la découverte d'Harry L. Nelson en 1988. Nelson en a trouvé 22 qui renferment 9 nombres premiers consécutifs de 10 à 11 chiffres. Le plus petit est de rang 73 780 392.

En 2018, Claude Bégin et Claude St-Hilaire trouvent le premier carré premier parfait d'ordre 3 avec le programme «Premiers parfaits-3». En regardant toutes les suites de 9 nombres premiers consécutifs, une par une, nous trouvons que la suite de rang 73 780 392 est la toute première qui nous donne un carré premier parfait. C'est le premier carré trouvé par Nelson. Nous savons qu'il n'y en a pas d'autres avant celui-ci. De façon indépendante de Nelson, nous avons trouvé les huit premiers carrés premiers parfaits d'ordre 3.

Nous avons ensuite réalisé que nos huit carrés premiers parfaits sont tous définis avec $r = 12\ et\ t = 30$. Après avoir reçu de Christian Boyer les 22 carrés premiers parfaits de Nelson, j'ai pu constater que ses huit premiers carrés sont les mêmes que les nôtres et que 20 d'entre eux sont définis avec $r = 12\ et\ t = 30$.

Et là, une grande découverte!!!

Les carrés premiers parfaits cousins et les carrés premiers cousins. C'est extraordinaire de voir que si on ajoute un même entier pair à tous les nombres d'une suite de 9 nombres premiers, nous trouvions encore 9 nombres premiers!!!

Cela se produit déjà 20 fois avec les 20 carrés premiers parfaits de Nelson. Chaque carré est obtenu du plus petit en ajoutant le même entier pair dans toutes les cases de celui-ci.

Ce plus petit carré qui en génère 20 est un p-générateur noté G_{30}^{12} car les 20 carrés sont tous définis avec $r = 12\ et\ t = 30$.

Nous savons maintenant que G_{30}^{12} génère au moins 116 carrés premiers dont 30 premiers parfaits et que G_{30}^{42} génère au moins 205 carrés premiers dont 6 premiers parfaits soient les carrés (17), (20), (23), (25), (38) et (39) du tableau 5.

$G_{30}^{12}\ et\ G_{30}^{42}$ génèrent 4 carrés premiers entre les carrés premiers parfaits (1) et (2) du tableau 5.

Les 27 premiers carrés premiers parfaits du tableau 5 ont été trouvés par Arkadiusz Wesolowski; ils sont sur le site http://oeis.org/A256891. Nous y retrouvons les 22 carrés de Nelson.

Deux grandes questions : existe-t-il des carrés premiers cousins pour les ordres $n \geq 4$? Pour l'ordre 3, G_v^u peut-il générer une infinité de carrés premiers cousins?

Jusqu'à maintenant, nos recherches ont été infructueuses. Des milliards d'essais n'ont rien donné pour l'ordre 4.

Nous terminerons avec G_{60}^{18}. Pour ce faire, nous partirons du carré (27) du tableau 5. Ce carré est défini avec a = 99 977 424 653, r = 18 et t = 60.

En ajoutant l'entier pair 2m (où m est entier) à tous les entiers du carré (27), nous obtenons huit carrés premiers en faisant varier m de 1 à 1 500 000 000. Ces huit carrés sont bien entendu des carrés magiques presque normaux. Ceux-ci sont obtenus avec :

$$\begin{aligned}
m &= 322\ 174\ 515 \\
m &= 632\ 470\ 410 \\
m &= 797\ 672\ 029 \\
m &= 995\ 289\ 405 \\
m &= 999\ 951\ 615 \\
m &= 1\ 085\ 875\ 299 \\
m &= 1\ 177\ 914\ 309 \\
m &= 1\ 426\ 929\ 229
\end{aligned}$$

Pour trouver le plus petit p-générateur de la forme gen-(18 ; 60), nous avons d'abord enlevé 99 000 000 000 à tous les entiers du carré (27). Puis, avec le carré ainsi obtenu, nous avons enlevé l'entier pair 2m et nous avons trouvé 21 carrés premiers y compris G_{60}^{18}.

Le plus petit, G_{60}^{18}, est déterminé par m = 488 712 321 :

107	131	29
11	89	167
149	47	71

G_{60}^{18}

Le carré G_{60}^{18} génère, en ajoutant 2m avec m = 0, 1, 2, …, 1 000 000 000, un premier groupe de 31 carrés premiers. Puis il génère les 3 carrés premiers parfaits (27), (40) et (41) du tableau 5 de l'annexe 18.1 plus 177 autres carrés premiers au-delà du carré (27). Puisque notre p-générateur initial est le carré (27) qui est presque normal, alors il est clair que tous les carrés générés par G_{60}^{18} sont presque normaux et tous définis avec r = 18 et t = 60.

Le carré G_{60}^{18} génère donc au moins 211 carrés premiers dont les carrés premiers parfaits (27), (40) et (41). Ils sont tous presque normaux. (Voir annexe 18.1).

Remarque sur l'annexe 18 :

Nous venons de constater un phénomène très rare dans l'ensemble des nombres premiers et ce, grâce au tableau 5 et au fait que les vingt carrés de Nelson soient tous définis avec $r = \pm 12 \;\; et \;\; t = \pm 30 \;\; ou \;\; r = \pm 30 \;\; et \;\; t = \pm 12.$ Plus précisément, pour chaque carré de Nelson, nous pouvons trouver un équivalent qui est défini avec $r = 12 \;\; et \;\; t = 30.$

Regardons de plus près ce phénomène. Soient 13 et 19, deux nombres premiers. Si on ajoute l'entier 4 à chacun, nous obtenons deux nombres premiers 17 et 23.

Avec 11 et 19, en ajoutant 4, nous obtenons 15 et 23 donc un seul est premier.

Avec 11 et 29, en ajoutant 4, nous obtenons 15 et 33, deux nombres composés.

Prenons k nombres premiers différents et ajoutons le même entier pair > 0 à chacun. Les k nouveaux nombres obtenus peuvent-ils être tous premiers???

Voyons avec k = 9 : prenons les 9 nombres premiers consécutifs de 23 à 59 et ajoutons l'entier pair 2m à chacun.

Nous avons fait varier m de 1 à 600 000 000 et nous avons trouvé seulement 4 nouvelles suites de 9 nombres premiers (avec m = 808 290, m = 3 158 295, m = 167 194 125 et m = 558 226 305). Dans ces 4 suites, les 9 nombres premiers sont consécutifs. Dans certains cas, avec 600 000 000 de valeurs de m, nous ne trouvions qu'un seul carré premier.

Avec 16 nombres premiers, en ajoutant l'entier pair 2m à chacun, nous n'avons jamais trouvé 16 nombres premiers et ce, en donnant à m plusieurs milliards de valeurs!!!

Bien entendu, nous avons pris 16 nombres premiers au hasard et avons donné à m un très grand nombre de valeurs. Voici les 3 cas étudiés :

1) Nous avons pris les 16 nombres premiers consécutifs de 23 à 89. Cette suite ne peut pas nous donner un carré magique puisqu'elle n'est pas favorable (la somme des 16 nombres n'est pas divisible par 8).
   Nous avons ajouté un nombre pair 2m à chacun des 16 nombres premiers. En faisant varier m de **1 à 2 600 000 000**, nous n'avons jamais obtenu une nouvelle suite de 16 nombres premiers.
2) Nous avons pris les 16 nombres premiers consécutifs de 31 à 101. Cette suite favorable est magique. Nous avons ajouté un nombre pair 2m à chacun des 16 nombres premiers. En faisant varier m de **1 à 6 000 000 000**, nous n'avons jamais obtenu une nouvelle suite de 16 nombres premiers.
3) Nous avons pris les 16 nombres premiers de la page 24, dernière ligne. C'est aussi une suite magique. Nous avons ajouté un nombre pair 2m à chacun des 16 nombres premiers. En faisant varier m de **1 à 17 000 000 000**, nous n'avons jamais obtenu une nouvelle suite de 16 nombres premiers.

Que penser? Nous aimerions trouver un p-générateur G d'ordre 4 qui permettrait de générer au moins un nouveau carré premier et de préférence, plusieurs. Prendre au hasard une suite de 16 nombres premiers et ajouter 2m à chacun afin d'obtenir une nouvelle suite de 16 nombres premiers n'est probablement pas la meilleure approche. Voir 1), 2) et 3) ci-haut.

Puis je reçois de Christian Boyer une suite de couples de nombres premiers jumeaux $(p_i\,;p_i+2)$. Cette suite peut contenir une infinité de couples selon une conjecture très connue. Prenons les premières composantes de ces couples. Nous aurons ainsi une suite (1) de nombres premiers. En prenant les secondes composantes, nous aurons une autre suite (2) de nombres premiers. Il est clair que pour obtenir la suite (2), il suffit d'ajouter 2 à chaque nombre de la suite (1).

La suite (1) est magique si et seulement si la suite (2) est magique. Si la suite (1) est magique, alors nous trouverons deux carrés premiers cousins, chacun étant un p-générateur. Voyons la suite (1) :

(1) {3, 5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 179, 191, 197, 227}

Celle-ci n'est pas une suite favorable puisque la somme n'est pas divisible par 8. Donc pas de carrés premiers cousins. Que se passe-t-il avec cette autre suite (3)?

(3) {5, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 179, 191, 197, 227, 239}

Celle-ci est favorable car sa somme est divisible par 8. Mais est-elle magique?

Regardez dans l'annexe 8, page 4, l'encadré vert. Sur 1 388 015 suites favorables, seulement 12 sont magiques!!!

De plus, nous avons ajouté l'entier 2m aux 16 nombres de (1) et fait varier m de 1 à

1 000 000 000. Nous avons obtenu une seule suite de 16 nombres premiers soit la suite (2).

Nous avons fait de même avec la suite (3). En donnant à m les valeurs de 1 à 1 200 000 000, nous n'avons obtenu qu'une seule suite de 16 nombres premiers.

Si la suite (3) était magique, alors nous aurions un p-générateur qui donnerait, peut-être, un seul carré premier.

En utilisant l'annexe 7, «Excursion dans les nombres premiers», page 11, nous prendrons un quintuplet jumeau voisin soit un quintuplet de nombres premiers de la forme :

$$(p\,;\ p+2\,;\ p+6\,;\ p+8\,;\ p+12)$$

Dans l'intervalle $[1\,;10^9]$, nous trouvons 3633 quintuplets jumeaux voisins. Ceux-ci ont tous la forme :

(*) $(30k+11\ ;\ 30k+13\ ;\ 30k+17\ ;\ 30k+19\ ;\ 30k+23)$ où k est un entier ≥ 0.

Voici les trois premiers quintuplets jumeaux voisins avec $p \geq 11$.

$(11\ ;13\ ;17\ ;19\ ;\ 23)$; $(101\ ;103\ ;107\ ;109\ ;113)$; $(1481\ ;1483\ ;1487\ ;1489\ ;1493)$

Le seul quintuplet jumeau voisin avec $p < 11$ est $(5\ ;\ 7\ ;11\ ;13\ ;17)$.

Prenons 16 quintuplets générés par (*). Les 16 premières composantes des 16 quintuplets forment une suite (1) de 16 nombres premiers puis les 16 deuxièmes composantes forment une autre suite (2) de 16 nombres premiers. …d'où les 5 suites (1), (2), (3), (4), (5) formées de 16 nombres premiers.

Si une de ces 5 suites est magique, alors les 4 autres seront aussi magiques. Ainsi, nous pourrons construire 5 carrés premiers cousins.

Nous aurons alors construit un p-générateur d'ordre 4.

De même avec 25 quintuplets, nous pourrions construire un p-générateur d'ordre 5. Et ainsi de suite.

Revenons aux suites (1), (2), (3), (4), (5). La suite (1) est-elle magique? C'est la question que nous devrons nous poser très souvent!!!

Nous avons donc un procédé pour construire des p-générateurs d'ordre $n \geq 4$. Cependant, ce procédé est-il efficace?

Nous sommes confrontés au problème suivant :

Étant donnée une suite de n^2 nombres premiers, pouvons-nous construire un carré magique avec ceux-ci ???

Nous avons confiance que nous trouverons une telle suite!!! (Voir plus bas).

Du 20 avril 2020 au 26 juillet 2020, Claude Bégin trouve 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3.

Le tableau 5 de la page 14 de l'annexe 18 devient le nouveau tableau 5 situé dans l'annexe 18.1 et renferme maintenant (*) 50 carrés premiers parfaits.

G_{30}^{12} génère, à lui seul, au moins 124 carrés premiers dont 38 premiers parfaits!!!

J'arrête ici la recherche de carrés premiers parfaits d'ordre 3.

(*) Voir les résultats de l'annexe 18.1.

Le tableau suivant indique ce que chaque p-générateur a déjà trouvé et en rouge, les 23 nouveaux carrés premiers parfaits trouvés par Claude Bégin.

	G_{30}^{12}	G_{30}^{42}	G_{60}^{18}
Carrés premiers au moins	86	199	208
Carrés premiers parfaits	$20+18$	$4+2$	$1+3$

Celui-ci montre, par exemple, que G_{30}^{12} génère **au moins** 86 carrés premiers d'ordre 3 plus 38 carrés premiers parfaits d'ordre 3 parmi les 50 connus à ce jour (26 juillet 2020).

Pour faire suite à l'encadré de la page 38, voici, **enfin**, 4 couples de carrés premiers cousins d'ordre 4.

Pour ce faire, nous avons pris une table de nombres premiers à partir de p = 3 puis, pour chaque valeur de p, nous regardons si p + 30 est un nombre premier. Si c'est le cas, nous conservons p. Voici les 16 valeurs de p conservées :

{7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 67, 71, 73, 79}

Cependant, cette suite n'est pas favorable (elle ne permet pas de construire un carré magique car la somme des 16 nombres premiers n'est pas divisible par 8).

Nous avons remplacé 79 par 97 et la somme, 672, est devenue divisible par 8. De plus, 97 + 30 = 127, un nombre premier. La nouvelle suite est donc :

(*) {7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 67, 71, 73, 97}

Nous avons un programme dans MAPLE, «CM4x4-16 quelconques», qui nous permet de trouver un carré magique, s'il existe, formé avec 16 nombres donnés à l'avance :

La suite (*) nous a permis de construire 4 carrés premiers primitifs :

23	7	97	41
13	71	17	67
59	37	43	29
73	53	11	31

P_1

23	97	7	41
59	43	37	29
13	17	71	67
73	11	53	31

P_2

71	7	53	37
13	23	73	59
67	41	31	29
17	97	11	43

P_3

71	53	7	37
67	31	41	29
13	73	23	59
17	11	97	43

P_4

Ces 4 carrés premiers sont presque normaux; ils sont des p-générateurs d'ordre 4 et nous conduisent aux 4 couples de carrés premiers cousins suivants, chacun ayant la forme :

$$(P_i \ ; \ P_i + 30)$$

23	7	97	41
13	71	17	67
59	37	43	29
73	53	11	31

P_1

53	37	127	71
43	101	47	97
89	67	73	59
103	83	41	61

$P_1 + 30$

23	97	7	41
59	43	37	29
13	17	71	67
73	11	53	31

P_2

53	127	37	71
89	73	67	59
43	47	101	97
103	41	83	61

$P_2 + 30$

71	7	53	37
13	23	73	59
67	41	31	29
17	97	11	43

P_3

101	37	83	67
43	53	103	89
97	71	61	59
47	127	41	73

$P_3 + 30$

71	53	7	37
67	31	41	29
13	73	23	59
17	11	97	43

P_4

101	83	37	67
97	61	71	59
43	103	53	89
47	41	127	73

$P_4 + 30$

Notons que les P_i renferment les mêmes 16 entiers; de même pour les $P_i + 30$.

Par exemple, le carré premier P_1 génère le carré premier $P_1 + 30$. Bien entendu, P_1 se génère lui-même. À partir de P_1, nous avons construit au-delà de 4 000 000 000 carrés magiques en ajoutant 10m dans toutes ses cases pour ne trouver aucun nouveau carré premier.

Pourquoi ajouter 10m au lieu de 2m? Ce nombre entier 2m ne peut pas se terminer par 2, 4, 6 ou 8 car, dans notre nouveau carré, nous trouverions toujours un entier qui se termine par 5 donc non premier. L'entier 2m doit se terminer par 0 donc être un multiple de 10. C'est une condition nécessaire pour que P_1 puisse générer un carré premier.

Se pourrait-il que P_1 ne génère qu'un seul carré premier différent de lui-même?

Si oui, nous pourrions qualifier ce p-générateur de «très faible».