7. Carrés ultra-magiques et hyper-magiques

7.1 Introduction

Nous allons définir ici des carrés magiques exceptionnels qui montreront un grand nombre de figures magiques ainsi que des propriétés remarquables.

D’abord, ces carrés magiques seront tous pandiagonaux. Nous savons que si un carré magique normal d’ordre pair est pandiagonal alors l’ordre du carré est divisible par 4 ([3], page 7). Ainsi, les carrés magiques normaux d’ordres 6, 10, 14, …, 4k + 2, … ne peuvent pas être pandiagonaux.

Par exemple, un carré magique normal d’ordre 6 ne peut pas être pandiagonal. Est-ce aussi le cas pour un carré magique quelconque d’ordre 6? Pourrions-nous trouver un carré magique presque normal d’ordre 6 qui serait pandiagonal?

La réponse est oui. Dans la section 7.2, nous allons construire des carrés magiques presque normaux pandiagonaux d’ordre 6. Plus précisément, nous allons construire des **hyper-magiques**.

Rappelons qu’un carré magique de somme S est un **ultra-magique** si et seulement si :

a) Le carré magique est **pandiagonal**.
b) Quelle que soit la paire de cases symétriques par rapport au centre du carré, la somme des nombres qui s’y trouvent est toujours égale à $\frac{2S}{n}$; autrement dit, le carré est **associatif**.

Donc, si n est impair, le centre d’un carré magique associatif est toujours $\frac{S}{n}$. Il est facile de trouver des figures magiques dans un ultra-magique. Par exemple, dans un ultra-magique d’ordre 7, si vous prenez 3 paires de cases symétriques par rapport au centre plus le centre, vous obtenez une figure magique puisque la somme sera $3\times\frac{2S}{7}+\frac{S}{7}=S$.

Avec un ultra-magique d’ordre 10, si vous prenez 5 paires de cases symétriques, alors vous obtenez une figure magique puisque la somme sera $5\times\frac{2S}{10}=S$.

Il sera aussi facile de trouver des figures magiques dans un hyper-magique. Rappelons d’abord ce qu’est un tel carré magique (voir carré 28 de la partie 1 et le texte qui suit) :

Un carré magique est un **hyper-magique** si et seulement si :

a) Le carré est d'ordre pair.

b) Chaque fois que nous prenons sous-carré d'ordre 2 dans le carré, la somme de ses quatre cases est toujours $\frac{4S}{n}$.

c) Sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées de $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

Nous voyons que l'ordre d'un hyper-magique ne peut pas être impair puisque $\frac{n-2}{2}$ doit être un entier. Les hyper-magiques ont des propriétés extraordinaires! Les théorèmes suivants en témoignent :

Théorème 7.1 :

Soit donné M, un carré magique d'ordre n = 2 k qui vérifie la propriété suivante : chaque fois que nous prenons un carré d'ordre 2 dans M, il y en a (2 k-1) (2 k-1), la somme de ses quatre cases est toujours $\frac{4S}{n}$. Alors dans M, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordres pairs 2, 4, 6, 8,…, 2k est toujours égale à $\frac{4S}{n}$.

Théorème 7.2

Soit donné M, un carré magique d'ordre n = 2 k qui vérifie la propriété suivante : sur toutes les diagonales, grandes ou brisées, deux cases séparées par $\frac{n-2}{2}$ cases totalisent toujours $\frac{2S}{n}$.

1) Alors dans M, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre k + 1 est égale à $\frac{4S}{n}$.

2) De plus, M est pandiagonal.

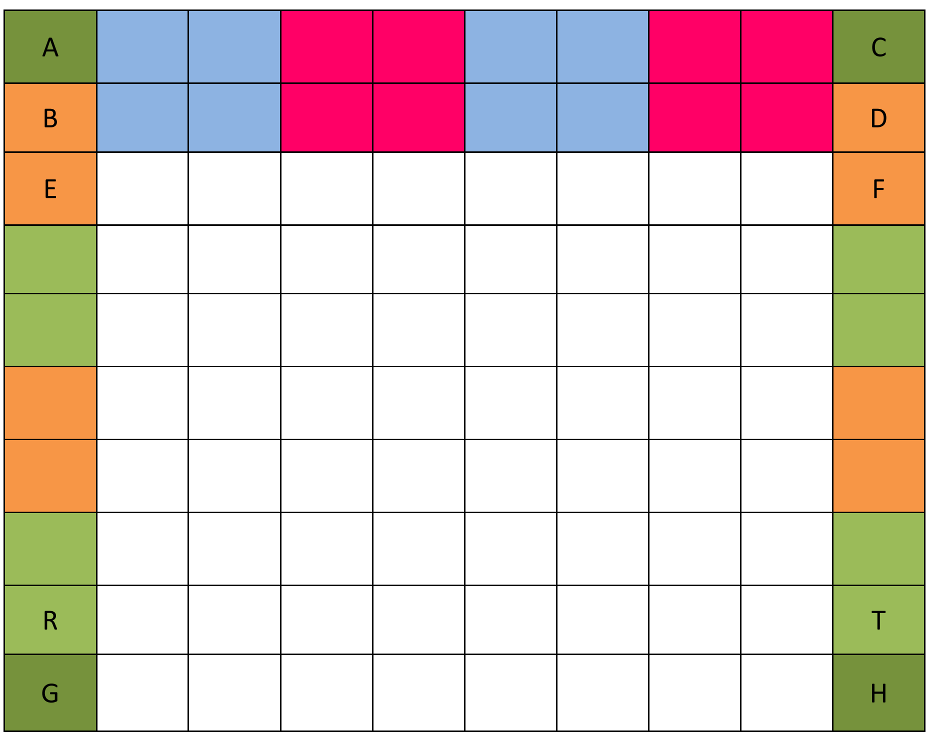
Donc tous les hyper-magiques sont pandiagonaux.

Par exemple, prenons un carré hyper-magique d'ordre 8. Alors la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 2 (il y en a 49), de tous les carrés d'ordre 4 (il y en a 25), de tous les carrés d'ordre 6 (il y en a 9) et du carré d'ordre 8 est égale à $\frac{4S}{8} = \frac{S}{2}$.

De plus, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 4 + 1 = 5 est égale à $\frac{S}{2}$.

Le théorème 7.2 n'apporte rien de plus si k est impair; il devrait donc s'appliquer seulement lorsque k est pair c'est-à-dire lorsque l'ordre est pair multiple de 4. Par exemple, avec n = 8, nous aurons la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 5 égale à $\frac{S}{2}$. Avec n = 10, le théorème 7.2 nous apprend que la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre 6 donne $\frac{2S}{5}$, ce que nous savions déjà par le théorème 7.1.

Démontrons ces deux derniers théorèmes. Pour le **théorème 7.1,** utilisons le carré suivant :



Ce carré est d'ordre n = $2k$. Puisque chaque carré d'ordre 2 a pour somme $\frac{2S}{k}$, alors il est facile de montrer que A + B + C + D = $\frac{2S}{k}$. En effet, A + B + C + D = $k\frac{2S}{k} - (k-1)\frac{2S}{k} = \frac{2S}{k}$.

De la même façon, nous montrons que B + E + D + F = $\frac{2S}{k}$, et ainsi de suite jusqu'à R + G + T + H = $\frac{2S}{k}$. Maintenant, en nous servant des première et dernière colonnes, nous trouvons : A + C + G + H = $k\frac{2S}{k} - (k-1)\frac{2S}{k} = \frac{2S}{k}$. La somme des quatre coins du carré d'ordre 2k est donc $\frac{2S}{k} = \frac{4S}{n}$. Nous pouvons alors déduire que dans ce carré, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordres pairs (2, 4, 6,…, 2k) est égale à $\frac{4S}{n}$. (Voir problème 15 de 7.4)

Passons maintenant au **théorème 7.2** :

Un carré d'ordre k+1 est tel que les deux extrémités de chaque grande diagonale sont séparées par $\frac{n-2}{2} = \frac{2k-2}{2} = k-1$ cases et la somme de ces deux extrémités est $\frac{2S}{n}$ puisque chaque diagonale du carré d'ordre k+1 est située sur une grande diagonale ou sur une diagonale brisée du carré d'ordre 2k. La somme des quatre coins de tous les carrés d'ordre k+1 est donc $\frac{2S}{n} + \frac{2S}{n} = \frac{4S}{n}$. La preuve du théorème 7.2, M est pandiagonal, est laissée en exercice (problème 1) dans 7.4.

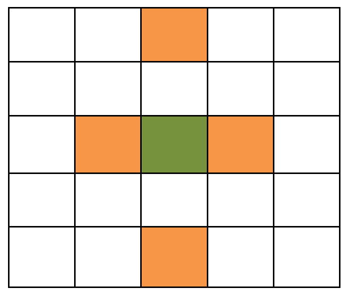
Les ultra-magiques constituent une très belle source d'ultra-figures. De même, les hyper-magiques constituent une très belle source de super-figures. Nous connaissons des ultra-magiques qui possèdent aussi des super-figures (voir chapitre 6); quant aux hyper-magiques, leurs super-figures sont toutes des ultra-figures.

Théorème 7.3 :

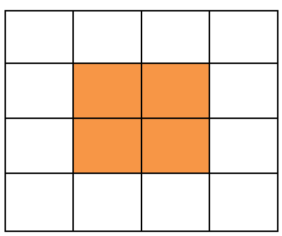
> Tous les ultra-magiques d'ordres $n \geq 4$ renferment au moins une ultra-figure et tous les hyper-magiques d'ordres pairs $n \geq 4$ renferment au moins une super-figure.

Preuve :

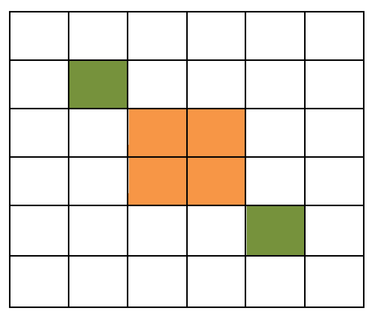
Les diagonales (grandes ou brisées) d’un ultra-magique sont des ultra-figures. Il en est de même de toute figure symétrique par rapport au centre du carré d’un ultra-magique.



Pour les hyper-magiques, n = 2k, nous allons trouver une super-figure quel que soit l’ordre du carré. Voici comment :

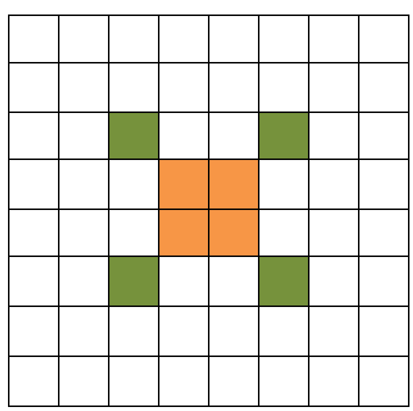


Hy-1

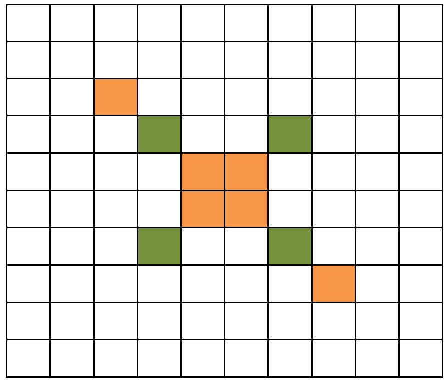


Hy-2

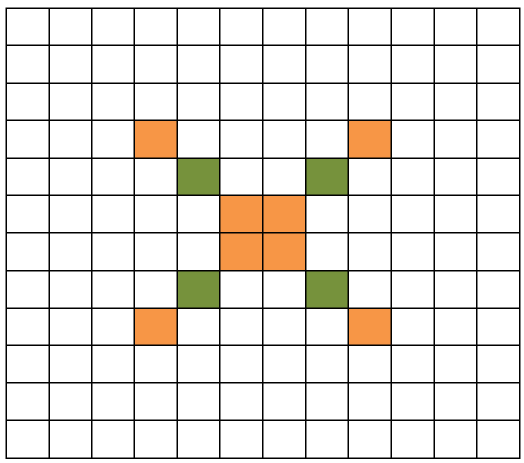
Hy-3 =



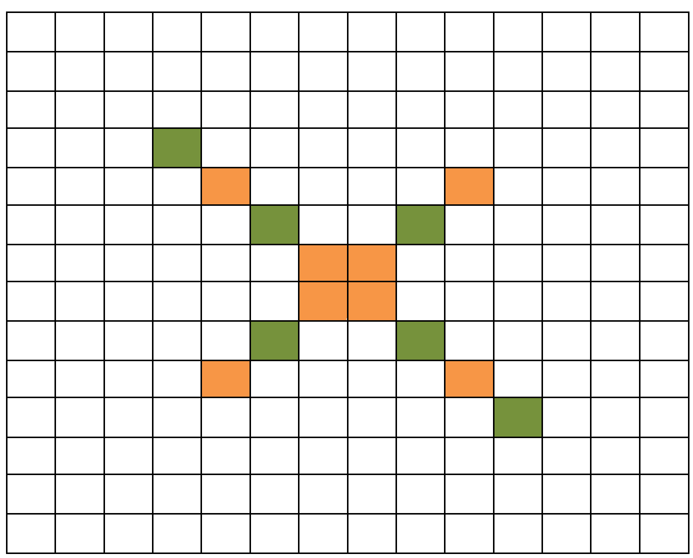
Hy-4 =



Hy-5 =



Hy-6 =



Ces figures dans les carrés d'ordres 4, 6, 8, 10, 12 et 14 que nous venons d'illustrer vont nous aider dans la démonstration qui suit :

Premier cas : **le carré est d'ordre pair multiple de 4** : posons $n = 4m$, m entier ≥ 1 . Nous avons alors m groupes de quatre cases (voir Hy-1, Hy-3, Hy-5) et la somme des quatre cases de chaque groupe vaut $\frac{4S}{n} = \frac{S}{m}$ en vertu du théorème 7.1. Les m groupes totalisent $m \frac{S}{m} = S$ d'où les m groupes forment une figure magique. Cette figure que nous construisons est symétrique par rapport au centre du carré et c'est une super-figure.

Dans Hy-1, elle est formée des quatre cases d'un carré d'ordre 2. Dans Hy-3, nous y ajoutons les quatre cases qui sont les quatre coins d'un carré d'ordre 4. Dans Hy-5, nous y ajoutons les quatre cases qui sont les quatre coins d'un carré d'ordre 6 et ainsi de suite. Ces cases qui s'ajoutent se trouvent toujours sur les deux grandes diagonales. Le groupe m donne lieu à un carré d'ordre $2m$ centré au centre du carré d'ordre $4m$; de plus, ce carré d'ordre $2m$ renferme $2m$ cases sur ses diagonales.

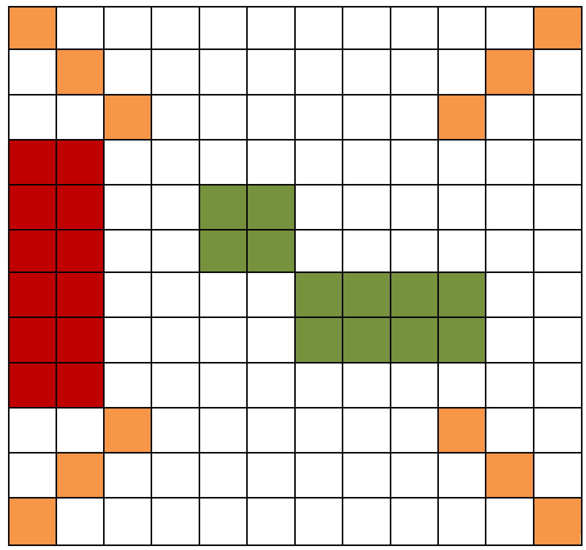
Deuxième cas : le carré est d'ordre pair non multiple de 4 : posons $n = 4m + 2$, m entier ≥ 1 .

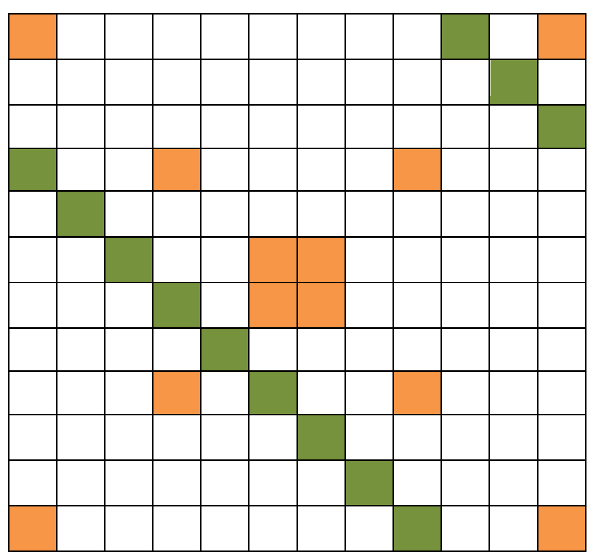
Nous pouvons associer les carrés d'ordres $4m$ *et* $4m + 2$ lorsque m prend la même valeur dans les deux cas; par exemple les carrés d'ordres 12 = 4x**3** et 14 = 4x**3** + 2.

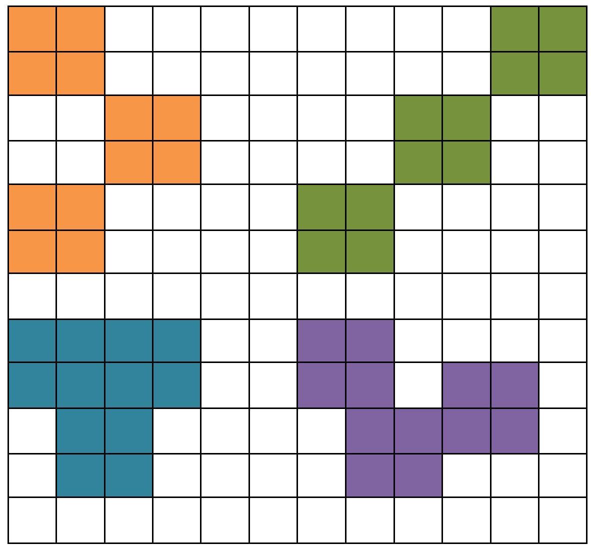
Pour construire notre super-figure, nous allons reproduire la figure du carré précédent. Nous allons retrouver les mêmes m groupes de quatre cases et nous ajouterons deux cases sur la diagonale principale (voir Hy-5 et Hy-6). Les deux cases que nous venons d'ajouter sont bien séparées par $\frac{n-2}{2} = \frac{4m+2-2}{2} = 2m$ cases lesquelles sont situées sur une diagonale du carré hyper-magique. La somme des deux cases que nous venons d'ajouter est donc $\frac{2S}{4m+2}$. Notre figure est alors magique puisque la somme des $4m + 2$ cases de la figure est :

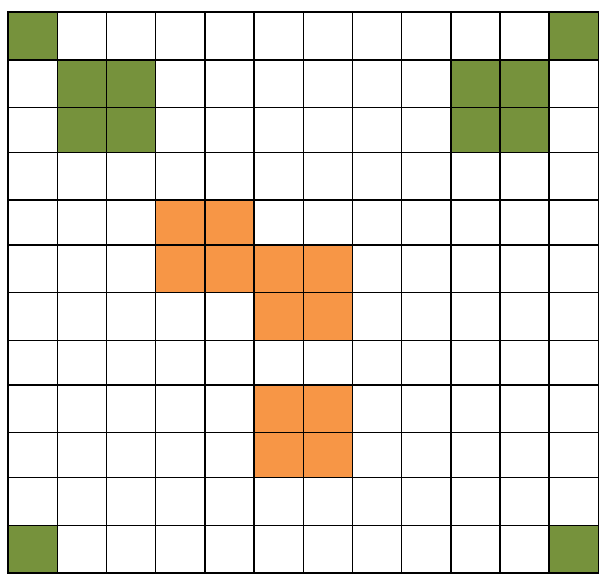
$$m \frac{4S}{4m+2} + \frac{2S}{4m+2} = \frac{S(4m+2)}{4m+2} = S$$

Il est clair que ces figures magiques sont des super-figures!!! En terminant, voyons onze autres super-figures dans la structure générale des hyper-magiques d'ordre 12 :









Évidemment, cette liste de super-figures n’est pas exhaustive!!!

7.2 Carrés hyper-magiques d'ordre 6

Il est bien connu que nous ne trouverons pas ici d'hyper-magique normal d'ordre 6 (voir 7.3). Cependant, nous avons trouvé un hyper-magique presque normal d'ordre 6; il est de somme S = 150 (voir plus bas). Nous allons trouver celui qui a la plus petite somme et nous verrons s'il est unique. En imposant à la structure générale des carrés magiques d'ordre 6, les conditions pour que cette structure devienne un hyper-magique, nous trouvons la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6 que voici :

a	$\frac{1}{2}(-a-2b-c+S)$	b
d	$\frac{1}{6}(-3a+6b+3c-6d+S)$	$a-b+d$
$\frac{1}{6}(-3a+3c-6d+2S)$	$a-b-c+d+\frac{S}{6}$	$\frac{1}{6}(-9a+6b+3c-6d+2S)$
$\frac{1}{3}(-3c+S)$	$\frac{1}{6}(-3a+6b+9c-S)$	$a-b-c+\frac{S}{3}$
$a+c+d-\frac{S}{3}$	$\frac{1}{6}(-3a-6b-9c-6d+5S)$	$b+c+d-\frac{S}{3}$
$\frac{1}{6}(-9a-3c-6d+4S)$	$a+b+c+d-\frac{S}{2}$	$\frac{1}{6}(-3a-6b-3c-6d+4S)$
(1)	(2)	(3)

c	$\frac{1}{2}(a-2b-3c+S)$	$-a+b+c$
$-a-c-d+\frac{2S}{3}$	$\frac{1}{2}(a+2b+3c+2d-S)$	$-b-c-d+\frac{2S}{3}$
$\frac{1}{6}(9a+3c+6d-2S)$	$\frac{1}{6}(-6a-6b-6c-6d+5S)$	$\frac{a}{2}+b+\frac{c}{2}+d-\frac{S}{3}$
$\frac{1}{3}(-3a+S)$	$\frac{1}{6}(3a+6b+3c-S)$	$\frac{1}{3}(-3b+S)$
$\frac{1}{3}(-3d+S)$	$\frac{1}{6}(3a-6b-3c+6d+S)$	$-a+b-d+\frac{S}{3}$
$\frac{1}{2}(a-c+2d)$	$-a+b+c-d+\frac{S}{6}$	$\frac{3a}{2}-b-\frac{c}{2}+d$
(4)	(5)	(6)

Les carrés hyper-magiques d'ordre 6 forment un sous-espace vectoriel de dimension 5.

Nous voyons, ci-haut, les 6 colonnes, de gauche à droite, de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6. En utilisant le fichier «Le compte» de MATHEMATICA, nous avons trouvé :

f(S) = 5052

Cela signifie que tous les hyper-magiques d'ordre 6 ont en commun les mêmes 5052 figures magiques!!! Voyons maintenant l'hyper-magique presque normal suivant :

1	47	6	43	5	48
35	17	30	21	31	16
36	12	41	8	40	13
7	45	2	49	3	44
29	19	34	15	33	20
42	10	37	14	38	9

Carré hyper-magique Hy-150

Il est de somme S = 150 et f(150) = 22 154. Qui oserait penser que ce carré hyper-magique renferme 22 154 figures magiques!!!

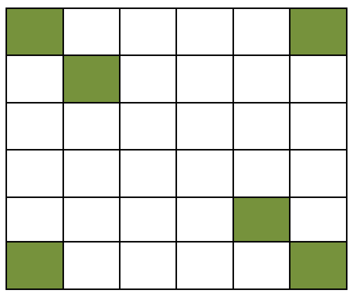
Il est évident que nous n'allons pas illustrer ici les 22 154 figures magiques du carré précédent, ni même les 5052 figures magiques de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6. Nous allons tout de même en présenter quelques-unes :

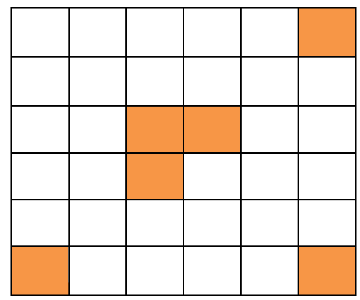
A	B				
C	D				
				E	F
				G	H

Hy-2 (voir 7.1) et ces deux figures sont des super-figures. Montrons d'abord que A B C F G H est une figure magique. Puisque nous sommes dans un hyper-magique, nous savons que :

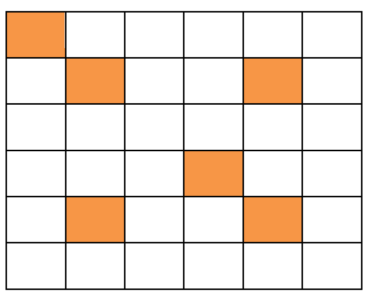
$$A+B+C+F+G+H = (A+B+C+D)+(E+F+G+H) - (D+E) = \frac{2S}{3}+\frac{2S}{3}-\frac{S}{3}=S.$$

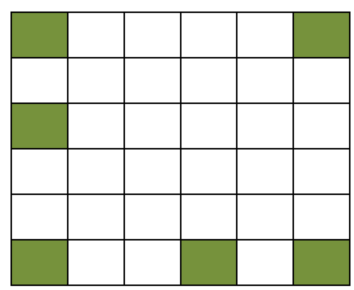
Que ces figures soient des super-figures est tout à fait évident!!!





Voici, ci-haut, deux autres super-figures. Assurez-vous qu'elles sont d'abord magiques.





Et deux autres super-figures.

Le corollaire 7.5 de 7.3 nous apprend que :

Si un carré magique d'ordre pair est normal et pandiagonal, alors l'ordre de ce carré est de la forme n = 4 k où k est un entier > 0.

Donc si l'ordre pair du carré n'est pas un multiple de 4 et si celui-ci est pandiagonal, alors il ne peut pas être normal.

Puisqu'un hyper-magique est toujours pandiagonal, alors il ne peut pas être normal s'il est d'ordre pair non multiple de 4.

Nous entendons souvent dire qu'il n'existe pas de carré magique pandiagonal d'ordre pair non multiple de 4. Ce qui est vrai s'il s'agit d'un carré normal. Nous savons donc qu'il n'existe pas d'hyper-magique normal d'ordre 6 et nous venons de voir qu'il existe au moins deux hyper-magiques presque normaux d'ordre 6 (celui ci-haut de somme S = 150 et celui présenté dans la galerie de la partie 1 de cet ouvrage, le carré 22 de somme S = 252).

La somme d'un carré magique normal d'ordre 6 est S = 111. Nous allons trouver un hyper-magique presque normal dont la somme S_* sera la plus petite. Nous aurons alors :

$$111 < S_* \leq 150$$

Dans la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6, nous voyons que S doit être un multiple de 6 si nous voulons un hyper-magique formé d'entiers. Or 111 n'est pas divisible par 6 donc un hyper-magique d'ordre 6 ne peut pas être normal, ce que nous savions déjà. Les seuls presque normaux possibles doivent être de sommes 114, 120, 126, 132, … . Notre programme dans MAPLE nous montre qu'aucun carré hyper-magique presque normal n'existe si $S < 150$. Par contre, il nous donne 288 hyper-magiques presque normaux dont la somme est 150, lesquels se répartissent en trente six groupes de huit équivalents. Vous trouverez ces trente-six hyper-magiques presque normaux primitifs dans le fichier MAPLE : «Les 36 meilleurs hyper-magiques d'ordre 6». Nous vous en présentons quatre sur les trente-six; ce sont donc quatre primitifs :

1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14
5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9

5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9
1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14

17	12	45	19	10	47
35	36	7	29	42	1
16	13	44	20	9	48
31	40	3	33	38	5
21	8	49	15	14	43
30	41	2	34	37	6

49	8	21	43	14	15
2	41	30	6	37	34
45	12	17	47	10	19
7	36	35	1	42	29
44	13	16	48	9	20
3	40	31	5	38	33

Voici le nombre **d'hyper-magiques presque normaux primitifs** d'ordre 6 dont les sommes sont :

S = 150 36 = 36 x 1

S = 156 72 = 36 x 2

S = 162 180 = 36 x 5

S = 168 288 = 36 x 8

S = 174 396 = 36 x 11

S = 180 612 = 36 x 17

S = 186 1116 = 36 x 31

S = 192 1728 = 36 x 48

S = 198 2340 = 36 x 65

S = 204 3348 = 36 x 93

S = 210 4680 = 36 x 130

S = 216 6156 = 36 x 171

L'existence d'un hyper-magique presque normal d'ordre 6 **semble** donc assuré pour toutes les sommes multiples de 6 soit S = 150 + 6k où k est un entier ≥ 0.

Les carrés hyper-magiques constituent une bonne source de super-figures. Voici seize super-figures de la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6. Cela signifie que tout hyper-magique issu de cette structure générale possède ces super-figures. Cette liste, bien entendu, n'est pas exhaustive.

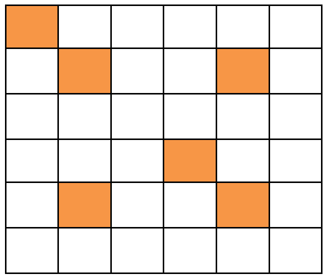


Figure 1

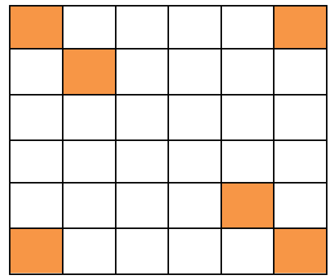


figure 2

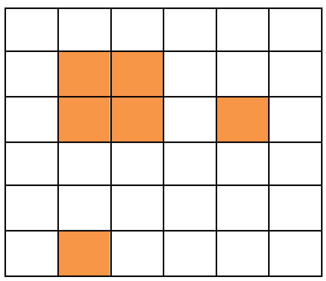


Figure 3

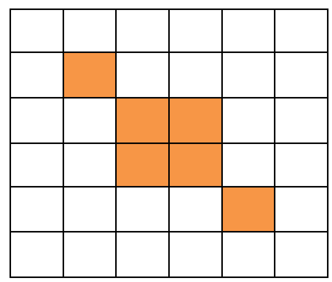


Figure 4

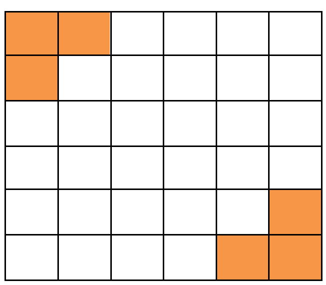


Figure 5

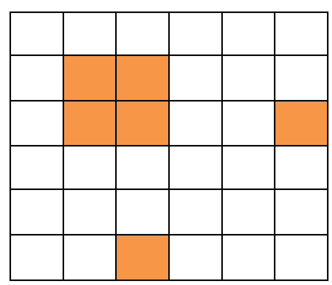


Figure 6

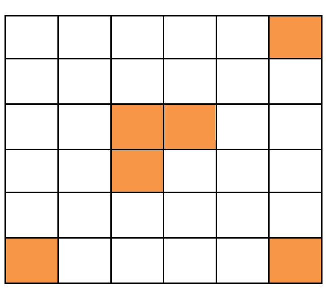


Figure 7

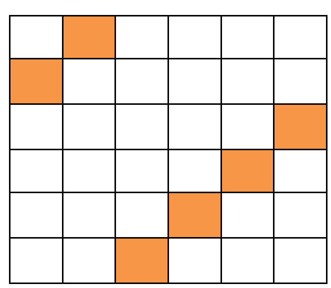


Figure 8

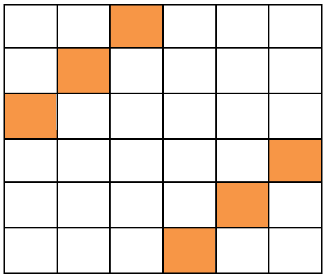


Figure 9

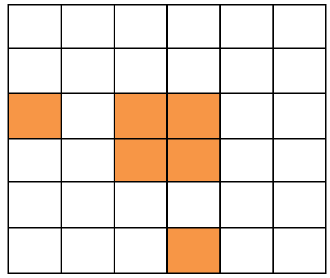


Figure 10

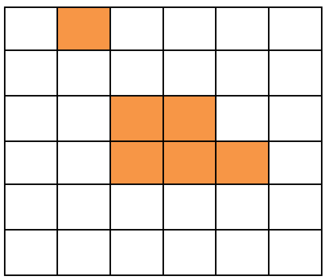


Figure 11

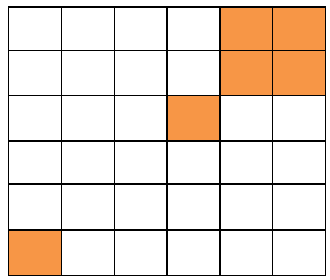


Figure 12

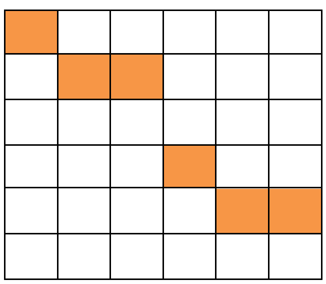


Figure 13

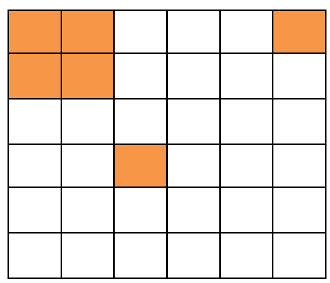


Figure 14

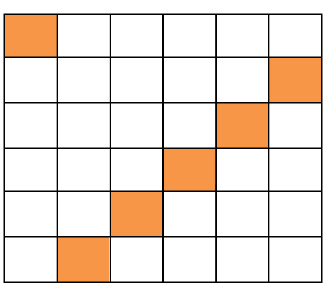


Figure 15

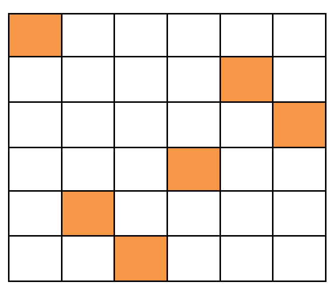
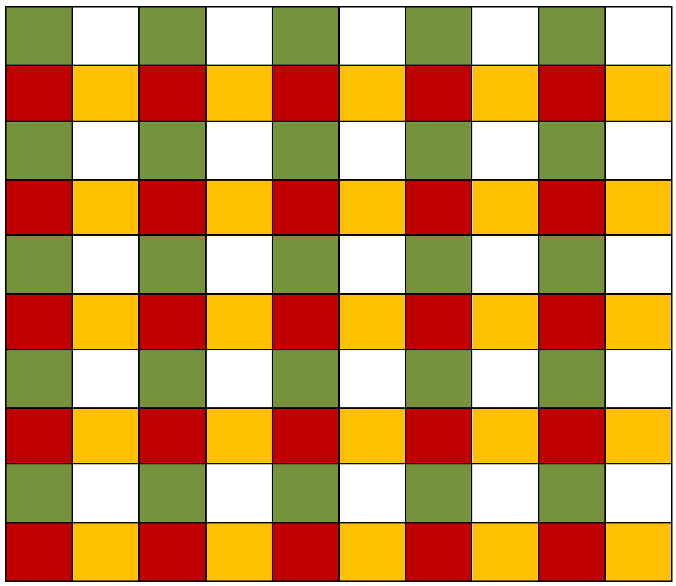


Figure 16

7.3 Condition nécessaire pour avoir un pandiagonal d'ordre pair

Nous allons trouver une condition **nécessaire** pour qu'un carré magique d'ordre pair, **formé d'entiers**, soit pandiagonal.

Considérons M , un carré magique d'ordre $n = 2k$ formé seulement d'entiers. Sa somme magique est S .



Appelons A, la somme des entiers situés dans les cases vertes, B, la somme des entiers situés dans les cases blanches et C, la somme des entiers situés dans les cases rouges. Nous allons numéroter $1, 2, 3, ..., 2k$, les rangées de haut en bas et les colonnes de droite à gauche.

La somme des entiers situés dans les cases des rangées impaires, lesquelles contiennent toutes les cases vertes et toutes les cases blanches est $A + B = kS$.

La somme des entiers situés dans les cases des colonnes paires, lesquelles contiennent toutes les cases vertes et toutes les cases rouges est $A + C = kS$.

Si M est pandiagonal, alors la somme des entiers situés dans les cases des branches des diagonales secondaires qui renferment une case rouge, lesquelles renferment toutes les cases rouges et toutes les cases blanches, est $B + C = kS$. En effet, nous avons bien k diagonales secondaires soient la grande et $(k-1)$ brisées.

Donc, si M est pandiagonal, alors nous avons :

$$A+B=A+C=B+C=k\,S$$

ce qui implique que $A=B=C=\dfrac{k\,S}{2}$. Puisque A,B,C sont des entiers, il est clair que $k\,S$ **doit être pair**; **c'est une condition nécessaire** pour que M formé d'entiers, soit pandiagonal.

Si k est pair, donc n est multiple de 4, alors la condition nécessaire est respectée.

Si k est impair, donc n n'est pas un multiple de 4, alors S doit être pair si nous voulons que la condition nécessaire soit respectée.

Si k *et* S sont impairs, alors la condition nécessaire ne sera pas respectée et M ne pourra pas être pandiagonal.

Considérons k impair. Si M renferme n^2 entiers qui forment la suite arithmétique suivante :

$$a,a+r,a+2r,\ldots,a+(n^2-1)r \text{ où } a \, et \, r \text{ sont des entiers,}$$

alors nous aurons : $S=[2a+(4k^2-1)r]k.$

Si r est impair, alors S est impair et la condition nécessaire n'est pas respectée donc M ne peut pas être pandiagonal. Il s'ensuit que si les entiers sont consécutifs $(r=1)$, alors M ne sera jamais pandiagonal. Donc si M est normal, il ne pourra pas être pandiagonal.

Si r est pair, alors S est pair et la condition nécessaire est respectée.

Théorème 7.4 :

Soit M, un carré magique de somme S et d'ordre pair $n=2k$, formé de nombres entiers seulement. Alors, une condition nécessaire pour que M soit pandiagonal est que $k\,S$ soit pair.

Cette condition est nécessaire mais non suffisante. En effet, nous connaissons un carré magique d'ordre 4, de somme 34, formé d'entiers avec $k\,S$ pair et pourtant, il n'est pas pandiagonal. Pour ce carré, il suffit de prendre un carré magique normal d'ordre 4 parmi les 880 normaux primitifs (voir le CD); seulement 48 sont pandiagonaux, donc 832 ne le sont pas. Nous avons vu, au chapitre 5, section 5.5, que l'espace des super-Dürer était le même que l'espace des pandiagonaux lequel est normal d'ordre 384 et en divisant par 8, nous trouvons les 48 primitifs. Voyons maintenant les principales conséquences du théorème 7.4 :

Corollaire 7.5 :

Soit M , un carré magique de somme S et d'ordre pair $n = 2k$, formé de nombres entiers seulement.

1) Si k est pair, alors la condition nécessaire est respectée (n est alors pair multiple de 4). Le carré magique M est un bon candidat pour être pandiagonal.
2) Si k est impair et S est pair, alors la condition nécessaire est respectée (n est pair non multiple de 4). Le carré magique M est alors un bon candidat pour être pandiagonal.
3) Si k *et* S sont impairs, alors kS est impair et M ne peut pas être pandiagonal.
4) Si k est impair et M est normal, alors S sera impair donc M ne pourra pas être pandiagonal.
5) Si k est impair et M est pandiagonal, alors M ne peut pas être normal.
6) Si k est impair et M est pandiagonal, alors S est pair.
7) Si k est impair et M renferme n^2 entiers qui forment une suite arithmétique de raison impaire, alors S sera impair donc M ne pourra pas être pandiagonal.
8) Si k est impair et M renferme n^2 entiers consécutifs $(r = 1)$, alors M ne pourra pas être pandiagonal.
9) Si M est un carré magique, normal, pandiagonal et d'ordre pair $n = 2k$, alors k est pair d'où n est pair multiple de 4.

1) Pour k pair, nous connaissons des carrés magiques pandiagonaux d'ordres 4, 8, 12, …, formés d'entiers. [3]
2) Nous connaissons un carré magique pandiagonal d'ordre 6 (k = 3), de somme 150 (voir plus haut). Il est presque normal.
3) Nous connaissons un carré magique d'ordre 6 (k = 3), de somme magique 111. Il n'est pas pandiagonal. Il est normal. Voir «Ordre 6» sur le CD.
4) Voir le carré magique en 3).
5) Voir le carré magique en 2).
6) Voir le carré magique en 2).
7) Voir le carré magique en 3).
8) Voir le carré magique en 3).
9) Voir le carré 28 dans la partie 1 ou encore un super-Dürer, section 5.5 du chapitre 5 de la partie 2.

Revenons au carré illustré plus haut. Chaque case rouge de la colonne de gauche correspond à une branche d'une diagonale brisée ou grande que nous allons appeler branche paire (puisqu'il y a un nombre pair de cases dans chacune). Ainsi, nous aurons les branches $2, 4, 6, ..., 2k$ de haut en bas. Chaque case rouge de la dernière rangée correspond à une branche paire d'une diagonale brisée ou grande. Ainsi, de droite à gauche, nous aurons les branches $2, 4, 6, ..., 2k$.

Maintenant, nous voyons bien que la branche notée 2, relative à la colonne de gauche, s'associe à la branche notée $2k-2$, relative à la dernière rangée, afin de donner une diagonale brisée complète. De même pour les autres branches. D'où les k diagonales et M pandiagonal implique $B+C=kS$.

Corollaire 7.6:

Soit M , un carré magique pandiagonal de somme S et d'ordre pair $n=2k$. Alors les $4k^2$ nombres dans M peuvent se regrouper en quatre classes de k^2 nombres tel que la somme des k^2 nombres de chaque classe soit $\frac{kS}{2}$. En référence avec le carré illustré plus haut, les quatre classes sont les nombres situés dans les cases vertes, dans les cases blanches, dans les cases rouges et dans les cases jaunes.

Si les quatre classes ont la même somme, alors il se peut que le carré magique ne soit pas pandiagonal.

Ce dernier corollaire est une caractéristique des carrés magiques pandiagonaux d'ordres pairs. Voyons un exemple. Le carré magique pandiagonal Hy-150 présenté plus haut, donne les quatre groupes suivants :

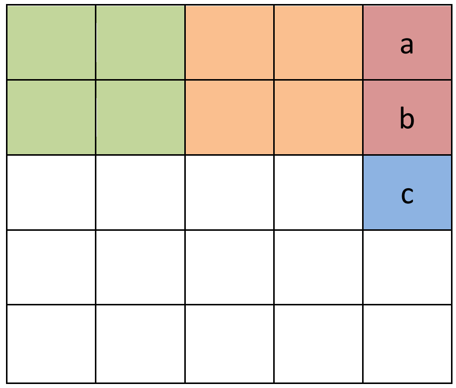
1	6	5	47	43	48	35	30	31	17	21	16
36	41	40	12	8	13	7	2	3	45	49	44
29	34	33	19	15	20	42	37	38	10	14	9

Ces quatre groupes sont de somme 225.

Puis notons que les résultats obtenus ici sont basés sur une démonstration de C. Planck (1919) reprise par Kathleen Ollerenshaw et David Brée, section 1.3.3 de [3] et par nous.

Terminons avec cette question : **pourquoi n'avons-nous pas de carré hyper-magique d'ordre impair?**

Par exemple, un carré magique d'ordre 5 pourrait-il être hyper-magique?



1) D'abord, selon la définition d'un hyper-magique, il faut que $\frac{n-2}{2}$ soit un entier qui est le nombre de cases qui en séparent deux autres. Il est donc évident que n doit être un entier pair.
2) Pour les sous-carrés d'ordre 2, quelle en serait la somme? Si c'est $\frac{4S}{n} = \frac{4S}{5}$, alors il faudra que la somme des deux cases qui contiennent a et b, soit $\frac{2S}{5}$.
3) Nous aurions alors : a + b = 2S/5 et b + c = 2S/5 d'où a = c donc une répétition, ce que nous ne voulons pas. N'oublions pas notre objectif qui est de construire des carrés magiques normaux ou presque normaux.
4) Si nous exigions que dans une même colonne, deux cases consécutives totalisent toujours $\frac{2S}{5}$, alors de la même façon, nous aurions des répétitions.
5) Voilà pourquoi nous ne prendrons jamais un carré d'ordre impair pour en faire un hyper-magique.

7.4 Problèmes

1) Démontrez le théorème 7.2, 2) M est pandiagonal.

2) En regardant la structure générale des hyper-magiques d'ordre 6, montrez qu'une condition nécessaire pour que le carré renferme 36 entiers est que S soit un multiple de 6. Cette condition est-elle suffisante?

3) Montrez qu'un hyper-magique d'ordre 6, presque normal, a une somme magique $S \geq 111$.

4) Généralisez le résultat précédent pour tous les hyper-magiques presque normaux d'ordre 4 m + 2.

5) Ici, les conditions du théorème 7.1 sont respectées. Les nombres de la première rangée sont notés, de gauche à droite par a_i, où l'entier i vérifie $1 \leq i \leq n$. Les nombres de la dernière rangée sont notés, de gauche à droite par b_i, où l'entier i vérifie $1 \leq i \leq n$. Montrez que la somme des nombres $a_i + a_{i+1} + b_i + b_{i+1} = \dfrac{4S}{n}$ avec $1 \leq i \leq n-1$. Montrez que nous avons le même résultat avec la première et la dernière colonne.

6) Vous affirmez être en possession d'un hyper-magique d'ordre 6 et de somme $S = 123$, lequel renferme 36 nombres entiers. Je vous dis que cela est impossible. Cependant, je constate que votre carré est d'ordre 6, qu'il renferme bien 36 entiers, qu'il est bien magique et que sa somme est bien $S = 123$. Que dois-je conclure?

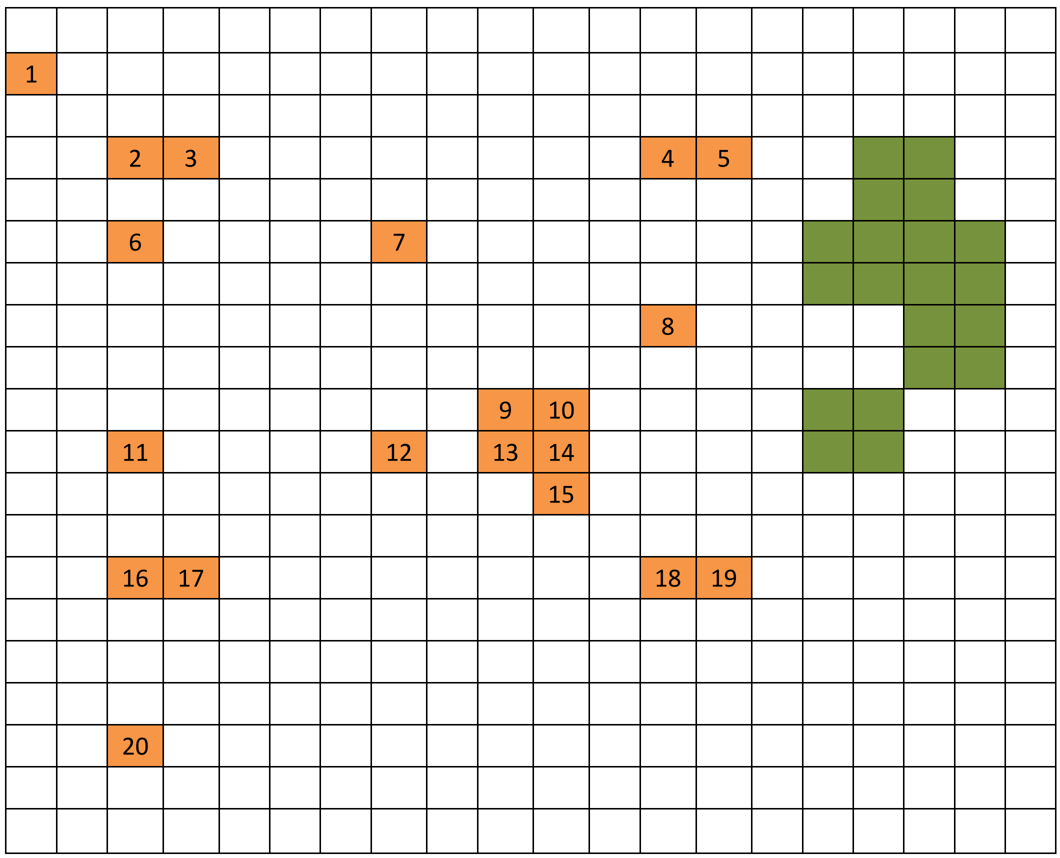
7) En référence avec le septième résultat du corollaire 7.5, si k est impair et M renferme n^2 entiers qui forment une suite arithmétique de raison paire, alors que pouvons-nous dire sur la pandiagonalité de M ?

8) Démontrez qu'un carré magique d'ordre 3 est pandiagonal si et seulement s'il est trivial.

9) Démontrez que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont associatifs.

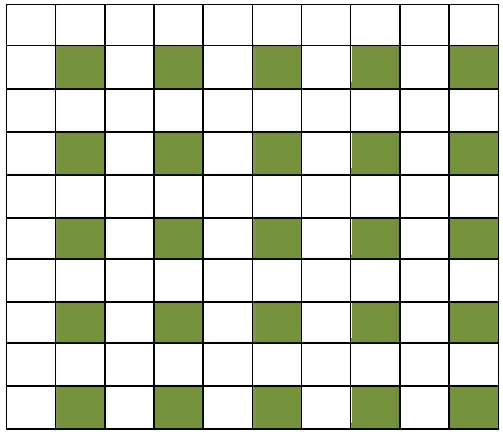
10) Démontrez que dans un carré magique associatif d'ordre impair, la case centrale renferme toujours le nombre $\dfrac{S}{n}$.

11) Voici un carré hyper-magique d'ordre 20. Les nombres dans les cases servent à les numéroter. Montrez que les deux figures suivantes sont des super-figures:



12) Trouvez soixante-quatre entiers >0, tous différents, qui forment un carré magique. De plus, ces soixante-quatre entiers peuvent être regroupés en quatre classes de seize entiers telles que la somme des entiers de chaque classe soit la même.

13) Le carré suivant est un carré magique pandiagonal d'ordre 10 dont la somme magique est $S = 960$. Trouvez la somme des nombres situés dans les cases vertes.



14) Soit M, un carré magique d'ordre 18 formé de 324 entiers et dont la somme magique est $S = 935$. Montrez que ce carré ne peut pas être hyper-magique.

15) Complétez la démonstration du théorème 7.1 : nous pouvons alors déduire que dans ce carré, la somme des quatre coins de tous les carrés d'ordres pairs (2, 4, 6, …, 2k) est égale à $\frac{4S}{n}$.

16) À partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 6 (Voir le CD), trouvez :

    a) Une structure générale des hyper-magiques et assurez-vous qu'elle soit bien équivalente à celle de 7.2.
    b) Une structure générale des carrés magiques pandiagonaux et la dimension du sous-espace de ceux-ci?
    c) À partir de la structure générale des carrés magiques pandiagonaux trouvée en b), la structure générale des hyper-magiques et montrez qu'elle est équivalente à celle trouvée en a).
    d) En déduire que tous les hyper-magiques d'ordre 6 sont pandiagonaux.
    e) En déduire que l'espace des hyper-magiques d'ordre 6 est un sous-espace de l'espace des pandiagonaux d'ordre 6.

17) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 peut-il contenir trente-six entiers consécutifs?

18) Pourquoi un carré magique normal d'ordre 4m + 2 ne peut jamais être pandiagonal?

19) Soit A, un carré magique d'ordre $n \geq 3$, non trivial et associatif. Montrez que le plus petit nombre du carré et le plus grand, se trouvent dans des cases symétriques par rapport au centre du carré.

20) Soit M, un carré hyper-magique d'ordre 6. Montrez que la somme des neuf nombres situés dans tout sous-carré d'ordre 3 est toujours la même soit $\frac{3S}{2}$.

21) Montrez qu'un hyper-magique presque normal d'ordre 6 ne peut pas être associatif.

22) Montrez que :

a) Tous les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6 formés de 36 entiers impairs ont une somme magique de la forme $6m$ où m est un entier impair.

b) Tous les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 6 formés de 36 entiers pairs ont une somme magique de la forme $6m$ où m est un entier pair.

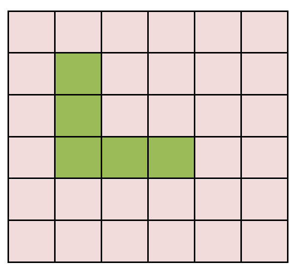
c) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé de 36 entiers et de somme S = 156 doit contenir des entiers pairs.

d) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé de 36 entiers et de somme S = 150 doit contenir des entiers impairs.

e) Un carré magique pandiagonal d'ordre 6 formé d'entiers avec au moins un pair et au moins un impair a une somme de la forme $6m$ où m est un entier pair ou impair.

Indice : Voir sur le CD, la structure générale des pandiagonaux d'ordre 6 soit le fichier de MATHEMATICA : Pandiagonaux ordre 6.

23) Dans un carré hyper-magique d'ordre 6, considérons l'équerre suivante :



a) Montrez que quelle que soit la position de celle-ci, la somme des cinq nombres qu'elle contient est toujours $\frac{5S}{6}$.

b) Dans 7.2, vérifiez avec le carré Hy-150, que la somme de toute équerre est bien $\frac{5S}{6} = 125$.

24)

1	47	6	43	5	48
35	17	30	21	31	16
36	12	41	8	40	13
7	45	2	49	3	44
29	19	34	15	33	20
42	10	37	14	38	9

Ce carré renferme trente-six nombres tous différents. Pour chacun de ces nombres, je décide de placer dans une enveloppe une somme d’argent égale à ce nombre fois 10. Ainsi, l’enveloppe qui correspond au nombre 1 renferme $10, celle qui correspond au nombre 47 renferme $470 et ainsi de suite. La somme totale de toutes ces enveloppes est de $ 9000 soit la somme que je veux payer à quatre ouvriers qui ont fait un travail pour moi qui a duré trois semaines.

Les quatre ouvriers demandaient $2000 chacun mais j’ai décidé de donner $250 de plus à chacun pour travail extrêmement bien fait tout en leur proposant l’énigme des enveloppes.

Je leur ai dit ceci : voici trente-six enveloppes qui renferment un montant d’argent clairement indiqué sur chacune. Vous devez faire quatre groupes de neuf enveloppes et il doit y avoir $2250 dans chaque groupe, soit le montant que vous recevrez. Comment allez-vous procéder?

Tous les ouvriers ont accepté le jeu. J’ai même montré le carré ci-haut en expliquant comment j’ai placé l’argent dans les enveloppes. Mais après plus d’une heure, les quatre groupes de neuf enveloppes n’étaient toujours pas formés!!!

J’ai donc proposé de construire les quatre groupes qui ont été faits en moins de 90 secondes. Comment ai-je fait?

J’ai oublié de vous dire qu’un des ouvriers m’a demandé : votre carré ne serait-il pas un carré magique? J’ai répondu oui et il est même pandiagonal !!!

25) Soit donné un hyper-magique de somme S d'ordre $n=2k$ et tous ses sous-carrés d'ordre k. Nous pensons que la somme des nombres de chaque sous-carré d'ordre k est $k\,\frac{S}{2}$ (**conjecture**).Voici quelques résultats :

Ordre 2 = 2x1 : nous trouvons $\frac{S}{2}$.

Ordre 4 = 2x2 : nous trouvons $2\,\frac{S}{2}$.

Ordre 6 = 2x3 : nous trouvons $\frac{3S}{2}$. Voir problème 20) ci-haut.

Ordre 8 = 2x4 : nous trouvons $4\,\frac{S}{2}$.

Ordre 10 = 2x5 : nous trouvons $\frac{5S}{2}$.

Ordre 12 = 2x6 : nous avons $6\,\frac{S}{2}$.

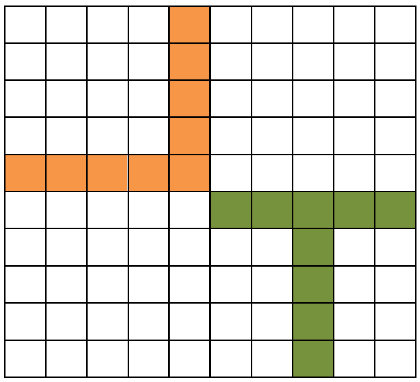
Ordre 14 = 2x7 : avons-nous $\frac{7S}{2}$?

Ordre $4m$ = 2x2m : nous avons $2m\,\frac{S}{2}$.

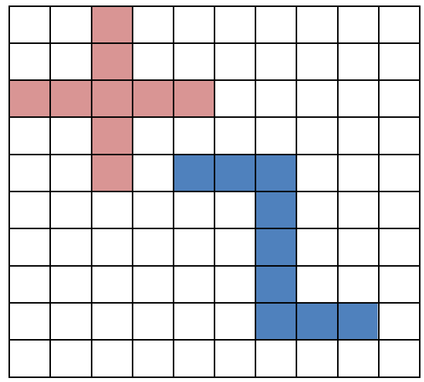
Ordre $4m+2$: avons-nous $(2m+1)\,\frac{S}{2}$? Voilà ce qu'il faut prouver!!!

Nous avons construit une structure générale des carrés hyper-magiques d'ordre 10 et nous avons constaté que la somme des vingt-cinq nombres de chaque sous-carré d'ordre 5 est bien $\frac{5S}{2}$. Vous la trouverez dans l'annexe 16. Nous aimerions construire une structure générale des hyper-magiques d'ordre 14 et voir si $\frac{7S}{2}$ sera notre résultat (projet à venir)!!! Mais ça ne sera qu'un renforcement de la conjecture. La preuve restera à faire pour l'entier impair $k \geq 7$!!!

26) Soit donné un hyper-magique d'ordre 10 et de somme S. Montrez que la somme des cases de l'équerre est toujours $\frac{9S}{10}$ et qu'il en est de même pour la somme des cases de la croix, du T et du Z, peu importe la position de chacun. (Voir le problème 25) ci-haut).



L’équerre et le T



La croix et le Z

Notez que l’équerre, le T, la croix et le Z sont formés de neuf cases.

Ce sont quatre nouvelles propriétés des hyper-magiques d’ordre 10. Pouvez-vous en trouver d’autres?

27) Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour qu’un hyper-magique d’ordre 6 soit formé de 36 entiers.

Remarque :

Le dernier corollaire n’exige pas que le carré magique soit formé seulement d’entiers. En fait, M pandiagonal implique que les quatre classes sont de même somme c’est-à-dire la classe formée des cases vertes, celle formée des cases blanches, celle formée des cases rouges et celle formée des cases jaunes. **C’est la première condition nécessaire pour avoir la pandiagonalité.**

Si les nombres du carré magique sont tous entiers, alors nous avons une autre condition nécessaire pour que M soit pandiagonal à savoir que $k\,S$ soit pair.

Par exemple, si M est un carré magique d’ordre pair et si la somme des nombres situés dans toutes les cases d’une même couleur est différente de la somme des nombres situés dans toutes les cases d’une même autre couleur, alors le carré ne pourra pas être pandiagonal.