6. Les carrés magiques d'ordre 5

6.1 Introduction

Nous allons faire une petite excursion dans l'espace vectoriel E_5 des carrés magiques d'ordre 5. Cet espace vectoriel est de dimension $n(n-2)=15$. En construisant la structure générale de E_5, nous trouverons donc un carré magique général dans lequel il y aura quinze variables libres. Nous allons trouver trois sous-espaces qui contiendront des carrés magiques remarquables. Par exemple, les **Ariane**, qui possèdent onze fusées, forment un sous-espace de dimension 4. Puis, les **ultra-magiques** qui sont **pandiagonaux et associatifs**, forment un sous-espace de dimension 5. Enfin, le sous-espace des **ultra-magiques-alpha, de dimension 3.** Nous verrons ces trois sous-espaces un peu plus loin.

Précisons qu'un carré magique d'ordre n et de somme S est **associatif** si chaque fois que nous prenons deux nombres situés dans deux cases en positions symétriques par rapport au centre du carré, la somme de ceux-ci est toujours $\frac{2S}{n}$.

Les A-Dürer, que nous avons vus au chapitre précédent, sont tous associatifs; en fait, ce sont des Dürer associatifs.

Les carrés magiques normaux d'ordre 5 sont de somme magique S = 65 et f(65) = 1394. Nous retrouvons donc 1394 figures magiques dans tous les carrés magiques normaux d'ordre 5. De plus, le nombre de **carrés magiques normaux primitifs** d'ordre 5 est très grand soit:

275 305 224

Pour les 4x4, nous n'en avions que 880 et pour les 3x3, 1 seul!!!

Nous savons qu'un carré magique d'ordre 3 et de somme S a obligatoirement comme centre le nombre $\frac{S}{3}$. S'il est normal, son centre est 5. Pour les carrés magiques d'ordre 5, le centre est-il toujours $\frac{S}{5}$? Le centre est-il toujours 13 si le carré est normal? La réponse est non et pour illustrer cela, voici vingt-cinq carrés magiques pandiagonaux normaux d'ordre 5. Ils renferment respectivement comme centre les entiers de 1 à 25. Ils sont donc tous primitifs. Ils ont été construits en appliquant une petite règle sur un premier carré normal pandiagonal et celui-ci seul nous a permis de trouver les vingt-quatre autres. Voici cette règle appelée 1-3-5-2-4 :

1) Choisissons A, un carré magique pandiagonal.
2) Ses rangées, de haut en bas, sont notées 1, 2, 3, 4 et 5.
3) Construisons le carré B en plaçant de haut en bas, les rangées 1, 3, 5, 2 et 4 de A.
4) Les colonnes de B, de gauche à droite, sont notées 1, 2, 3, 4 et 5.

5) Construisons le carré C en plaçant de gauche à droite, les colonnes 1, 3, 5, 2 et 4 de B.
6) Le carré C ainsi obtenu est magique et pandiagonal. L'élément de A qui occupe la position (5 ; 5) est maintenant l'élément central de C.
7) Si en plus, A est normal, alors, évidemment, C le sera aussi.

De la même façon, nous avons la règle 1-3-5-7-2-4-6 pour les carrés magiques pandiagonaux d'ordre 7. Le résultat est encore un carré magique pandiagonal et l'élément en position (7 ; 7) dans A devient le centre de C. Suivent les vingt-cinq pandiagonaux normaux 5x5 de centres de 1 à 25; le nombre en-dessous de chaque carré de centre k indique le nombre de carrés magiques normaux parmi les 275 305 224 qui ont le nombre k comme centre; **ceci en fait une très belle classification** :

$$\begin{pmatrix} 25 & 6 & 19 & 3 & 12 \\ 4 & 13 & 22 & 10 & 16 \\ 7 & 20 & 1 & 14 & 23 \\ 11 & 24 & 8 & 17 & 5 \\ 18 & 2 & 15 & 21 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 19 & 12 & 6 & 3 & 25 \\ 1 & 23 & 20 & 14 & 7 \\ 15 & 9 & 2 & 21 & 18 \\ 22 & 16 & 13 & 10 & 4 \\ 8 & 5 & 24 & 17 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 22 & 8 & 19 & 1 & 15 \\ 4 & 11 & 25 & 7 & 18 \\ 10 & 17 & 3 & 14 & 21 \\ 13 & 24 & 6 & 20 & 2 \\ 16 & 5 & 12 & 23 & 9 \end{pmatrix}$$

4 365 792   5 464 716   7 659 936

$$\begin{pmatrix} 23 & 1 & 7 & 14 & 20 \\ 9 & 15 & 18 & 21 & 2 \\ 16 & 22 & 4 & 10 & 13 \\ 5 & 8 & 11 & 17 & 24 \\ 12 & 19 & 25 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 25 & 12 & 3 & 19 \\ 2 & 18 & 9 & 21 & 15 \\ 24 & 11 & 5 & 17 & 8 \\ 20 & 7 & 23 & 14 & 1 \\ 13 & 4 & 16 & 10 & 22 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 23 & 7 & 20 & 1 & 14 \\ 16 & 4 & 13 & 22 & 10 \\ 12 & 25 & 6 & 19 & 3 \\ 9 & 18 & 2 & 15 & 21 \\ 5 & 11 & 24 & 8 & 17 \end{pmatrix}$$

7 835 348   9 727 224   10 403 516

$$\begin{pmatrix} 16 & 9 & 23 & 12 & 5 \\ 22 & 15 & 1 & 19 & 8 \\ 4 & 18 & 7 & 25 & 11 \\ 10 & 21 & 14 & 3 & 17 \\ 13 & 2 & 20 & 6 & 24 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 13 & 22 & 10 & 16 \\ 7 & 20 & 1 & 14 & 23 \\ 11 & 24 & 8 & 17 & 5 \\ 18 & 2 & 15 & 21 & 9 \\ 25 & 6 & 19 & 3 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 19 & 22 \\ 14 & 17 & 21 & 3 & 10 \\ 23 & 5 & 9 & 12 & 16 \\ 7 & 11 & 18 & 25 & 4 \\ 20 & 24 & 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

12 067 524   12 448 644   13 890 160

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 16 & 9 & 23 \\ 6 & 24 & 13 & 2 & 20 \\ 3 & 17 & 10 & 21 & 14 \\ 25 & 11 & 4 & 18 & 7 \\ 19 & 8 & 22 & 15 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 19 & 6 & 25 & 12 & 3 \\ 15 & 2 & 18 & 9 & 21 \\ 8 & 24 & 11 & 5 & 17 \\ 1 & 20 & 7 & 23 & 14 \\ 22 & 13 & 4 & 16 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 7 & 25 & 11 & 4 \\ 15 & 1 & 19 & 8 & 22 \\ 9 & 23 & 12 & 5 & 16 \\ 2 & 20 & 6 & 24 & 13 \\ 21 & 14 & 3 & 17 & 10 \end{pmatrix}$$

13 376 136   15 735 272   15 138 472

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 & 8 & 19 \\ 23 & 9 & 16 & 5 & 12 \\ 20 & 2 & \color{red}{13} & 24 & 6 \\ 14 & 21 & 10 & 17 & 3 \\ 7 & 18 & 4 & 11 & 25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 19 & 3 & 12 & 25 \\ 13 & 22 & 10 & 16 & 4 \\ 20 & 1 & \color{red}{14} & 23 & 7 \\ 24 & 8 & 17 & 5 & 11 \\ 2 & 15 & 21 & 9 & 18 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 23 & 14 & 1 & 20 & 7 \\ 5 & 17 & 8 & 24 & 11 \\ 9 & 21 & \color{red}{15} & 2 & 18 \\ 12 & 3 & 19 & 6 & 25 \\ 16 & 10 & 22 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

19 079 744 15 138 472 15 735 272

$$\begin{pmatrix} 15 & 21 & 9 & 18 & 2 \\ 19 & 3 & 12 & 25 & 6 \\ 22 & 10 & \color{red}{16} & 4 & 13 \\ 1 & 14 & 23 & 7 & 20 \\ 8 & 17 & 5 & 11 & 24 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 19 & 8 & 22 & 15 \\ 7 & 25 & 11 & 4 & 18 \\ 14 & 3 & \color{red}{17} & 10 & 21 \\ 20 & 6 & 24 & 13 & 2 \\ 23 & 12 & 5 & 16 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 & 23 & 9 & 16 & 5 \\ 19 & 1 & 15 & 22 & 8 \\ 25 & 7 & \color{red}{18} & 4 & 11 \\ 3 & 14 & 21 & 10 & 17 \\ 6 & 20 & 2 & 13 & 24 \end{pmatrix}$$

13 376 136 13 890 160 12 448 644

$$\begin{pmatrix} 23 & 14 & 1 & 20 & 7 \\ 16 & 10 & 22 & 13 & 4 \\ 12 & 3 & \color{red}{19} & 6 & 25 \\ 9 & 21 & 15 & 2 & 18 \\ 5 & 17 & 8 & 24 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 10 & 13 & 16 & 22 \\ 18 & 21 & 2 & 9 & 15 \\ 7 & 14 & \color{red}{20} & 23 & 1 \\ 25 & 3 & 6 & 12 & 19 \\ 11 & 17 & 24 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 16 & 10 & 22 & 13 \\ 25 & 12 & 3 & 19 & 6 \\ 18 & 9 & \color{red}{21} & 15 & 2 \\ 11 & 5 & 17 & 8 & 24 \\ 7 & 23 & 14 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

12 067 524 10 403 516 9 727 224

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 19 & 25 & 3 \\ 24 & 5 & 8 & 11 & 17 \\ 13 & 16 & \color{red}{22} & 4 & 10 \\ 2 & 9 & 15 & 18 & 21 \\ 20 & 23 & 1 & 7 & 14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 19 & 3 & 12 & 25 & 6 \\ 22 & 10 & 16 & 4 & 13 \\ 1 & 14 & \color{red}{23} & 7 & 20 \\ 8 & 17 & 5 & 11 & 24 \\ 15 & 21 & 9 & 18 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 & 9 & 5 & 23 & 16 \\ 25 & 18 & 11 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & \color{red}{24} & 20 & 13 \\ 19 & 15 & 8 & 1 & 22 \\ 3 & 21 & 17 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

7 835 348 7 659 936 5 464 716

$$\begin{pmatrix} 1 & 22 & 19 & 15 & 8 \\ 20 & 13 & 6 & 2 & 24 \\ 7 & 4 & \color{red}{25} & 18 & 11 \\ 23 & 16 & 12 & 9 & 5 \\ 14 & 10 & 3 & 21 & 17 \end{pmatrix}$$

4 365 792

Donc, le centre d'un carré magique d'ordre 5 n'est pas obligatoirement le nombre $\frac{S}{5}$ **.**

6.2 Les Ariane

Le sous-espace des Ariane est formé des carrés magiques d’ordre 5 qui possèdent tous les onze fusées suivantes dont six sont verticales vers le haut et cinq, horizontales vers la gauche :

A	B	C	D	E
F	G	H	J	K
L	M	N	O	P
Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z

				E
	G	H	J	
			O	P
Q	R	S		
			Y	

Nous avons illustré quatre fusées, voici les sept autres :

CHNRT DJOSU GMRVX HNSWY FGHDO LMNJT MNOKU

Le carré suivant est un Ariane presque normal de somme S = 137 avec f(137) = 672.

21	63	10	19	24
8	37	41	20	31
60	1	29	32	15
14	30	22	27	44
34	6	35	39	23

Ariane de somme S = 137

Voyons maintenant comment trouver la structure générale des Ariane.

1) En se référant au chapitre 3 de la partie 2, vous construisez la structure générale des carrés magiques d’ordre 5 laquelle renferme quinze variables libres.
2) Pour obtenir la première fusée, vous additionnez les expressions qui se trouvent dans les cinq cases qui définissent cette fusée puis vous posez cette somme égale à S.
3) À partir de cette équation, vous isolez une variable, laquelle disparaîtra du carré après substitution.

4) Puis à partir de cette nouvelle structure, vous recommencez avec la deuxième fusée et ainsi de suite jusqu'à la onzième.
5) Vous obtiendrez ainsi une structure générale des Ariane.

Celle que nous avons trouvée est peut-être différente de la vôtre mais sûrement équivalente en ce sens que les deux structures vont générer les mêmes carrés magiques, ici, les mêmes Ariane. La différence possible entre nos deux structures est due à notre choix des deux variables que nous ferons disparaître lors de la construction de la structure générale des carrés magiques d'ordre 5, ainsi que du choix de la variable que nous ferons disparaître relativement à chaque fusée. **<u>N'oubliez pas le coefficient 1/2 devant le carré ci-dessous!!!</u>**

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 2b & -57a+54h+S & 84a-2b-80h & -29a+26h+S \\ -110a+2b+110h & S-3a & 42a-40h & 2h & 71a-2b-72h+S \\ 43a-46h+S & 40h-38a & 18a-16h & -13a+10h+S & 12h-10a \\ 74a-2b-70h & 20a-18h & -33a+30h+S & -23a+20h+S & -38a+2b+38h \\ -9a+6h+S & 21a-2b-22h+S & 30a-28h & -48a+2b+48h & 6a-4h \end{pmatrix}$$

$$\textit{Structure générale des Ariane}$$

Puisque nous avons quatre variables libres, le sous-espace des Ariane est donc de dimension 4. La fréquence de la structure générale est f(S) = 109 ce qui signifie que tous les Ariane ont en commun 109 figures magiques que vous trouverez dans la Partie 3, annexe 23, programme 28. Puisque nous connaissons un Ariane qui possède exactement 109 figures magiques (voir plus bas), alors ces 109 figures magiques caractérisent le sous-espace des Ariane.

Nous savons qu'il n'existe **aucun Ariane normal** puisqu'il n'existe aucun Ariane de somme 65, (voir plus bas). L'espace des Ariane est cependant **presque normal** puisqu'il renferme au moins un Ariane presque normal.

Voici un Ariane presque normal qui possède exactement 109 figures magiques. Ce sont les 109 figures magiques de la structure générale des Ariane. Pour trouver un carré magique avec f(S) = 109, il est préférable, intuitivement, de donner aux variables libres de très grandes valeurs.

$$\begin{pmatrix} 25243 & 25165 & 42429 & 1 & 33567 \\ 59980 & 25338 & 12583 & 25876 & 2628 \\ 10779 & 37903 & 20179 & 28503 & 29041 \\ 3166 & 19546 & 34833 & 31668 & 37192 \\ 27237 & 18453 & 16381 & 40357 & 23977 \end{pmatrix}$$

$$S = 126405 \quad f(S) = 109$$

Remarque : afin de signaler qu'un carré magique est un Ariane, nous illustrerons toujours la fusée centrale comme dans les carrés ci-haut.

Voici deux autres Ariane presque normaux :

23	1	54	5	40
56	27	3	24	13
4	43	15	32	29
10	14	42	37	20
30	38	9	25	21

S = 123   f(123) = 665

23	1	58	5	44
56	31	3	24	17
8	43	15	36	29
10	14	46	41	20
34	42	9	25	21

S = 131   f(131) = 625

Celui de gauche possède 665 figures magiques et sa somme, 123, est la plus petite possible pour un Ariane presque normal. De plus, il existe un seul Ariane presque normal de somme 123. Il est évident qu'un carré magique presque normal d'ordre 5 a une somme magique ≥ 65. Dans MAPLE, vous trouverez le fichier « Ariane 2 » qui montre qu'il n'existe pas d'Ariane presque normal de somme 65 donc aucun Ariane normal. Le fichier montre aussi qu'il existe un seul Ariane presque normal de somme 123, la plus petite possible. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 6.1 :

Si A est un Ariane presque normal de somme S, alors $S \geq 123$. De plus, il existe un seul Ariane presque normal de somme $S = 123$.

Jusqu'à maintenant, il nous est arrivé plusieurs fois d'avoir à trouver un carré magique issu d'une structure générale de fréquence f(S) = k, dont la fréquence est aussi k. Dans l'exemple précédent, la fréquence de la structure générale des Ariane est f(S) = 109. Nous cherchions un Ariane particulier dont la fréquence est 109 et nous avons trouvé le carré ci-haut de somme 126 405 avec f (126 405) = 109.

Avions-nous la certitude de pouvoir trouver cet Ariane? Intuitivement oui, mais sans certitude absolue!! Heureusement, jusqu'à maintenant, nous avons toujours trouvé le carré magique cherché mais en sera-t-il toujours ainsi? La réponse est oui, grâce au résultat suivant :

Théorème 6.2 :

Une structure générale dont la fréquence est $f(S) = k$ génère au moins un carré magique de fréquence k.

La démonstration de ce théorème se trouve au chapitre 14 (section 14.8). Th.6.2 = Th.14.11

6.3 Les ultra-magiques d'ordre 5

Un carré magique **pandiagonal** et **associatif** est appelé carré **ultra-magique.** Ces carrés possèdent de très belles propriétés. Les ultra-magiques d'ordre 5 forment un sous-espace de dimension 5.

Il existe seulement seize ultra-magiques normaux primitifs d'ordre 5 sur les 275 305 224 carrés magiques normaux d'ordre 5. Cela en fait des carrés d'une **grande rareté.** Vous les trouverez un peu plus loin.

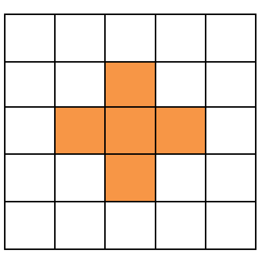
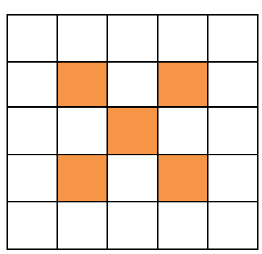
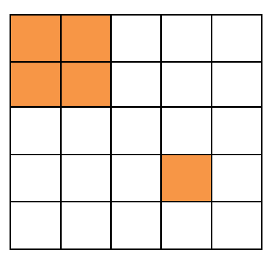
Les ultra-magiques normaux d'ordre 5 sont au nombre de 128 soit 16 x 8. Le sous-espace des ultra-magiques est donc normal d'ordre 128. Voici une structure générale des ultra-magiques d'ordre 5 :

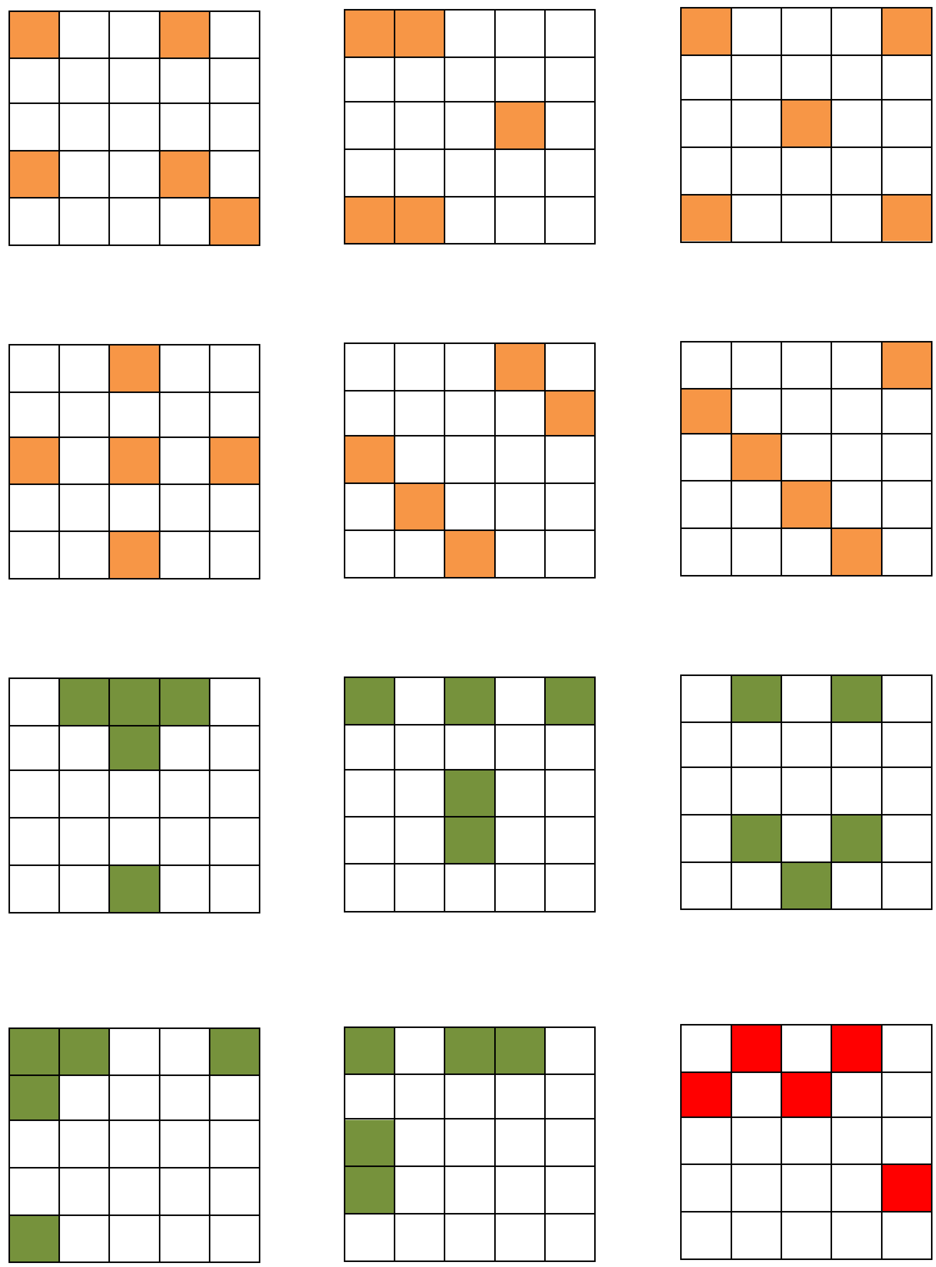
a	b	c	$a+b+c+f-3k$	$-2a-2b-2c-f+8k$
$-a-b+3k$	f	$-a-2b-c-f+6k$	$a+2b-2k$	$a+b+c-2k$
$-a-c-f+4k$	$2a+2b+c-4k$	k	$-2a-2b-c+6k$	$a+c+f-2k$
$-a-b-c+4k$	$-a-2b+4k$	$a+2b+c+f-4k$	$-f+2k$	$a+b-k$
$2a+2b+2c+f-6k$	$-a-b-c-f+5k$	$-c+2k$	$-b+2k$	$-a+2k$

Structure générale des ultra–magiques d'ordre 5

La fréquence de cette structure générale de somme $5k$ est $f(5k)=362$. Donc, tous les ultra-magiques ont en commun les 362 figures magiques de cette structure générale. Vous les trouverez dans la Partie 3.

Ce qui est extraordinaire avec les ultra-magiques, c'est qu'ils possèdent de nombreuses super-figures. En voici quelques-unes qui sont des super-figures de la structure générale donc toutes ces figures sont des super-figures pour tous les ultra-magiques d'ordre 5.



La dernière figure en rouge est une simple figure magique de la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5. Les quatorze autres sont des super-figures. Cela signifie que si nous déposons une de ces quatorze figures sur un ultra-magique quelconque d'ordre 5, peu importe où et comment, en autant que la figure couvre parfaitement cinq cases, alors cette figure couvrira une figure magique. Ces quatorze super-figures génèrent 108 des 362 figures magiques que possède la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5.

Le carré magique suivant est un ultra-magique normal d'ordre 5. Sa somme magique est S = 65 avec f(65) = 1394.

1	15	22	8	19
23	9	16	5	12
20	2	13	24	6
14	21	10	17	3
7	18	4	11	25

Carré UM

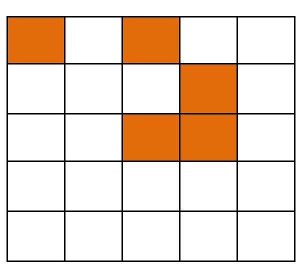
Pour l'obtenir, nous avons posé : $a = 1$; $b = 15$; $c = 22$; $f = 9$; $k = 13$. Ces cinq nombres, dans cet ordre, sont les coordonnées de l'ultra-magique. Celui-ci peut être représenté par :

$$(1\,;15\,;22\,;9\,;13)$$

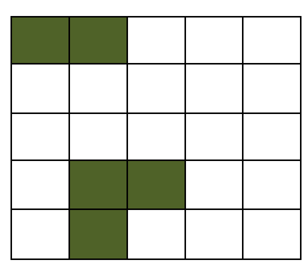
et ce, de façon unique (relativement à une base ordonnée).

Nous vous proposons de vérifier que les quatorze super-figures ci-haut le sont pour le carré UM. De plus, en observant les 362 figures magiques qui caractérisent les ultra-magiques (voir la Partie 3, annexe 23, programme 08), essayez de trouver d'autres super-figures.

Voyons maintenant deux nouvelles figures que nous appellerons **ultra-figures.**

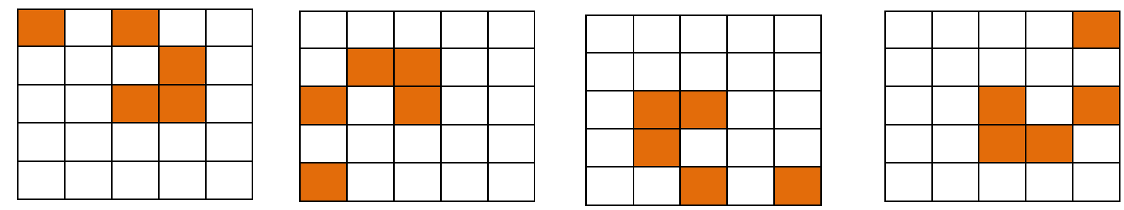


F1

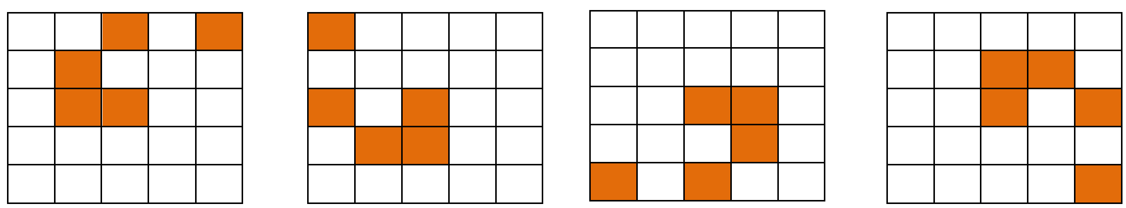


F2

À partir de la figure F1, nous pouvons en construire sept autres en la tournant de 90°, 180° et 270°, puis en la regardant par derrière, nous en aurons une autre que nous allons aussi tourner de 90°, 180° et 270°. Ces huit figures sont appelées les **figures équivalentes** de la figure F1. Les voici :



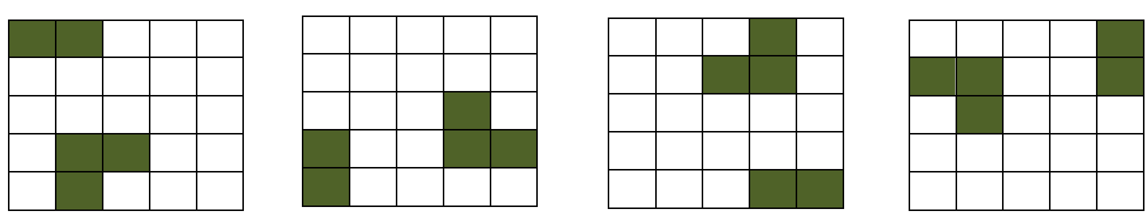
F1

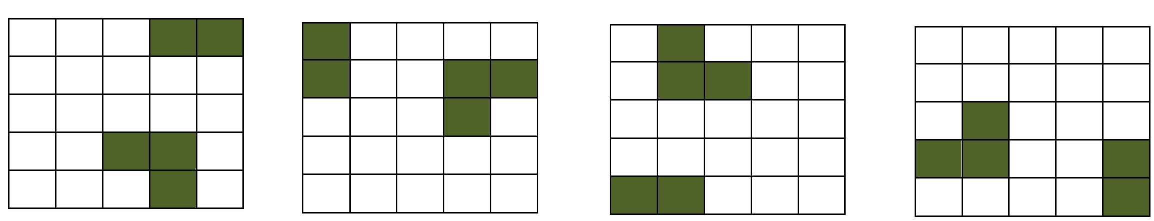


Si les huit figures équivalentes sont des figures magiques dans un carré magique M, alors nous dirons que cette figure est une **ultra-figure** pour M.

Il est remarquable ici de constater que les huit figures équivalentes de F1 sont des figures magiques de la structure générale des ultra-magiques. F1 est donc une ultra-figure pour tous les carrés ultra-magiques d’ordre 5. Ces figures doivent occuper, dans tous les ultra-magiques, les positions indiquées dans les huit carrés ci-haut.

De même à partir de F2 :





F2 est aussi une ultra-figure pour tous les carrés ultra-magiques d'ordre 5. Ces figures doivent occuper, dans tous les ultra-magiques, les positions indiquées dans les huit derniers carrés ci-haut.

Notez qu'une super-figure est une ultra-figure; la réciproque n'est pas vraie. Terminons avec les **16 ultra-magiques normaux primitifs d'ordre 5** :

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

UM 1

2	14	25	18	6
23	16	7	4	15
9	5	13	21	17
11	22	19	10	3
20	8	1	12	24

UM 2

2	23	9	15	16
14	20	1	22	8
21	7	13	19	5
18	4	25	6	12
10	11	17	3	24

UM 3

5	11	22	8	19
23	9	20	1	12
16	2	13	24	10
14	25	6	17	3
7	18	4	15	21

UM 4

5	23	6	14	17
11	19	2	25	8
22	10	13	16	4
18	1	24	7	15
9	12	20	3	21

UM 5

6	18	5	14	22
15	24	7	16	3
17	1	13	25	9
23	10	19	2	11
4	12	21	8	20

UM 6

17	8	24	15	1
14	5	16	7	23
6	22	13	4	20
3	19	10	21	12
25	11	2	18	9

UM 7

17	14	10	3	21
8	1	22	19	15
24	20	13	6	2
11	7	4	25	18
5	23	16	12	9

UM 8

19	8	22	15	1
12	5	16	9	23
6	24	13	2	20
3	17	10	21	14
25	11	4	18	7

UM 9

19	12	6	23	5
8	25	4	17	11
2	16	13	10	24
15	9	22	1	18
21	3	20	14	7

UM 10

20	11	7	23	4
8	24	5	16	12
1	17	13	9	25
14	10	21	2	18
22	3	19	15	6

UM 11

22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4

UM 12

22	14	5	8	16
3	6	17	24	15
19	25	13	1	7
11	2	9	20	23
10	18	21	12	4

UM 13

24	3	7	11	20
12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14
6	15	19	23	2

UM 14

24	3	7	15	16
12	20	21	4	8
1	9	13	17	25
18	22	5	6	14
10	11	19	23	2

UM 15

25	11	2	8	19
3	9	20	21	12
16	22	13	4	10
14	5	6	17	23
7	18	24	15	1

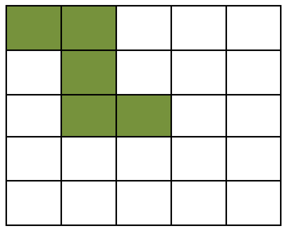
UM 16

Les 128 ultra-magiques normaux d’ordre 5 sont obtenus des seize primitifs précédents : il suffit de remplacer chacun par ses huit équivalents.

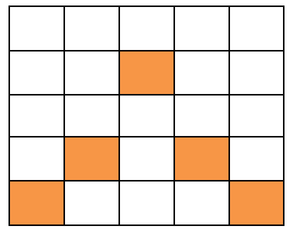
Par exemple, le carré UM ci-haut est un équivalent du carré UM 9.

6.4 Les ultra-magiques-alpha

Ce sont des **ultra-magiques d’ordre 5** qui possèdent les deux figures magiques suivantes :



F3



F4

Ils forment un sous-espace de dimension 3. Celui-ci est normal d’ordre 8. Il existe seulement deux ultra-magiques-alpha normaux primitifs d’ordre 5 sur les 275 305 224 carrés magiques normaux d’ordre 5. Cela en fait des carrés d’une **très grande rareté.** Vous les trouverez un peu plus loin.

Voici une structure générale des ultra-magiques-alpha :

$$\begin{pmatrix} a & b & \frac{-2a-b+5k}{2} & -2a-2b+5k & \frac{4a+3b-5k}{2} \\ -a-b+3k & \frac{-4a-5b+11k}{2} & 2a+b-2k & a+2b-2k & \frac{b+k}{2} \\ 2a+3b-4k & \frac{2a+3b-3k}{2} & k & \frac{-2a-3b+7k}{2} & -2a-3b+6k \\ \frac{-b+3k}{2} & -a-2b+4k & -2a-b+4k & \frac{4a+5b-7k}{2} & a+b-k \\ \frac{-4a-3b+9k}{2} & 2a+2b-3k & \frac{2a+b-k}{2} & -b+2k & -a+2k \end{pmatrix}$$

$$\textit{Structure générale des ultra-magiques-alpha}$$

Pour l’obtenir, nous avons remplacé dans la structure générale des ultra-magiques ci-haut, c par l’expression $a+2b+f-3k$ obtenue de la figure F4. Dans la nouvelle structure générale, nous avons remplacé f par l’expression $\frac{-4a-5b+11k}{2}$ obtenue de la figure F3. D’où la structure générale des ultra-magiques-alpha de somme $5k$. La fréquence de cette structure générale est

$f(5k) = 934$. Donc, tous les ultra-magiques-alpha ont en commun les 934 figures magiques de la structure générale. Voici les huit ultra-magiques-alpha normaux :

4	23	17	11	10
12	6	5	24	18
25	19	13	7	1
8	2	21	20	14
16	15	9	3	22

2	23	19	15	6
14	10	1	22	18
21	17	13	9	5
8	4	25	16	12
20	11	7	3	24

22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4

24	3	7	11	20
12	16	25	4	8
5	9	13	17	21
18	22	1	10	14
6	15	19	23	2

10	11	17	23	4
18	24	5	6	12
1	7	13	19	25
14	20	21	2	8
22	3	9	15	16

6	15	19	23	2
18	22	1	10	14
5	9	13	17	21
12	16	25	4	8
24	3	7	11	20

16	15	9	3	22
8	2	21	20	14
25	19	13	7	1
12	6	5	24	18
4	23	17	11	10

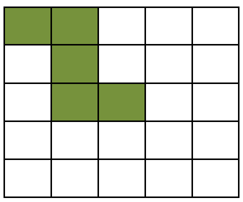
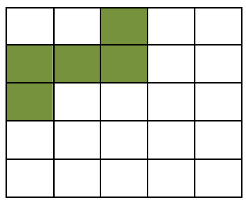
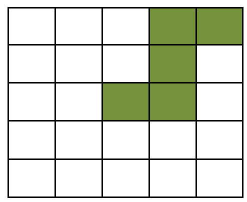
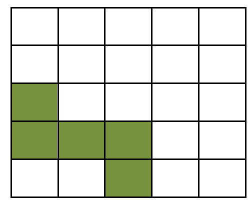
20	11	7	3	24
8	4	25	16	12
21	17	13	9	5
14	10	1	22	18
2	23	19	15	6

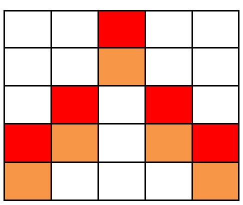
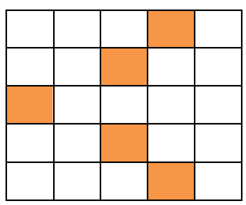
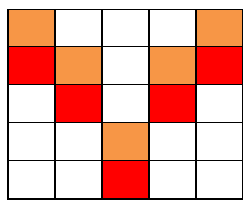
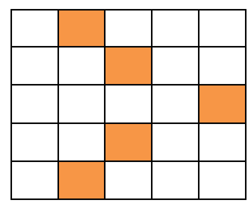
Dans la colonne de gauche, les quatre ultra-magiques-alpha sont de haut en bas, les carrés A ; $R^2(A)$; $R_*(A)$; $R_*^2(A)$.

Dans la colonne de droite, les quatre ultra-magiques-alpha sont de haut en bas, les carrés B ; $R^2(B)$; $R_*(B)$; $R_*^2(B)$.

Les carrés A *et* B sont deux primitifs et chacun est accompagné de trois équivalents.

Enfin, que pouvons-nous dire des figures F3 et F4? **Ce sont 2 ultra-figures**.

Sur les huit figures équivalentes de F3, nous retrouvons quatre fois deux figures identiques. Nous avons donc quatre figures différentes qui sont magiques dans la structure générale des ultra-magiques-alpha, dans la position indiquée ci-haut, laquelle n'est pas forcément unique.

Il en est de même pour la figure F4. Nous avons illustré les six positions possibles de F4 dans la structure générale.

Terminons en disant qu'il est possible, à partir de la structure générale des carrés magiques d'ordre 5, de construire de nouveaux sous-espaces qui renfermeront des carrés magiques caractérisés par de nouvelles figures magiques.

6.5 Problèmes

1) Un pavé de carrés magiques pandiagonaux.

M

A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q
R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V
W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q
R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V
W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L
A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K	F	G	H	J	K
M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q	M	N	O	P	Q
R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V	R	S	T	U	V
W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L	W	X	Y	Z	L

Le carré M d'ordre 5 en haut à gauche est magique et pandiagonal. Il se retrouve avec onze copies pour former le tableau rectangulaire ci-haut. Nous aurions pu former un tableau dans lequel nous aurions m n fois le carré M. Ici, nous avons m = 3 et n = 4 d'où m n = 12 fois le carré M. Montrez que le carré bleu d'ordre 5 est magique et pandiagonal, quelle que soit sa position dans le tableau ci-haut. Qu'en est-il de sa somme?

2) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 4.
3) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 6.
4) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre 7.
5) Même problème que le précédent avec M, un carré magique pandiagonal d'ordre n où n est un entier ≥ 4.
6) Pouvons-nous prendre n = 3?
7) Soient deux carrés magiques d'ordre n, un entier impair > 2. Si les nombres situés dans les cases centrales sont différents, alors les deux carrés sont primitifs. Pourquoi?
8) Dans 6.1, nous avons présenté une classification des carrés magiques normaux primitifs d'ordre 5 selon le centre du carré. Il était nécessaire de trouver le nombre de carrés de

centre 1, de centre 2, …, de centre 12 et de centre 13. Le nombre de carrés de centre 14 est le même que le nombre de carrés de centre 12; le nombre de carrés de centre 15 est le même que le nombre de carrés de centre 11, et ainsi de suite. En fait, il y a autant de carrés de centre $k,\ avec\ 1 \leq k \leq 12$, qu'il y a de carrés de centre $26-k$. Démontrez ce résultat.

9) Montrez que le centre d'un ultra-magique d'ordre 5 et de somme S est toujours S/5.

10) Soit M, un carré ultra-magique d'ordre 5 tel que les extrémités d'une de ses grandes diagonales soient 10 et 26.
   a) Quel est la somme magique de M?
   b) Quel nombre se trouve dans la case centrale de M?
   c) Soient deux cases symétriques par rapport au centre de M. Si l'une renferme 12, alors que renferme l'autre?
   d) Si M est presque normal, alors quel est le plus grand entier possible de M?

11) Démontrez que l'application du procédé 1-3-5-2-4, présenté dans 6.1, sur un carré magique pandiagonal A d'ordre 5, nous donne un nouveau carré magique pandiagonal B d'ordre 5. Quel est le centre de B?

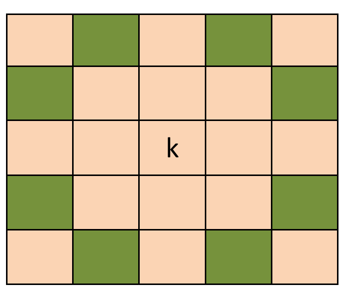
12) Trouvez un carré magique normal d'ordre 5 à partir duquel vous pourrez construire une infinité de carrés magiques presque normaux dont les sommes magiques sont consécutives à partir de S = 65. Indice : vous pouvez trouver le carré cherché parmi les ultra-magiques normaux de 6.3.

13) Pouvez-vous trouver un Ariane presque normal de somme magique S = 120?

14) Je possède 25 lingots de platine dont les poids en grammes sont tous différents et ont la forme 100k avec k un entier qui varie de 1 à 25. Le plus petit pèse donc 100 grammes et le plus gros, 2500 grammes. Je désire les offrir à mes cinq enfants de façon que ceux-ci reçoivent la même quantité de platine avec la même quantité de lingots.
   a) Comment puis-je procéder?
   b) La façon de faire est-elle unique?
   c) Quelle quantité de platine chacun recevra-t-il?

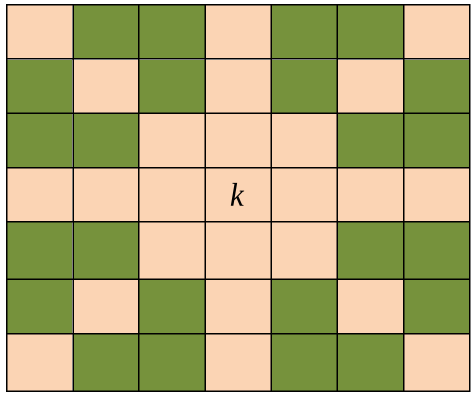
15) Si dans la structure générale des Ariane, les variables libres ne prennent que des valeurs entières, alors trouvez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un Ariane renferme que des entiers.

16) Voici un carré magique d'ordre 5, de somme S et de centre k.



Montrez que la somme des nombres situés dans les cases vertes est S + 3k.

17) Voici un carré magique d'ordre 7 de somme S et de centre k.



Trouvez la somme des nombres situés dans les cases vertes.

18) Reprenez le problème 11 avec le procédé 1-3-5-7-2-4-6 pour l'ordre 7.
19) Reprenez le problème 11 avec le procédé 1-3-5-7-9-2-4-6-8 pour l'ordre 9.
20) Soit A, un Ariane. Ses sept autres équivalents sont-ils des Ariane?