10. Carrés magiques premiers

10.1 Introduction

En général, les carrés magiques sont formés d'entiers positifs tous différents deux à deux; certains renferment tous les entiers consécutifs de 1 à n^2 . Mais que dire d'un carré magique qui renferme que des nombres premiers tous différents et dont la somme magique est elle même un nombre premier?

Si un carré magique contient que des nombres premiers, alors nous dirons que ce carré magique est un **carré premier.** Si en plus, la somme d'un carré premier est un nombre premier, alors nous dirons que ce carré est **super-premier.** Notre premier objectif est de trouver des carrés premiers presque normaux. Les carrés magiques 3 et 10 de la partie 1 sont de tels carrés.

Nous allons tenter de construire trois types de carrés premiers d'ordre n :

1. Les **carrés premiers ordinaires** qui seront formés de n^2 nombres premiers quelconques.
2. Les **carrés premiers parfaits** qui seront formés de n^2 nombres premiers consécutifs.
3. Les **carrés hyper-premiers** qui seront formés de n^2 nombres premiers tels que ceux-ci forment une suite arithmétique non triviale (de raison non nulle).

Rappelons qu'un nombre premier est un entier ≥ 2 qui ne possède que deux diviseurs entiers distincts ≥ 1 donc qui n'est divisible que par 1 et lui-même. En conséquence, 1 n'est pas un nombre premier. Voici la liste des 17 premiers nombres premiers :

$$\{2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 23\ ;\ 29\ ;\ 31\ ;\ 37\ ;\ 41\ ;\ 43\ ;\ 47\ ;\ 53\ ;\ 59...\}$$

Tous les nombres premiers, excepté 2, sont impairs. Le théorème fondamental de l'arithmétique, quant à lui, nous apprend que tout entier naturel ≥ 2 qui n'est pas un nombre premier, se décompose en un produit de nombres premiers et ce, de façon unique à l'ordre près des facteurs. Comme exemples :

$$4 = 2\times 2\ \ ;\ \ 30 = 2\times 3\times 5 = 3\times 5\times 2\ \ ;\ \ 5678 = 2\times 17\times 167$$

10.2 Carrés premiers ordinaires

Nous avons fabriqué un programme dans MAPLE qui nous permet de construire des carrés premiers ordinaires d'ordres 3, 4 et 5. Voici l'idée : à partir d'une liste de nombres premiers, nous construisons des carrés et retenons seulement ceux qui sont magiques et sans répétition. Vous le trouverez dans la Partie 3, annexe 23.

Voici trois exemples de carrés premiers presque normaux:

(1) $\begin{pmatrix} 43 & 67 & 109 \\ 139 & 73 & 7 \\ 37 & 79 & 103 \end{pmatrix}$
$S = 219$

(2) $\begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix}$
$S = 336$

(3) $\begin{pmatrix} 17 & 73 & 59 & 13 & 151 \\ 79 & 101 & 29 & 37 & 67 \\ 31 & 109 & 83 & 43 & 47 \\ 163 & 19 & 53 & 71 & 7 \\ 23 & 11 & 89 & 149 & 41 \end{pmatrix}$
$S = 313$

Le premier (1), d'ordre 3, a pour somme 219, un nombre non premier.

Le deuxième (2), d'ordre 4, a pour somme 336, un nombre non premier.

Le troisième (3), d'ordre 5, a pour somme 313, un **nombre premier**.

Il est déjà très impressionnant d'avoir un carré magique formé de nombres premiers tous différents mais lorsque la somme magique est encore un nombre premier, cela est presque du domaine de la magie!!!

Quand pouvons-nous obtenir une somme magique qui est un nombre premier?

Comme nous avons vu au chapitre 4, les carrés magiques d'ordre 1 ne nous intéressent pas vraiment. Ils se confondent avec les nombres réels et si un tel carré renferme un nombre premier p, alors il est clair que la somme sera le nombre premier p.

Les carrés magiques d'ordre 2 sont tous triviaux et si l'un d'eux renferme le nombre premier p, alors la somme magique sera 2 p qui n'est pas un nombre premier puisque $p \geq 2$. Donc aucun carré magique d'ordre 2 formé de nombres premiers ne peut avoir comme somme, un nombre premier.

Quant aux carrés magiques d'ordre 3, nous savons que le nombre central est toujours $\frac{S}{3}$. Si ce nombre est le nombre premier p, alors $S = 3p$ qui n'est jamais un nombre premier puisque $p \geq 2$. La somme d'un carré magique d'ordre 3 ne sera jamais un nombre premier si le nombre central est un nombre premier.

Théorème 10.1 :

La somme d'un carré magique d'ordres 2 ou 3, formé que de nombres premiers, n'est jamais un nombre premier.

Le deuxième objectif que nous poursuivons est la construction d'un carré super-premier presque normal d'ordre n. Nous aurons donc :

$$n \geq 4$$

Théorème 10.2 :

Soit un carré super-premier presque normal d'ordre $n \geq 4$. Alors n est un entier impair ≥ 5.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer que si n est un entier pair ≥ 4, alors la somme n'est jamais un nombre premier. En effet, chaque rangée ne peut pas contenir le nombre 2 et donc, est formée d'un nombre pair de nombres impairs. Ainsi, la somme magique est un entier pair, évidemment > 2, lequel n'est pas un nombre premier. Si nous voulons construire un carré magique formé que de nombres premiers différents dont la somme est un nombre premier, alors il faudra que l'ordre du carré soit un entier impair ≥ 5.

Maintenant, si n est un entier impair ≥ 5, sommes-nous assurés de pouvoir trouver un carré magique formé de nombres premiers différents dont la somme est un nombre premier? Nous n'avons pas la réponse à cette question mais cependant, nous savons que cela est possible pour $n = 5, 7$ *et* 11. Pour cela, il suffit de regarder les trois premiers carrés premiers de 10.3. Voici deux autres carrés super-premiers presque normaux d'ordre 5:

$$\begin{pmatrix} 211 & 47 & 67 & 71 & 257 \\ 73 & 89 & 113 & 127 & 251 \\ 131 & 139 & 149 & 181 & 53 \\ 137 & 19 & 227 & 191 & 79 \\ 101 & 359 & 97 & 83 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 193 & 5 & 17 & 83 & 349 \\ 89 & 103 & 107 & 109 & 239 \\ 113 & 157 & 163 & 173 & 41 \\ 229 & 3 & 223 & 181 & 11 \\ 23 & 379 & 137 & 101 & 7 \end{pmatrix}$$

$$S = 653 \qquad\qquad S = 647$$

Les cinq carrés premiers que nous venons de voir sont ordinaires. Seulement les 3 derniers sont des super-premiers. Ils sont tous presque normaux.

10.3 Carrés premiers parfaits

Nous avons trouvé sur le site (*) suivant, que nous recommandons fortement :

(*) http://digilander.libero.it/ice00/magic/prime/orderConstant.html

le très beau carré magique d'ordre 5 formé de vingt-cinq nombres premiers consécutifs allant de 13 à 113; sa somme magique est le nombre premier 313. Puis un carré magique d'ordre 7 formé de quarante-neuf nombres premiers consécutifs allant de 7 à 239; sa somme est le nombre premier 797. Les voici :

$$\begin{pmatrix} 59 & 107 & 71 & 23 & 53 \\ 13 & 37 & 113 & 61 & 89 \\ 43 & 41 & 83 & 79 & 67 \\ 101 & 19 & 17 & 103 & 73 \\ 97 & 109 & 29 & 47 & 31 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 109 & 29 & 151 & 211 & 157 & 13 & 127 \\ 197 & 229 & 83 & 23 & 103 & 31 & 131 \\ 67 & 11 & 89 & 227 & 163 & 233 & 7 \\ 113 & 139 & 61 & 107 & 37 & 239 & 101 \\ 191 & 47 & 179 & 167 & 17 & 137 & 59 \\ 79 & 149 & 181 & 19 & 97 & 73 & 199 \\ 41 & 193 & 53 & 43 & 223 & 71 & 173 \end{pmatrix}$$

$$S = 313 \qquad\qquad S = 797$$

Enfin, toujours sur le même site, voici un carré magique d'ordre 11 formé de 121 nombres premiers consécutifs allant de 67 à 797; sa somme est le nombre premier 4507.

449	**521**	**373**	**271**	**263**	**727**	**71**	**547**	**619**	**97**	**569**
661	**593**	**337**	**239**	**269**	**163**	**151**	**677**	**367**	**463**	**587**
601	**109**	**137**	**607**	**307**	**577**	**397**	**691**	**409**	**421**	**251**
457	**233**	**769**	**479**	**659**	**223**	**487**	**67**	**101**	**541**	**491**
167	**509**	**139**	**653**	**701**	**181**	**257**	**227**	**571**	**599**	**503**
73	**439**	**733**	**431**	**797**	**523**	**191**	**761**	**229**	**89**	**241**
641	**197**	**179**	**317**	**149**	**617**	**443**	**199**	**643**	**773**	**349**
131	**467**	**743**	**563**	**283**	**79**	**709**	**379**	**433**	**331**	**389**
757	**419**	**557**	**173**	**293**	**683**	**401**	**157**	**107**	**499**	**461**
359	**739**	**193**	**127**	**113**	**631**	**613**	**719**	**277**	**383**	**353**
211	**281**	**347**	**647**	**673**	**103**	**787**	**83**	**751**	**311**	**313**

$$S = 4507$$

Ces trois carrés magiques sont super-premiers parfaits. Ils sont évidemment presque normaux. Nous trouvons, sur ce site, des carrés premiers parfaits d'ordre 4 à 63. Extraordinaire!!!

Nous avons construit un programme dans MAPLE qui nous permet de trouver des carrés premiers parfaits d'ordre 4. Dans la liste des nombres premiers énumérés dans l'ordre, à partir du plus petit à gauche, choisissons une suite de16 nombres consécutifs. Si nous commençons par le premier, soit 2, ce sera la suite 1; si nous commençons par le deuxième, soit 3, ce sera la suite 2, etc.

Pour les suites de 1 à 10, il est impossible de construire un carré magique, ce qui est évident avec la suite 1. Pour les suites de 2 à 10, notre programme montre qu'il n'existe aucun carré magique. Nous devons donc passer à la suite 11 qui va de 31 à 101. Nous avons trouvé trente-deux carrés magiques soient quatre primitifs et leurs équivalents (4 x 8 = 32). Ce sont les seuls et Ils ont tous la même somme $S = 258$. Les voici :

37	53	89	79
83	61	67	47
97	71	59	31
41	73	43	101

S = 258

37	97	83	41
89	59	67	43
53	71	61	73
79	31	47	101

S = 258

59	31	97	71
43	101	41	73
89	79	37	53
67	47	83	61

S = 258

59	97	31	71
89	37	79	53
43	41	101	73
67	83	47	61

S = 258

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 10.3 :

Si un carré magique d'ordre 4 renferme **seize nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 258$. De plus, si $S = 258$, alors les seize nombres premiers du carré vont obligatoirement de 31 à 101.

Nous avons donc trouvé les quatre premiers carrés premiers parfaits primitifs d'ordre 4. Ils ont la plus petite somme possible!!! Si nous avons un autre carré premier parfait différent des 32 que nous avons trouvés, alors sa somme sera >258.

Nous avons ensuite pris la suite 12, laquelle commence par 37. Nous avons trouvé soixante-quatre carrés magiques soient huit primitifs et leurs équivalents (8 x 8 = 64). Ce sont les seuls et ils ont tous la même somme soit $S = 276$.

Puis, nous avons pris les suites 13 à 620 000, ce qui nous a permis de trouver 224 nouveaux carrés magiques soient 28 nouveaux primitifs (28 x 8 = 224).

Donc, avec les suites 1 à 620 000, nous avons montré qu'il n'existe que 40 carrés premiers parfaits primitifs.

43	83	89	61
59	79	97	41
103	47	53	73
71	67	37	101

S = 276

61	83	89	43
73	47	53	103
41	79	97	59
101	67	37	71

S = 276

61	103	71	41
53	47	79	97
89	83	67	37
73	43	59	101

S = 276

79	59	41	97
83	43	61	89
67	71	101	37
47	103	73	53

S = 276

79	97	53	47
71	41	61	103
59	101	73	43
67	37	89	83

S = 276

83	37	89	67
103	41	61	71
43	101	73	59
47	97	53	79

S = 276

97	59	41	79
37	71	101	67
89	43	61	83
53	103	73	47

S = 276

101	97	37	41
43	47	83	103
59	79	67	71
73	53	89	61

S = 276

Parmi toutes les suites, nous éliminons celles qui ont pour somme un entier non multiple de 8 (Voir problème 10 de 10.6). Ainsi, la suite 13 qui va de 41 à 107 a pour somme 1174 qui n'est pas divisible par 8. Cette suite ne peut donc pas conduire à un carré magique. Que la somme soit un multiple de 8 est une condition nécessaire mais non suffisante pour que la suite nous mène à un carré magique. **Nous vous suggérons fortement l'annexe 8 qui complète le tableau.**

Existe-t-il un carré premier parfait pour tous les ordres $n \geq 64$?

Voilà une grande question pour laquelle nous n'avons pas de réponse. Quant au carré premier parfait d'ordre 3, celui-ci a été trouvé en 1988 par Harry L. Nelson. Il est formé de neuf nombres premiers consécutifs dont le plus petit est 1 480 028 129. Les neuf nombres premiers sont tous de dix chiffres. Harry Nelson a ainsi reçu le prix de cent dollars offert par Martin Gardner à celui qui trouverait le premier carré premier parfait d'ordre 3. Vous trouverez ce carré sur le site «multimagie.com» de Christian Boyer; nous l'avons reproduit dans la section 10.5.

Si un carré premier est d'ordre pair ≥ 4, sa somme peut-elle être un nombre premier si nous acceptons que les nombres premiers qui composent ce carré ne soient pas tous différents? La réponse est OUI.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 13 & 19 \\ 17 & 13 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 17 & 11 \\ 11 & 19 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S = 37$$

Ce carré magique d'ordre 4 est super-premier mais n'est pas presque normal. Nous avons : quatre 2, un 3 et un 7, deux 5, deux 11, deux 13, deux 17 et deux 19. Ce carré renferme les huit premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.

Nous venons de voir qu'un carré premier parfait d'ordre 4 a pour plus petite somme l'entier 258. Si les nombres premiers ne sont pas consécutifs, alors quelle serait la plus petite somme d'un carré premier presque normal d'ordre 4? La somme peut-elle être plus petite que 258? La réponse est oui. Nous avons trouvé le carré premier presque normal suivant, de somme 120. De plus, sa fréquence est $f(120) = 44$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 37 & 19 & 61 \\ 67 & 31 & 5 & 17 \\ 7 & 11 & 73 & 29 \\ 43 & 41 & 23 & 13 \end{pmatrix}$$

$$S = 120$$

Considérons la suite des vingt-cinq nombres premiers consécutifs allant de 3 à 101. Nous allons en choisir seize parmi les vingt-cinq. Nous obtenons ainsi $C_{16}^{25} = 2\ 042\ 975$ suites de seize nombres premiers différents et les deux conditions suivantes :

1) Dans chaque suite, la somme des seize nombres premiers doit être divisible par 8.
2) Dans chaque suite, la somme des seize nombres premiers doit être ≤ 480.

Nous voulons fabriquer un carré premier presque normal dont la somme sera la plus petite. L'addition de seize nombres premiers impairs doit être divisible par 4 car la somme magique est un entier. De plus, la somme magique est paire car elle est la somme de quatre impairs. Voilà pourquoi la somme des seize nombres premiers doit être divisible par 8.

En additionnant les seize premiers nombres premiers à partir de 3, il est facile de conclure que la somme magique est ≥ 110. Mais le carré ci-haut a pour somme magique 120. Ainsi, la plus petite somme cherchée S vérifie :

$$110 \leq S \leq 120$$

Et voilà pourquoi la somme des seize nombres premiers doit être $\leq 480 = 4 \times 120$.

Notre programme dans MAPLE nous donne trente-deux suites qui vérifient les deux conditions. Chaque suite est susceptible de nous conduire à un carré magique. Mais seulement deux suites vont nous donner des carrés magiques.

Nous avons :

Suite(s) de somme :	somme magique correspondante :	carrés magiques obtenus :
440 (1 seule suite)	110	0
448 (aucune)	112	0
456 (deux)	114	0
464 (six)	116	0
472 (sept)	118	0
480 (seize)	120	128

Les deux suites de somme 480 qui génèrent les 128 carrés premiers presque normaux sont :

$Suite\, A: \quad \{3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;61;67;73\}$

$Suite\, B: \quad \{3;5;7;11;13;17;19;23;31;37;41;43;47;53;59;71\}$

La suite A génère 96 carrés premiers presque normaux donc douze primitifs.

La suite B génère 32 carrés premiers presque normaux donc quatre primitifs.

En tout : cent vingt-huit carrés premiers presque normaux donc seize primitifs, générés par deux des trente deux suites de seize nombres premiers distincts, choisis parmi les vingt-cinq nombres premiers allant de 3 à 101.

Le tableau ci-haut montre que la plus petite somme magique est 120. De plus, il n'existe que 128 carrés premiers presque normaux de somme magique 120.

Terminons avec cette question : pourquoi avoir choisi les nombres premiers de 3 à 101? N'oublions pas que nous voulons trouver tous les carrés premiers presque normaux dont la somme est la plus petite, soit 120 selon le tableau. Il nous faut donc une suite de seize nombres premiers dont la somme est 480. Or il existe une suite particulière de somme 480 formée de seize nombres premiers parmi les nombres allant de 3 à 101 :

$$\{3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43;47;53;101\}$$

Les nombres premiers en rouge sont les quinze premiers donc les quinze plus petits nombres premiers impairs (le nombre 2 est premier mais ne peut pas faire partie d'un carré premier presque normal d'ordre ≥ 3).

Si nous prenons une suite de seize nombres premiers distincts dont certains sont ≥ 103, alors la somme de la suite est >480 (voir le problème 6 de 10.6). La somme magique est donc >120. Voilà pourquoi pour construire un carré premier presque normal de somme 120, nous devons prendre nos nombres premiers ≤ 101. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 10.4 :

Si M est un carré premier presque normal d'ordre 4, alors $S \geq 120$. De plus, il existe seulement cent vingt-huit carrés premiers presque normaux d'ordre 4 de somme 120, soit seize primitifs.

Voici donc, à partir des 128 carrés premiers presque normaux d'ordre 4, les seize primitifs :

$$\begin{pmatrix}11&7&29&73\\17&67&13&23\\61&3&37&19\\31&43&41&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&37&19&61\\67&31&5&17\\7&11&73&29\\43&41&23&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&7&29&73\\41&43&13&23\\37&3&61&19\\31&67&17&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&29&7&73\\37&61&3&19\\41&13&43&23\\31&17&67&5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}11&29&7&73\\61&37&3&19\\17&13&67&23\\31&41&43&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13&17&23&67\\41&31&5&43\\29&11&73&7\\37&61&19&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13&17&29&61\\41&31&11&37\\23&5&73&19\\43&67&7&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13&23&17&67\\29&73&11&7\\41&5&31&43\\37&19&61&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}13&41&29&37\\31&17&61&11\\73&19&23&5\\3&43&7&67\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19&41&43&17\\5&37&67&11\\73&13&3&31\\23&29&7&61\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19&43&41&17\\73&3&13&31\\5&67&37&11\\23&7&29&61\end{pmatrix}\begin{pmatrix}37&5&11&67\\41&19&17&43\\29&23&61&7\\13&73&31&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}47&3&53&17\\43&5&13&59\\11&71&31&7\\19&41&23&37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}47&53&3&17\\11&31&71&7\\43&13&5&59\\19&23&41&37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}71&3&41&5\\7&17&37&59\\11&47&19&43\\31&53&23&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}71&41&3&5\\11&19&47&43\\7&37&17&59\\31&23&53&13\end{pmatrix}$$

Les douze premiers carrés (en noir) sont obtenus à partir de la suite A tandis que les quatre derniers (en rouge) sont obtenus à partir de la suite B. Ils sont tous de somme magique 120.

Nous dirons que les quatre derniers sont **les «meilleurs» carrés premiers primitifs presque normaux d'ordre 4** car ils ont la plus petite somme 120 et ils ont tous 71 comme plus grand nombre alors que les douze premiers, également de somme 120, ont tous 73 comme plus grand nombre.

Nous pouvons aussi dire que les quatre derniers sont **les plus petits carrés premiers primitifs presque normaux d'ordre 4.**

Terminons avec les carrés premiers parfaits d'ordre 5. Les suites de nombres premiers consécutifs renfermeront 25 nombres. Comme pour l'ordre 4, la suite 1 commence par 2, la suite 2 commence par 3, la suite 3 commence par 5 et ainsi de suite. La suite 1 est à rejeter car elle renferme le seul nombre premier pair ce qui implique quatre rangées de sommes impaires et une rangée de somme paire; le carré ne peut donc pas être magique. Les suites 2 à 5 conduisent à des sommes magiques qui ne sont pas des entiers, ce qui est absurde. Mais la suite

6, qui commence par 13, nous donne 313 comme somme magique. De plus, nous avons fait un programme dans MAPLE qui nous donne des carrés premiers parfaits de somme 313.

Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 10.5 :

Si un carré magique d'ordre 5 renferme **25 nombres premiers consécutifs**, alors sa somme magique vérifie $S \geq 313.$ De plus, nous connaissons des carrés premiers parfaits de somme $S = 313.$

En voici quelques-uns :

$$\begin{pmatrix} 13 & 89 & 31 & 79 & 101 \\ 43 & 103 & 23 & 37 & 107 \\ 113 & 41 & 83 & 47 & 29 \\ 71 & 19 & 67 & 97 & 59 \\ 73 & 61 & 109 & 53 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 109 & 47 & 71 & 73 \\ 37 & 103 & 41 & 31 & 101 \\ 67 & 59 & 83 & 61 & 43 \\ 89 & 19 & 29 & 97 & 79 \\ 107 & 23 & 113 & 53 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 113 & 31 & 53 & 19 & 97 \\ 41 & 17 & 107 & 101 & 47 \\ 59 & 109 & 13 & 89 & 43 \\ 71 & 73 & 79 & 67 & 23 \\ 29 & 83 & 61 & 37 & 103 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 41 & 107 & 47 & 101 \\ 31 & 113 & 53 & 97 & 19 \\ 109 & 59 & 13 & 43 & 89 \\ 83 & 29 & 61 & 103 & 37 \\ 73 & 71 & 79 & 23 & 67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 59 & 101 & 47 & 89 \\ 103 & 61 & 37 & 71 & 41 \\ 97 & 107 & 13 & 53 & 43 \\ 23 & 67 & 79 & 113 & 31 \\ 73 & 19 & 83 & 29 & 109 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 41 & 107 & 47 & 101 \\ 83 & 113 & 67 & 31 & 19 \\ 79 & 29 & 13 & 103 & 89 \\ 37 & 71 & 53 & 109 & 43 \\ 97 & 59 & 73 & 23 & 61 \end{pmatrix}$$

Ces six carrés premiers parfaits renferment tous les nombres premiers consécutifs allant de 13 à 113 et ils ont tous la même somme magique 313. De plus, ils sont primitifs, deux ont 83 comme centre et quatre ont 13 pour centre. Ils sont des super-premiers puisque 313 est un nombre premier.

Le carré (3) de 10.2 est aussi un carré super-premier puisque sa somme est 313 mais il n'est pas parfait. C'est un super-premier presque normal.

Pour établir les sommes magiques en fonction du rang k de la suite formée de n^2 nombres premiers consécutifs, nous avons utilisé la commande suivante dans MATHEMATICA :

$$(**) \qquad Table[\sum_{i=k}^{k+n^2-1} \frac{\Pr ime[i]}{n}, \{k, 2, 30\}]$$

Ainsi, avec $n=5$, nous trouvons :

$$Table[\sum_{i=k}^{k+24}\frac{\Pr ime[i]}{5},\{k,2,30\}]$$

et les sommes suivantes :

$$\frac{1159}{5},\frac{1259}{5},\frac{1361}{5},\frac{1463}{5},313,\frac{1679}{5},\ldots$$

Nous voyons que 313 est obtenu à partir de la suite 6.

Nous dirons que les «meilleurs» carrés premiers parfaits d'ordre 5 sont ceux dont la somme est 313.

En procédant de façon semblable, nous trouvons le :

Théorème 10.6 :

La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 6 vérifie $S \geq 484$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 6 de somme $S=484$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 7 vérifie $S \geq 797$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 7 de somme $S=797$.
La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 8 vérifie $S \geq 2016$. Il existe un carré premier parfait d'ordre 8 de somme $S=2016$.

Pour trouver un carré premier parfait d'ordre 6, 7 ou 8, il suffit de consulter le site (*) de 10.3. Celui-ci montre l'existence d'un carré premier parfait pour tous les ordres allant de 4 à 63 inclusivement!!!

Pour n = 100, nous utiliserons la commande (**) ci-haut en faisant varier k de 2 à 600, ce qui donne :

La somme magique d'un carré premier parfait d'ordre 100 vérifie $S \geq 5064634$. La suite 99, qui commence par 523, est la première suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 064 634. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

La suite 395, qui commence par 2711, est la deuxième suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 378 536. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

La suite 509, qui commence par 3637, est la troisième suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 500 324. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

La suite 589, qui commence par 4289, est la quatrième suite susceptible de fournir un carré premier parfait d'ordre 100 de somme 5 586 086. À ce jour, nous n'en connaissons aucun!!

C'est déjà extraordinaire d'avoir des carrés premiers parfaits pour tous les ordres n tel que :

$$3 \leq n \leq 63$$

Enfin, pouvons-nous trouver un carré premier presque normal d'ordre 5 qui a une somme inférieure à 313?

Nous savons qu'il existe un carré premier presque normal (non parfait) de somme 313. C'est le carré (3) de 10.2. Pouvons-nous trouver une somme strictement inférieure à 313?

Nous voulons construire un carré premier presque normal d'ordre 5 dont la somme est la plus petite. Or la plus petite somme de vingt-cinq nombres premiers distincts, en excluant 2, est 1159, qui n'est pas divisible par 5. Un carré premier presque normal ne peut pas avoir pour somme le nombre 1159/5 = 231,8. De plus, sa somme doit être un entier impair car elle provient de l'addition de cinq impairs. D'où le résultat suivant :

Théorème 10.7 :

La somme d'un carré premier presque normal d'ordre 5 vérifie $S \geq 233$.

Il existe une suite de 25 nombres premiers distincts qui a pour somme le nombre 5X233 = 1165. Celle-ci renferme les 24 nombres premiers consécutifs allant de 3 à 97 et le nombre 107. Vous pouvez en trouver une deuxième, laquelle? Il reste à vérifier si ces suites nous permettent deconstruire des carrés magiques. La réponse est oui avec la suite qui contient les nombres premiers de 3 à 97 et le nombre 107. Nous avons trouvé les deux suivants de somme 233 :

$$\begin{pmatrix} 89 & 7 & 59 & 41 & 37 \\ 17 & 29 & 67 & 97 & 23 \\ 61 & 43 & 3 & 79 & 47 \\ 53 & 83 & 73 & 5 & 19 \\ 13 & 71 & 31 & 11 & 107 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 29 & 23 & 67 & 17 & 97 \\ 71 & 107 & 31 & 13 & 11 \\ 43 & 47 & 3 & 61 & 79 \\ 7 & 37 & 59 & 89 & 41 \\ 83 & 19 & 73 & 53 & 5 \end{pmatrix}$$

La plus petite somme d'un carré premier presque normal d'ordre 5 est $S = 233$.

Les deux carrés ci-haut ont pour somme 233. Le plus petit nombre premier est 3 et le plus grand, 107.

Pouvons-nous trouver des carrés premiers presque normaux avec 3 pour plus petit et 103 pour plus grand nombre premier? La réponse est oui. La suite est formée des nombres premiers de 3 à 89, de 101 et 103.

$$\begin{pmatrix} 53 & 7 & 89 & 23 & 61 \\ 47 & 5 & 67 & 73 & 41 \\ 103 & 79 & 3 & 37 & 11 \\ 17 & 83 & 43 & 71 & 19 \\ 13 & 59 & 31 & 29 & 101 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 53 & 59 & 31 & 29 & 61 \\ 47 & 5 & 67 & 73 & 41 \\ 103 & 79 & 3 & 37 & 11 \\ 17 & 83 & 43 & 71 & 19 \\ 13 & 7 & 89 & 23 & 101 \end{pmatrix}$$

Ces deux derniers carrés font partie de l'ensemble **des plus petits carrés premiers presque normaux d'ordre 5**. En effet, ils ont la plus petite somme 233 et le plus petit nombre maximum 103. De plus, ces quatre derniers carrés premiers presque normaux sont des super-premiers.

10.4 Carrés hyper-premiers

Une question importante se pose ici : existe-t-il un carré premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$?

La réponse est oui pour $n = 3, n = 4 \ et \ n = 5$ puisque nous avons (1), (2) et (3) en 10.2. Le site (*) nous permet de trouver des carrés premiers parfaits d'ordre 4 à 63 (donc presque normaux). Mais pouvons-nous trouver un carré premier presque normal d'ordre 8743 ou d'ordre 23642?

La réponse est toujours **oui** selon le théorème de Green-Tao et son corollaire qui s'énoncent ainsi:

Théorème 10.8 : de Green-Tao :

La suite infinie des nombres premiers contient des suites arithmétiques non triviales aussi longues que l'on veut.

Corollaire 10.9 :

Il existe un carré premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$.

Précisons d'abord que toutes les suites arithmétiques non triviales (la raison est non nulle) de nombres premiers de longueurs ≥ 3 ne peuvent pas commencer par le nombre 2.

Maintenant, pouvons-nous construire un carré premier presque normal d'ordre $n \geq 3$? La réponse est oui. En effet, selon le théorème de Green-Tao, nous pouvons trouver une suite arithmétique non triviale de nombres premiers de longueur n^2 puis nous savons qu'à partir d'une telle suite, nous pouvons toujours construire un carré magique qui renfermera les n^2 nombres premiers de la suite.

Il est très intéressant de voir qu'avec cette façon de procéder, nous obtenons un carré premier presque normal tel que ses n^2 nombres premiers forment une suite arithmétique!!!

Cependant, cette façon de faire n'est pas idéale. Le problème est que le théorème de Green-Tao nous assure l'existence d'une suite arithmétique non triviale de nombres premiers de longueur k mais ne nous dit pas comment la trouver. La suite arithmétique de nombres premiers la plus longue connue au moment d'imprimer ces pages est de longueur 26, ce qui nous limite, avec cette approche, dans la construction de carrés premiers presque normaux. Cette suite de longueur 26 a été trouvée en avril 2010 par Benoît Perichon et PrimeGrid.

Il existe d'autres façons de trouver un carré premier presque normal. Par essais et erreurs avec une grande table de nombres premiers ou encore, en cherchant n suites arithmétiques de n nombres premiers, toutes de raison r, telles que les premiers nombres de ces n suites forment à leur tour une suite arithmétique de raison t. Nous construirons alors un carré arithmétique (voir chapitre 11) qui renfermera ces n^2 nombres premiers. Nous avons trouvé dans une table de nombres premiers les trois suites arithmétiques de raison 12 suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 5 & 17 & 29 \\ 47 & 59 & 71 \\ 89 & 101 & 113 \end{array}$$

Les trois suites horizontales sont de raison r = 12. Puis les trois premiers nombres $5\;;\,47\;;\,89$ forment une suite arithmétique verticale de raison t = 42. Nous avons là un **tableau arithmétique** (voir le glossaire 1) d'où la construction d'un **carré arithmétique** d'ordre 3 avec a = 5, r = 12 et t = 42; le fichier «ordre 3» dans MATHEMATICA ou EXCEL (voir le CD) nous permet de trouver le carré premier presque normal suivant de somme 177:

$$\begin{pmatrix} 71 & 89 & 17 \\ 5 & 59 & 113 \\ 101 & 29 & 47 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons toujours construire un carré magique d'ordre n avec les n^2 nombres d'une suite arithmétique de longueur n^2. En effet, si le premier terme est a et la raison r, alors nous construirons un carré arithmétique défini par $a, r\ et\ t = nr$ (voir le chapitre 11 sur les carrés arithmétiques).

Mais il y a aussi une façon fort simple de procéder; en effet, considérons cette suite arithmétique de longueur n^2 :

$$a\;;\;a+r\;;\;a+2r\;;\;...\;;\;a+(n^2-1)r$$

puis $A\ et\ B$, deux carrés magiques tels que A soit un carré trivial formé de 1 et B, un carré qui renferme tous les entiers consécutifs de 0 à n^2-1. Pour ce dernier, nous prenons un carré magique normal d'ordre n et nous enlevons 1 à l'entier qui se trouve dans chaque case.

Le carré magique : $$M = aA + rB$$

est le carré cherché. Notez que B existe toujours et que nous pouvons le trouver facilement.

Par exemple, considérons la suite arithmétique suivante : $5\;;8\;;11\;;14\;;...\;;\;50$ formée de 16 entiers dont le premier terme et la raison sont $a = 5\ et\ r = 3$. Nous trouvons le carré M qui suit :

$$M = 5\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + 3\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 14 & 13 & 0 \\ 4 & 9 & 10 & 7 \\ 8 & 5 & 6 & 11 \\ 15 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 47 & 44 & 5 \\ 17 & 32 & 35 & 26 \\ 29 & 20 & 23 & 38 \\ 50 & 11 & 8 & 41 \end{pmatrix}}_{M}$$

Le carré M est magique et renferme les 16 nombres de la suite arithmétique ci-haut.

Voici maintenant une suite arithmétique remarquable; elle est formée de 26 nombres premiers. C'est la plus longue connue à ce jour et avec celle-ci, nous pourrons construire 18 carrés hyper-premiers presque normaux d'ordre 3, 11 carrés hyper-premiers presque normaux d'ordre 4 et 2 carrés hyper-premiers presque normaux d'ordre 5.

Cette suite arithmétique formée de 26 nombres premiers a été trouvée le 12 avril 2010 par Benoît Perichon et PrimeGrid. Voici le premier terme a et la raison r de cette suite :

$$a = 43\,142\ 746\ 595\ 714\,191 \qquad\qquad r = 23\ 681\ 770\ P(23)$$

où $P(23) = 2\times3\times5\times7\times11\times13\times17\times19\times23 = 223\ 092\ 870$ c'est-à-dire le produit des nombres premiers consécutifs de 2 à 23. Nous avons vérifié, avec MATHEMATICA, que les 26 nombres de cette suite arithmétique sont des nombres premiers. Ils se terminent tous par 1. Les voici :

(S-26)

43142746595714191
48425980631694091
53709214667673991
58992448703653891
64275682739633791
69558916775613691
74842150811593591
80125384847573491
85408618883553391
90691852919533291
95975086955513191
101258320991493091
106541555027472991
111824789063452891
117108023099432791
122391257135412691
127674491171392591
132957725207372491
138240959243352391
143524193279332291
148807427315312191
154090661351292091
159373895387271991
164657129423251891
169940363459231791
175223597495211691

Construisons M_1, un carré hyper-premier d'ordre 3. Nous prendrons, par exemple, les 9 premiers nombres premiers de la suite.

$$M_1 = 43142\,746\,595\,714191 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + 23681770 \times 223092870 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$M_1 = \begin{matrix} 58992448703653891 & 85408618883553391 & 48425980631694091 \\ 53709214667673991 & 64275682739633791 & 74842150811593591 \\ 80125384847573491 & 43142746595714191 & 69558916775613691 \end{matrix}$$

Construisons maintenant M_2, un carré hyper-premier d'ordre 4. Nous prendrons les 16 premiers nombres premiers de la suite.

$$M_2 = 43142746595714191 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + 23681770 \times 223092870 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 14 & 13 & 0 \\ 4 & 9 & 10 & 7 \\ 8 & 5 & 6 & 11 \\ 15 & 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}}_{B} =$$

58992448703653891	117108023099432791	111824789063452891	43142746595714191
64275682739633791	90691852919533291	95975086955513191	80125384847573491
85408618883553391	69558916775613691	74842150811593591	101258320991493091
122391257135412691	53709214667673991	48425980631694091	106541555027472991

M_2 est un diabolique puisque B est diabolique; M_2 possède donc exactement 86 figures magiques.

Comme dernier exemple, construisons M_3, un hyper-premier d'ordre 5. Nous prendrons les 25 derniers nombres premiers de la suite.

$$M_3 = 48425980631694091 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + 23681770 \times 223092870 \underbrace{\begin{pmatrix} 24 & 5 & 18 & 2 & 11 \\ 3 & 12 & 21 & 9 & 15 \\ 6 & 19 & 0 & 13 & 22 \\ 10 & 23 & 7 & 16 & 4 \\ 17 & 1 & 14 & 20 & 8 \end{pmatrix}}_{B}$$

À vous de trouver le résultat final!!!

Nous pouvons construire des carrés premiers quelconques mais de façon plus spectaculaire, des carrés premiers parfaits et des carrés hyper-premiers.

Dans tous les cas, l'ordinateur semble indispensable. Cependant, connaissant la liste des 26 nombres premiers cités plus haut, il est très facile de construire des carrés hyper-premiers d'ordres 3, 4 et 5.

Pour construire un carré hyper-premier d'ordre 6, il faudra attendre que l'on trouve une suite arithmétique de nombres premiers de longueur 36, ce qui ne semble pas être pour demain!!!

Nous pouvons construire un carré hyper-premier quel que soit l'ordre $n \geq 3$, mais pour le moment, nous ne savons pas encore comment si l'ordre est ≥ 6.

Terminons avec cette question :

Pouvons-nous affirmer qu'il existe un carré super-premier presque normal pour tous les ordres impairs $n \geq 5$? Au moment d'imprimer ce livre, la réponse nous était toujours inconnue.

10.5 Carrés premiers d'ordre 3

Il a fallu attendre jusqu'en 1988 pour qu'Harry L. Nelson trouve le premier carré premier parfait d'ordre 3.

1480028201	1480028129	1480028183
1480028153	1480028171	1480028189
1480028159	1480028213	1480028141

Harry L. Nelson, 1988

Il est formé de neuf nombres premiers consécutifs de dix chiffres.

À partir de la suite (S-26) de 10.4, nous pouvons construire 18 carrés hyper-premiers d'ordre 3. Ceux-ci seront formés de neuf nombres premiers de 17 et/ou 18 chiffres!!!

Cependant, Dudeney a publié en 1917, le plus petit carré hyper-premier d'ordre 3 et de somme 3117. Le plus petit nombre est 199 et la raison 210. Remarquez que tous les nombres premiers de ce carré se terminent par 9.

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

Voyons maintenant les carrés premiers presque normaux d'ordre 3. Quelle est la plus petite somme? Regardons d'abord les deux suivants :

$$\begin{pmatrix} 43 & 67 & 109 \\ 139 & 73 & 7 \\ 37 & 79 & 103 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 71 & 89 & 17 \\ 5 & 59 & 113 \\ 101 & 29 & 47 \end{pmatrix}$$

$$S = 219 \qquad\qquad S = 177$$

La somme 177 semble être la plus petite. Voyons cela de plus près.

La somme des neuf plus petits nombres premiers impairs est 127. La somme magique correspondante, si le carré magique existe, serait 127/3 = 42,33…ce qui n'est pas possible. De plus, la somme du carré doit être impaire donc :

$$S = 43, 45, 47, 49, 51, 53, \ldots$$

Puisque le nombre central est $\frac{S}{3}$, la somme du carré doit être divisible par 3 donc nous conserverons :

$$S = 45, 51, 57, \ldots$$

Mais le centre doit être un nombre premier. Ici, $\frac{S}{3} = 15, 17, 19, \ldots$

Les sommes à conserver sont donc :

$$51, 57, 69, 87, 93, 111, 123, 129, 141, 159, 177.$$

Nous savons qu'il existe un carré premier presque normal d'ordre 3 et de somme 177. La plus petite somme est donc ≤ 177.

Nous avons construit un programme dans MAPLE qui cherche tous les carrés premiers presque normaux de sommes 51, 57, 69,…, 159. Par exemple, avec 159 comme somme, il est évident que nous chercherons à construire le carré premier presque normal en utilisant les nombres premiers de 3 à 151 soit 35 nombres premiers. Nous aurons 35 X 34 = 1190 cas à considérer :

n	m	
	53	

Nous avons obtenus aucun carré premier presque normal pour toutes les sommes 51, 57, 69, ..., 159. De plus, pour la somme 177, nous avons trouvé un seul carré premier presque normal primitif avec ses 7 équivalents.

Théorème 10.10 :

La plus petite somme d'un carré premier presque normal d'ordre 3 est $S = 177.$ De plus, il n'existe que huit carrés premiers presque normaux d'ordre 3 et de somme $177.$

Donc, il n'existe qu'un seul carré premier presque normal **primitif** d'ordre 3 et de somme $S = 177.$

Nous pouvons choisir :

71	89	17
5	59	113
101	29	47

10.5.1 L'OCTUOR «12 P»

Nous avons construit un groupe magnifique de huit carrés magiques d'ordre 6. Ceux-ci renferment les mêmes douze nombres premiers consécutifs disposés de façons différentes dans les huit carrés!!! Nous appelons ce groupe, l'OCTUOR «12 P».

Voici cet **OCTUOR «12 P»**, un groupe de huit carrés magiques qui possèdent les caractéristiques suivantes :

1) Ils sont d'ordre 6, presque normaux et de somme S = 306.
2) Ils renferment tous les mêmes douze nombres premiers consécutifs de 29 à 73.
3) Chacun contient exactement douze nombres premiers.

Dans les carrés 1, 2, 3, 4, 8, tous les nombres premiers sont situés dans les cases vertes et dans les vingt-quatre autres cases, tous les nombres sont des entiers pairs. Dans les carrés 5, 6 et 7, tous les nombres premiers sont toujours situés dans les cases vertes. Cependant, les autres cases renferment des entiers pairs et impairs, tous non premiers.

86	96	54	24	26	20
34	22	4	82	66	98
29	31	41	61	71	73
37	43	47	53	59	67
58	50	60	46	74	18
62	64	100	40	10	30

Carré 1

62	58	37	29	34	86
64	50	43	31	22	96
100	60	47	41	4	54
40	46	53	61	82	24
10	74	59	71	66	26
30	18	67	73	98	20

Carré 2

29	128	36	22	24	67
122	31	10	58	59	26
72	68	41	53	56	16
28	30	47	61	62	78
18	43	54	74	71	46
37	6	118	38	34	73

Carré 3

29	148	22	26	28	53
32	31	72	36	59	76
70	37	38	48	61	52
44	41	56	64	67	34
84	43	50	40	71	18
47	6	68	92	20	73

Carré 4

74	29	31	37	41	94
48	43	47	53	59	56
28	61	67	71	73	6
46	63	26	72	57	42
88	34	27	35	32	90
22	76	108	38	44	18

Carré 5

86	29	31	37	41	82
66	44	45	85	46	20
30	43	47	53	59	74
70	34	36	38	24	104
26	61	67	71	73	8
28	95	80	22	63	18

Carré 6

29	102	37	62	43	33
22	31	88	41	77	47
76	18	45	30	38	99
48	68	60	57	63	10
53	28	61	49	71	44
78	59	15	67	14	73

Carré 7

29	31	40	44	46	116
37	41	154	32	20	22
120	34	43	47	38	24
56	64	53	59	70	4
48	54	10	66	61	67
16	82	6	58	71	73

Carré 8

Dans les carrés1, 2 et 3, les douze nombres premiers sont présentés dans le même ordre. Dans les autres, les douze nombres premiers apparaissent dans l'ordre croissant.

Voici maintenant la fréquence de chaque carré :

Carré 1 : 13630   Carré 2 : 13630   Carré 3 : 11254   Carré 4 : 13467   Carré 5 : 14376
Carré 6 : 13895   Carré 7 : 14407 Carré 8 : 10421

Nous sommes assurés que les carrés 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 ne renferment pas les mêmes trente-six entiers puisque les sept fréquences sont différentes deux à deux. En effet, si deux carrés magiques renferment les mêmes nombres, alors ils ont la même fréquence. Les carrés 1 et 2 renferment les mêmes trente-six nombres et nous voyons qu'ils ont la même fréquence. Cependant, deux carrés peuvent contenir des entiers différents et avoir la même fréquence.

Comment avons-nous construit cet OCTUOR ? Voici les grandes lignes de notre démarche :

1) Voyons d'abord comment nous avons construit le carré 1.
2) Nous avons utilisé la structure générale des carrés magiques d'ordre 6. Elle contient vingt-quatre variables libres.
3) Nous avons attribué aux dix variables des rangées 3 et 4, les nombres premiers consécutifs de 29 à 73 sauf 67 et 73. Nous avons alors trouvé un nouveau carré.
4) Nous avons ensuite utilisé les expressions dans les cases où nous voulions placer 67 et 73. L'une doit valoir 67 et l'autre 73.
5) À partir de, expression = 67, nous avons isolé une variable et nous avons ensuite placé sa valeur dans le carré. Puis la même chose avec, expression = 73.
6) En général, nous n'avons aucun problème à placer les douze nombres premiers là où nous les voulons.
7) Ensuite, nous avons attribué aux autres variables, des nombres non premiers tous pairs et nous avons obtenu vingt-quatre nombres pairs différents de 2.
8) Nous avons dû reprendre plusieurs fois l'attribution des valeurs aux dernières variables car nous avions souvent soit des entiers négatifs, soit des répétitions, soit des nouveaux nombres premiers (nous en voulons exactement douze dans notre carré). Nous exigeons ici que les carrés soient presque normaux. Nous avons obtenu ce que nous voulions avec un peu de patience!!!
9) Observons que les vingt-quatre entiers que nous obtenons peuvent être pairs ou impairs. Cela dépend de la position des nombres premiers et de la valeur que nous attribuons à certaines variables.
10) Nous avons procédé de façon semblable pour les autres carrés.

Nous avions d'abord trouvé les carrés 1, 2, 3, 4 qui formaient notre premier QUATUOR «12 P». Puis nous avons trouvé les quatre suivants pour former notre deuxième QUATUOR «12 P». Nous avons donc notre premier OCTUOR «12 P» !!! Dans ces huit carrés, les nombres premiers se retrouvent dans huit dispositions différentes.

Enfin, nous avons là $C_4^8 = 70$ QUATUORS «12 P» différents!!!

Avec ces huit carrés magiques, nous pouvons créer :

a) $C_2^8 = 28$ PAIRES «12 P»
b) $C_3^8 = 56$ TRIOS «12 P»
c) $C_4^8 = 70$ QUATUORS «12 P»
d) $C_5^8 = 56$ QUINTUORS «12 P»
e) $C_6^8 = 28$ SEXTUORS «12 P»
f) $C_7^8 = 8$ SEPTUORS «12 P»
g) $C_8^8 = 1$ OCTUOR «12 P».

Si vous voulez former un QUATUOR «12 P» en vous servant des carrés 4, 5, 6, 7 et 8, alors tous vos carrés contiendront les douze nombres premiers dans l'ordre croissant.

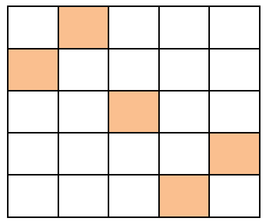
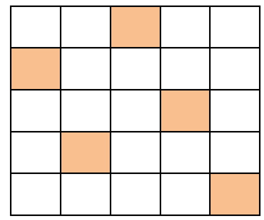
Pourquoi les carrés 1, 2 et 3 ne peuvent pas contenir les douze nombres premiers dans l'ordre croissant? (Voir problème 11 de 10.6)

Regardez les deux figures vertes du carré 7, celles-ci ne sont pas magiques.

10.6 Problèmes:

1) Soit un carré magique d'ordre $n \geq 3$ qui renferme n^2 nombres premiers différents. Montrez que ce carré ne peut pas contenir le nombre premier 2.
2) Construisez un carré magique d'ordre 3 dont la somme est le nombre premier p.
3) En utilisant le site de 10.3, montrez qu'il existe au moins un carré super-premier presque normal pour les ordres 5, 7, 9, 11, 57, 59 et 63.
4) Un carré magique d'ordre pair $n \geq 4$ est premier presque normal. Montrez qu'il ne peut pas être super-premier.
5) Le site de 10.3 nous permet de trouver des carrés premiers pour tous les ordres de 4 à 63 et nous connaissons au moins un carré premier d'ordre 3. Donc pour les ordres 3 à 63, il existe au moins un carré premier presque normal. Ce résultat est-il conforme avec le corollaire 10.9 du théorème de Green-Tao (voir 10.4)?
6) Montrez que si nous prenons une suite de seize nombres premiers distincts ≥ 3, dont certains sont ≥ 103, alors la somme de la suite est > 480.

7) Considérez le carré premier (3) d'ordre 5 de la section 10.2 et utilisez les deux figures complètes suivantes :

a) À partir de (3), combien pouvez-vous fabriquer de carrés magiques presque normaux de sommes $S < 313$, qui renferment exactement 20 nombres premiers?
b) Donnez-les.
c) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 5 qui renferme exactement 20 nombres premiers dont la somme magique est $S = 330$.

8) Soit M, un carré premier presque normal d'ordre $n \geq 4$. Montrez qu'avec M, il est possible de construire une infinité de carrés magiques presque normaux qui contiennent exactement $n^2 - n$ nombres premiers.

9) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 5 qui contient comme seul nombre premier le nombre 1129 lequel est situé dans la case :
a) (3 ; 3) b) (4 ; 4) c) (2 ; 3) d) (2 ; 4) e) Nous pouvons montrer que 1129 peut se trouver dans la case de notre choix!!!

10) Considérez une suite de seize nombres premiers consécutifs à partir de laquelle nous voulons construire un carré premier. Montrez qu'une condition nécessaire est que la somme des seize nombres premiers de la suite soit divisible par 8.

11) Dans l'Octuor «12 P» que nous venons de voir dans la section 10.5.1, pourquoi les carrés 1, 2 et 3 ne peuvent pas contenir les douze nombres premiers dans l'ordre croissant?

12) Dans la section 10.3, montrez (sans utiliser le programme «Premiers parfaits-4», que pour les suites 1, 2, 4, 5, 6, 7 et 9, il est impossible de construire un carré premier parfait d'ordre 4. Pour les suites 3, 8 et 10, le programme «Premiers parfaits-4» montre que ces 3 suites ne nous donnent aucun carré premier parfait. On en déduira que la suite 11 nous donne les plus petits carrés premiers parfaits d'ordre 4.

13) À partir de la définition de colonne tordue à gauche (à droite), (voir 45 du glossaire 2), définissez une colonne tordue gauche-droite et une colonne tordue droite-gauche.

14) Pouvons-nous trouver une suite de 9 nombres premiers consécutifs et un entier positif tel que si nous additionnons cet entier à chacun des 9 nombres premiers, alors nous obtenons encore une suite de 9 nombres premiers consécutifs?
Indice : voir les carrés (2) et (3) de l'annexe 18.

15) Soient p et q deux nombres premiers consécutifs et n, un entier positif. Si p + n et q + n sont premiers, alors sont-ils consécutifs?
16) Retrouvez les carrés (2) et (3) de l'annexe 18 et trouvez le carré (3) – (2). Qu'observez-vous? Quelle conclusion tirez-vous?
17) Voici M, un carré premier presque normal :

$$M = \begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix}$$

Nous voulons ajouter un entier positif 2m dans toutes les cases de M afin d'obtenir un nouveau carré premier. Pour ce faire, nous avons construit un programme dans MATHEMATICA qui regarde les seize nouveaux nombres et cherche à savoir s'ils sont tous premiers.
Nous avons fait varier m de 1 à 17 000 000 000 mais sans succès!!! Aucune nouvelle suite de seize nombres premiers.

Pouvez-vous poursuivre la recherche?

Si nous trouvons le carré cherché, M', alors nous dirons que M et M' sont des carrés premiers cousins. Nous savons qu'il en existe d'ordre 3. En existe-t-il d'ordre 4? D'ordre 5? (Voir annexe 18).