Annexe 34 : Projets de recherches ; Divers

Voici quelques projets de recherches :

1) Les conjectures de l'annexe 2.
2) Voir les pages 5 et 8 de l'annexe 24.
3) Voir la page 24 du chapitre 8, Partie 2.
4) Voir le chapitre 7, page 27, problème 25, la conjecture.
5) Dans l'annexe 5, démontrez la conjecture de la page 15.
6) Dans l'annexe 9, page 4, la conjecture.
7) Trouvez la structure générale des hyper-magiques d'ordre 14 puis voir le problème 25 de 7.4 et la conjecture qui s'y trouve.
8) Les 10 propriétés, page 1 de l'annexe 33.
9) Pouvons-nous affirmer qu'il existe un carré super-premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 5$?
10) Dans l'annexe 29, les problèmes 14, 15 et 16. Que se passe-t-il si l'ordre du carré est pair? M peut-il générer une infinité de carrés super-premiers? Etc…
11) Dans la Partie 2, chapitre 15, page 102, les problèmes 43 et 44.
12) Chapitre 10, page 8, la question de l'encadré.
13) Chapitre 10, page 28, problème 17.
14) Annexe 18, page 13, «La grande question».
15) Annexe 18, page 42, l'encadré.
16) Annexe 18, les questions de la page 25.
17) Les diverses questions tout au long des chapitres et annexes.
18) Soit M, un carré d'ordre $n \geq 4$. Un **recouvrement de M** est un groupe de n figures complètes disjointes qui recouvrent toutes les cases de M. Le carré M, magique ou non, qui possède un recouvrement est dit **compact**.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

1	6	2	3	5	4
2	4	5	6	1	3
3	1	6	5	4	2
4	5	3	2	6	1
5	2	1	4	3	6
6	3	4	1	2	5

1	2	3	4	5	6	7
6	3	5	2	7	4	1
5	1	6	7	2	3	4
4	7	2	5	3	1	6
7	5	1	6	4	2	3
2	6	4	3	1	7	5
3	4	7	1	6	5	2

1	2	3	4	5	6	7	8
8	3	5	2	4	7	1	6
7	1	2	3	6	4	8	5
6	4	8	7	2	3	5	1
5	7	1	6	8	2	4	3
4	6	7	8	1	5	3	2
2	5	4	1	3	8	6	7
3	8	6	5	7	1	2	4

Les cinq carrés précédents montrent que tous les carrés d'ordres 4, 5, 6, 7 et 8 sont compacts. Dans ces cinq carrés, chaque couleur illustre une figure complète!!!

Tous les carrés d'ordres $n \geq 9$ sont-ils compacts?

À un carré compact correspond un carré latin diagonal et réciproquement.

Si nous démontrons qu'il existe un carré compact pour tous les ordres $n \geq 4$, alors nous aurons démontré qu'il existe un carré latin diagonal pour tous les ordres $n \geq 4$.

Théorème :

Un carré d'ordre 3 n'est jamais compact.

Preuve :

Nous avons déjà démontré qu'un carré d'ordre 3 ne possède pas de figure complète. (Voir Partie 2, chapitre 4, page 32, problème 4). Il en résulte que celui-ci ne peut pas être compact car s'il l'était, il possèderait 3 figures complètes disjointes qui le recouvrent.

19) Avons-nous eu de la chance?

Nous avons construit un carré premier à partir d'un carré normal d'ordre 4, lequel est un Dürer. Pour ce faire, nous avons utilisé le recouvrement du problème 18).
Voici d'abord ce Dürer normal M ainsi que 3M, un autre Dürer :

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

M

12	45	42	3
15	30	33	24
27	18	21	36
48	9	6	39

3M

Voyons le recouvrement de 3M; dans chaque figure complète, les nombres sont choisis dans chaque rangée, de haut en bas :

Figure complète 1 : 12, 24,18, 6
Figure complète 2 : 45, 33, 27, 39
Figure complète 3 : 42, 30, 36, 48
Figure complète 4 : 3, 15, 21, 9

Nous allons maintenant chercher la valeur de m afin que les 4 nombres suivants soient premiers : 12 + 2m + 1 ; 24 + 2m + 1; 18 + 2m + 1 ; 6 + 2m + 1. Avec MATHEMATICA, nous utiliserons :

```
Count[Table[PrimeQ[ {12 + 2m + 1 , 24 + 2m + 1 , 18 + 2m + 1, 6 + 2m + 1}], {m,1,500}],
{True,True,True,True}]   (*)
```

Nous avons trouvé m = 27 pour obtenir les 4 nombres premiers : 67, 79, 73, 61 qui seront dans la figure complète 1 de 3M. La somme magique passe donc de 3x34 = 102 à 102 + 55.

De la même façon, avec la figure complète 3, nous avons trouvé m = 110 pour obtenir les nombres premiers 263, 251, 257, 269.

Quant aux figures complètes 2 et 4, nous avons remplacé dans (*) 2m + 1 par 2m. Nous avons trouvé m = 7 et m = 1. Finalement, le carré premier obtenu est :

67	59	263	5
17	251	47	79
41	73	23	257
269	11	61	53

Carré-1

Ce carré premier est un Dürer presque normal de somme magique S = 394.

De façon semblable, nous avons trouvé le carré premier suivant, un Dürer presque normal de somme 400. Notez que (29 – 5)/4 = 400 – 394. Dans l'intersection de Carré-1 avec Carré-2, les seuls nombres qui n'y sont pas sont 5 et 29.

17	79	53	251
263	41	67	29
61	23	269	47
59	257	11	73

Carré-2

Les carré-1 et carré-2 ont en commun 15 nombres premiers.

Pouvez-vous, en utilisant ce procédé, trouver un autre carré premier d'ordre 4? Un carré premier d'ordre 5?

Pouvez-vous généraliser pour tous les ordres $n \geq 4$?

Une grande difficulté est la suivante :

Le travail fait plus haut pour trouver un carré premier à l'aide d'un recouvrement d'un carré d'ordre n n'est pas toujours aussi simple que ce que nous venons de voir.

Ajouter 2m à une liste de n entiers afin d'obtenir n nombres premiers est parfois très difficile. Il arrive qu'avec 1 500 000 000 de valeurs attribuées à m, aucune ne conduise à n nombres premiers.

Ajoutez 2m aux entiers (*) 51, 63, 57, 77 puis aux entiers (**) 91, 133, 35, 69.

Avec (*) et m de 1 à 5 000 000, nous trouvons 2559 valeurs de m qui conduisent à 4 nombres premiers.

Avec (**) et m de 1 à 50 000 000, nous trouvons aucune valeur de m qui donne 4 nombres premiers.

Avec les entiers 35, 63, 57, 59 et m de 1 à 5 000 000, nous trouvons 1345 valeurs de m qui conduisent à 4 nombres premiers.

20) Un recouvrement idéal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 & 8 & 19 \\ 23 & 9 & 16 & 5 & 12 \\ 20 & 2 & 13 & 24 & 6 \\ 14 & 21 & 10 & 17 & 3 \\ 7 & 18 & 4 & 11 & 25 \end{pmatrix}$$

Ce carré magique normal est d'ordre 5 donc compact. Que trouvons-nous dans les figures complètes du recouvrement du carré d'ordre 5 du problème 18 ci-haut?

Figure complète 1 : 1, 2, 3, 4, 5
Figure complète 2 : 11, 12, 13, 14, 15
Figure complète 3 : 21, 22, 23, 24, 25
Figure complète 4 : 6, 7, 8, 9, 10
Figure complète 5 : 16, 17, 18, 19, 20

Nous appelons «**recouvrement idéal**» d'un carré magique normal, un tel recouvrement. Celui-ci nous permet de dire que le carré est un **carré normal idéal** puisqu'il existe une figure complète qui renferme les 5 plus grands entiers du carré. Un carré magique normal est dit **compact idéal** s'il possède un recouvrement idéal.

Le carré magique normal suivant possède aussi un recouvrement idéal. **Montrez-le.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 10 \\ 14 & 11 & 4 & 5 \\ 12 & 13 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

C'est un carré normal idéal et ce même carré nous permet de trouver un carré de somme 33 qui renferme 16 entiers différents ≥ 0. **Montrez-le**. (Voir Sagrada Familia, Barcelone, Espagne).

Utilisez le recouvrement du problème 18 ci-haut pour les 25 carrés normaux d'ordre 5 du chapitre 6, pages 2 et 3. **Qu'observez-vous** dans les 5 figures complètes de chaque carré?

21) Pourquoi s'intéresser aux recouvrements et aux figures complètes?

1) Cela est déjà très intéressant en soi!!! De plus, un recouvrement nous donne n figures complètes disjointes dans notre carré.
2) Un recouvrement est équivalent à un carré latin diagonal.
3) Un recouvrement permet dans certains cas, à partir d'un carré normal, de construire un carré **premier** presque normal.

Nous avons pris le Dürer normal M suivant et avons construit 6 M + 1. Nous avons utilisé un recouvrement de 6 M + 1 pour rendre premiers tous les entiers de chaque figure complète.

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

M

Ainsi, nous avons obtenu le carré premier qui suit :

59	103	421	467
491	397	79	83
127	131	443	349
373	419	107	151

Ce carré premier est un Dürer presque normal de somme $S = 1050$.

Pourquoi avons-nous construit 6 M + 1?

4) Il a permis de construire l'intrus-1235 et l'intrus-95-275.

929	383	601	439	181	1 217	419
1 235	811	139	347	257	397	983
229	911	1 229	431	467	631	271
211	269	593	157	859	1 031	1 049
443	151	887	1 013	373	449	853
503	1 223	331	673	881	317	241
619	421	389	1 109	1 151	127	353

L'intrus-1235

Pour construire ce carré, nous avons pris un carré magique normal M d'ordre 7 puis nous avons fait 6 M + 1. À l'aide d'un recouvrement de 6 M + 1, nous avons remplacé les nombres de 6 figures complètes par des nombres premiers. Quant à l'autre, nous avons réussi à obtenir 6 nombres premiers sur 7. La raison était que les nombres de cette autre figure complète étaient :

(*) 259 ; 277 ; 271 ; 91 ; 55 ; 265 ; 193

Or, en ajoutant 2m aux 7 entiers de (*), il est impossible d'obtenir 7 nombres premiers. Si m < 0, alors MATHEMATICA donne des négatifs comme nombres premiers (-61 par exemple), ce que nous n'acceptons pas puisque nous voulons obtenir un carré presque normal.

Vous trouverez le carré M dans la Partie 2, chapitre 14, page 96.

L'intrus-1235 est un carré magique presque normal d'ordre 7, de somme $S = 4\,169.$ Il contient **48 nombres premiers** et **un seul nombre composé** soit 1235. Le plus petit nombre du carré est 127 et le plus grand 1235.

929	47	601	439	181	263	15 889
281	811	139	11	15 727	397	983
229	911	275	15 901	131	631	271
211	15 739	257	157	859	1 031	95
15 913	151	887	59	373	113	853
167	269	331	673	881	15 787	241
619	421	15 859	1 109	197	127	17

L'intrus-95-275

Le carré précédent est un carré magique presque normal d'ordre 7 et de somme magique S = 18 349. Il renferme 47 nombres premiers et 2 multiples de 5, nos deux intrus!!!

Retrouvez l'intrus-1235 ou un tout autre intrus-? à partir de M.

Pourriez-vous trouver un carré premier d'ordre 7 à partir d'un autre carré M'?

Pourquoi les 7 entiers de (*) ne peuvent pas devenir tous premiers?

5) Une figure complète permet de trouver une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives.

6) Elle a permis d'enlever les répétitions dans le carré magique de la Sagrada Familia, Barcelone, Espagne. Sans répétition, la somme demeure 33.

7) Elle permet de transformer un carré premier presque normal en un carré super-premier presque normal.

8) Elle permet de réduire, si possible, le produit d'un carré multiplicatif.

Donnez des exemples.

Pouvons-nous toujours réaliser 7) ?

9) Pourrions-nous construire un carré magique d'ordre n tel que celui-ci possède n figures magiques disjointes qui le recouvrent? Les n rangées ainsi que les n colonnes sont exclues.
10) Une condition nécessaire :

Considérons une suite de n entiers impairs tous > 3. Dans cette suite, nous trouvons 5 entiers qui se terminent respectivement par 1, 3, 5, 7 et 9.

Si nous ajoutons 2m (m entier > 0) aux n entiers de la suite, alors nous allons toujours trouver un entier > 5 qui se terminera par 5 donc qui ne sera pas un nombre premier.

Si nous voulons n nombres premiers, alors il sera **nécessaire,** dans les n entiers impairs, de ne pas avoir 5 entiers qui se terminent respectivement par 1, 3, 5, 7 et 9.

Si la condition nécessaire est respectée, alors il n'est pas certain d'obtenir n nombres premiers. Celle-ci n'est pas suffisante.

Les n entiers pourront peut-être être premiers si n < 5.

Voyons le tableau suivant dans lequel m est un entier > 0. Dans les cases grises, nous trouvons le chiffre des unités de 2m.

Dans les cases vertes, nous trouvons le chiffre des unités des n entiers impairs > 3.

2m	1	3	5	7	9
0	1	3	5	7	9
2	3	5	7	9	1
4	5	7	9	1	3
6	7	9	1	3	5
8	9	1	3	5	7

Si un entier w se termine par 3 et 2m se termine par 8, alors, à l'intersection de la rangée 8 avec la colonne 3, nous trouvons un entier w + 2m = entier qui se termine par 1 donc qui peut être premier.

Si un entier w se termine par 9 et 2m se termine par 6, alors, à l'intersection de la rangée 6 avec la colonne 9, nous trouvons un entier w + 2m = entier qui se termine par 5 donc qui n'est pas un nombre premier.

Rappelons que tout nombre premier impair différent de 5 se termine par 1, 3, 7 ou 9. De plus, tout entier > 5 qui se termine par 5 n'est jamais un nombre premier.

Si aucun des n entiers impairs > 3 ne se termine par un des chiffres choisi parmi 1, 3, 5, 7, 9, alors en ajoutant 2m aux n entiers impairs > 3, il se peut que ceux-ci deviennent tous premiers. Par exemple, aucun entier ne se termine par 7. Donc avec 2m qui se termine par 8, il sera possible d'obtenir n nombres premiers. Mais cela n'est pas certain!!!

Plus n est grand, plus les chances sont grandes de trouver au moins
cinq entiers qui se terminent respectivement par 1, 3, 5, 7, 9.
Dans ce cas, nous n'arriverons jamais à avoir n nombres premiers.

22) Les fréquences.

Considérons un carré magique normal d'ordre $n \geq 4$ qui possède une figure complète idéale F. Ajoutons le nombre k dans toutes les cases de F et appelons G, la structure générale ainsi obtenue. Puis donnons à k les valeurs entières de 0 à l'infini. Pour k = 0, le carré est normal de fréquence f(S).

a) Observez la décroissance stricte de la fréquence du carré magique lorsque k augmente et ce, pour $n = 4, 5, 6\, et\, 7.$
b) La fréquence deviendra constante et égale à f(G) pour k = u.
c) Juste avant d'atteindre f(G), la fréquence du carré prendra deux fois la valeur 1 + f(G). Plus précisément, la fréquence du carré sera 1 + f(G) pour k = u – 1 et u – 2.
d) Voyons un exemple avec $n = 4.$
e) En sera-t-il ainsi pour tous les ordres?

Divers :

1) J'ai construit, pour une certaine personne, un carré magique dans lequel nous trouvons sa date de naissance sur la première rangée. J'ai répété l'opération au moins une cinquantaine de fois. Tous ces carrés sont des Dürer presque normaux excepté, par exemple, le carré d'une personne née le 3 mars (nous aurions alors une répétition soit deux 3).

2) Lyne s’est envolée vers la «Voie Céleste» à l’âge de 51 ans. Voici son carré :

Le «LYNE ROCHEFORT»

23	6	19	60
51	28	20	9
30	24	36	18
4	50	33	21

$S = 108$

J’ai eu l’honneur de construire ce carré magique pour ma cousine Lyne, née le 23 juin 1960. Sa somme magique 108 est obtenue de 32 façons différentes (32 choix de 4 cases qui totalisent 108; les 4 coins par exemple).

3) Voici le carré de Dame Kathleen Ollerenshaw, exceptionnellement un hyper-magique d’ordre 4 puisqu’elle a beaucoup travaillé sur ce type de carrés.

1	10	16	15
19	12	4	7
5	6	20	11
17	14	2	9

S = 42

Kathleen Ollerenshaw est née le 1 octobre 1912 à Withington, Manchester, Royaume-Uni. Mathématicienne, sa contribution aux carrés magiques est remarquable. Elle a été conseillère à l’éducation auprès de Margaret Thatcher. Elle est décédée le 10 août 2014 à l’âge vénérable de 101 ans!!!