Annexe 29 : Problèmes supplémentaires

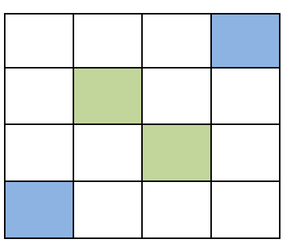
Vous pouvez nous proposer de nouveaux problèmes (solutions comprises) sur les carrés magiques et multiplicatifs. Nous les ajouterons à l'annexe 29 tout en indiquant l'auteur de chaque problème.

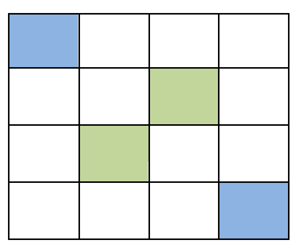
1) Nous voulons construire un m-hyper-magique (m-super-Dürer) presque normal d'ordre 4. La structure générale nous indique que nous avons besoin de cinq variables soient a, b, c, f et g. Je choisis de donner une valeur à c et à g et vous, à a, b et f. Je vous propose de donner des nouvelles valeurs à vos variables a, b et f et ce, dix fois. Quant à moi, je conserve les mêmes valeurs pour mes variables c et g. Qu'observons-nous avec les dix carrés ainsi construits?

2) Montrez qu'il est impossible de construire un carré magique d'ordre 4 avec les quatre entiers suivants :

9			
		12	
	20		
			21

3) Voici une autre propriété des carrés magiques d'ordre 4 : dans chaque carré ci-dessous, la somme des cases vertes = la somme des cases bleues.





4) Soit donné un carré magique presque normal M d'ordre $n \geq 3$. Vous savez que vous obtiendrez un carré multiplicatif M' par exponentiation de M. Est-il possible d'obtenir un carré magique M''en logarithmant M?

5) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3.$ De plus, M est un ultra-magique de somme $S.$ Montrez que si l'entier m est dans M, alors m vérifie :

$$1 \leq m \leq \frac{2S-n}{n}.$$

6) Considérons le p-générateur G_{30}^{12} (voir annexes 18 et 18.1):

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

Si $G_{30}^{12} + 2m$ est un carré premier, alors l'entier $m \geq 1$ se termine par $0, 4, 5 \, ou \; 9.$

a) Montrez-le.

b) $G_{30}^{12} + 274728436$ est-il un carré premier?

7) Soit M, un carré premier presque normal qui renferme les nombres 3, 5 et 7.

a) M peut-il être un p-générateur?

b) Pourquoi M est-il d'ordre $n \geq 4$?

8) Soit G, un carré premier presque normal d'ordre $n \geq 3.$ De plus, G est le plus petit carré premier et cela signifie que si nous enlevons 2 m dans toutes les cases de G, celui-ci ne sera plus jamais un carré premier sachant que m prend toutes les valeurs entières $\geq 1.$
Si G génère au moins un nouveau carré premier en ajoutant 2 m dans toutes ses cases avec $m \geq 1$, un entier, alors G sera un p-générateur.
Nous avons observé que dans G, il y a au moins un nombre premier qui se termine par 1, au moins un nombre premier > 3 qui se termine par 3, au moins un nombre premier qui se termine par 7, au moins un nombre premier qui se termine pat 9 et aucun 5.

Trouvez une condition nécessaire pour que G soit un p-générateur.

9) Le nombre $10^{30000} + 10^{3000} + 10^{300} + 10^{30} + 10^{3} + 7$ est-il premier?

10) Le nombre $10^{30000} + 10^{3000} + 10^{300} + 10^{30} + 7$ est-il premier?

11) Soit donnée, une suite de n^2 nombres entiers tous ≥ 1 et différents deux à deux. De plus, ces n^2 entiers sont tous impairs ou tous pairs. Nous voulons former un carré magique d'ordre $n \geq 3$ avec ceux-ci. Appelons S* la somme de ces n^2 entiers. Montrez :

a) que si tous les entiers sont pairs, alors S* doit être divisible par 2 n.
b) que si tous les entiers sont impairs, alors S* doit être divisible par n si n est impair et S* doit être divisible par 2 n si n est pair.

12) Quelle doit être la valeur de W si nous voulons que le carré suivant soit magique ?

			6
	14		
		W	
20			

13) Trouvez 4 carrés magiques presque normaux d'ordre 4 dont les sommes magiques sont les nombres premiers 37, 43, 109 et 151.

14) Le carré M presque normal suivant est un carré super-premier puisque sa somme magique, 313, est un nombre premier :

M =

113	31	53	19	97
41	17	107	101	47
59	109	13	89	43
71	73	79	67	23
29	83	61	37	103

a) En changeant les nombres dans les cases vertes de M, trouvez un nouveau carré super-premier presque normal?
b) Montrez qu'il est possible d'en construire au moins 856?
c) Le carré M peut donc être vu comme un nouveau type de p-générateur.

Nous pourrions l'appeler : p-générateur-5 si l'ordre du carré M est 5.

15) Le carré M presque normal suivant est un carré super-premier d'ordre 7 puisque sa somme magique 797, est un nombre premier :

109	29	151	211	157	13	127
197	229	83	23	103	31	131
67	11	89	227	163	233	7
113	139	61	107	37	239	101
191	47	179	167	17	137	59
79	149	181	19	97	73	199
41	193	53	43	223	71	173

M

a) En changeant les nombres dans les cases vertes de M, trouvez un nouveau carré super-premier presque normal?
b) Montrez qu'il est possible d'en construire au moins 56?
c) Le carré M peut donc être vu comme un nouveau type de p-générateur.
   Nous pourrions l'appeler: p-générateur-7 si l'ordre du carré M est 7.

16) Les deux carrés précédents sont des super-premiers et de plus, ils sont premiers parfaits. Ce sont des p-générateurs-n avec $n=5$ et $n=7$. Le carré qui suit est un carré premier parfait de somme 703 mais n'est pas un super-premier.

M =

107	163	167	109	157
193	103	131	139	137
179	89	113	173	149
127	197	101	199	79
97	151	191	83	181

a) Montrez que c'est un p-générateur-5.
b) En ajoutant 2m dans toutes les cases vertes, combien de super-premiers trouverez-vous si m varie de 1 à 100 000 000?

17) Construisez M, un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ formé exclusivement d'entiers tous différents dont la somme magique égale l'ordre du carré.

a) Donnez deux exemples avec $n = 9 \; et \; n = 10.$

b) La somme magique peut-elle être un nombre premier?

c) M peut-il être presque normal?

18) Construisez M, un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ formé exclusivement d'entiers tous différents dont la somme magique est un nombre premier.

a) Donnez un exemple avec $n = 5, \; n = 14 \; et \; n = 4.$

b) Que se passe-t-il si $n = 8$?

c) Que se passe-t-il si $n = 4k$ où $k \geq 1$ est un entier?

d) M peut-il être presque normal?

19) Quelle doit être la valeur de G si nous voulons que le carré suivant soit magique ?

12			21
	13	G	

20) Si nous voulons construire un carré arithmétique presque normal d'ordre $n \geq 3,$ alors nous avons au chapitre 11, Partie 2, une condition suffisante à savoir :

$$t > (n-1)r \;\; ou \;\; r > (n-1)t$$

Considérons les entiers $a, \; r \, et \, t,$ tous > 0. Montrez que nous avons :

a) $t > (n-1)r$ implique $r < (n-1)t.$

b) $r > (n-1)t$ implique $t < (n-1)r.$

21) Soit M, un carré magique d'ordre 4 formé de nombres réels tous différents. Quelles sont les conditions pour que M reste magique si nous permutons sa deuxième rangée avec sa quatrième?

22) Soit donnée la suite de 16 entiers distincts suivante :

$$\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ...\ ;12\ ;\ 13+k\ ;\ 14+k\ ;\ 15+k\ ;\ 16+k\}\ ;\ k \geq 0 \text{ est un entier.}$$

a) Montrez qu'il existe un carré magique presque normal pour chaque valeur de k dont la somme magique est $34+k$.

b) Montrez que si $k \geq 5$, alors les 4 plus grands nombres sont obligatoirement dans une figure complète.

c) Nous avons un programme dans MAPLE qui nous a permis de trouver le nombre de carrés magiques de somme $34+k$. Voici quelques résultats :

(0 ; 7040) (1 ; 1696) (2 ; 2016) (3 ; 1504) (4 ; 1824)
(5 ; 1408) (6 ; 1408) (7 ; 1408) (8 ; 1408) (9 ; 1408)
(10 ; 1408) (11 ; 1408) (19 ; 1408) (119 ; 1408) (1119 ; 1408)
(2210 ; 1408) (72210 ; 1408)

Chaque couple a la forme (valeur de k ; nombre de carrés).

Montrez que pour $k \geq 5$, le nombre de carrés magiques de somme $34+k$ est toujours 1408.