Annexe 29.1 : solutions des problèmes de l'annexe 29

1) Les dix carrés ainsi construits auront le même produit magique $P = c^2 g^2$ car celui-ci est indépendant des variables a, b et f. Voir chapitre 15, page 39.

2) Supposons que le carré soit magique. Sur la grande diagonale principale, placez les nombres a et b dans les cases vides. La somme magique est donc S = a + b + 30. Nous savons que le carré central d'ordre 2 est toujours une figure magique dans un carré magique d'ordre 4 d'où S = a + b + 32. Cela conduit à une contradiction (30 = 32). Il est donc impossible de construire un carré magique avec ces 4 entiers.

3) Dans le carré de gauche, placez a et b dans les cases vides de la diagonale secondaire. Ainsi, nous trouvons a + b + les 2 cases bleues = a + b + les 2 cases vertes puisque le carré central d'ordre 2 est toujours une figure magique dans un carré magique d'ordre 4. D'où le résultat annoncé. De la même façon avec le carré de droite; nous placerons a et b dans les cases vides de la diagonale principale.

4) La réponse est oui. Il suffit que M soit à la fois magique et multiplicatif ce qui est possible. Voir chapitre 13, pages 8, 9 et 10. De plus, précisons que carré magique multiplicatif = carré magique additif-multiplicatif.

5) Puisque M est ultra-magique, il est donc associatif. Si m est dans M, alors il existe r dans M tel que $m + r = \frac{2S}{n}$ $d'où$ $m = \frac{2S}{n} - r \leq \frac{2S}{n} - 1$ car M est presque normal. Il s'ensuit que $1 \leq m \leq \frac{2S-n}{n}$. Remarquez que si 1 est dans M, alors le plus grand entier de M est $\frac{2S-n}{n}$ et tout autre entier de M est $< \frac{2S-n}{n}$. Si r est le plus petit entier de M, alors $\frac{2S}{n} - r = \frac{2S-nr}{n}$ est le plus grand et tout entier de M est $< \frac{2S-nr}{n}$.

6) G_{30}^{12} est un carré premier presque normal et $m \geq 1$ est un entier.

a) $2m$ est un entier pair donc se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8. Cependant, $2m$ ne peut pas se terminer par 2 car 83 + 2 m se terminerait par 5 donc ne serait pas un nombre premier. De la même façon, $2m$ ne peut pas se terminer ni par 4 ni par 6 à cause de 41 + 2 m et 29 + 2 m qui se termineraient par 5. Il reste que $2m$ peut se terminer soit par 0, soit par 8. Donc m se termine par 0 ou 5 ou 4 ou 9.

b) Ce n'est pas un carré premier car $2m$ se termine par 6 (ici m se termine par 8).

7) M est premier presque normal et renferme 3, 5 et 7.

a) M ne peut pas être un p-générateur car il n'existe qu'un seul triplet de nombres premiers jumeaux (de la forme (p ; p + 2 ; p + 4)) soit {3 ; 5 ; 7}. Pour être un p-générateur, il faut que M + 2m soit un carré premier pour au moins une valeur entière non nulle de m. Or, {3 + 2m ; 5 + 2m ; 7 + 2m} ne sera jamais un triplet de nombres premiers jumeaux si m est non nul. Il s'ensuit que M contiendra toujours un entier qui n'est pas un nombre premier soit un des entiers du triplet. Vous trouverez un carré premier presque normal d'ordre 4 qui renferme les nombres 3, 5 et 7 à la page 9 du chapitre 10.

b) Nous savons, annexe 18, page 17, théorème 4, que M ne peut pas contenir le nombre 3. C'est pourquoi la question se pose seulement si $n \geq 4$.

8) Si 2m se termine par 2, 4, 6 ou 8, alors nous obtiendrons un carré magique qui contiendra toujours un entier différent de 5 qui se termine par 5, donc qui n'est pas un nombre premier. Le carré premier n'est donc pas possible sauf si 2m se termine par 0.

Que 2m se termine par 0 est notre condition nécessaire (donc m se termine par 0 ou 5). Il reste à chercher un carré premier avec 2m qui se termine par 0.

9) Ce nombre n'est pas premier car il se divise par 3 puisque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

10) Ce nombre n'est pas premier car il se divise par 11. En effet, la somme des chiffres de rangs impairs moins la somme des chiffres de rangs pairs est divisible par 11.

11)

a) S*doit être divisible par n si nous voulons que le carré soit magique. De plus, la somme magique sera paire donc divisible par 2 d'où S* divisible par 2n.

b) S* doit être divisible par n si nous voulons que le carré soit magique. Si n est pair, alors la somme magique sera paire et S* divisible par 2n. Si n est impair, alors la somme magique sera impaire et S* ne sera pas divisible par 2n.

Par exemple, si tous les entiers sont pairs, que S* soit divisible par 2n ne garantit pas l'existence d'un carré magique. S* divisible par 2n est une condition nécessaire mais non suffisante.

12) Pour que ce carré soit magique, il est nécessaire, selon le problème 3, que 20 + 6 = 14 + w d'où w = 12.

13) Prenons M, un carré normal idéal d'ordre 4 et sa figure complète en vert (voir 34 et 52 du glossaire de la Partie 2) :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

La somme magique de M est 34. En ajoutant dans les cases vertes le nombre 3, nous obtiendrons un nouveau carré magique presque normal de somme S = 34 + 3 = 37. Pour les trois autres carrés, il suffira d'ajouter dans les cases vertes, les nombres 9, 75 et 117 respectivement.

14) Le carré M est premier presque normal et sa somme magique est un nombre premier.

a) Les cases vertes forment une figure complète et nous allons remplacer les 5 nombres premiers qu'elles contiennent par 5 autres nombres premiers. De plus, nous voulons que la nouvelle somme magique soit aussi un nombre premier. Pour ce faire, nous allons chercher la valeur de 2m qui fera du 6-uplet de nombres premiers :

{53 ; 41 ; 89 ; 73 ; 103; 313}

un nouveau 6-uplet de nombres premiers :

(*) {53 + 2m ; 41 + 2m ; 89 + 2m ; 73 + 2m ; 103 + 2m; 313 + 2m}

Avec MATHEMATICA, nous allons utiliser :

```
Count[Table[PrimeQ[ {53 + 2m , 41 + 2m , 89 + 2m , 73 + 2m , 103 + 2m, 313 + 2m}],
{m,1,5000}], {True,True,True,True,True,True}]
```

Nous trouvons le nombre 1 donc cela signifie qu'il y a une valeur de m, entre 1 et 5000 qui fait que (*) est un 6-uplet de nombres premiers. Il est facile de trouver m = 4899. Nous trouverons, dans la figure complète, de haut en bas, les nombres premiers : 9851 ; 9839 ; 9887 ; 9871 ; 9901 et la somme magique 10 111, aussi un nombre premier.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 856.

c) Le carré M s'appelle p-générateur-5.

15) Le carré M est premier presque normal et sa somme magique est un nombre premier.

a) Nous procéderons comme au problème 14).

Count[Table[PrimeQ[{13 + 2m , 197 + 2m , 89 + 2m , 37 + 2m , 59 + 2m, 149 + 2m, 43 + 2m, 797 + 2m}], {m,1,200}], {True,True,True,True,True,True,True,True}].

Nous trouvons m = 147 d'où 2m = 294. Nous aurons alors notre premier nouveau super-premier presque normal.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 56.

c) Le carré M s'appelle p-générateur-7.

16) Nous procéderons de la même façon qu'avec le problème 14).

a) Count[Table[PrimeQ[{167 + 2m , 193 + 2m , 173 + 2m , 197 + 2m, 181 + 2m, 703 + 2m}], {m,1,300}], {True,True,True,True,True,True}].
Nous trouvons m = 210 et M est donc un p-générateur-5 puisqu'il génère au moins un carré super-premier presque normal.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 782.

c) **REMARQUE** : nous n'avons pas réellement défini ce qu'est un p-générateur-n. Nous pourrions dire que c'est **un carré premier presque normal M d'ordre** $n \geq 4$, qui peut générer un nouveau carré premier presque normal dont la somme magique est un nombre premier. Pour générer un nouveau carré premier, nous ajoutons 2m dans toutes les cases de la figure complète que possède M.

17) Rappelons que la somme S d'un carré arithmétique de coordonnées $(a;r;t)$ est :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}(r+t)$$

Nous voulons $S = n$. Il s'ensuit que :

$$r + t = \frac{2-2a}{n-1}$$

a) $S = n = 9 \ et \ a = 5$. Nous trouvons $r + t = -1$. Par exemple, prenons $r = 9 \ et \ t = -10$.
$S = n = 10 \ et \ a = 19$. Nous trouvons $r + t = -4$. Prenons $r = 7 \ et \ t = -11$.
Les deux carrés arithmétiques sont donc :

37	−48	38	−47	39	−46	40	−45	41
32	28	−57	29	−56	30	−55	31	27
18	23	19	−66	20	−65	21	17	22
13	9	14	10	−75	11	7	12	8
−1	4	0	5	1	−3	2	−2	3
−6	−10	−5	−9	77	−8	−12	−7	−11
−20	−15	−19	67	−18	68	−17	−21	−16
−25	−29	57	−28	58	−27	59	−26	−30
−39	47	−38	48	−37	49	−36	50	−35

19	−69	60	−14	38	27	−47	5	71	−80
−24	15	4	9	20	31	−7	−51	−62	75
−31	22	11	2	13	24	35	−44	−55	33
61	50	−16	7	−4	−15	−26	39	−27	−59
−45	−34	−23	14	3	−8	−19	32	43	47
−52	−41	−30	21	10	−1	−12	25	36	54
40	−48	−37	28	17	6	−5	18	29	−38
−66	57	46	−33	−22	−11	0	−9	−20	68
26	64	53	−40	−29	−18	42	−2	−13	−73
82	−6	−58	16	−36	−25	49	−3	8	−17

Ces deux carrés arithmétiques ne sont pas presque normaux car ils renferment des entiers négatifs. Cependant, il n'y a aucune répétition dans chacun.

b) Évidemment si n est un nombre premier!!!

c) M ne peut pas être presque normal puisque dans ce cas, nous aurions :

$$S \geq \frac{n(n^2+1)}{2} > n$$

L'égalité $S = n$ n'est donc pas possible.

18) Soit p, un nombre premier. Nous voulons avoir :

a) $$S = na + \frac{n(n-1)}{2}(r+t) = p$$ L'entier a est ≥ 1.

Il s'ensuit que :

$$r + t = \frac{2(p-na)}{n(n-1)}$$ Les nombres r et t sont des entiers.

Aussi, nous avons :

$$(1) \qquad p = n\left(a + \frac{(n-1)}{2}(r+t)\right) \qquad si\ n\ impair$$

$$(2) \qquad p = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)(r+t)\right) \qquad si\ n\ pair$$

Puisque p est un nombre premier, il faut qu'avec (1) nous ayons :

n = nombre premier et $\left(a + \frac{(n-1)}{2}(r+t)\right) = 1$ donc $r+t = \frac{2-2a}{n-1}$.

Puis, avec (2), $\frac{n}{2}$ = nombre premier et $\left(2a + (n-1)(r+t)\right)$ = 1 donc $r+t = \frac{1-2a}{n-1}$.

Exemple 1 :

$n=5$; $p=5$; $a=3$; $r+t=-1$; $r=4$; $t=-5$. Nous trouvons le carré suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 9 & -13 & 10 & -12 & 11 \\ 7 & 5 & -17 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 19 & -3 & -5 \\ -9 & 14 & -8 & 15 & -7 \end{array}$$

Sa somme magique est le nombre premier 5. Il n'y a aucune répétition.

Exemple 2 :

$n=14$; $p=7$; $a=7$; $r+t=-1$; $r=13$; $t=-14$. Nous trouvons un carré de somme 7 sans aucune répétition (avec MATHEMATICA ou EXCEL ou MAPLE).

Exemple 3 :

$n=4$; $p=2$; $a=2$; $r+t=-1$; $r=3$; $t=-4$. Carré sans répétition de somme 2.

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 7 & -10 \\ -4 & 1 & -3 & 8 \\ -7 & 4 & 0 & 5 \\ 11 & -6 & -2 & -1 \end{array}$$

b) Si $n = 8$, alors $\frac{n}{2} = 4$ qui n'est pas un nombre premier.

c) Si $n = 4k$, alors $\frac{n}{2} = 2k$ qui est premier si et seulement $k = 1$. Cela signifie qu'un carré arithmétique d'ordre pair multiple de 4 aura pour somme un nombre premier si et seulement si $n = 4$.

d) Si M est presque normal, alors $p \geq \frac{n(n^2+1)}{2}$ ce qui n'est pas possible si $p = n$ ou $p = \frac{n}{2}$. En effet, nous avons $n \geq 3$. M ne peut donc pas être presque normal.

19) Dans les cases vides de la dernière rangée, plaçons a et b. Nous avons donc :

S = a + b + 13 + G = 12 + 21 + a + b

En effet, la somme des 4 coins de tout carré magique d'ordre 4 est une figure magique. Il est facile de trouver G = 20.

20)
$$t > (n-1)r \;\Rightarrow\; r < \frac{t}{n-1} < \frac{t}{n-1}(n-1)^2 = (n-1)t$$
$$r > (n-1)t \;\Rightarrow\; t < \frac{r}{n-1} < \frac{r}{n-1}(n-1)^2 = (n-1)r$$

ou encore, de façon évidente :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & r & (n-1)r & t & (n-1)t \\ 0 & t & (n-1)t & r & (n-1)r \end{array}$$

montre clairement que $r < (n-1)t \;\; et \;\; t < (n-1)r$.

Notez que $r \neq t$ car si nous avions $r = t$, alors les nombres $a + r \;\; et \;\; a + t$ du carré nous conduiraient à une répétition.

21) Considérons le carré magique M à gauche et M', à droite, après la permutation :

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
T	N	P	Q

A	B	C	D
T	N	P	Q
I	J	K	L
E	F	G	H

Pour que M' soit magique, il faut et il suffit que :

A + F + K + Q = A + N + K + H et D + G + J + T = D + P + J + E d'où :

F + Q = H + N et G + T = P + E

F + Q = H + N

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
T	N	P	Q

E + P = G + T

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
T	N	P	Q

Il est clair que M et M'ont la même somme magique.

22) Le carré suivant est magique, presque normal et de somme magique $S = 34 + k$. Il provient d'un carré magique normal idéal :

1	8	15+k	10
14+k	11	4	5
12	13+k	6	3
7	2	9	16+k

a) Les cases vertes forment une figure complète (Partie 1, numéro 27 du glossaire). Il est clair que ce carré magique génère des carrés magiques presque normaux de sommes consécutives 34, 35, 36, 37, …

b) Nous avons $k \geq 5$ donc la somme magique $S \geq 39$. Nous plaçons les nombres du carré dans deux groupes (1) *et* (2) :

$$(1) = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\,;\,11\,;\,12\} \;\; et \;\; (2) = \{13+k\,;\,14+k\,;\,15+k\,;\,16+k\}.$$

La somme de (1) est 78 et la somme de (2) est 58 + 4k. Pour que le carré formé des nombres de (1) et (2) soit magique, il faut que les nombres de (2) soient situés dans une figure complète donc un seul par rangée, un seul par colonne et un seul par grande diagonale. Pour montrer cela, nous devons :

i) Montrer que dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, nous ne pouvons pas avoir deux nombres de (2).

ii) Montrer que dans chaque rangée et chaque colonne, nous devons avoir un seul nombre de (2).

iii) Montrer que dans chaque grande diagonale, il faut un seul nombre de (2).

Preuve de i) :

Prenons une rangée qui contient les deux plus petits nombres entiers de (2), 13 + k et 14 + k pour un total de 27 + 2k puis ajoutons les deux plus petits de (1) pour un nouveau total de 30 + 2k qui doit être la somme magique 34 + k. Nous voyons bien que 30 + 2k > 34 + k est vérifiée dès que k > 4. Donc pour k > 4, il est impossible d'avoir deux nombres de (2) sur une même rangée car la somme serait plus grande que la somme magique. De même, impossible d'avoir deux nombres de (2) sur une même colonne et sur une même grande diagonale.

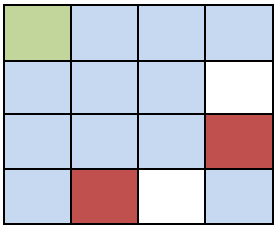
Preuve de ii) :

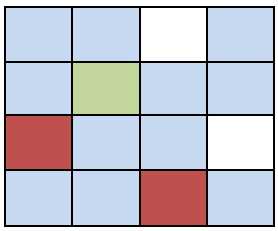
Si dans une rangée (colonne), nous n'avons aucun nombre de (2), alors il est certain que dans une autre rangée (colonne), nous en trouverons au moins deux ce qui n'est pas possible lorsque k > 4. **Il faut donc dans chaque rangée et dans chaque colonne, un seul nombre de (2).**

Preuve de iii) :

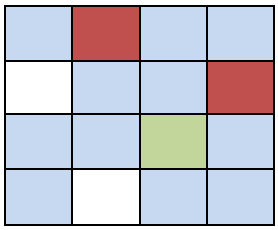
Est-il possible que sur les deux grandes diagonales, nous ne trouvions aucun nombre de (2)? La réponse est non. En effet, si c'était le cas, alors la somme des nombres en dehors des deux grandes diagonales serait $\geq 68 + 4k$. Il resterait donc un total de 68 pour remplir les deux grandes diagonales, ce qui n'est pas possible dès que k > 0.

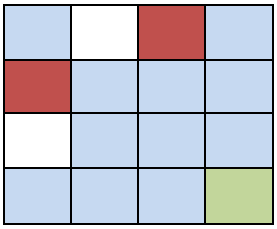
Enfin, pourrions-nous avoir un nombre de (2) sur une grande diagonale mais pas sur l'autre? La réponse est toujours non. En effet, il est facile de montrer que si nous avons un nombre de (2) sur une grande diagonale et aucun nombre de (2) sur l'autre grande diagonale, alors il sera impossible de placer les trois autres nombres de (2) dans le carré afin qu'il soit magique.





La case verte contient un nombre de (2). Les cases bleues ne peuvent pas recevoir un nombre de (2). Les cases rouges contiennent un nombre de (2). Impossible d'avoir un nombre de (2) dans une case blanche. **Nous pouvons donc placer seulement trois nombres de (2).**





Il est facile de constater que le quatrième nombre de (2) ne peut se placer que sur la diagonale secondaire.

Nous avions choisi de placer un seul nombre de (2) sur la diagonale principale et aucun sur la diagonale secondaire. Nous aurions le même résultat en plaçant un seul nombre de (2) sur la diagonale secondaire et aucun sur la principale.

Donc, il faut dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale un seul nombre de (2). Ceux-ci forment alors une figure complète.

c) Nous savons maintenant qu'à partir de k = 5, les quatre nombres de (2) forment une figure complète.

W	a	b	c
d	e	f	Z
g	X	h	m
p	q	Y	r

k = 5 S = 39

W+1	a	b	c
d	e	f	Z+1
g	X+1	h	m
p	q	Y+1	r

k = 6 S = 40

Soit A, l'ensemble des carrés magiques définis avec k = 5 et B, l'ensemble des carrés magiques définis avec k = 6. Nous allons montrer qu'il existe une bijection de A sur B.

Le carré de gauche est dans A et dans B, nous allons lui faire correspondre celui de droite. Notez que W, X, Y et Z sont dans le groupe (2) pour A et que W+1, X+1, Y+1 et Z+1 sont dans le groupe (2) pour B. Puis (1) = {a, b, c, d, e, f, g, h, m, p, q, r}. **La bijection est évidente!!! Il en résulte que si A contient 1408 carrés, B en contient également 1408**. Notez que la figure complète ci-haut est l'une des huit possibles. Ainsi, pour k = 5, 6, 7, 8, 9, …, nous aurons toujours 1408 carrés magiques. Pourquoi des nombres différents pour k = 0, 1, 2, 3 et 4? Dans tous ces cas, nous

trouvons des carrés magiques tels que leurs quatre plus grands nombres ne sont pas dans une figure complète.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

k = 0 ; S = 34

5	14	7	9
15	3	16	1
11	6	10	8
4	12	2	17

k = 1 ; S = 35

10	16	4	6
2	11	5	18
7	8	12	9
17	1	15	3

k = 2 ; S = 36

18	4	3	12
16	5	7	9
2	17	8	10
1	11	19	6

k = 3 ; S = 37

12	6	19	1
5	11	2	20
4	18	7	9
17	3	10	8

k = 4 ; S = 38

Pour k = 0, 1, 2, 3, 4, nous trouvons un nombre de carrés magiques supérieur à 1408. Il est facile de montrer que pour ces valeurs de k, nous aurons toujours 1408 carrés qui contiennent leurs quatre plus grands nombres (ceux de (2)) dans une figure complète. Par exemple, le tableau suivant montre que pour k = 2, il y a 608 carrés tels que leurs quatre plus grands nombres ne soient pas dans une figure complète.

Voici ce tableau :

	Nombre de carrés
k = 0 ; S = 34	1408 + 5632 = 7040
k = 1 ; S = 35	1408 + 288 = 1696
k = 2 ; S = 36	1408 + 608 = 2016
k = 3 ; S = 37	1408 + 96 = 1504
k = 4 ; S = 38	1408 + 416 = 1824

Nous avons pris les 1504 carrés magiques définis avec k = 3, S = 37 puis nous avons éliminé tous ceux qui avaient leurs quatre plus grands nombres dans une figure complète. Les carrés restants étaient au nombre de 96.

Résumons :

Considérons les 16 nombres suivants avec l'entier $k \geq 0$:

(*) $\{1,2,3,\ldots,11,12,13+k,14+k,15+k,16+k\}$

Nous pouvons construire une infinité de carrés magiques de sommes consécutives à partir de 34 et ce, grâce au carré magique normal idéal suivant (celui de gauche) :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

1	8	15+k	10
14+k	11	4	5
12	13+k	6	3
7	2	9	16+k

Nous trouvons en plus les résultats suivants :

Dès que $k \geq 5$, tous les carrés magiques qui contiennent (*) ont leurs quatre plus grands entiers situés dans une figure complète.

Quand $k \geq 5$, le nombre de carrés magiques qui contiennent (*) est toujours de 1408.

Avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$, nous trouvons 1408 carrés magiques qui ont leurs quatre plus grands entiers situés dans une figure complète plus un certain nombre de carrés magiques qui n'ont pas leurs quatre plus grands entiers situés dans une figure complète (voir le tableau de la page 12).