Annexe 18.1 : L'extraordinaire p-générateur G_{30}^{12} et deux autres

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

Le carré G_{30}^{12} est magique et contient 9 nombres premiers différents. Si nous ajoutons un même entier pair $2m$ (m entier ≥ 0) à tous les nombres premiers de G_{30}^{12}, alors, il se peut que nous obtenions un nouveau carré premier. Nous verrons que cela n'arrive que très rarement!!!

En effet, prenons la suite des 9 nombres premiers consécutifs qui vont de 23 à 59. Nous ajoutons 2m (m de 1 à 600 000 000) à chacun et espérons trouver 9 nouveaux nombres premiers. La première valeur de m qui nous donne 9 nouveaux nombres premiers est m = 808 290, la deuxième est m = 3 158 295, la troisième est m = 167 194 125 et la quatrième est m = 558 226 305. Donc, avec m allant de 1 à 600 000 000, nous trouvons seulement 4 valeurs de m qui conduisent à 9 nouveaux nombres premiers!!!

Notons ici que dans les 4 nouvelles suites de 9 nombres premiers, ceux-ci étaient tous consécutifs. Cependant, aucune de ces 5 suites ne permet la construction d'un carré magique.

Nous avons ensuite pris une suite de 16 nombres premiers consécutifs allant de 23 à 89. Avec m qui va de 1 à 2 600 000 000, nous n'avons obtenu aucune nouvelle suite de 16 nombres premiers.

Nous avons pris une suite de 16 nombres premiers consécutifs de 31 à 101 laquelle forme un carré magique. Avec m de 1 à 6 000 000 000, nous n'avons trouvé aucune suite de 16 nombres premiers.

Enfin, nous avons pris la suite magique (suite qui permet de construire un carré magique) de 16 nombres premiers qui se trouve au bas de la page 24 de l'annexe 18. Avec m de 1 à 17 000 000 000, nous n'avons rien trouvé!!! **D'où cette grande rareté!!!**

Mentionnons qu'il est possible de construire une suite (1) de 16 nombres premiers laquelle donnera au moins une nouvelle suite (2) de 16 nombres premiers en ajoutant 2m à tous les nombres de (1).

Seulement, cette suite doit être très convenablement choisie!!!

Nous pourrions trouver une telle suite formée de 25 nombres premiers ou 36, ou 49, ou 64, …

Pour ce faire, nous pouvons considérer les suites de quintuplets de nombres premiers de la forme (p ; p + 2 ; p + 6; p + 8 ; p + 12)

La première suite serait formée des nombres premiers p; la deuxième, des nombres premiers p + 2, la troisième, des nombres premiers p + 6; …

La grande question : ces 5 suites permettent-elles de construire un carré magique?

Nous pourrions aussi prendre des triplets de nombres premiers de la forme

(p ; p + 2 ; p + 6) ou (p ; p + 4 ; p + 6) ou autres…

Si en ajoutant 2m à tous les nombres premiers de G_{30}^{12}, nous obtenons un nouveau carré premier M, alors nous dirons que G_{30}^{12} génère M.

Si en ajoutant 2m à tous les nombres d'une suite (s) de nombres premiers, nous obtenons une nouvelle suite (s') de nombres premiers, alors nous dirons que (s) génère (s').

Rappelons qu'un carré premier est, par définition, un carré magique formé exclusivement de nombres premiers.

Voyons maintenant pourquoi G_{30}^{12} est un p-générateur extraordinaire. Il est vrai que G_{30}^{12} génère beaucoup de carrés premiers qui sont tous presque normaux puisque G_{30}^{12} est lui-même presque normal. Mais G_{30}^{12} génère aussi des carrés premiers parfaits (formés de 9 nombres premiers consécutifs), ce qui est encore plus rare!!!

Nous savons que G_{30}^{12} génère au moins 124 carrés premiers dont 38 carrés premiers parfaits!!!
Voilà pourquoi G_{30}^{12} est extraordinaire!!!

Voyons cela de plus près.

1) Quand m varie de 0 à 740 014 049.

Nous trouvons 13 carrés premiers incluant G_{30}^{12} lorsque m = 0. Ils sont définis par :

$$m = 0$$
$$m = 70\ 449\ 379$$
$$m = 158\ 486\ 790$$
$$m = 193\ 969\ 215$$
$$m = 229\ 784\ 484$$
$$m = 247\ 053\ 114$$
$$m = 360\ 803\ 779$$
$$m = 410\ 547\ 445$$
$$m = 427\ 708\ 435$$
$$m = 463\ 328\ 019$$
$$m = 573\ 770\ 665$$
$$m = 618\ 580\ 710$$
$$m = 734\ 165\ 614$$

Les 27 carrés premiers parfaits du tableau 5, page 14 de l'annexe 18
sont notés de (1) à (27).

En date du 19 avril 2020, ce sont les seuls carrés premiers parfaits connus d'ordre 3.

2) Quand m varie de 740 014 050 (1) à 47 757 724 504 (26).

a) **Les carrés premiers parfaits :** nous en trouvons 20. Ils sont définis par :

(1) $m = 740\ 014\ 050$

(2) $m = 925\ 295\ 014$

(3) $m = 2\ 598\ 092\ 959$

(4) $m = 2\ 800\ 783\ 579$

(5) $m = 2\ 878\ 642\ 234$

(6) $m = 3\ 024\ 185\ 500$

(7) $m = 3\ 075\ 538\ 620$

(8) $m = 4\ 758\ 561\ 115$

(9) $m = 9\ 526\ 117\ 909$

(10) $m = 10\ 238\ 934\ 145$

(12) $m = 12\ 013\ 445\ 065$

(14) $m = 14\ 259\ 995\ 679$

(15) $m = 17\ 410\ 663\ 045$

(16) $m = 22\ 210\ 484\ 940$

(18) $m = 36\ 913\ 899\ 490$

(19) $m = 36\ 987\ 390\ 930$

(21) $m = 38\ 241\ 953\ 904$

(22) $m = 38\ 280\ 138\ 490$

(24) $m = 42\ 946\ 012\ 599$

(26) $m = 47\ 757\ 724\ 504$

b) **Les carrés premiers** : nous en trouvons 25 situés entre les carrés (1) et (10) :

Entre (1) et (2), nous en avons 3;

(2) et (3)	5
(5) et (6)	1
(7) et (8)	7
(8) et (9)	8
(9) et (10)	1

Nous n'avons pas cherché entre (10) et (26) sauf entre (18) et (19) puis entre (21) et (22) pour n'en trouver aucun.

3) Quand m > 47 757 724 504.

En faisant varier m de 47 757 724 505 à 202 900 000 000, nous avons trouvé 66 nouveaux carrés premiers dont 18 nouveaux carrés premiers parfaits!!!

Voici les valeurs de m qui définissent ces 66 carrés premiers :

48 210 986 445
48 724 916 730
48 892 457 389
48 978 369 930
49 062 108 024
51 993 546 759 : Nouveau carré premier parfait (28) trouvé le 20 avril 2020.
53 952 904 005
55 798 062 249
56 246 660 910
56 977 487 314
57 228 891 649
57 332 196 669
59 194 243 444
60 584 920 864
60 866 687 349 : Nouveau carré premier parfait (29) trouvé le 27 avril 2020.
61 299 614 530
62 417 077 030
62 611 387 300
63 818 616 609
64 470 371 559
64 642 809 699
67 106 035 464
67 986 530 079

68 136 676 075

68 667 942 679

71 270 486 469 : Nouveau carré premier parfait (30) trouvé le 12 mai 2020.

72 148 220 634

72 734 816 440

73 298 524 635 : Nouveau carré premier parfait (31) trouvé le 13 mai 2020.

73 327 586 800; 74 067 126 315; 74 826 184 054; 75 491 542 434; 75 503 357 419;

76 286 883 420; 77 614 546 785; 77 783 520 304; 77 924 659 995;

78 708 471 589 : Nouveau carré premier parfait (32) trouvé le 15 mai 2020.

79 231 442 884; 81 561 984 279; 82 599 245 190; 82 897 658 025.

83 337 065 559 : Nouveau carré premier parfait (33) trouvé le 17 mai 2020.

85 417 544 520; 86 393 271 894;

87 165 695 260 : Nouveau carré premier parfait (34) trouvé le 19 mai 2020.

88 060 392 349; 90 213 082 960;

90 426 956 395 : Nouveau carré premier parfait (35) trouvé le 20 mai 2020.

95 241 205 549; 95 310 757 135; 96 157 747 615;

97 187 795 040 : Nouveau carré premier parfait (36) trouvé le 22 mai 2020.

98 249 594 625; 99 538 443 934; 100 575 870 549;

100 871 615 620 : Nouveau carré premier parfait (37) trouvé le 23 mai 2020.

À partir de m = 100 900 000 001, nous n'avons retenu que les carrés premiers parfaits déterminés par les valeurs de m suivantes :

123 380 362 749 ; 126 257 341 210 ; 134 475 560 995 ; 140 141 073 534
170 206 666 069 ; 176 475 189 820 ; 195 257 527 905 ; 202 864 665 289

Ceux-ci sont notés (43) à (50).

Nous n'avons pas comptabilisé les carrés premiers obtenus au-delà de m = 100 900 000 000.

Utilisons maintenant le p-générateur G_{60}^{18}. Celui-ci nous donnera peut-être des nouveaux carrés premiers parfaits?!?!

107	131	29
11	89	167
149	47	71

G_{60}^{18}

C'est un carré magique qui renferme 9 nombres premiers différents. Il génère au moins 212 carrés premiers dont les carrés premiers parfaits (27), (40), (41) et (42) du tableau 5.

Il génère plus de carrés premiers que G_{30}^{12} mais ce dernier génère 37 carrés premiers parfaits tandis que G_{60}^{18} n'en génère que 4 lorsque m varie de 0 à 175 100 000 000.

1) **Quand m varie de 0 à 1 000 000 000.**
   Nous obtenons 31 carrés premiers.

2) **Quand m = 49 988 712 321.**
   Cette valeur détermine le carré premier parfait (27) du tableau 5.

3) **Quand m > 49 988 712 321.**
   En faisant varier m de 49 988 712 322 à 175 100 000 000, nous trouvons 177 carrés premiers plus les nouveaux carrés premiers parfaits (40), (41) et (42) :

$$(40) \quad m = 73\,829\,575\,290$$
$$(41) \quad m = 158\,326\,723\,641$$
$$(42) \quad m = 162\,905\,547\,891$$

Au-delà de m = 106 500 000 000, nous n'avons pas comptabilisé les nouveaux carrés premiers.

Enfin, prenons ce troisième p-générateur, G_{30}^{42}, qui peut-être, pourra nous donner des nouveaux carrés premiers parfaits plus facilement que le carré G_{60}^{18}. Pourquoi? Les 9 nombres premiers obtenus avec un certain m, se trouvent dans un intervalle fermé de différentes longueurs selon le p-générateur utilisé.

Avec G_{30}^{12}, les intervalles sont toujours de longueur 113 – 29 + 1 = 85. C'est le nombre d'entiers dans l'intervalle fermé [29 + 2m ; 113 + 2m].

Avec G_{30}^{42}, les intervalles sont toujours de longueur 254 971 – 254 827 + 1 = 145.

Avec G_{60}^{18}, les intervalles sont toujours de longueur 167 – 11 + 1 = 157.

Nous devrions trouver moins de nombres premiers dans un intervalle plus petit!??! D'où une meilleure chance d'en trouver seulement 9. Si l'intervalle est trop petit, nous n'aurons pas assez de nombres premiers alors que dans les intervalles plus longs, nous en aurons trop!!! C'est pourquoi nous allons maintenant travailler avec G_{30}^{42}.

254 941	254 887	254 869
254 827	254 899	254 971
254 929	254 911	254 857

G_{30}^{42}

C'est un carré magique formé de 9 nombres premiers différents.

Nous savons que G_{30}^{42} génère 6 carrés premiers parfaits soient ceux déterminés par :

$$m = 24\ 642\ 758\ 426$$
$$m = 37\ 110\ 132\ 246$$
$$m = 40\ 071\ 417\ 386$$
$$m = 44\ 566\ 335\ 455$$
$$m = 72\ 987\ 605\ 816$$
$$m = 90\ 780\ 413\ 625$$

Nous obtenons respectivement les carrés (17), (20), (23), (25), (38) et (39) du tableau 5.

1) Quand m varie de 0 à 1 000 000 000.

Nous obtenons 32 carrés premiers.

2) Quand m vaut :

$$m = 24\ 642\ 758\ 426 \qquad (17)$$
$$m = 37\ 110\ 132\ 246 \qquad (20)$$
$$m = 40\ 071\ 417\ 386 \qquad (23)$$
$$m = 44\ 566\ 335\ 455 \qquad (25)$$
$$m = 72\ 987\ 605\ 816 \qquad (38)$$
$$m = 90\ 780\ 413\ 625 \qquad (39)$$

Nous trouvons 6 carrés premiers parfaits; le premier est de Nelson, les 3 suivants de Wesolowski et les 2 derniers de Bégin.

3) Quand m varie de 49 988 500 000 à 100 900 000 000.

Nous trouvons 165 carrés premiers lorsque m varie de 49 988 500 000 à 100 900 000 000 plus les carrés premiers parfaits (38) et (39) du tableau 5.

Puis nous trouvons 2 carrés premiers entre 300 000 000 001 et 301 100 000 000.

Le tableau suivant indique ce que chaque p-générateur a déjà trouvé et en rouge, les 23 nouveaux carrés premiers parfaits trouvés par Claude Bégin du 20 avril 2020 au 26 juillet 2020.

	G_{30}^{12}	G_{30}^{42}	G_{60}^{18}
Carrés premiers au moins	86	199	208
Carrés premiers parfaits	$20+18$	$4+2$	$1+3$

Celui-ci montre que G_{30}^{12} génère **au moins** 86 carrés premiers d'ordre 3 plus 38 carrés premiers parfaits d'ordre 3 parmi les 50 connus à ce jour (26 juillet 2020).

Après avoir donné au-delà de 378 000 000 000 de valeurs entières à m, nous avons obtenu une seule fois une paire de carrés premiers exceptionnels. Voici cette paire $(A\ ;\ B)$ générée par G_{30}^{42}.

174 131 493 563	174 131 493 509	174 131 493 491
174 131 493 449	174 131 493 521	174 131 493 593
174 131 493 551	174 131 493 533	174 131 493 479

Carré A défini avec m = 87 065 619 311

174 131 493 593	174 131 493 539	174 131 493 521
174 131 493 479	174 131 493 551	174 131 493 623
174 131 493 581	174 131 493 563	174 131 493 509

Carré B défini avec m = 87 065 619 326

Nous avons $B = A + 30$.

A *et* B ont en commun 6 nombres premiers!!!

C'est la première fois que nous trouvons 2 carrés premiers dont l'un est déterminé par m et l'autre par m + 15 et ce, avec le même p-générateur!!!

Ces 2 carrés premiers cousins sont presque des frères!!!

Dans le nouveau tableau 5 qui suit, les lettres N, W et B signifient respectivement que la suite correspondante a été trouvée pour la première fois par Harry L. Nelson, Arkadiusz Wesolowski et Claude Bégin.

Nous avons trouvé, de façon indépendante de Nelson et de Wesolowski les 8 premiers carrés premiers parfaits du tableau 5 et ce, avec le programme «Premiers parfaits -3». Puis, les 23 derniers carrés premiers parfaits avec les p-générateurs G_{30}^{12}, G_{30}^{42} *et* G_{60}^{18}.

Ce nouveau tableau 5 présente les 50 carrés premiers parfaits d'ordre 3 connus à ce jour (le 26 Juillet 2020). Nous pourrions sûrement en trouver d'autres avec nos trois p-générateurs G_{30}^{12}, G_{30}^{42} *et* G_{60}^{18}.

Voici notre nouveau tableau 5 :

Rappelons que le nombre d de la dernière colonne est le nombre qu'il faut ajouter au plus petit carré de même couleur pour obtenir le carré correspondant à la ligne où nous sommes. Par exemple, pour obtenir le carré de la ligne 6, il faut ajouter 4 568 342 900 à 1 480 028 129 pour obtenir 6 048 371 029. Nous pourrions écrire :

(6) = 4 568 342 900 + (1)

Pour obtenir le carré de la ligne 25, il faut ajouter 39 847 154 058 à 49 285 771 679 pour obtenir 89 132 925 737 d'où :

(25) = 39 847 154 058 + (17)

Rang de la suite	a	r	t	d
(1) 73 780 392 N	1 480 028 129	12	30	
(2) 91 233 987 N	1 850 590 057	12	30	370 561 928
(3) 243 732 111 N	5 196 185 947	12	30	3 716 157 818
(4) 261 821 730 N	5 601 567 187	12	30	4 121 539 058
(5) 268 755 906 N	5 757 284 497	12	30	4 277 256 368
(6) 281 692 209 N	6 048 371 029	12	30	4 568 342 900
(7) 286 252 067 N	6 151 077 269	12	30	4 671 049 140
(8) 434 056 891 N	9 517 122 259	12	30	8 037 094 130
(9) 842 207 042 N	19 052 235 847	12	30	17 572 207 718
(10) 902 344 164 N	20 477 868 319	12	30	18 997 840 190
(11) 1 042 374 622 N	23 813 359 613	54	30	
(12) 1 051 311 615 N	24 026 890 159	12	30	22 546 862 030
(13) 1 164 898 483 W	26 748 150 199	84	30	
(14) 1 238 594 408 N	28 519 991 387	12	30	27 039 963 258
(15) 1 499 228 081 N	34 821 326 119	12	30	33 341 297 990
(16) 1 892 656 056 N	44 420 969 909	12	30	42 940 941 780
(17) 2 090 654 856 N	49 285 771 679	42	30	
(18) 3 078 816 357 N	73 827 799 009	12	30	72 347 770 880
(19) 3 084 687 241 N	73 974 781 889	12	30	72 494 753 760
(20) 3 094 505 961 W	74 220 519 319	42	30	24 934 747 640
(21) 3 184 881 661 N	76 483 907 837	12	30	75 003 879 708
(22) 3 187 929 454 N	76 560 277 009	12	30	75 080 248 880
(23) 3 330 758 121 W	80 143 089 599	42	30	30 857 317 920
(24) 3 559 417 516 N	85 892 025 227	12	30	84 411 997 098
(25) 3 688 049 402 W	89 132 925 737	42	30	39 847 154 058
(26) 3 940 838 317 N	95 515 449 037	12	30	94 035 420 908
(27) 4 117 163 273 W	99 977 424 653	18	60	
(28) 4 275 348 165 B	103 987 093 547	12	30	102 507 065 418
(29) 4 972 689 349 B	121 733 374 727	12	30	120 253 346 598
(30) 5 785 297 282 B	142 540 972 967	12	30	141 060 944 838
(31) 5 943 141 456 B	146 597 049 299	12	30	145 117 021 170
(32) 6 363 378 256 B	157 416 943 207	12	30	155 936 915 078
(33) 6 722 026 194 B	166 674 131 147	12	30	165 194 103 018

Rang de la suite	a	r	t	d
(34) 7 018 112 091 B	174 331 390 549	12	30	172 851 362 420
(35) 7 269 919 566 B	180 853 912 819	12	30	179 373 884 690
(36) 7 790 835 962 B	194 375 590 109	12	30	192 895 561 980
(37) 8 074 087 847 B	201 743 231 269	12	30	200 263 203 140
(38) 5 918 963 232 B	145 975 466 459	42	30	96 689 694 780
(39) 7 297 200 098 B	181 561 082 077	42	30	132 275 310 398
(40) 5 984 448 694 B	147 659 150 591	18	60	47 681 725 938
(41)12 447 955 801 B	316 653 447 293	18	60	216 676 022 640
(42)12 793 594 362 B	325 811 095 793	18	60	225 833 671 140
(43) 9 796 632 851 B	246 760 725 527	12	30	245 280 697 398
(44)10 015 876 678 B	252 514 682 449	12	30	251 034 654 320
(45)10 641 154 885 B	268 951 122 019	12	30	267 471 093 890
(46)11 071 365 442 B	280 282 147 097	12	30	278 802 118 968
(47)13 343 967 546 B	340 413 332 167	12	30	338 933 304 038
(48)13 815 783 070 B	352 950 379 669	12	30	351 470 351 540
(49)15 225 807 954 B	390 515 055 839	12	30	389 035 027 710
(50)15 795 414 830 B	405 729 330 607	12	30	404 249 302 478

Nouveau tableau 5 : suite trouvée par H. L. Nelson (N), A. Wesolowski (W), C. Bégin (B)

Voici les 18 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 générés par G_{30}^{12} :

103 987 093 601	103 987 093 607	103 987 093 559
103 987 093 547	103 987 093 589	103 987 093 631
103 987 093 619	103 987 093 571	103 987 093 577

Carré (28)

121 733 374 781	121 733 374 787	121 733 374 739
121 733 374 727	121 733 374 769	121 733 374 811
121 733 374 799	121 733 374 751	121 733 374 757

Carré (29)

142 540 973 021	142 540 973 027	142 540 972 979
142 540 972 967	142 540 973 009	142 540 973 051
142 540 973 039	142 540 972 991	142 540 972 997

Carré (30)

146 597 049 353	146 597 049 359	146 597 049 311
146 597 049 299	146 597 049 341	146 597 049 383
146 597 049 371	146 597 049 323	146 597 049 329

Carré (31)

157 416 943 261	157 416 943 267	157 416 943 219
157 416 943 207	157 416 943 249	157 416 943 291
157 416 943 279	157 416 943 231	157 416 943 237

Carré (32)

166 674 131 201	166 674 131 207	166 674 131 159
166 674 131 147	166 674 131 189	166 674 131 231
166 674 131 219	166 674 131 171	166 674 131 177

Carré (33)

174 331 390 603	174 331 390 609	174 331 390 561
174 331 390 549	174 331 390 591	174 331 390 633
174 331 390 621	174 331 390 573	174 331 390 579

Carré (34)

180 853 912 873	180 853 912 879	180 853 912 831
180 853 912 819	180 853 912 861	180 853 912 903
180 853 912 891	180 853 912 843	180 853 912 849

Carré (35)

194 375 590 163	194 375 590 169	194 375 590 121
194 375 590 109	194 375 590 151	194 375 590 193
194 375 590 181	194 375 590 133	194 375 590 139

Carré (36)

201 743 231 323	201 743 231 329	201 743 231 281
201 743 231 269	201 743 231 311	201 743 231 353
201 743 231 341	201 743 231 293	201 743 231 299

Carré (37)

Vous pourrez trouver le **Carré (43)** en utilisant la structure générale des carrés magiques d'ordre 3 ou le fichier «Ordre 3» d'EXCEL ou MATHEMATICA; il suffit de poser :

$$a = 246\ 760\ 725\ 527\ ;\ r = 12\ ;\ t = 30$$

Notez que $a = 2m + 29$ et que le rang de (43) est $9\ 796\ 632\ 851$

Le **Carré (44)** est défini par m = 126 257 341 210 d'où :

$$a = 252\ 514\ 682\ 449\ ;\ \ r = 12\ \ ;\ \ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (44) est $10\ 015\ 876\ 678$.

Le **Carré (45)** est défini par m = 134 475 560 995 d'où :

$$a = 268\ 951\,122\ 019\ ;\ \ r = 12\ \ ;\ \ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (45) est $10\ 641\,154\ 885$.

Le carré **(46)** est défini par m = 140 141 073 534 d'où :

$$a = 280\ 282\ 147\ 097\ ;\ \ r = 12\ \ ;\ \ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (46) est $11\ 071\ 365\ 442$.

Le carré **(47)** est défini par m = 170 206 666 069 d'où :

$$a = 340\ 413\ 332\ 167\ ;\ \ r = 12\ \ ;\ \ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (47) est $13\ 343\ 967\ 546$.

Le carré **(48)** est défini par m = 176 475 189 820 d'où :

$$a = 352\ 950\ 379\ 669\ \ ;\ \ r = 12\ \ ;\ \ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (48) est $13\ 815\ 783\ 070$.

Le carré **(49)** est défini par m = 195 257 527 905 d'où :

$$a = 390\ 515\ 055\ 839\ \ ;\ \ r = 12\ \ ;\ \ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (49) est $15\ 225\ 807\ 954$.

Le carré **(50)** est défini par m = 202 864 665 289 d'où :

$$a = 405\ 729\ 330\ 607\ \ ;\ \ r = 12\ \ ;\ \ t = 30$$

Nous avons toujours $a = 2m + 29$ et le rang de (50) est $15\ 795\ 414\ 830$.

Puis les 2 nouveaux carrés premiers parfaits suivants générés par G_{30}^{42} :

145 975 466 573	145 975 466 519	145 975 466 501
145 975 466 459	145 975 466 531	145 975 466 603
145 975 466 561	145 975 466 543	145 975 466 489

Carré (38)

181 561 082 191	181 561 082 137	181 561 082 119
181 561 082 077	181 561 082 149	181 561 082 221
181 561 082 179	181 561 082 161	181 561 082 107

Carré (39)

Enfin, les 3 nouveaux carrés premiers parfaits suivants générés par G_{60}^{18} :

147 659 150 687	147 659 150 711	147 659 150 609
147 659 150 591	147 659 150 669	147 659 150 747
147 659 150 729	147 659 150 627	147 659 150 651

Carré (40)

316 653 447 389	316 653 447 413	316 653 447 311
316 653 447 293	316 653 447 371	316 653 447 449
316 653 447 431	316 653 447 329	316 653 447 353

Carré (41)

Vous pourrez trouver le **Carré (42)** en utilisant le fichier «Ordre 3» d'EXCEL ou MATHEMATICA en posant :

$$a = 325\ 811\ 095\ 793\ ;\ \ r = 18\ \ ;\ \ t = 60$$

Notez que $a = 2m + 11$ et que le rang de (42) est $12\ 793\ 594\ 362$.

Selon le tableau 5 ci-haut, nous pourrions construire les p-générateurs $G_{30}^{54}\ \ et\ \ G_{30}^{84}$.

Nous avons trouvé 31 des 50 carrés premiers parfaits d'ordre 3 du tableau 5. Il s'agit des carrés de (1) à (8), trouvés avant nous par Harry L. Nelson en 1988 . Nous les avons trouvés de façon indépendante de Nelson et de Wesolowski. Quant aux 23 nouveaux, je les ai trouvés à l'aide de $G_{30}^{12}\ ;\ G_{30}^{42}\ et\ G_{60}^{18}$ du 20 avril 2020 au 26 juillet 2020.

Carrés premiers parfaits 3x3	a été le premier à en trouver	trouvés
Harry L. Nelson	22	22
Arkadiusz Wesolowski	5	27
Claude Bégin	23	23
C. Bégin, C. St-Hilaire		8
Total	50	50

Nelson a été le premier à trouver le premier carré premier parfait 3x3; il en a trouvé 22 en tout.

Arkadiusz Wesolowski a retrouvé, de façon indépendante de Nelson, les 22 carrés de Nelson plus 5 nouveaux soient les carrés (13), (20), (23), (25) et (27) du tableau 5.

Claude Bégin à été le premier à trouver les carrés (28) à (50) du tableau 5.

Claude Bégin et Claude St-Hilaire ont retrouvé de façon indépendante de Nelson et Wesolowski, les 8 premiers carrés du tableau 5.

Notons que ces 3 p-générateurs ont été construits à partir des carrés premiers parfaits (1), (17) et (27).

Le tableau suivant présente les 23 nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3 qui apparaissent, de haut en bas, dans l'ordre du plus petit au plus grand.

Nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3	Générés par
(28)	G_{30}^{12}
(29)	G_{30}^{12}
(30)	G_{30}^{12}
(38)	G_{30}^{42}
(31)	G_{30}^{12}
(40)	G_{60}^{18}
(32)	G_{30}^{12}
(33)	G_{30}^{12}
(34)	G_{30}^{12}
(35)	G_{30}^{12}
(39)	G_{30}^{42}
(36)	G_{30}^{12}
(37)	G_{30}^{12}
(43)	G_{30}^{12}
(44)	G_{30}^{12}
(45)	G_{30}^{12}
(46)	G_{30}^{12}
(41)	G_{60}^{18}
(42)	G_{60}^{18}
(47)	G_{30}^{12}
(48)	G_{30}^{12}
(49)	G_{30}^{12}
(50)	G_{30}^{12}

Le numéro attribué à chaque nouveau carré premier parfait indique dans quel ordre chacun a été découvert après le carré (27).

Soit M, un carré premier presque normal d'ordre 3. Son plus petit nombre est a et son plus est $a+2r+2t$. Le nombre d'entiers dans l'intervalle fermé I suivant est noté λ. C'est aussi la longueur de I.

$$I = [a\ ;\ a+2r+2t] \quad ; \quad \lambda = a+2r+2t-a+1 = 2r+2t+1$$

Théorème :

Soit M, un carré premier presque normal d'ordre 3 et $I = [a\ ;\ a+2r+2t]$, l'intervalle fermé formé du plus petit nombre premier de M à gauche et du plus grand à droite.

M possède 9 nombres premiers consécutifs ssi I contient exactement 9 nombres premiers.

En effet, les 9 nombres premiers de M sont dans I. Si I contient seulement 9 nombres premiers, alors ceux-ci sont ceux de M, donc forcément consécutifs. Les nombres premiers dans tout intervalle sont évidemment consécutifs!!!

Si les 9 nombres premiers de M sont consécutifs, alors I contient exactement 9 nombres premiers. En effet, si I renferme un dixième nombre premier, alors ceux de M ne peuvent pas être consécutifs puisque pour aller de a à $a+2r+2t$, nous devons obligatoirement sauter un nombre premier. En d'autres mots, si I renferme (9 + (k > 0)) nombres premiers, alors ces k nombres premiers devront se trouver entre ceux de M ce qui contredit que les 9 nombres premiers de M soient consécutifs.

Avec MATHEMATICA, nous pouvons trouver le nombre de nombres premiers
dans un intervalle fermé [u ; v] en faisant

PrimePi [v] – PrimePi [u – 1]

Pour G_{30}^{12}, nous trouvons $\lambda = 85$.

Pour G_{30}^{42}, nous trouvons $\lambda = 145$.

Pour G_{60}^{18}, nous trouvons $\lambda = 157$.

De façon intuitive, nous pensons que plus λ est grand, plus il y aura de nombres premiers dans I. Donc, ce sera plus facile de trouver un carré premier et plus difficile de trouver un carré premier parfait. Le tableau de la page 9 indique que G_{30}^{12} donne 38 carrés premiers parfaits, G_{30}^{42} en donne 6 et G_{60}^{18} en donne 4.

En terminant, voici un carré premier, G_{42}^{12}, avec $\lambda = 109$. Celui-ci semble être un bon candidat pour générer des carrés premiers et premiers parfaits.

71	89	17
5	59	113
101	29	47

G_{42}^{12}

Nous avons ajouté 2m dans chaque case avec m qui varie de 1 à 1 900 000 000 et nous n'avons obtenu aucun carré premier!!! Ce carré est-il vraiment un bon candidat?

La réponse est non!!!

Théorème :

G_{42}^{12} ne génère aucun carré premier lorsque l'entier m varie de 1 à ∞.

Preuve :

Les carrés premiers générés par G_{42}^{12} ont la forme G_{42}^{12} + 2m avec m, un entier ≥ 1. Tous les entiers pairs se terminent par 0, 2, 4, 6, ou 8.

2m se termine par 0 d'où 5 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 2 d'où 113 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 4 d'où 71 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 6 d'où 29 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 8 d'où 17 + 2m se termine par 5.

Le carré ainsi généré sera magique, presque normal mais ne sera jamais premier puisqu'il contiendra toujours un entier multiple de 5, différent de 5. Notez que tous les multiples de 5 supérieurs à 5 ne sont pas premiers.

Pourquoi G_{30}^{12} peut-il générer des carrés premiers?

83	89	41
29	71	113
101	53	59

G_{30}^{12}

2m se termine par 0 et nous trouvons 9 nombres qui peuvent être premiers.

2m se termine par 2 d'où 113 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 4 d'où 71 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 6 d'où 29 + 2m se termine par 5.

2m se termine par 8 et nous trouvons 9 nombres qui peuvent être premiers.

Le carré G_{30}^{12} peut donc générer des carrés premiers à la condition nécessaire que 2m se termine par 0 ou par 8. Nous vous laissons vérifier que G_{30}^{42} *et* G_{60}^{18} peuvent aussi générer des carrés premiers.

Petite histoire du carré premier parfait (41)

D'abord, avec le programme «Premiers parfaits-3», nous retrouvons, de façon indépendante, les 8 premiers carrés premiers parfaits d'ordre 3 trouvés par Nelson en 1988. Le carré (1) du tableau 5 est le plus petit carré premier parfait d'ordre 3.

Ensuite, je trouve trois p-générateurs avec lesquels je cherche des nouveaux carrés premiers parfaits d'ordre 3. Ce sont des carrés premiers presque normaux notés G_{30}^{12}, G_{30}^{42} *et* G_{60}^{18}.

Dans chacun, j'ajoute l'entier 2m dans les 9 cases afin d'obtenir un nouveau carré formé de 9 nombres premiers, ce qui est très rare!!!

Déjà, le p-générateur G_{30}^{12} nous a donné 20 carrés premiers parfaits (ceux de Nelson) donc pour moi, c'est un bon p-générateur, voilà pourquoi je me suis dit que G_{30}^{12} devrait nous en donner d'autres. Effectivement, avec m allant jusqu'à 202 900 000 000, j'en ai obtenu 18 nouveaux.

Pour chaque valeur de m, nous pouvons associer un intervalle fermé [u ; v] de longueur 85 dans lequel nous trouvons les 9 nombres du carré généré par G_{30}^{12} dont u et v. Si les 9 nombres du carré sont premiers alors ils seront consécutifs ssi le nombre de nombres premiers dans [u ; v] est 9.

MATHEMATICA travaille par tranches de 200 000 000 de valeurs entières attribuées à m. Dès qu'une valeur de m donne 9 nombres premiers, celle-ci est affichée. Je regarde ensuite combien de nombres premiers se trouvent dans l'intervalle. **Le nombre tant attendu est 9, ce qui arrive que très rarement**!!! Dans l'intervalle, il y a de la place pour plus que 9 nombres premiers et le plus souvent, nous en trouvions 12, 13 et 14.

Avec G_{30}^{42}, nous en avions déjà 4 et avec m qui va jusqu'à 100 900 000 000, j'en trouve 2 autres. Ici, la longueur de l'intervalle est 145 ce qui fait qu'il sera plus difficile de trouver des carrés premiers parfaits. Il y aura très souvent plus que 9 nombres premiers dans cet intervalle plus long (de 85, nous passons à 145).

Enfin, avec G_{60}^{18}, nous n'avions qu'un seul premier parfait soit le carré (27) du tableau 5. Avec m allant jusqu'à 100 900 000 000, j'en trouve un seul autre soit le carré (40). Ici, l'intervalle est de longueur 157 donc encore plus difficile de trouver un premier parfait.

En principe, mon travail s'arrête ici. J'avais pour limite m = 100 900 000 000. Le nombre de carrés premiers parfaits d'ordre 3 passe donc de 27 à 40. Je pouvais me contenter des 13 nouveaux carrés premiers parfaits que je venais de trouver sur une période 6 semaines mais j'ai décidé d'en trouver un dernier de façon à avoir un nombre premier de carrés premiers parfaits soit 41.

Puisque G_{60}^{18} n'a donné que 2 carrés premiers parfaits, j'ai aussi décidé de continuer avec G_{60}^{18}. Ce fut un travail très long. Le carré (40) a été trouvé avec m = 73 829 575 290 tandis que (41) a été trouvé avec :

m = 158 326 723 641

Je n'ai pas comptabilisé les carrés premiers rencontrés; je voulais seulement trouver un dernier premier parfait.

Le travail, pour trouver (41), a duré environ 245 heures réparties sur 21 jours soit, en moyenne, un peu plus de 11 heures par jour. La dernière valeur de m a été m = 158 500 000 000.

21 jours à attendre, à l'écran, l'apparition du 9. Des déceptions et frustrations pendant 20 jours!!!

Surtout des 12, 13, 14, 15 mais pas de 9. À l'occasion, 10, 11, 16, 17 mais pas de 9.

Puis quelle grande joie le 22 juin 2020 lorsqu'enfin, je vois ce si beau 9 sur mon écran!!!!

Chaque valeur de m qui nous donne un carré premier parfait est extrêmement rare car elle doit à la fois nous donner seulement 9 nombres premiers dans l'intervalle et faire que les 9 nombres du carré soient premiers.

Ce procédé, très spécial, m'a permis de trouver 23 carrés premiers parfaits mais je ne doute pas, qu'entre les carrés (40) et (41), par exemple, nous puissions trouver d'autres premiers parfaits. Pour cela, il faudrait un autre p-générateur ou un tout autre procédé qui serait exhaustif donc qui regarderait toutes les suites consécutives de 9 nombres premiers consécutifs, ce que nous avons fait pour trouver les 8 premiers carrés du tableau 5.

Toujours avec G_{60}^{18}, je continue au-delà de m = 158 500 000 000 puis, **le 28 juin 2020**, je trouve le carré premier parfait **(42)** avec m = 162 905 547 891. Je ne m'attendais pas à trouver aussi rapidement un nouveau carré premier parfait; je voulais seulement voir, par curiosité, combien de nombres premiers se trouveraient dans l'intervalle associé à m (combien de 10, 11, 12, …). Voir page 18 pour les coordonnées du carré (42).

Je décide alors de continuer avec G_{30}^{12}, au-delà de m = 100 900 000 000 pour trouver, **le 7 juillet 2020**, le carré premier parfait **(43)** avec m = 123 380 362 749.

Nous avons vu plus haut qu'avec G_{30}^{12}, j'ai trouvé les carrés premiers parfaits (43) à (50). Pour trouver le carré (47), il a fallu environ 87 heures de travail. Pour le carré (48), environ 18 heures; pour le carré (49), environ 54 heures et finalement, pour le carré (50), environ 22 heures.

Note sur le travail de Wesolowski :

Wesolowski a trouvé les 27 premiers carrés premiers parfaits dont les 22 de Nelson. Il a procédé de façon exhaustive ce qui nous assure qu'entre 2 carrés premiers parfaits consécutifs parmi ses 27, il n'y en a pas d'autre et il n'y en a aucun avant le carré (1). **Ce travail est remarquable!!!** Voir le tableau 5, page 14 de l'annexe 18.

Il faut donc aller au-delà du carré (27) si nous voulons trouver un nouveau carré premier parfait.

Note sur le travail de Nelson :

Rappelons que Nelson a reçu le prix de $100 offert par Martin Gardner en 1987 à celui qui trouverait le premier carré premier parfait d'ordre 3 ou démontrerait qu'il n'en existe aucun. En 1988, Nelson en trouva 22 à l'aide d'un ordinateur CRAY et reçu son prix.

Nous savons maintenant que Nelson n'a pas travaillé de façon exhaustive puisqu'entre ses carrés, Wesolowski a réussi à en placer 4 nouveaux. Le dernier du tableau 5 de l'annexe 18 est le cinquième nouveau de Wesolowski.

Note sur le travail de Bégin :

La recherche de Bégin pour en trouver d'autres s'est faite au-delà du carré (27). Le nouveau tableau 5 de l'annexe 18.1 contient les nouveaux carrés premiers parfaits (28) à (50).

Avec le programme construit par Claude St-Hilaire, Bégin trouve, de façon exhaustive, les 8 premiers carrés premiers parfaits d'ordre 3, déjà trouvés par Nelson. De plus, nous savons alors que le carré (1) du tableau 5 de l'annexe 18 (ou 18.1) est le plus petit, ce que nous voulions démontrer (objectif atteint)!!!

Résumons :

Les carrés premiers parfaits d'ordre 3, au-delà du carré (27), sont trouvés à l'aide des 3 p-générateurs G_{30}^{12}, G_{30}^{42} et G_{60}^{18} qui sont des carrés premiers presque normaux.

Chaque carré trouvé avec ces 3 p-générateurs à la forme $G_v^u + 2m$ où m est un entier $\geq 0.$ Ce carré est évidemment magique et presque normal. Qu'il soit formé de 9 nombres premiers est déjà très rare.

Chaque fois que nous donnons une valeur entière à m, notre p-générateur nous donne un nouveau carré magique qui ne contient pas forcément 9 nombres premiers. Quand cela arrive, notre programme nous indique la valeur de m qui nous conduit à un carré premier.

À chaque valeur de m, nous associons l'intervalle fermé $I = [a \; ; \; a+2r+2t]$ où a et $a+2r+2t$ sont respectivement le plus petit entier du carré et le plus grand.

Si le carré obtenu avec m est premier et si l'intervalle I renferme exactement 9 nombres premiers, alors le carré premier est premier parfait.

Le nombre total de carrés premiers parfaits d'ordre 3 connus au 26 juillet 2020 est de 50.

Le tableau suivant indique, pour chaque p-générateur, la valeur de m qui conduit aux carrés premiers parfaits d'ordre 3 de (28) à (50) :

Rang du carré	G_{30}^{12}	G_{30}^{42}	G_{60}^{18}	Trouvé le
(28)	51 993 546 759			20 avril 2020
(29)	60 866 687 349			27 avril 2020
(30)	71 270 486 469			12 mai 2020
(31)	73 298 524 635			13 mai 2020
(32)	78 708 471 589			15 mai 2020
(33)	83 337 065 559			17 mai 2020
(34)	87 165 695 260			19 mai 2020
(35)	90 426 956 395			20 mai 2020
(36)	97 187 795 040			22 mai 2020
(37)	100 871 615 620			23 mai 2020
(38)		72 987 605 816		25 mai 2020
(39)		90 780 413 625		28 mai 2029
(40)			73 829 575 290	1 juin 2020
(41)			158 326 723 641	22 juin 2020
(42)			162 905 547 891	28 juin 2020
(43)	123 380 362 749			7 juillet 2020
(44)	126 257 341 210			8 juillet 2020
(45)	134 475 560 995			10 juillet 2020
(46)	140 141 073 534			11 juillet 2020
(47)	170 206 666 069			18 juillet 2020
(48)	176 475 189 820			19 juillet 2020
(49)	195 257 527 905			24 juillet 2020
(50)	202 864 665 289			26 juillet 2020

Les 3 p-générateurs G_{30}^{12}, G_{60}^{18} *et* G_{30}^{42}, nous donnent au moins 541 carrés premiers dont 48 carrés premiers parfaits.

Nous ne serions par surpris que certains rangs soient exacts; le rang de (28) par exemple.

Les carrés premiers parfaits (28) à (37) et (43) à (50) sont générés par G_{30}^{12}.

Le p-générateur G_{30}^{12} génère maintenant au moins 124 carrés premiers
dont 38 carrés premiers parfaits parmi les 50 connus à ce jour (26 juillet 2020)
soit 76 % du total des carrés premiers parfaits!!!

Ma recherche pour trouver des nouveaux carrés premiers parfaits d’ordre 3 a débuté le 20 avril 2020 pour se terminer le 26 juillet 2020.

Elle m’a permis de trouver 23 nouveaux carrés premiers parfaits d’ordre 3.

Carrés premiers parfaits 3x3	Nouveaux carrés trouvés	Total trouvé
Claude Bégin	23	31
Harry L. Nelson	22	22
Arkadiusz Wesolowski	5	27
Total	50	