Annexe 34 : Projets de recherches ; Divers

Voici quelques projets de recherches :

1) Les conjectures de l'annexe 2.
2) Voir les pages 5 et 8 de l'annexe 24.
3) Voir la page 24 du chapitre 8, Partie 2.
4) Voir le chapitre 7, page 27, problème 25, la conjecture.
5) Dans l'annexe 5, démontrez la conjecture de la page 15.
6) Dans l'annexe 9, page 4, la conjecture.
7) Trouvez la structure générale des hyper-magiques d'ordre 14 puis voir le problème 25 de 7.4 et la conjecture qui s'y trouve.
8) Les 10 propriétés, page 1 de l'annexe 33.
9) Pouvons-nous affirmer qu'il existe un carré super-premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 5$?
10) Dans l'annexe 29, les problèmes 14, 15 et 16. Que se passe-t-il si l'ordre du carré est pair? M peut-il générer une infinité de carrés super-premiers? Etc…
11) Dans la Partie 2, chapitre 15, page 102, les problèmes 43 et 44.
12) Chapitre 10, page 8, la question de l'encadré.
13) Chapitre 10, page 28, problème 17.
14) Annexe 18, page 13, «La grande question».
15) Annexe 18, page 42, l'encadré.
16) Annexe 18, les questions de la page 25.
17) Les diverses questions tout au long des chapitres et annexes.
18) Soit M, un carré d'ordre $n \geq 4$. Un **recouvrement de M** est un groupe de n figures complètes disjointes qui recouvrent toutes les cases de M. Le carré M, magique ou non, qui possède un recouvrement est dit **compact**.

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

1	6	2	3	5	4
2	4	5	6	1	3
3	1	6	5	4	2
4	5	3	2	6	1
5	2	1	4	3	6
6	3	4	1	2	5

1	2	3	4	5	6	7
6	3	5	2	7	4	1
5	1	6	7	2	3	4
4	7	2	5	3	1	6
7	5	1	6	4	2	3
2	6	4	3	1	7	5
3	4	7	1	6	5	2

Les quatre carrés précédents montrent que tous les carrés d'ordres 4, 5, 6 et 7 sont compacts. Dans ces quatre carrés, chaque couleur illustre une figure complète!!!

Tous les carrés d'ordres $n \geq 8$ sont-ils compacts?

À un carré compact correspond un carré latin diagonal et réciproquement.

Si nous démontrons qu'il existe un carré compact pour tous les ordres $n \geq 4$, alors nous aurons démontré qu'il existe un carré latin diagonal pour tous les ordres $n \geq 4$.

Théorème :

Un carré d’ordre 3 n’est jamais compact.

Preuve :

Nous avons déjà démontré qu’un carré d’ordre 3 ne possède pas de figure complète. (Voir Partie 2, chapitre 4, page 32, problème 4). Il en résulte que celui-ci ne peut pas être compact car s’il l’était, il possèderait 3 figures complètes disjointes qui le recouvrent.

19) Avons-nous eu de la chance?

Nous avons construit un carré premier à partir d’un carré normal d’ordre 4, lequel est un Dürer. Pour ce faire, nous avons utilisé le recouvrement du problème 18). Voici d’abord ce Dürer normal M ainsi que 3M, un autre Dürer :

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

M

12	45	42	3
15	30	33	24
27	18	21	36
48	9	6	39

3M

Voyons le recouvrement de 3M; dans chaque figure complète, les nombres sont choisis dans chaque rangée, de haut en bas :

Figure complète 1 : 12, 24,18, 6
Figure complète 2 : 45, 33, 27, 39
Figure complète 3 : 42, 30, 36, 48
Figure complète 4 : 3, 15, 21, 9

Nous allons maintenant chercher la valeur de m afin que les 4 nombres suivants soient premiers : 12 + 2m + 1 ; 24 + 2m + 1; 18 + 2m + 1 ; 6 + 2m + 1. Avec MATHEMATICA, nous utiliserons :

```
Count[Table[PrimeQ[ {12 + 2m + 1 , 24 + 2m + 1 , 18 + 2m + 1, 6 + 2m + 1}], {m,1,500}],
{True,True,True,True}]   (*)
```

Nous avons trouvé m = 27 pour obtenir les 4 nombres premiers : 67, 79, 73, 61 qui seront dans la figure complète 1 de 3M. La somme magique passe donc de 3x34 = 102 à 102 + 55.

De la même façon, avec la figure complète 3, nous avons trouvé m = 110 pour obtenir les nombres premiers 263, 251, 257, 269.

Quant aux figures complètes 2 et 4, nous avons remplacé dans (*) 2m + 1 par 2m. Nous avons trouvé m = 7 et m = 1. Finalement, le carré premier obtenu est :

67	59	263	5
17	251	47	79
41	73	23	257
269	11	61	53

Carré-1

Ce carré premier est un Dürer de somme magique S = 394.

De façon semblable, nous avons trouvé le carré premier suivant, un Dürer de somme 400. Notez que (29 – 5)/4 = 400 – 394. Dans l'intersection de Carré-1 avec Carré-2, les seuls nombres qui n'y sont pas sont 5 et 29.

17	79	53	251
263	41	67	29
61	23	269	47
59	257	11	73

Carré-2

Les carré-1 et carré-2 ont en commun 15 nombres premiers.

Pouvez-vous, en utilisant ce procédé, trouver un autre carré premier d'ordre 4? Un carré premier d'ordre 5?

Pouvez-vous généraliser pour tous les ordres $n \geq 4$?

Une grande difficulté est la suivante :

Le travail fait plus haut pour trouver un carré premier à l'aide d'un recouvrement d'un carré d'ordre n n'est pas toujours aussi simple que ce que nous venons de voir.

Ajouter 2m à une liste de n entiers afin d'obtenir n nombres premiers est parfois très difficile. Il arrive qu'avec 1 500 000 000 de valeurs attribuées à m, aucune ne conduise à n nombres premiers.

Ajoutez 2m aux entiers (*) 51, 63, 57, 77 puis aux entiers (**) 91, 133, 35, 69.

Avec (*) et m de 1 à 5 000 000, nous trouvons 2559 valeurs de m qui conduisent à 4 nombres premiers.

Avec (**) et m de 1 à 50 000 000, nous trouvons aucune valeur de m qui donne 4 nombres premiers.

Avec les entiers 35, 63, 57, 59 et m de 1 à 5 000 000, nous trouvons 1345 valeurs de m qui conduisent à 4 nombres premiers.

20) Un recouvrement idéal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 & 8 & 19 \\ 23 & 9 & 16 & 5 & 12 \\ 20 & 2 & 13 & 24 & 6 \\ 14 & 21 & 10 & 17 & 3 \\ 7 & 18 & 4 & 11 & 25 \end{pmatrix}$$

Ce carré magique normal est d'ordre 5 donc compact. Que trouvons-nous dans les figures complètes du recouvrement du carré d'ordre 5 du problème 18 ci-haut?

Figure complète 1 : 1, 2, 3, 4, 5

Figure complète 2 : 11, 12, 13, 14, 15

Figure complète 3 : 21, 22, 23, 24, 25

Figure complète 4 : 6, 7, 8, 9, 10

Figure complète 5 : 16, 17, 18, 19, 20

Nous appelons «**recouvrement idéal**» d'un carré magique normal, un tel recouvrement. Celui-ci nous permet de dire que le carré est un **carré normal idéal** puisqu'il existe une figure complète qui renferme les 5 plus grands entiers du carré.

Le carré magique normal suivant possède aussi un recouvrement idéal. **Montrez-le.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 10 \\ 14 & 11 & 4 & 5 \\ 12 & 13 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

C'est un carré normal idéal et ce même carré permet de trouver un carré de somme 33 qui renferme 16 entiers différents ≥ 0. **Montrez-le**. (Voir Sagrada Familia, Barcelone, Espagne).

Utilisez le recouvrement du problème 18 ci-haut pour les 25 carrés normaux d'ordre 5 du chapitre 6, pages 2 et 3. **Qu'observez-vous** dans les 5 figures complètes de chaque carré?

Un carré magique normal est dit **compact idéal** s'il possède un recouvrement idéal.

Divers :

1) J'ai construit le carré magique d'au moins une cinquantaine de personnes, chacun avec la date de naissance de la personne. Tous ces carrés sont des Dürer presque normaux excepté, par exemple, le carré d'une personne née le 3 mars (nous aurions alors une répétition soit deux 3).

2) Lyne s'est envolée vers la «Voie Céleste» à l'âge de 51 ans. Voici son carré :

Le «LYNE ROCHEFORT»

23	6	19	60
51	28	20	9
30	24	36	18
4	50	33	21

$S = 108$

J'ai eu l'honneur de construire ce carré magique pour ma cousine Lyne, née le 23 juin 1960. Sa somme magique 108 est obtenue de 32 façons différentes (32 choix de 4 cases qui totalisent 108; les 4 coins par exemple).

3) Voici le carré de Dame Kathleen Ollerenshaw, exceptionnellement un hyper-magique d'ordre 4 puisqu'elle a beaucoup travaillé sur ce type de carrés.

1	10	16	15
19	12	4	7
5	6	20	11
17	14	2	9

S = 42

Kathleen Ollerenshaw est née le 1 octobre 1912 à Withington, Manchester, Royaume-Uni. Mathématicienne, sa contribution sur les carrés magiques est remarquable. Elle a été conseillère à l'éducation auprès de Margaret Thatcher. Elle est décédée le 10 août 2014 à l'âge vénérable de 101 ans!!!