

Annexe 29 : Problèmes supplémentaires

Vous pouvez nous proposer de nouveaux problèmes (solutions comprises) sur les carrés magiques et multiplicatifs. Nous les ajouterons à l'annexe 29 tout en indiquant l'auteur de chaque problème.

- 1) Nous voulons construire un m-hyper-magique (m-super-Dürer) presque normal d'ordre 4. La structure générale nous indique que nous avons besoin de cinq variables soient a, b, c, f et g. Je choisis de donner une valeur à c et à g et vous, à a, b et f. Je vous propose de donner des nouvelles valeurs à vos variables a, b et f et ce, dix fois. Quant à moi, je conserve les mêmes valeurs pour mes variables c et g. Qu'observons-nous avec les dix carrés ainsi construits?
- 2) Montrez qu'il est impossible de construire un carré magique d'ordre 4 avec les quatre entiers suivants :

9			
		12	
	20		
			21

- 3) Voici une autre propriété des carrés magiques d'ordre 4 : dans chaque carré ci-dessous, la somme des cases vertes = la somme des cases bleues.

- 4) Soit donné un carré magique presque normal M d'ordre $n \geq 3$. Vous savez que vous obtiendrez un carré multiplicatif M' par exponentiation de M. Est-il possible d'obtenir un carré magique M'' en logarithmant M?

- 5) Soit M , un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$. De plus, M est un ultra-magique de somme S . Montrez que si l'entier m est dans M , alors m vérifie :

$$1 \leq m \leq \frac{2S - n}{n}.$$

- 6) Considérons le p-générateur G_{30}^{12} (voir annexes 18 et 18.1):

83	89	41
29	71	113
101	53	59

$$G_{30}^{12}$$

- Si $G_{30}^{12} + 2m$ est un carré premier, alors l'entier $m \geq 1$ se termine par 0, 4, 5 ou 9.
- Montrez-le.
 - $G_{30}^{12} + 274728436$ est-il un carré premier?
- 7) Soit M , un carré premier presque normal qui renferme les nombres 3, 5 et 7.
- M peut-il être un p-générateur?
 - Pourquoi M est-il d'ordre $n \geq 4$?
- 8) Soit G , un carré premier presque normal d'ordre $n \geq 3$. De plus, G est le plus petit carré premier et cela signifie que si nous enlevons $2m$ dans toutes les cases de G , celui-ci ne sera plus jamais un carré premier sachant que m prend toutes les valeurs entières ≥ 1 . Si G génère au moins un nouveau carré premier en ajoutant $2m$ dans toutes ses cases avec $m \geq 1$, un entier, alors G sera un p-générateur.
- Nous avons observé que dans G , il y a au moins un nombre premier qui se termine par 1, au moins un nombre premier > 3 qui se termine par 3, au moins un nombre premier qui se termine par 7, au moins un nombre premier qui se termine par 9 et aucun 5.
- Trouvez une condition nécessaire pour que G soit un p-générateur.
- 9) Le nombre $10^{30000} + 10^{3000} + 10^{300} + 10^{30} + 10^3 + 7$ est-il premier?

10) Le nombre $10^{30000} + 10^{3000} + 10^{300} + 10^{30} + 7$ est-il premier?

11) Soit donnée, une suite de n^2 nombres entiers tous ≥ 1 et différents deux à deux. De plus, ces n^2 entiers sont tous impairs ou tous pairs. Nous voulons former un carré magique d'ordre $n \geq 3$ avec ceux-ci. Appelons S^* la somme de ces n^2 entiers. Montrez :

- a) que si tous les entiers sont pairs, alors S^* doit être divisible par $2n$.
- b) que si tous les entiers sont impairs, alors S^* doit être divisible par n si n est impair et S^* doit être divisible par $2n$ si n est pair.

12) Quelle doit être la valeur de W si nous voulons que le carré suivant soit magique ?

			6
	14		
		W	
20			

13) Trouvez 4 carrés magiques presque normaux d'ordre 4 dont les sommes magiques sont les nombres premiers 37, 43, 109 et 151.

14) Le carré M presque normal suivant est un carré super-premier puisque sa somme magique, 313, est un nombre premier :

M =

113	31	53	19	97
41	17	107	101	47
59	109	13	89	43
71	73	79	67	23
29	83	61	37	103

- a) En changeant les nombres dans les cases vertes de M , trouvez un nouveau carré super-premier presque normal?
- b) Montrez qu'il est possible d'en construire au moins 856?
- c) Le carré M peut donc être vu comme un nouveau type de p -générateur.

Nous pourrions l'appeler : p-générateur-5 si l'ordre du carré M est 5.

- 15) Le carré M presque normal suivant est un carré super-premier d'ordre 7 puisque sa somme magique 797, est un nombre premier :

109	29	151	211	157	13	127
197	229	83	23	103	31	131
67	11	89	227	163	233	7
113	139	61	107	37	239	101
191	47	179	167	17	137	59
79	149	181	19	97	73	199
41	193	53	43	223	71	173

M

- a) En changeant les nombres dans les cases vertes de M, trouvez un nouveau carré super-premier presque normal?
- b) Montrez qu'il est possible d'en construire au moins 56?
- c) Le carré M peut donc être vu comme un nouveau type de p-générateur.
Nous pourrions l'appeler: p-générateur-7 si l'ordre du carré M est 7.
- 16) Les deux carrés précédents sont des super-premiers et de plus, ils sont premiers parfaits. Ce sont des p-générateurs- n avec $n = 5$ et $n = 7$. Le carré qui suit est un carré premier parfait de somme 703 mais n'est pas un super-premier.

M =

107	163	167	109	157
193	103	131	139	137
179	89	113	173	149
127	197	101	199	79
97	151	191	83	181

- a) Montrez que c'est un p-générateur-5.
- b) En ajoutant $2m$ dans toutes les cases vertes, combien de super-premiers trouverez-vous si m varie de 1 à 100 000 000?

- 17) Construisez M , un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ formé exclusivement d'entiers tous différents dont la somme magique égale l'ordre du carré.
- Donnez deux exemples avec $n = 9$ et $n = 10$.
 - La somme magique peut-elle être un nombre premier?
 - M peut-il être presque normal?
- 18) Construisez M , un carré arithmétique d'ordre $n \geq 3$ formé exclusivement d'entiers tous différents dont la somme magique est un nombre premier.
- Donnez un exemple avec $n = 5$, $n = 14$ et $n = 4$.
 - Que se passe-t-il si $n = 8$?
 - Que se passe-t-il si $n = 4k$ où $k \geq 1$ est un entier?
 - M peut-il être presque normal?
- 19) Quelle doit être la valeur de G si nous voulons que le carré suivant soit magique ?

12			21
	13	G	