Annexe 29.1 : solutions des problèmes de l'annexe 29

1) Les dix carrés ainsi construits auront le même produit magique $P = c^2 g^2$ car celui-ci est indépendant des variables a, b et f. Voir chapitre 15, page 39.

2) Supposons que le carré soit magique. Sur la grande diagonale principale, placez les nombres a et b dans les cases vides. La somme magique est donc S = a + b + 30. Nous savons que le carré central d'ordre 2 est toujours une figure magique dans un carré magique d'ordre 4 d'où S = a + b + 32. Cela conduit à une contradiction (30 = 32). Il est donc impossible de construire un carré magique avec ces 4 entiers.

3) Dans le carré de gauche, placez a et b dans les cases vides de la diagonale secondaire. Ainsi, nous trouvons a + b + les 2 cases bleues = a + b + les 2 cases vertes puisque le carré central d'ordre 2 est toujours une figure magique dans un carré magique d'ordre 4. D'où le résultat annoncé. De la même façon avec le carré de droite; nous placerons a et b dans les cases vides de la diagonale principale.

4) La réponse est oui. Il suffit que M soit à la fois magique et multiplicatif ce qui est possible. Voir chapitre 13, pages 8, 9 et 10. De plus, précisons que carré magique multiplicatif = carré magique additif-multiplicatif.

5) Puisque M est ultra-magique, il est donc associatif. Si m est dans M, alors il existe r dans M tel que $m + r = \frac{2S}{n}$ $d'où$ $m = \frac{2S}{n} - r \le \frac{2S}{n} - 1$ car M est presque normal. Il s'ensuit que $1 \le m \le \frac{2S-n}{n}$. Remarquez que si 1 est dans M, alors le plus grand entier de M est $\frac{2S-n}{n}$ et tout autre entier de M est $< \frac{2S-n}{n}$. Si r est le plus petit entier de M, alors $\frac{2S}{n} - r = \frac{2S - nr}{n}$ est le plus grand et tout entier de M est $< \frac{2S-nr}{n}$.

6) G_{30}^{12} est un carré premier presque normal et $m \ge 1$ est un entier.

a) $2m$ est un entier pair donc se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8. Cependant, $2m$ ne peut pas se terminer par 2 car 83 + 2 m se terminerait par 5 donc ne serait pas un nombre premier. De la même façon, $2m$ ne peut pas se terminer ni par 4 ni par 6 à cause de 41 + 2 m et 29 + 2 m qui se termineraient par 5. Il reste que $2m$ peut se terminer soit par 0, soit par 8. Donc m se termine par 0 ou 5 ou 4 ou 9.

b) Ce n'est pas un carré premier car $2m$ se termine par 6 (ici m se termine par 8).

7) M est premier presque normal et renferme 3, 5 et 7.

a) M ne peut pas être un p-générateur car il n'existe qu'un seul triplet de nombres premiers jumeaux (de la forme (p ; p + 2 ; p + 4)) soit {3 ; 5 ; 7}. Pour être un p-générateur, il faut que M + 2m soit un carré premier pour au moins une valeur entière non nulle de m. Or, {3 + 2m ; 5 + 2m ; 7 + 2m} ne sera jamais un triplet de nombres premiers jumeaux si m est non nul. Il s'ensuit que M contiendra toujours un entier qui n'est pas un nombre premier soit un des entiers du triplet. Vous trouverez un carré premier presque normal d'ordre 4 qui renferme les nombres 3, 5 et 7 à la page 9 du chapitre 10.
b) Nous savons, annexe 18, page 17, théorème 4, que M ne peut pas contenir le nombre 3. C'est pourquoi la question se pose seulement si $n \geq 4$.

8) Si 2m se termine par 2, 4, 6 ou 8, alors nous obtiendrons un carré magique qui contiendra toujours un entier différent de 5 qui se termine par 5, donc qui n'est pas un nombre premier. Le carré premier n'est donc pas possible sauf si 2m se termine par 0.

   Que 2m se termine par 0 est notre condition nécessaire (donc m se termine par 0 ou 5). Il reste à chercher un carré premier avec 2m qui se termine par 0.

9) Ce nombre n'est pas premier car il se divise par 3 puisque la somme de ses chiffres est divisible par 3.

10) Ce nombre n'est pas premier car il se divise par 11. En effet, la somme des chiffres de rangs impairs moins la somme des chiffres de rangs pairs est divisible par 11.

11)
a) S*doit être divisible par n si nous voulons que le carré soit magique. De plus, la somme magique sera paire donc divisible par 2 d'où S* divisible par 2n.
b) S* doit être divisible par n si nous voulons que le carré soit magique. Si n est pair, alors la somme magique sera paire et S* divisible par 2n. Si n est impair, alors la somme magique sera impaire et S* ne sera pas divisible par 2n.

   Par exemple, si tous les entiers sont pairs, que S* soit divisible par 2n ne garantit pas l'existence d'un carré magique. S* divisible par 2n est une condition nécessaire mais non suffisante.

12) Pour que ce carré soit magique, il est nécessaire, selon le problème 3, que
   20 + 6 = 14 + w d'où w = 12.

13) Prenons M, un carré normal idéal d'ordre 4 et sa figure complète en vert (voir 34 et 52 du glossaire de la Partie 2) :

1	8	15	10
14	11	4	5
12	13	6	3
7	2	9	16

La somme magique de M est 34. En ajoutant dans les cases vertes le nombre 3, nous obtiendrons un nouveau carré magique presque normal de somme S = 34 + 3 = 37. Pour les trois autres carrés, il suffira d'ajouter dans les cases vertes, les nombres 9, 75 et 117 respectivement.

14) Le carré M est premier presque normal et sa somme magique est un nombre premier.

a) Les cases vertes forment une figure complète et nous allons remplacer les 5 nombres premiers qu'elles contiennent par 5 autres nombres premiers. De plus, nous voulons que la nouvelle somme magique soit aussi un nombre premier. Pour ce faire, nous allons chercher la valeur de 2m qui fera du 6-uplet de nombres premiers :

{53 ; 41 ; 89 ; 73 ; 103; 313}

un nouveau 6-uplet de nombres premiers :

(*) {53 + 2m ; 41 + 2m ; 89 + 2m ; 73 + 2m ; 103 + 2m; 313 + 2m}

Avec MATHEMATICA, nous allons utiliser :

```
Count[Table[PrimeQ[ {53 + 2m , 41 + 2m , 89 + 2m , 73 + 2m , 103 + 2m, 313 + 2m}],
{m,1,5000}], {True,True,True,True,True,True}]
```

Nous trouvons le nombre 1 donc cela signifie qu'il y a une valeur de m, entre 1 et 5000 qui fait que (*) est un 6-uplet de nombres premiers. Il est facile de trouver m = 4899. Nous trouverons, dans la figure complète, de haut en bas, les nombres premiers : 9851 ; 9839 ; 9887 ; 9871 ; 9901 et la somme magique 10 111, aussi un nombre premier.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 856.

c) Le carré M s'appelle p-générateur-5.

15) Le carré M est premier presque normal et sa somme magique est un nombre premier.

a) Nous procéderons comme au problème 14).

Count[Table[PrimeQ[{13 + 2m , 197 + 2m , 89 + 2m , 37 + 2m , 59 + 2m, 149 + 2m, 43 + 2m, 797 + 2m}], {m,1,200}], {True,True,True,True,True,True,True,True}].

Nous trouvons m = 147 d'où 2m = 294. Nous aurons alors notre premier nouveau super-premier presque normal.

b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 56.
c) Le carré M s'appelle p-générateur-7.

16) Nous procéderons de la même façon qu'avec le problème 14).

a) Count[Table[PrimeQ[{167 + 2m , 193 + 2m , 173 + 2m , 197 + 2m, 181 + 2m, 703 + 2m}], {m,1,300}], {True,True,True,True,True,True}].
Nous trouvons m = 210 et M est donc un p-générateur-5 puisqu'il génère au moins un carré super-premier presque normal.
b) En faisant varier m de 1 à 100 000 000, nous en trouvons 782.
c) **REMARQUE** : nous n'avons pas réellement défini ce qu'est un p-générateur-n. Nous pourrions dire que c'est **un carré premier presque normal M d'ordre** $n \geq 4$, qui peut générer un nouveau carré premier presque normal dont la somme magique est un nombre premier. Pour générer un nouveau carré premier, nous ajoutons 2m dans toutes les cases de la figure complète que possède M.

17) Rappelons que la somme S d'un carré arithmétique de coordonnées $(a;r;t)$ est :

$$S = na + \frac{n(n-1)}{2}(r+t)$$

Nous voulons $S = n$. Il s'ensuit que :

$$r + t = \frac{2-2a}{n-1}$$

a) $S = n = 9 \ et \ a = 5.$ Nous trouvons $r + t = -1.$ Par exemple, prenons $r = 9 \ et \ t = -10.$
$S = n = 10 \ et \ a = 19.$ Nous trouvons $r + t = -4.$ Prenons $r = 7 \ et \ t = -11.$
Les deux carrés arithmétiques sont donc :

37	−48	38	−47	39	−46	40	−45	41
32	28	−57	29	−56	30	−55	31	27
18	23	19	−66	20	−65	21	17	22
13	9	14	10	−75	11	7	12	8
−1	4	0	5	1	−3	2	−2	3
−6	−10	−5	−9	77	−8	−12	−7	−11
−20	−15	−19	67	−18	68	−17	−21	−16
−25	−29	57	−28	58	−27	59	−26	−30
−39	47	−38	48	−37	49	−36	50	−35

19	−69	60	−14	38	27	−47	5	71	−80
−24	15	4	9	20	31	−7	−51	−62	75
−31	22	11	2	13	24	35	−44	−55	33
61	50	−16	7	−4	−15	−26	39	−27	−59
−45	−34	−23	14	3	−8	−19	32	43	47
−52	−41	−30	21	10	−1	−12	25	36	54
40	−48	−37	28	17	6	−5	18	29	−38
−66	57	46	−33	−22	−11	0	−9	−20	68
26	64	53	−40	−29	−18	42	−2	−13	−73
82	−6	−58	16	−36	−25	49	−3	8	−17

Ces deux carrés arithmétiques ne sont pas presque normaux car ils renferment des entiers négatifs. Cependant, il n'y a aucune répétition dans chacun.

b) Évidemment si n est un nombre premier!!!

c) M ne peut pas être presque normal puisque dans ce cas, nous aurions :

$$S \geq \frac{n(n^2+1)}{2} > n$$

L'égalité $S = n$ n'est donc pas possible.

18) Soit p, un nombre premier. Nous voulons avoir :

a) $$S = na + \frac{n(n-1)}{2}(r+t) = p$$ L'entier a est ≥ 1.

Il s'ensuit que :

$$r + t = \frac{2(p-na)}{n(n-1)}$$ Les nombres r et t sont des entiers.

Aussi, nous avons :

$$(1) \qquad p = n\left(a + \frac{(n-1)}{2}\,(r+t)\right) \qquad si\ n\ impair$$

$$(2) \qquad p = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)\,(r+t)\right) \qquad si\ n\ pair$$

Puisque p est un nombre premier, il faut qu'avec (1) nous ayons :

n = nombre premier et $\left(a + \frac{(n-1)}{2}\,(r+t)\right) = 1$ donc $r+t = \frac{2-2a}{n-1}$.

Puis, avec (2), $\frac{n}{2}$ = nombre premier et $\left(2a + (n-1)\,(r+t)\right)$ = 1 donc $r+t = \frac{1-2a}{n-1}$.

Exemple 1 :

$n=5$; $p=5$; $a=3$; $r+t=-1$; $r=4$; $t=-5$. Nous trouvons le carré suivant :

9	−13	10	−12	11
7	5	−17	6	4
0	3	1	−1	2
−2	−4	19	−3	−5
−9	14	−8	15	−7

Sa somme magique est le nombre premier 5. Il n'y a aucune répétition.

Exemple 2 :

$n=14$; $p=7$; $a=7$; $r+t=-1$; $r=13$; $t=-14$. Nous trouvons un carré de somme 7 sans aucune répétition (avec MATHEMATICA ou EXCEL ou MAPLE).

Exemple 3 :

$n=4$; $p=2$; $a=2$; $r+t=-1$; $r=3$; $t=-4$. Carré sans répétition de somme 2.

2	3	7	−10
−4	1	−3	8
−7	4	0	5
11	−6	−2	−1

b) Si $n = 8,$ alors $\frac{n}{2} = 4$ qui n'est pas un nombre premier.

c) Si $n = 4k,$ alors $\frac{n}{2} = 2k$ qui est premier si et seulement $k = 1.$ Cela signifie qu'un carré arithmétique d'ordre pair multiple de 4 aura pour somme un nombre premier si et seulement si $n = 4.$

d) Si M est presque normal, alors $p \geq \frac{n(n^2+1)}{2}$ ce qui n'est pas possible si $p = n$ ou $p = \frac{n}{2}.$ En effet, nous avons $n \geq 3.$ M ne peut donc pas être presque normal.

19) Dans les cases vides de la dernière rangée, plaçons a et b. Nous avons donc :

S = a + b + 13 + G = 12 + 21 + a + b

En effet, la somme des 4 coins de tout carré magique d'ordre 4 est une figure magique. Il est facile de trouver G = 20.