Solutions des problèmes de la Partie 1

1) Avec $n = 36$, le nombre de diagonales, grandes et brisées, est $2n = 72$.
2) Voir partie 1, le tableau de la page 8, pour $n = 8$, nous avons $35\,154\,340$ figures magiques.
3) $S = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$. Pour $n = 22$, nous trouvons $S = 5335$. Pour $n = 40$, $S = 32\,020$.
4) Puisque le carré est magique, nous avons :

a	b	c
d	e	f
g	h	k

$$\begin{matrix} a+e+k=S \\ b+e+h=S \\ c+e+g=S \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (a+b+c)+3e+(g+h+k)=3S \quad \Rightarrow \quad S+3e+S=3S$$

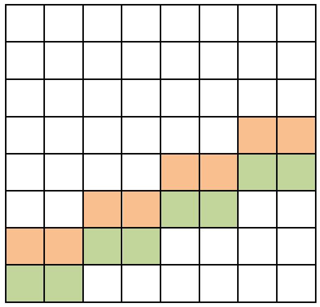
D'où $S = 3e \; et \; e = \dfrac{S}{3}$.

5) Le carré magique d'ordre 3 a donc pour centre un entier d'où :

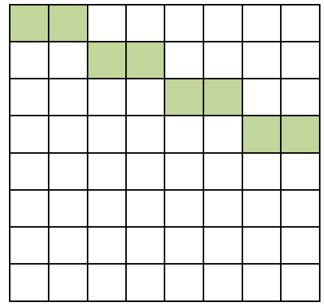
$$centre = \frac{S}{3} = \frac{2014}{3} = 671{,}333...$$

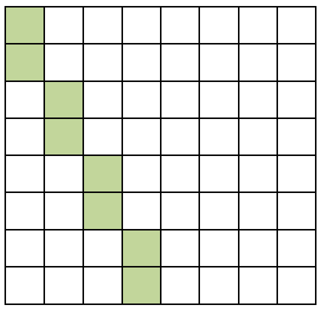
qui n'est pas un entier. Cela contredit le fait que le centre soit un entier. Un tel carré magique n'existe donc pas.

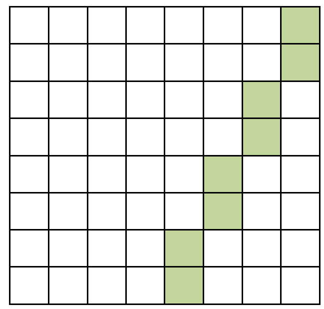
6) Le centre est donc un nombre premier p. Sa somme magique est 3 x centre = 3p qui n'est pas un nombre premier (3x2, 3x3, 3x5, 3x7, …) ne sont pas premiers.
7) Le carré 28 est un hyper-magique-alpha; vous trouverez ce carré à la page 23 et ses propriétés à la page 24. Excepté l'escalier, il est très facile de montrer que les quatre autres figures sont des super-figures (placées où et comme vous voudrez dans le carré 28, la somme des 8 cases donne toujours 260, la somme magique). Quant à l'escalier, il vous suffira de vérifier 4 positions seulement soient celles indiquées ci bas en vert.
De plus, toutes ces figures sont des super-figures pour la structure générale des hyper-magiques-alpha



(a)







La figure (a) nous montre 4 carrés de somme 130 chacun d'où 520 pour les 4. Puisque l'escalier en vert est de somme 260, il en résulte que l'escalier en orangé est de somme 260. L'escalier est donc une super-figure!!!

Remarque : vous pouvez vérifier que les 8 équivalents de l'escalier sont bien représentés par les 4 positions vertes. Cela suffit pour montrer que l'escalier est une super-figure.

8) Ce carré normal a une somme magique S = 15 d'où le centre qui est forcément 5. Il ne peut donc pas être 6. Votre ami doit refaire ses calculs car un tel carré magique ne peut pas exister!!!
9) Nous vous suggérons de prendre l'algorithme ALG-1 à la page 36. Pour avoir un carré normal, prenez a = 1, r = 1 et t = 5 puis pour avoir un presque normal, prenez a = entier naturel différent de 0, r = entier naturel différent de 0 et t, un entier > 4r. Par exemple, prenez a = 3, r = 2 et t = 9 ou 10 ou 11 ou 12 ou … . NOTE : vous pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.
10) Utilisez l'algorithme ALG-3, page 44. Pour le carré normal, prenez a = 1, r = 1 et t = 6. Pour le presque normal, prenez a = entier naturel différent de 0, r = entier naturel différent de 0 et t, un entier > 5r. Par exemple, prenez a = 3, r = 2 et t = 11 ou 12 ou 13 ou 14 ou … . NOTE : vous pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.
11) Utilisez les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3 respectivement pour l'ordre 11, l'ordre 12 et l'ordre 14. ALG-2 est à la page 41. Pour l'ordre 11, prenez a = 1, r = 1 et t = 11; pour l'ordre 12, a = 1, r = 1 et t = 12; pour l'ordre 14, a = 1, r = 1 et t = 14. NOTE : vous

pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.

12) Pour les presque normaux, prenez a = entier naturel différent de 0, r = entier naturel différent de 0 et t, un entier > (n-1) r. Par exemple, pour l'ordre 14, prenez a = 3, r = 2 et t = 27 ou 28 ou 29 ou … .NOTE : vous pouvez aussi utiliser les fichiers EXCEL «Ordre 3» à «Ordre 32» pour effectuer vos calculs.

13) La réponse est non car dans un carré normal ou presque normal, les 16 entiers sont tous différents. Si la figure en vert est magique, alors nous avons :

$$a + b + c + d = S \text{ et } a + b + c + e = S \text{ (diagonale)}$$

d'où
$$d = S - a - b - c$$
$$e = S - a - b - c$$

Nous avons donc d = e. Le carré renferme deux entiers égaux; il ne peut pas être presque normal ni normal.

			a
		b	
	c		
e	d		

14)

a) La réponse est oui. Nous allons tourner le carré 58 de 180° pour obtenir :

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Les 4 cases vertes forment une figure complète. Si nous enlevons 1 dans chaque case verte, alors le carré obtenu est toujours magique et sa somme passe de 34 à 33.

b) Il suffit d'ajouter 1 dans toutes les cases du carré magique 58. Mais une autre façon de faire est d'ajouter 4 dans les 4 cases vertes de la figure complète du carré 58 qui suit:

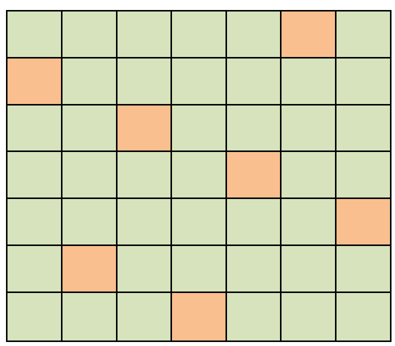
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Carré 58

Avec cette figure complète, en ajoutant 4 dans chacune des 4 cases, nous obtenons un carré magique presque normal de somme 38.

c) Il suffit d'ajouter l'entier k dans toutes les cases de la figure complète avec k > 3. La somme magique sera S = 34 + k. Les sommes seront donc 38, 39, 40, 41, … .

15) Pour construire le carré magique d'ordre 7, utilisez l'algorithme ALG-1 ou encore, de façon équivalente, le fichier EXCEL «Ordre 7». Puis prenez la figure complète suivante :



La somme magique est S = 175. En ajoutant l'entier k dans chacune des 7 cases de la figure complète, la somme deviendra 175 + k. Quelle sera la plus petite valeur de k? Si le plus petit entier dans la figure complète est, par exemple, 40, alors ajoutez 10 dans les 7 cases de façon à avoir 50 et plus. La somme passera à 185 et les valeurs de k seront 10, 11, 12, 13, … . La plus petite valeur de k sera donc k = 10.

16) Avec ce carré magique normal d'ordre 4 et sa figure complète (13, 14, 15, 16), il suffit d'ajouter k dans les 4 cases de la figure complète pour obtenir un carré magique de somme S = 34 + k avec k, un entier positif ou nul. Nous aurons alors les sommes 34, 35, 36, 37, … . Puisque nous avons une figure complète qui renferme les 4 plus grands nombres du carré (figure complète idéale), alors nous pouvons construire une infinité de carrés magiques presque normaux de sommes consécutives à partir de 34.

17) Ce carré magique normal, de somme S = 65, possède une figure complète idéale. Il suffit d'ajouter l'entier k dans chacune des 5 cases. Le carré sera toujours magique et sa somme deviendra S = 65 + k. Avec k = 0, 1, 2, 3, … , nous aurons les sommes S = 65, 66, 67, 68, … .

18) Les huit équivalents sont :

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 12 & 1 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 16 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 16 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 1 & 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 3 & 16 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 14 & 15 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 13 & 8 & 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

19) La réponse est oui car il existe un carré magique normal d'ordre 4 qui est tel qu'une figure complète contienne les 4 plus petits entiers. Nous avons trouvé ce carré parmi les 880 carrés normaux primitifs (voir partie 3).

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 15 & 10 \\ 14 & 11 & 4 & 5 \\ 12 & 13 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 15 & 10 \\ 14 & 11 & 3 & 5 \\ 12 & 13 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

Le dernier carré est magique de somme S = 33 et ne présente aucune répétition!!