Annexe 9 : Carré à la fois magique et multiplicatif

L'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} a & \frac{4S}{3}-2a-c & a+c-\frac{S}{3} \\ c & \frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-c \\ S-a-c & 2a+c-\frac{2S}{3} & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

$$\textit{Structure générale des carrés magiques d'ordre } 3$$

$$\begin{pmatrix} a & \frac{P^{4/3}}{a^2c} & \frac{a\,c}{P^{1/3}} \\ c & P^{1/3} & \frac{P^{2/3}}{c} \\ \frac{P}{a\,c} & \frac{a^2c}{P^{2/3}} & \frac{P^{2/3}}{a} \end{pmatrix}$$

$$\textit{Structure générale des carrés multiplicatifs d'ordre } 3 \textit{ avec } P \neq 0$$

Ces deux structures peuvent-elles nous donner le même carré? Si oui, nous aurions :

$P^{1/3} = \frac{S}{3} = k$ et $\frac{2S}{3} - a = \frac{P^{2/3}}{a}$ d'où l'équation $2k - a = \frac{k^2}{a} \Leftrightarrow 2\,a\,k - a^2 = k^2$ puisque $P \neq 0 \Rightarrow a \neq 0.$ Puis $(a-k)^2 = 0$ nous donne $a = k.$ De la même façon, nous trouvons $c = k.$

Finalement, nous trouvons k dans les neuf cases et le carré est alors trivial. De plus, il est évident qu'un carré trivial est toujours à la fois magique et multiplicatif!!! Nous avons donc le théorème suivant :

Soit M, un carré d'ordre 3 formé de neuf nombres non nuls. Alors M est à la fois magique et multiplicatif si et seulement si M est trivial.

Un tel carré M ne peut donc pas être presque normal!!!

<u>L'ordre 4</u> :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & e & f & S-d-e-f \\ g & 2a+b+c+d-f+g-S & -2a-b-c-d-e-g+2S & e+f-g \\ -a-d-g+S & -2a-2b-c-d-e+f-g+2S & 2a+b+d+e-f+g-S & a+b+c+d+g-S \end{pmatrix}$$
$$\textit{Structure générale des carrés magiques d'ordre 4}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \dfrac{P}{abc} \\ d & e & f & \dfrac{P}{def} \\ g & \dfrac{a^2bcdg}{fP} & \dfrac{P^2}{a^2bcdeg} & \dfrac{ef}{g} \\ \dfrac{P}{adg} & \dfrac{fP^2}{a^2b^2cdeg} & \dfrac{a^2bdeg}{fP} & \dfrac{abcdg}{P} \end{pmatrix}$$
$$\textit{Structure générale des carrés multiplicatifs}$$
$$\textit{d'ordre 4 formé de 16 nombres} > 0$$

Soit M, un carré d'ordre 4 formé de seize nombres >0. Si M est à la fois magique et multiplicatif, alors nous avons :

$$\frac{ef}{g} = e+f-g \Leftrightarrow ef = eg+fg-g^2 \Leftrightarrow g(g-f) = e(g-f)$$

Il y a deux cas.

1) $g = f$ d'où une répétition.
2) $g \neq f$ d'où $g = e$ et nous avons une répétition.

Nous avons donc le théorème suivant :

> Soit M, un carré d'ordre 4 formé de seize nombres > 0. Si M est à la fois magique et multiplicatif, alors il y a au moins une répétition dans M.

Un tel carré M ne peut donc pas être presque normal!!!

<u>Les ordres impairs</u> $n \geq 3$:

Nous allons considérer ici les carrés d'ordres impairs $n \geq 3$ formés de n^2 nombres > 0. Nous nous demandons si un tel carré peut être à la fois magique associatif et multiplicatif associatif.

Dans un carré magique associatif, le centre est $\frac{S}{n}$ et la somme de deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est $\frac{2S}{n}$.

Dans un carré multiplicatif associatif, le centre est $P^{1/n}$ et le produit de deux nombres situés dans deux cases symétriques par rapport au centre du carré est $P^{2/n}$.

Soit M, un carré d'ordre impair $n \geq 3$ qui est à la fois magique associatif et multiplicatif associatif, formé de n^2 nombres > 0.

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & \frac{S}{n} & \\ & & \frac{2S}{n} - a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & & \\ & P^{1/n} & \\ & & \frac{P^{2/n}}{a} \end{pmatrix}$$

$$\textit{Carré magique} \qquad\qquad \textit{Carré multiplicatif}$$

Posons $P^{1/n} = \frac{S}{n} = k$ puis $\frac{2S}{n} - a = \frac{P^{2/n}}{a}$ $soit\ 2k - a = \frac{k^2}{a}$ d'où $a = k$. La carré M contient au moins trois fois le même nombre donc répétitions!!!

Un tel carré M ne peut donc pas être presque normal!!!

Nous demandons beaucoup à un carré lorsque nous voulons qu'il soit à la fois presque normal, magique et multiplicatif mais qu'il soit en plus associatif, c'en est trop!!! En tous les cas, pour les ordres impairs $n \geq 3$, nous aurons toujours des répétitions donc aucun presque normal.

Il existe des carrés presque normaux à la fois magiques et multiplicatifs pour les ordres 7, 8 et 9 (voir chapitre 13). Cependant, ceux-ci ne sont pas associatifs.

Pour l'instant, nous ne savons pas si un carré presque normal, à la fois magique et multiplicatif, existe pour les ordres $n = 5, 6$.

Pour les ordres $n \geq 10$, nous connaissons des carrés presque normaux à la fois magiques et multiplicatifs. Ces ordres sont :

10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ;15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; ? ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; ? ; 30 ; ? ; 32 $puis\, 1024$.

Conjecture :

Il existe un carré presque normal à la fois magique et multiplicatif pour tous les ordres $n \geq 7$.

Cette conjecture est basée sur les résultats ci-haut et sur l'intuition suivante : plus l'ordre du carré est grand, plus grande est la possibilité d'augmenter les contraintes dans le carré. Par exemple, d'exiger que le carré soit à la fois presque normal, magique et multiplicatif!!!

Rappel : un carré est presque normal s'il renferme que des entiers >0, tous différents deux à deux.

Enfin, mentionnons que nous allons toujours exiger qu'un carré à la fois magique et multiplicatif soit presque normal.