Annexe 8 : Suites de 16 nombres premiers consécutifs

Notre programme, **«Premiers parfaits-4»,** dans MAPLE, regarde toutes les suites de seize nombres premiers consécutifs et conserve seulement celles qui conduisent à des carrés magiques, évidemment d'ordre 4. Puis, le programme nous donne tous les carrés magiques formés des seize nombres premiers consécutifs de ces suites.

Nous allons regarder les 5 550 000 premières suites. Pour obtenir un carré magique, une **condition nécessaire** est que la somme des seize nombres premiers consécutifs soit divisible par 8. Nous dirons qu'une telle suite est une **suite favorable**. Le nombre $sf(k)$ nous indique le nombre de suites favorables parmi les k premières suites. Par exemple, nous avons :

$$sf(1500) = 374$$

Nous trouvons, dans MATHEMATICA, $sf(k)$ qui est obtenu de la façon suivante :

$$\text{Count[Table[IntegerQ[}\sum_{n=i}^{i+15}\text{Prime}[n]/8],\{i,1,k\}],\text{True}]$$

Ce programme s'appelle **«Suites favorables».**

Si une suite favorable nous permet de trouver des carrés magiques, alors nous dirons que cette suite est une **suite magique**. Nous avons trouvé **12 suites magiques** en regardant les 5 550 000 premières suites. Pour cela, nous écrivons :

$$sm(5\ 550\ 000) = 12$$

où $sm(k)$ est la valeur de la fonction sm soit le nombre de suites, parmi les k premières suites, qui permettent de construire des carrés magiques (donc le nombre de suites magiques). Notez que le domaine de la fonction sm est l'ensemble des entiers ≥ 1.

Voyons maintenant le tableau suivant qui nous indique, respectivement dans les colonnes de gauche à droite :

1) Le rang de la suite magique.
2) Le nombre de carrés premiers parfaits obtenus avec la suite.
3) Le nombre de primitifs.
4) En rouge, le nombre de couples de nombres premiers jumeaux dans la suite.

Ainsi, dans la première colonne à gauche, nous trouvons 11. Cela signifie que la première suite magique rencontrée est la onzième suite laquelle commence par le nombre premier 31, soit le onzième nombre premier de la liste :

$$\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ;...\}$$

La suite de rang k commence donc avec le nombre premier de rang k. La suite de rang 1 commence avec 2; la suite de rang 2 commence avec 3; la suite de rang 3 commence avec 5 et ainsi de suite.

Notons que pour construire un carré premier parfait d'ordre $n, n \geq 3,$ (carré magique formé de n^2 nombres premiers consécutifs), nous devons commencer avec la deuxième suite car la première renferme 2, un nombre pair.

	11	32	4	3
	12	64	8	4
	201	96	12	5
	658	32	4	3
	1 500	32	4	1
	234 232	32	4	2
	238 519	32	4	1
(*)	620 637	32	4	4
	1 511 056	32	4	3
	1 625 973	32	4	1
	2 793 700	32	4	1
	5 543 074	32	4	2
	TOTAL	480	60	$sm(5\ 550\ 000) = 12$

Les suites qui conduisent à des carrés magiques sont plutôt **rares** puisqu'avec les 5 550 000 premières suites, seulement 12 nous permettent de trouver au total 480 carrés magiques d'où 60 primitifs. C'est ce que nous montre le tableau.

La grande question :

La fonction sm est-elle bornée?

En d'autres mots, le nombre de suites magiques est-il fini?

Pour le moment, nous n'en savons rien. Notre intuition nous dit, faiblement, qu'il doit y en avoir une infinité avec une densité linéaire extrêmement petite!!!

Nous avons considéré les 1 110 000 premières suites, par tranches de 30 000, pour constater que 278 102 sont favorables soit 25,054 %. En moyenne, cela nous donne **une suite favorable sur quatre**. Parmi les 278 102 suites favorables, seulement 8 sont des suites magiques!!!

Parmi les 5 550 000 premières suites de seize nombres premiers consécutifs, seulement **douze** suites sont magiques!!! Celles-ci sont d'une grande rareté!!!

De plus, elles nous permettent de construire, au total, 480 carrés magiques donc 60 primitifs.

Conjecture :

Il existe une infinité de suites magiques formées de seize nombres premiers consécutifs.

Le tableau suivant nous indique, dans les colonnes de gauche à droite, le rang de la suite magique, le premier nombre premier de chaque suite ainsi que les dix plus petites sommes magiques pour un carré premier parfait d'ordre 4 :

	11	31	258
	12	37	276
	201	1 229	5 118
	658	4 931	19 896
	1 500	12 553	50 478
	234 232	3 259 909	13 039 980
(**)	238 519	3 324 329	13 297 678
	620 637	9 291 521	37 166 532
	1 511 056	24 066 643	96 266 778
	1 625 973	26 025 107	104 100 834
	2 793 700	46 330 021	185 320 518
	5 543 074	95 979 511	383 918 304

Par exemple, avec la suite 201, nous obtenons 96 carrés premiers parfaits de somme 5 118 donc 12 primitifs et 1229 comme plus petit nombre premier dans chaque carré.

Avec les suites de 1 à 1 000 000, nous avons trouvé **huit suites magiques** puis, avec les suites de 1 000 001 à 2 000 000, nous en avons trouvé seulement **deux**. Avec les suites qui vont de 2 000 001 à 3 000 000, nous avons trouvé **une** seule suite magique. Quant aux suites qui vont de 3 000 001 à 5 550 000, **une seule** est magique. Pourrions-nous en trouver d'autres au-delà de la suite 5 550 000?

Quant à nous, nos recherches s'arrêtent avec la suite 5 550 000. Vous voulez continuer?

Nous avons : $sf\,(5\ 550\ 000) = 1\ 388\ 015$; $sm(5\ 550\ 000) = 12$

Si vous voulez retrouver ces carrés premiers parfaits, vous n'avez qu'à entrer dans MAPLE et choisir le programme «Premiers parfaits-4» puis donner la valeur que vous voulez à a ainsi qu'à b, dans la deuxième ligne sous Programme 1, a := et b :=. Quand vous aurez donné vos valeurs à a et à b, vous devrez avoir, par exemple, ce qui suit :

$$a := 7 : b := 1500 :$$

Nous vous recommandons de regarder les carrés obtenus avec une seule suite à la fois. Par exemple, les carrés obtenus avec la suite 201. Vous devriez avoir :

$$a := 201 : b := 201 :$$

Notons que si nous trouvions dans tous les groupes consécutifs de 10^8 suites de seize nombres premiers consécutifs, une seule suite magique, alors nous en aurions une infinité!!!

Mais cela est-t-il possible???

Le carré suivant est un carré magique fabriqué avec la suite 11 donc un carré de la plus petite somme $S = 258.$ Ses seize entiers forment une suite de seize nombres premiers consécutifs. Ce carré renferme trois couples de nombres premiers jumeaux :

61	53	73	71
83	37	41	97
47	79	101	31
67	89	43	59

Carré premier parfait $S = 258$

Le suivant est un carré magique fabriqué avec la suite 201. Il est de somme $S = 5118,$ la troisième plus petite somme après $258\,et\,276.$ Ses seize entiers forment une suite de seize nombres premiers consécutifs. Ce carré contient cinq couples de nombres premiers jumeaux :

1279	1303	1307	1229
1289	1283	1297	1249
1259	1301	1237	1321
1291	1231	1277	1319

Carré premier parfait $S = 5118$

Voici une nouvelle conjecture :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{sf(k)}{k} = \frac{1}{4}$$

Le nombre $sf(k)$ est le nombre de suites favorables parmi les k premières suites de seize nombres premiers consécutifs.

Par exemple, nous avons $\frac{sf(k)}{k} = 0,250010404$ lorsque $k = 500\ 000\ 000$.

Le tableau suivant nous mène à cette conjecture :

De la suite 1 à la suite k	$sf(k)$	%
1 à 5 550 000	1 388 015	25,00928 %
1 à 10 000 000	2 500 405	25,00405 %
1 à 15 000 000	3 750 455	25,00303 %
1 à 20 000 000	5 000 057	25,00028 %
1 à 25 000 000	6 250 347	25,00139 %
1 à 30 000 000	7 499 634	24,99878 %
1 à 35 000 000	8 750 779	25,00223 %
1 à 40 000 000	10 001 675	25,00419 %
1 à 45 000 000	11 252 148	25,00477 %
1 à 50 000 000	12 500 286	25,00057 %
1 à 55 000 000	13 750 988	25,00180 %
1 à 60 000 000	15 001 483	25,00247 %
1 à 100 000 000	25 000 632	25,000632 %
1 à 150 000 000	37 499 456	24,999637 %
1 à 200 000 000	50 002 173	25,0010865 %
1 à 250 000 000	62 499 807	24,999923 %
1 à 400 000 000	99 998 869	24,999717 %
1 à 500 000 000	125 005 202	25,0010404 %

Pour terminer, voici douze carrés premiers parfaits d'ordre 4, chacun étant associé à la suite qui permet sa construction. Pour chaque carré, sont illustrés le plus petit et le plus grand nombre ainsi que sa somme magique S. **Ce sont les douze plus petites sommes magiques!**

37	53	89	79
83	61	67	47
97	71	59	31
41	73	43	101

Suite 11 S = 258

43	83	89	61
59	79	97	41
103	47	53	73
71	67	37	101

Suite 12 S = 276

1279	1303	1307	1229
1289	1283	1297	1249
1259	1301	1237	1321
1291	1231	1277	1319

Suite 201 S = 5 118

4951	4999	5003	4943
4931	4967	4987	5011
5021	4973	4969	4933
4993	4957	4937	5009

Suite 658 S = 19 896

12 613	12 641	12 671	12 553
12 569	12 601	12 619	12 689
12 637	12 647	12 611	12 583
12 659	12 589	12 577	12 653

Suite 1500 S = 50 478

3 260 063	3 259 987	3 259 999	3 259 931
3 259 933	3 259 979	3 260 051	3 260 017
3 260 027	3 260 041	3 259 909	3 260 003
3 259 957	3 259 973	3 260 021	3 260 029

Suite 234 232   S = 13 039 980

3 324 509	3 324 407	3 324 421	3 324 341
3 324 359	3 324 361	3 324 491	3 324 467
3 324 353	3 324 389	3 324 437	3 324 499
3 324 457	3 324 521	3 324 329	3 324 371

Suite 238 519   S = 13 297 678

9 291 617	9 291 721	9 291 641	9 291 553
9 291 631	9 291 643	9 291 719	9 291 539
9 291 671	9 291 647	9 291 523	9 291 691
9 291 613	9 291 521	9 291 649	9 291 749

Suite 620 637   S = 37 166 532

24 066 733	24 066 677	24 066 701	24 066 667
24 066 643	24 066 737	24 066 689	24 066 709
24 066 683	24 066 703	24 066 649	24 066 743
24 066 719	24 066 661	24 066 739	24 066 659

Suite 1 511 056   S = 96 266 778

26 025 211	26 025 271	26 025 203	26 025 149
26 025 127	26 025 227	26 025 199	26 025 281
26 025 239	26 025 229	26 025 179	26 025 187
26 025 257	26 025 107	26 025 253	26 025 217

Suite 1 625 973   S = 104 100 834

46 330 111	46 330 217	46 330 133	46 330 057
46 330 069	46 330 061	46 330 187	46 330 201
46 330 157	46 330 093	46 330 177	46 330 091
46 330 181	46 330 147	46 330 021	46 330 169

Suite 2 793 700   S = 185 320 518

95 979 553	95 979 563	95 979 617	95 979 571
95 979 523	95 979 581	95 979 557	95 979 643
95 979 599	95 979 547	95 979 619	95 979 539
95 979 629	95 979 613	95 979 511	95 979 5

Suite 5 543 074   S = 383 918 304

À vous de trouver la treizième suite magique!!!