Annexe 6 : Lemme sur les diagonales brisées

Lemme :

Considérons un carré d'ordre impair $n \geq 3$. Toute diagonale principale rencontre chaque diagonale secondaire en une seule case.

Preuve :

Précisons tout de suite qu'alors, toute diagonale secondaire rencontre chaque diagonale principale en une seule case.

Nous allons définir une diagonale secondaire à l'aide de sa première case $(k\ ;1)$ située dans la rangée k et dans la colonne 1. De même, la première case d'une diagonale principale est la case $(r\ ;1)$, située dans la rangée r et dans la colonne 1. Il est clair que nous avons :
$1 \leq k \leq n$ *et* $1 \leq r \leq n$

La branche qui contient la case $(k\ ;1)$ d'une diagonale secondaire est la branche A ; l'autre est la branche B. Lorsque $k = n$, la branche A est la grande diagonale secondaire et la branche B n'existe plus.

La branche qui contient la case $(r\ ;1)$ d'une diagonale principale est la branche C ; l'autre est la branche D. Lorsque $r = 1$, la branche C est la grande diagonale principale et la branche D n'existe plus.

Branche A : $(k\ ;1)\ (k-1\ ;2)\ (k-2\ ;3)\ \dots\ (1\ ;k)$

Son terme général : $(k-u\ ;u+1) \quad u = 0\ ,1\ ,2\ ,\dots,\ k-1$

Branche B : $(n\ ;k+1)\ (n-1\ ;k+2)\ (n-2\ ;k+3)\ \dots\ (k+1\ ;n)$

Son terme général : $(n-u\ ;k+1+u) \quad u = 0\ ,1\ ,2\ ,\dots,\ n-(k+1)$

Branche C : $(r\ ;1)\ (r+1\ ;2)\ (r+2\ ;3)\ \dots\ (n\ ;n-r+1)$

Son terme général : $(r+v\ ;v+1) \quad v = 0\ ,1\ ,2\ ,\dots,\ n-r$

Branche D : $(1\ ;n-r+2)\ (2\ ;n-r+3)\ (3\ ;n-r+4)\ \dots\ (r-1\ ;n)$

Son terme général est : $(v\ ;n-r+v+1) \quad v = 1\ ,2\ ,3\ ,\dots,\ r-1$

Il est important de remarquer que le terme général d'une branche permet de trouver toutes les cases de la diagonale sur laquelle se trouve cette branche.

Par exemple, le terme général de la branche A est $(k-u\ ;\ u+1)$. Si u parcourt Z, l'ensemble des entiers, alors nous obtenons toutes les cases de la diagonale infinie qui contient A. Par contre, si u prend les valeurs $0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ k-1$, alors nous obtenons toutes les cases de la branche A, situées dans le carré.

Si u n'est pas un entier, alors en aucun cas, nous obtenons une case de la diagonale.

Il en sera de même pour les branches $B, C\ et\ D.$

Nous allons montrer que chaque diagonale principale rencontre toutes les diagonales secondaires en une seule case. Nous allons considérer 4 cas :

Premier cas : k est impair et r est pair

Branche A : toutes les cases ont une somme paire. En effet, la somme des coordonnées de chaque case vaut $k+1.$

Branche B : toutes les cases ont une somme impaire. En effet, la somme des coordonnées de chaque case vaut $n+k+1.$

Branche C : toutes les cases ont une somme impaire puisque $r+1$ est impair et que nous passons d'une case à l'autre en ajoutant toujours 2.

Branche D : toutes les cases ont une somme paire puisque $1+n-r+2$ est pair et que nous passons d'une case à l'autre en ajoutant toujours 2.

Il est clair que la parité des cases d'une branche est la même pour toutes les cases de la diagonale infinie qui contient cette branche.

Nous allons résumer ainsi :

A	pair
B	impair
C	impair
D	pair

Nous dirons que toutes les cases de la diagonale infinie qui supporte A sont paires (que les couples correspondants sont pairs). De même pour les diagonales infinies qui supportent respectivement $B, C\ et\ D.$ La diagonale qui contient la branche A sera aussi appelée A ; de même pour $B, C\ et\ D.$ Ainsi, par exemple, nous dirons que la diagonale C contient ou supporte la branche $C.$ Revenons au premier cas.

Nous pouvons déjà affirmer que la diagonale A peut rencontrer la diagonale D mais ne peut pas rencontrer la diagonale C. De même, la diagonale B peut rencontrer la diagonale C mais ne peut pas rencontrer la diagonale D . Il n'y a donc que 2 possibilités : A rencontre D ou B rencontre C.

$\rightarrow A$ rencontre D :

L'égalité $(k-u\ ;\ u+1)=(v\ ;\ n-r+v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} k-u=v \\ u+1=n-r+v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u=\frac{k+(n-r)}{2}$$
$$v=\frac{k-(n-r)}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc, A rencontre D et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers :

$$\left(\frac{k-(n-r)}{2}\ ;\ \frac{k+(n-r)+2}{2}\right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

$$(1) \qquad \begin{aligned} 1 \le \frac{k-(n-r)}{2} \le n \\ 1 \le \frac{k+(n-r)+2}{2} \le n \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} &k+r \le 3n \\ &n+k \ge r \\ &n+r \ge k+2 \\ &n \le k+r-2 \end{aligned}$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

$$(2) \qquad n \le k+r-2$$

Nous vérifions sans peine que (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$\rightarrow B$ rencontre C

L'égalité $(n-u\ ;\ k+1+u)=(r+v\ ;\ v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} n-u=r+v \\ k+1+u=v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u=\frac{n-k-r}{2}$$
$$v=\frac{n+k-r}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc, B rencontre C et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers:

$$\left(\frac{n+k+r}{2}\ ;\ \frac{n+k-r+2}{2}\right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

$$1 \le \frac{n+k+r}{2} \le n$$
$$1 \le \frac{n+k-r+2}{2} \le n \qquad (3)$$

ce qui implique :

$$n+k+r \ge 2$$
$$n+r \ge k+2$$
$$n+k \ge r$$
$$n \ge k+r$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

$$n \ge k+r \qquad (4)$$

Nous vérifions sans peine que (3) $\Leftrightarrow$ (4)

Puisque (2) et (4) s'excluent mutuellement, nous pouvons affirmer que si A rencontre D dans le carré, alors B ne rencontre pas C dans le carré et réciproquement. Il n'y a donc, dans le carré, qu'une seule case d'intersection. Nous avons, en résumé :

k impair et r pair

A rencontre $D \Leftrightarrow \; n < k + r$ et B rencontre $C \Leftrightarrow n \geq k + r$.

ce qui signifie, si k est impair et r est pair, qu'il n'est pas possible que les cases d'intersection de A avec D et de B avec C soient toutes les deux à l'intérieur ou à l'extérieur du carré et que si l'une est à l'intérieur du carré, alors l'autre est à l'extérieur et réciproquement.

Deuxième cas : k est impair et r est impair

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & pair \\ B & impair \\ C & pair \\ D & impair \end{array}$$

et nous pouvons déjà affirmer que A peut rencontrer C mais ne peut pas rencontrer D et que B peut rencontrer D mais ne peut pas rencontrer C. Il n'y a donc que deux possibilités : A rencontre C ou B rencontre D.

$\rightarrow$ *A rencontre C*

L'égalité $(k-u \; ; \; u+1) = (r+v \; ; \; v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} k-u = r+v \\ u+1 = v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u = \frac{k-r}{2} \quad ; \quad v = \frac{k-r}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc, A rencontre C et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers :

$$\left(\frac{k+r}{2} \; ; \; \frac{k-r+2}{2} \right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

$$(5) \qquad \begin{aligned} 1 \leq \frac{k+r}{2} \leq n \\ 1 \leq \frac{k-r+2}{2} \leq n \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} &k+r \geq 2 \\ &k+r \leq 2n \\ &k+2 \leq 2n+r \\ &k \geq r \end{aligned}$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

$$(6) \qquad k \geq r$$

Nous vérifions sans peine que (5) $\Leftrightarrow$ (6)

$\rightarrow$ *B rencontre D*

L'égalité $(n-u\ ;\ k+1+u) = (v\ ;\ n-r+v+1)$ conduit au système suivant :

$$\begin{cases} n-u = v \\ k+1+u = n-r+v+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est :

$$u = \frac{2n-k-r}{2} \quad ; \quad v = \frac{k+r}{2}$$

qui sont bien des entiers. Donc B rencontre D et la case d'intersection est déterminée par le couple d'entiers suivant :

$$\left(\frac{k+r}{2} \ ; \frac{2n+k-r+2}{2} \right)$$

Maintenant, si nous voulons que la case d'intersection soit à l'intérieur du carré, alors il est clair que nous devons avoir :

(7)
$$1 \le \frac{k+r}{2} \le n$$
$$1 \le \frac{2n+k-r+2}{2} \le n$$

ce qui implique :

$$k+r \le 2n$$
$$k+r \ge 2$$
$$r \le 2n+k$$
$$k \le r-2$$

Puisque les trois premières inégalités sont toujours vraies, nous ne retiendrons que :

(8) $$k \le r-2$$

Nous vérifions sans peine que (7) $\Leftrightarrow$ (8)

Puisque (6) et (8) s'excluent mutuellement, nous pouvons affirmer que si A rencontre C dans le carré, alors B ne rencontre pas D dans le carré et réciproquement. Il n'y a donc, dans le carré, qu'une seule case d'intersection. Nous avons, en résumé :

$$k \text{ impair et } r \text{ impair}$$

$$A \text{ rencontre } C \;\Leftrightarrow\; k \ge r \text{ et } B \text{ rencontre } D \;\Leftrightarrow\; k < r$$

ce qui signifie, si k est impair et r est impair, qu'il n'est pas possible que les cases d'intersection de A avec C et de B avec D soient toutes les deux à l'intérieur ou à l'extérieur du carré et que si l'une est à l'intérieur du carré, alors l'autre est à l'extérieur et réciproquement.

Troisième cas : k *est pair et* r *est impair*

Ce cas se traite exactement de la même façon que le premier cas et nous avons le même résumé.

Quatrième cas : $k \ est \ pair \ et \ r \ est \ pair$

Ce cas se traite exactement de la même façon que le deuxième cas et nous avons le même résumé.

Finalement, notre étude se résume ainsi :

$$n \ est \ impair$$

$$Si \ k \ et \ r \ sont \ de \ parités \ différentes, \ alors :$$

$$n \geq k+r \ \Leftrightarrow \ B \ rencontre \ C \ à \ la \ case \ \left(\frac{n+k+r}{2} \ ; \frac{n+k-r+2}{2} \right)$$

$$n < k+r \ \Leftrightarrow \ A \ rencontre \ D \ à \ la \ case \ \left(\frac{k-n+r}{2} \ ; \frac{n+k-r+2}{2} \right)$$

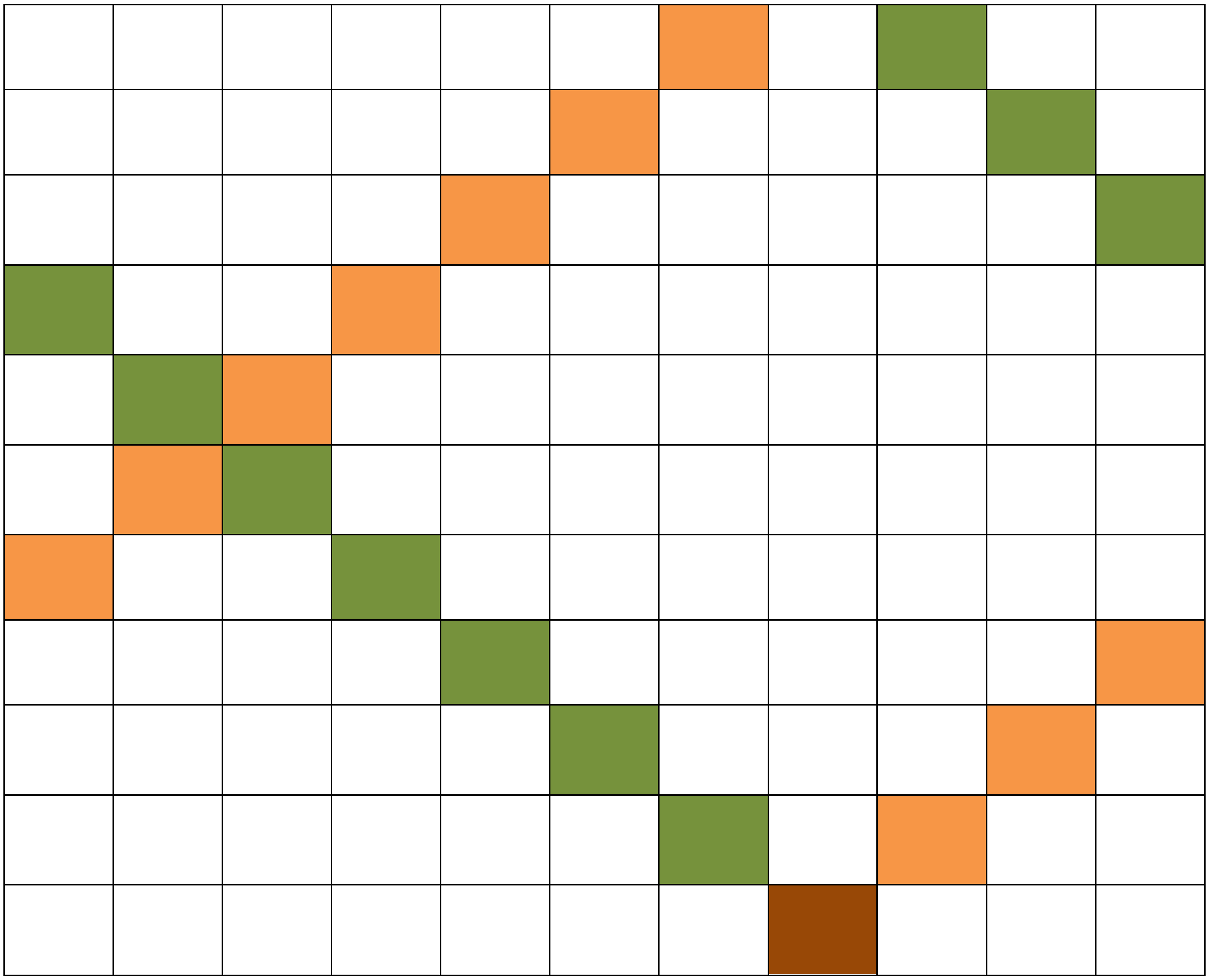
$$Si \ k \ et \ r \ ont \ la \ même \ parité, \ alors :$$

$$k \geq r \ \Leftrightarrow \ A \ rencontre \ C \ à \ la \ case \ \left(\frac{k+r}{2} \ ; \frac{k-r+2}{2} \right)$$

$$k < r \ \Leftrightarrow \ B \ rencontre \ D \ à \ la \ case \ \left(\frac{k+r}{2} \ ; \frac{2n+k-r+2}{2} \right)$$

Donc, nous voyons que chaque diagonale (principale ou secondaire) rencontre toutes les diagonales (secondaires ou principales) en une seule case. Dans cet encadré, toutes les rencontres ont lieu à l'intérieur du carré.

Par exemple :



La diagonale secondaire est formée de la case brune et des cases oranges; la diagonale principale est formée de la case brune et des cases vertes. L'intersection est la case brune soit la case déterminée par le couple $(11\ ;\ 8)$.

Nous avons ici, $n=11,\ k=7\ et\ r=4$ d'où $k\ et\ r$ sont de parités différentes avec $n \geq k+r$. Il s'ensuit que B rencontre C effectivement à la case $(11\ ;\ 8)$, selon la formule du tableau ci-haut.

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque $n \geq 4$ est un entier pair. Les diagonales A, B, C, D sont définies de la même façon que dans le cas où n est impair. Nous avons aussi quatre cas à considérer.

Premier cas : $k \text{ est impair et } r \text{ est pair}$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & pair \\ B & pair \\ C & impair \\ D & impair \end{array}$$

ce qui nous permet déjà d'affirmer que la diagonale A ne peut pas rencontrer ni la diagonale C, ni la diagonale D. Il en est de même pour la diagonale B, elle ne peut pas rencontrer ni C, ni D. Donc, aucune intersection n'est possible, ni à l'intérieur du carré, ni à l'extérieur.

Deuxième cas : $k \text{ est pair et } r \text{ est impair}$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & impair \\ B & impair \\ C & pair \\ D & pair \end{array}$$

d'où la même conclusion qu'au premier cas.

En résumé :

$n \text{ pair}$

Si k et r sont de parités différentes, alors il n'y a aucune intersection ni à l'intérieur du carré, ni à l'extérieur du carré.

Troisième cas : $k \text{ est impair et } r \text{ est impair}$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & pair \\ B & pair \\ C & pair \\ D & pair \end{array}$$

Il y a donc quatre intersections possibles. Pour trouver l'intersection de A avec C, le travail est le même que dans le cas où n est impair et puisque u et v sont toujours des entiers, nous savons que A et C se rencontrent. De même pour les trois autres intersections. Nous noterons ces intersections : AC, AD, BC, BD.

Il faut maintenant trouver sous quelles conditions nécessaires et suffisantes, les intersections sont dans le carré. En procédant comme dans le cas où n est impair, nous trouvons :

Rencontre	Point de rencontre	À l'intérieur	
AC	$\left(\frac{k+r}{2}\,;\,\frac{k-r+2}{2}\right)$	$ssi\ k \geq r$	(1)
AD	$\left(\frac{k-n+r}{2}\,;\,\frac{k+n-r+2}{2}\right)$	$ssi\ n < k+r$	(2)
BC	$\left(\frac{n+k+r}{2}\,;\,\frac{k+n-r+2}{2}\right)$	$ssi\ n \geq k+r$	(3)
BD	$\left(\frac{k+r}{2}\,;\,\frac{2n+k-r+2}{2}\right)$	$ssi\ k < r$	(4)

Puisque (1) et (4) ainsi que (2) et (3) s'excluent mutuellement, nous aurons toujours deux intersections dans le carré et deux intersections à l'extérieur du carré.

Quatrième cas : $k \text{ est pair et } r \text{ est pair}$

Nous avons ici :

$$\begin{array}{ll} A & impair \\ B & impair \\ C & impair \\ D & impair \end{array}$$

Ce cas est identique au troisième cas et nous pouvons affirmer que si k et r ont la même parité, alors il y aura toujours deux intersections dans le carré et deux, à l'extérieur du carré.

En résumé :

n est pair

Si k et r sont de même parité, alors :

$n \geq k+r$ et $k \geq r \quad \Leftrightarrow \quad C$ rencontre A et B dans le carré

$n \geq k+r$ et $k < r \quad \Leftrightarrow \quad B$ rencontre C et D dans le carré

$n < k+r$ et $k \geq r \quad \Leftrightarrow \quad A$ rencontre C et D dans le carré

$n < k+r$ et $k < r \quad \Leftrightarrow \quad D$ rencontre A et B dans le carré

Les cases d'intersection sont :

$AC \qquad \left(\frac{k+r}{2} ; \frac{k-r+2}{2}\right)$

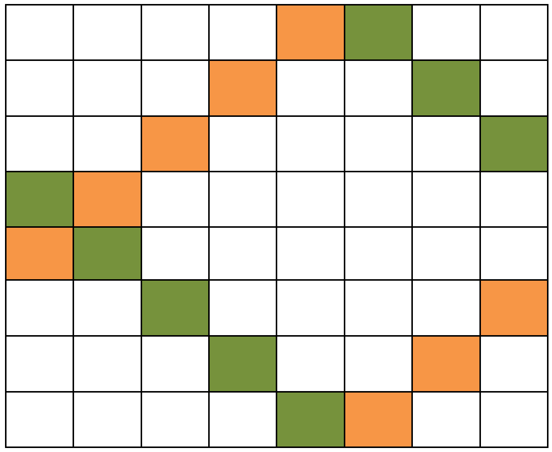
$AD \qquad \left(\frac{k-n+r}{2} ; \frac{k+n-r+2}{2}\right)$

$BC \qquad \left(\frac{n+k+r}{2} ; \frac{k+n-r+2}{2}\right)$

$BD \qquad \left(\frac{k+r}{2} ; \frac{2n+k-r+2}{2}\right)$

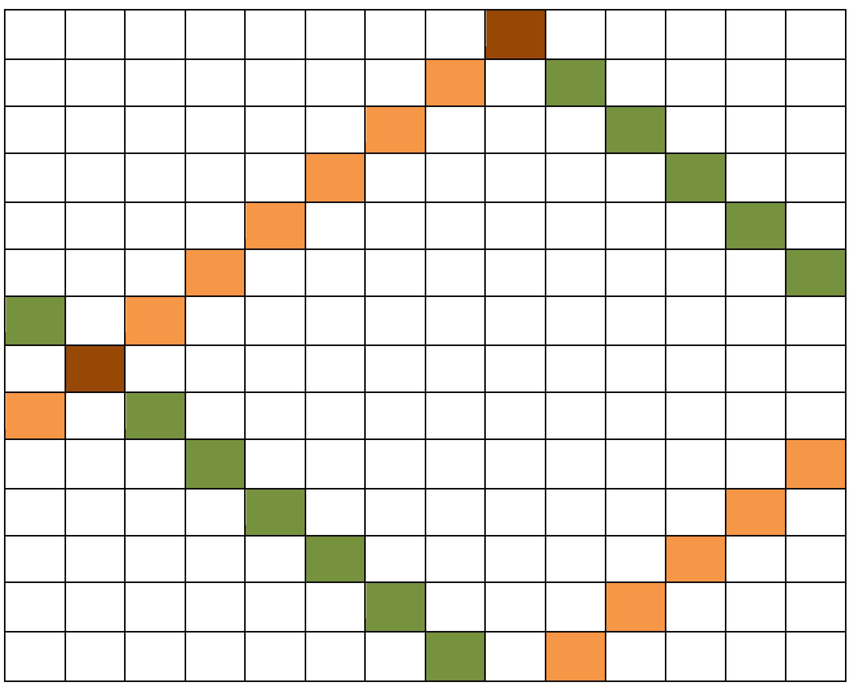
Si k et r sont de parités différentes, alors :
il n'y a aucune intersection ni à l'intérieur du carré,
ni à l'extérieur du carré.

Exemple :



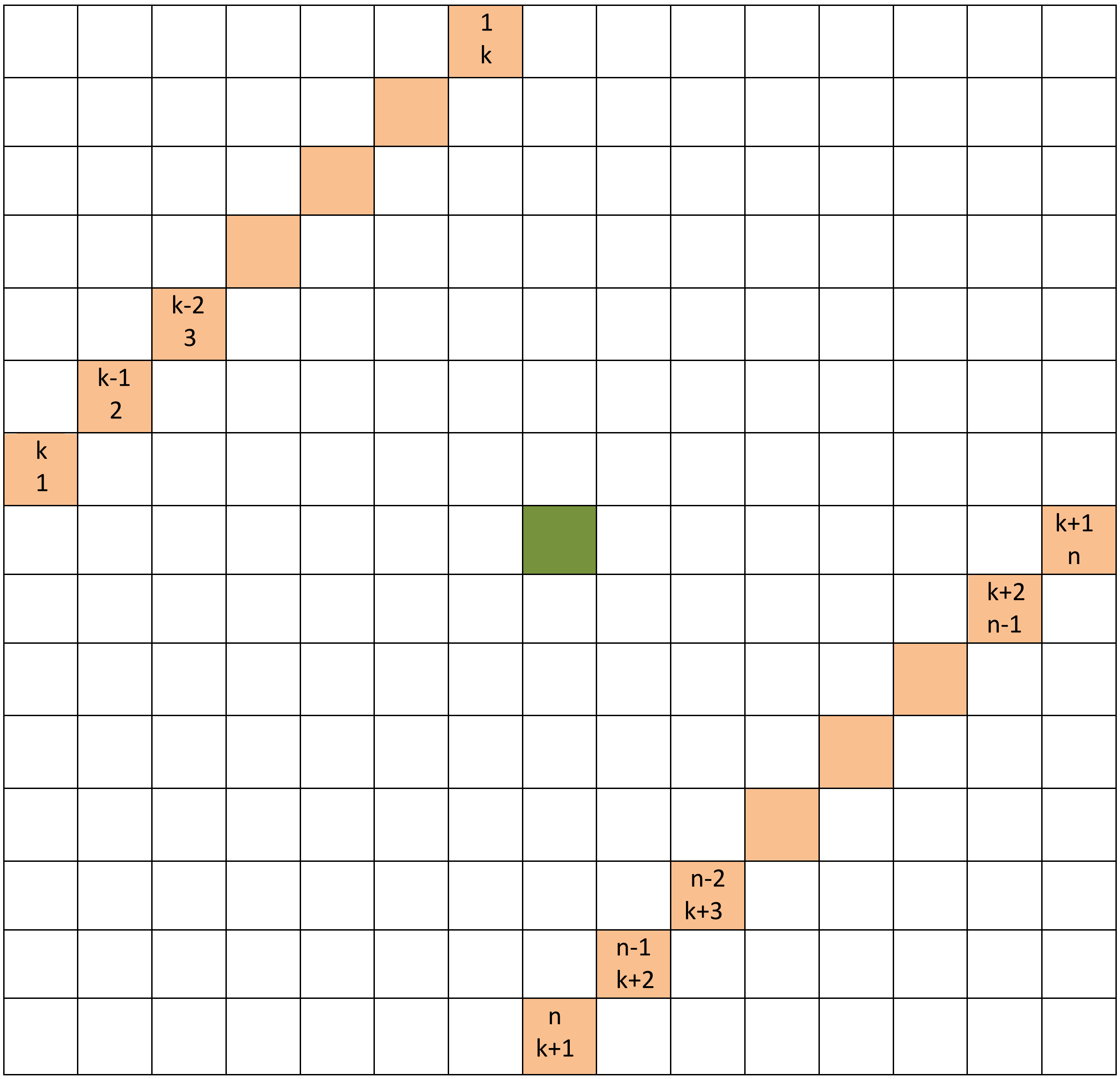
Ici, $n=8,k=5,r=4$ d'où des parités différentes. Nous constatons alors aucune intersection ni à l'intérieur du carré, ni à l'extérieur.

Exemple :



Ici, $n=14,k=9,r=7$. La théorie nous apprend que A rencontre C *et* D à l'intérieur du carré; les deux autres intersections ont lieu à l'extérieur du carré. Les cases d'intersection sont les cases brunes.

Diagonale secondaire



Diagonale principale

									1 t					
										2 t+1				
											3 t+2			
														r-1 n
r 1														
	r+1 2													
		r+2 3												
			r+3 4											
								x y						

$$x = n\ ;\ y = n - r + 1\ ;\ t = n - r + 2$$