Annexe 5 : Des carrés verticaux-alpha, horizontaux-alpha et plus

14.13.1 :

Dans la section 14.13, nous avons cherché un carré magique presque normal d'ordre 5 qui contiendrait vingt cinq entiers qui ne forment pas une suite arithmétique. Pour cela, nous avons utilisé l'algorithme ALG-1 en nous servant du fichier «Ordre 5» dans MATHEMATICA. Avec les variables a = 4, r = 2, t = 12, nous avons obtenu le carré arithmétique suivant :

36	54	22	40	8
6	34	52	20	48
46	4	32	60	18
16	44	12	30	58
56	24	42	10	28

a = 4; r = 2; t = 12; S = 160

Mais quelle surprise de voir apparaitre ce carré!!! Dans chaque colonne, les cinq entiers se terminent tous par le même chiffre, celui de droite. Pour les cinq colonnes, ces cinq chiffres sont différents deux à deux. De gauche à droite, nous trouvons 6, 4, 2, 0 et 8. Nous appelons «carré vertical-alpha», un tel carré.

C'est par chance que nous avons trouvé ce carré. Nous cherchions seulement un carré magique presque normal d'ordre 5 tel que ses vingt cinq entiers ne forment pas une suite arithmétique. Et nous trouvons ce curieux carré!!! Pouvons-nous en trouver d'autres? Oui, dans 14.13, nous avons montré qu'il en existe une infinité d'ordre 5.

Pouvons-nous en trouver d'ordre 3, 4, 6, 7, …?

Nous allons montrer que pour obtenir un carré vertical-alpha d'ordre $n \geq 3$, seulement les ordres $n = 5 \, et \, n = 10k$ où $k \geq 1$ est un entier, sont susceptibles de nous donner de tels carrés. Nous pourrons donc affirmer, par exemple, qu'il n'existe pas de carré vertical-alpha d'ordre 6.

Il est clair que si un carré vertical-alpha existe, alors, avec une rotation de 90°de celui-ci, nous trouverons un carré horizontal-alpha.

Avant de démontrer ce résultat, voyons **les cas** $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Supposons que M soit un carré vertical-alpha **d'ordre 3**. Ce carré est donc magique et presque normal. L'addition des entiers des trois colonnes nous donne trois entiers identiques puisque M est magique donc trois entiers qui se terminent par le même chiffre u. . Voyons par quel chiffre se termine la somme dans chaque colonne.

$$\begin{array}{l} u:0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9 \\ S:0\ \ 3\ \ 6\ \ 9\ \ 2\ \ 5\ \ 8\ \ 1\ \ 4\ \ 7 \end{array}$$

Puisque M est magique, nous devons avoir dans la rangée S au moins trois fois le même chiffre, ce qui n'est pas le cas. Donc M ne peut jamais être ni vertical-alpha, ni horizontal-alpha.

Pour le cas $n = 4$, le tableau ci-haut devient :

$$\begin{array}{l} u:0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9 \\ S:0\ \ 4\ \ 8\ \ 2\ \ 6\ \ 0\ \ 4\ \ 8\ \ 2\ \ 6 \end{array}$$

Nous devons avoir dans la rangée S, au moins quatre fois le même chiffre, ce qui n'est pas le cas. Donc M ne peut jamais être ni vertical-alpha, ni horizontal-alpha.

Pour le cas $n = 5$, le tableau ci-haut devient :

$$\begin{array}{l} u:0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9 \\ S:0\ \ 5\ \ 0\ \ 5\ \ 0\ \ 5\ \ 0\ \ 5\ \ 0\ \ 5 \end{array}$$

Nous devons avoir dans la rangée S, au moins cinq fois le même chiffre, ce qui est le cas. En effet, nous avons cinq 0 et cinq 5. L'ordre 5 peut donc nous donner des carrés verticaux-alpha et des carrés horizontaux-alpha. Ce qui est le cas puisque le premier trouvé est le vertical-alpha ci-haut.

Nous commençons à voir la condition nécessaire pour avoir un vertical-alpha.

Pour les cas $n = 6, 7, 8, 9,$ le tableau suivant nous donne les rangées S pour les ordres $n = 6, 7, 8, 9,$ respectivement de haut en bas :

$$\begin{array}{l} u:0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9 \\ S:0\ \ 6\ \ 2\ \ 8\ \ 4\ \ 0\ \ 6\ \ 2\ \ 8\ \ 4 \\ S:0\ \ 7\ \ 4\ \ 1\ \ 8\ \ 5\ \ 2\ \ 9\ \ 6\ \ 3 \\ S:0\ \ 8\ \ 6\ \ 4\ \ 2\ \ 0\ \ 8\ \ 6\ \ 4\ \ 2 \\ S:0\ \ 9\ \ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1 \end{array}$$

Nous devons avoir dans les rangées S, respectivement au moins 6, 7, 8, 9 fois le même chiffre. Ce qui n'est pas le cas. M ne peut donc pas être ni vertical-alpha, ni horizontal-alpha.

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème suivant :

Théorème 14.16.1:

Si M est un carré vertical-alpha ou horizontal-alpha d'ordre $n \geq 3$, alors $n = 5 \, ou \, n = 10k$ avec $k \geq 1$, un entier.

Preuve :

Nous venons de voir ce qui se passe pour les ordres 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Pour l'ordre $n = 10$, nous trouvons le tableau suivant :

$$(*) \qquad \begin{array}{l} u: 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 9 \\ S: 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \end{array}$$

Nous devons avoir au moins dix fois le même chiffre, ce qui est le cas. L'ordre $n = 10$ est donc susceptible de nous donner des carrés verticaux-alpha et des carrés horizontaux-alpha.

Si l'ordre est $n = 10k$, il est clair que nous aurons le même tableau (*) et que tous ces ordres sont susceptibles de nous donner des carrés verticaux-alpha et des carrés horizontaux-alpha.

Si l'ordre est $n \geq 11$, alors nous devons avoir dans M, au moins une colonne telle que tous ses entiers se terminent par 0, au moins une autre colonne telle que tous ses entiers se terminent par 1, et ainsi de suite jusqu'à 9. Voyons le tableau suivant dans lequel $k \geq 1$ est un entier.

	n: $10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	0	2	4	6	8

Dans ce tableau, les chiffres en bleu à gauche indiquent le chiffre des unités des entiers d'une colonne. Par exemple, le chiffre 2 indique que nous considérons la colonne dans laquelle tous les entiers se terminent par le chiffre 2. Si l'ordre du carré a la forme $10k+7$, par exemple, alors nous trouvons que la somme des entiers de cette colonne est un entier qui se termine par le chiffre 4. Les deux dernières rangée du tableau nous indiquent que la somme dans la colonne où tous les entiers se terminent par le chiffre 1 est toujours différente de la somme dans la colonne où tous les entiers se terminent par le chiffre 2. Par exemple, dans un carré d'ordre $n = 10k+7$, nous trouvons $7 \; et \; 4$. Cela contredit le fait que M soit magique et alors, pour ces ordres, aucun carré vertical-alpha ne peut exister et aucun carré horizontal-alpha ne peut exister.

Soit M un carré vertical-alpha. Il est évident qu'une rotation de 90° de M nous donne un carré horizontal-alpha. Cependant, nous pouvons aussi en construire un qui n'est pas un équivalent de M. Par exemple :

48	78	28	58	8
6	46	76	26	66
64	4	44	84	24
22	62	12	42	82
80	30	60	10	40

a = 4; r = 2; t = 18; S = 220

De ce dernier carré, nous pouvons construire une infinité d'horizontaux-alpha (Voir dans 14.13 pour les verticaux-alpha).

Pour finir, montrons que si deux entiers ≥ 0 n'ont pas le même chiffre des unités, alors ces deux entiers sont différents.

Soient $10k+u \; et \; 10K+v$, deux entiers ≥ 0 avec :

$k \, et \, K$, des entiers ≥ 0, $u \, et \, v \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $u \neq v$. Sans perte de généralité, nous pouvons poser $u > v$. Supposons que nos deux entiers soient égaux. Nous avons alors :

$10k+u = 10K+v \;\; \Leftrightarrow u-v = 10K-10k = 10(K-k)$, et la contradiction devient évidente. En effet, $1 \leq u-v \leq 9$ et $u-v$ ne peut pas être égal à un multiple de $10.$ Nos deux entiers sont donc différents.

Le théorème 14.16.1 est démontré. Nous savons maintenant que si un carré est vertical-alpha ou horizontal-alpha, alors son ordre est $n = 5 \, ou \, n = 10k$ avec $k \geq 1,$ un entier.

Nous avons trouvé une infinité de carrés verticaux-alpha d'ordre 5 et une infinité de carrés horizontaux-alpha d'ordre 5. Pour en trouver d'ordre 10, nous avons pris la structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 10 obtenue avec l'algorithme ALG-3 (voir le fichier «Ordre 10» d'EXCEL ou de MATHEMATICA). Nos essais n'ont rien donné!!! Cependant, nous pouvons trouver avec «Ordre 10», des carrés verticaux tels que tous les entiers de ceux-ci se terminent par le même chiffre. Pour le moment, nous ne pouvons pas conclure qu'un carré vertical-alpha d'ordre 10 n'existe pas.

Nos recherches ne nous ont pas donné de carrés verticaux-alpha d'ordre 10 mais nous ont permis de trouver quelques carrés magiques remarquables.

5	565	208	215	348	418	425	558	138	635
691	82	152	481	411	341	222	502	572	61
684	89	159	474	404	334	264	509	579	19
47	117	537	236	306	376	446	187	607	656
670	600	530	243	313	383	453	180	110	33
663	593	523	250	320	390	460	173	103	40
26	586	516	257	327	397	467	166	96	677
649	124	194	439	369	299	229	544	614	54
12	131	201	432	362	292	271	551	621	642
68	628	495	488	355	285	278	145	75	698

Carré arithmétique presque normal : a = 5; r = 7; t = 70; S = 3515

Les cent entiers de ce carré arithmétique forment une suite arithmétique. De plus, dans chaque rangée, cinq entiers se terminent par le chiffre u et les cinq autres, par le chiffre v avec $u \neq v$.

Dans deux rangées de même couleur, nous trouvons dans chacune cinq entiers qui se terminent par un même chiffre et cinq autres entiers qui se terminent par un autre même chiffre. Dans les rangées 2 et 9, en bleu, nous trouvons cinq entiers qui se terminent par 1 et cinq autres, par 2.

Observez les autres paires de rangées.

Quant aux colonnes, dans chacune, les chiffres des unités sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Voici maintenant un autre carré magique arithmétique presque normal d'ordre 10. Dans ce carré, cinquante entiers se terminent par 4 et cinquante entiers se terminent par 9. Nous trouvons ces deux chiffres dans chaque rangée et dans chaque colonne.

Il en est toujours ainsi lorsque r et t sont des multiples de 5. En effet, ce carré est arithmétique d'ordre 10 avec $r = 5\, et\, t = 55$ donc tous ses entiers ont la forme $a + k_1 r + k_2 t$ avec $k_1\, et\, k_2$, des entiers qui prennent toutes les valeurs de 0 à 9. Maintenant, puisque $r\, et\, t$ sont des multiples de 5, il s'ensuit que $k_1 r\, et\, k_2 t$ se termineront chacun, cinq fois par 0 et cinq fois par 5 donc $k_1 r + k_2 t$ se terminera cinquante fois par 0 et cinquante fois par 5. Finalement, $a + k_1 r + k_2 t$ se terminera cinquante fois par le chiffre des unités de a, soit w ce chiffre. Nous aurons alors cinquante entiers qui se terminent par w et cinquante entiers qui se terminent par le chiffre des unités de (w + 5).

Dans le carré qui suit, w = 4 puisque a = 4 et w + 5 = 9. Nous aurons cinquante fois le chiffre 4 et cinquante fois le chiffre 9.

Dans les cinq premières rangées, nous trouvons six cases vertes par rangée et dans les cinq dernières rangées, nous trouvons quatre cases vertes par rangée.

Dans les cinq premières colonnes, nous trouvons quatre cases vertes par colonne et dans les cinq dernières colonnes, nous trouvons six cases vertes par colonne.

Vous remarquez sans doute que toutes les cases vertes renferment un entier qui se termine par 4 et que toutes les autres cases renferment un entier qui se termine par 9.

Qu'observez-vous sur les deux grandes diagonales?

Ce magnifique carré magique suit:

4	444	159	169	269	324	334	434	104	499
539	64	119	374	319	264	174	394	449	44
534	69	124	369	314	259	204	399	454	14
34	89	419	184	239	294	349	144	474	514
524	469	414	189	244	299	354	139	84	24
519	464	409	194	249	304	359	134	79	29
19	459	404	199	254	309	364	129	74	529
509	94	149	344	289	234	179	424	479	39
9	99	154	339	284	229	209	429	484	504
49	489	389	379	279	224	214	114	59	544

Carré arithmétique presque normal d'ordre 10 : a = 4; r = 5; t = 55; S = 2740

Notre prochain carré arithmétique est presque normal d'ordre 10. Il est obtenu avec a = 5, r = 2, t = 20 et il est de somme S = 1040. Dans quatre de ses rangées (beiges), nous trouvons dans chacune, cinq entiers qui se terminent par 3 et cinq entiers qui se terminent 5. Puis dans quatre autres rangées (vertes), nous trouvons dans chacune, cinq entiers qui se terminent par 1 et cinq entiers qui se terminent par 7. Enfin, dans deux rangées (bleues), tous les entiers se terminent par 9.

Dans chaque colonne, nous trouvons toujours deux entiers qui se terminent par 1, deux entiers qui se terminent par 3, deux entiers qui se terminent par 5, deux entiers qui se terminent par 7 et deux entiers qui se terminent par 9.

Qu'observez-vous sur les deux grandes diagonales?

Les cent entiers du carré sont donc tous impairs ce que nous savions déjà puisque r et t sont pairs et a, impair.

5	165	63	65	103	123	125	163	43	185
201	27	47	141	121	101	67	147	167	21
199	29	49	139	119	99	79	149	169	9
17	37	157	71	91	111	131	57	177	191
195	175	155	73	93	113	133	55	35	13
193	173	153	75	95	115	135	53	33	15
11	171	151	77	97	117	137	51	31	197
189	39	59	129	109	89	69	159	179	19
7	41	61	127	107	87	81	161	181	187
23	183	145	143	105	85	83	45	25	203

Carré arithmétique presque normal d'ordre 10: a = 5; r = 2; t = 20; S = 1040

Suit ce joli carré arithmétique presque normal d'ordre 5 qui est déterminé par a = 4, r = 2, t = 10, de somme S = 140. Ce carré est associatif car il a été construit avec l'algorithme ALG-1.

32	46	20	34	8
6	30	44	18	42
40	4	28	52	16
14	38	12	26	50
48	22	36	10	24

a = 4; r = 2; t = 10; S = 140

Nous notons les rangées de 1 à 5 de haut en bas et les colonnes de 1 à 5 de gauche à droite. Voici quelques propriétés de ce carré :

1) Tous les entiers de ce carré sont pairs puisque a, r et t sont des entiers pairs.
2) Les entiers de la rangée 1 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 1 soit 2, 6, 0, 4, 8.
3) Les entiers de la rangée 2 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 2 soit 6, 0, 4, 8, 2.
4) Les entiers de la rangée 3 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 3 soit 0, 4, 8, 2, 6.
5) Les entiers de la rangée 4 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 4 soit 4, 8, 2, 6, 0.
6) Les entiers de la rangée 5 se terminent de la même façon que les entiers de la colonne 5 soit 8, 2, 6, 0, 4.
7) Dans chaque rangée et chaque colonne, les cinq entiers se terminent par 0, 2, 4, 6, 8.
8) Les cinq entiers de la diagonale principale se terminent par 0, 2, 4, 6, 8.
9) Les cinq entiers de toutes les diagonales brisées principales se terminent par 0, 2, 4, 6, 8.
10) Tous les entiers de la diagonale secondaire se terminent par 8.
11) Tous les entiers de chaque diagonale brisée secondaire se terminent par le même chiffre soit 2, 6, 0, 4.
12) La fréquence de ce carré est $f(140) = 1394.$ C'est la fréquence des carrés magiques normaux d'ordre 5.

Terminons avec trois façons de construire des carrés verticaux-alpha d'ordre 5 et horizontaux-alpha d'ordre 5.

Première façon :

La structure générale suivante (carré 1) va nous permettre de construire une infinité de carré verticaux-alpha. Elle est obtenue de la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 5 laquelle a été construite avec l'algorithme ALG-1 (Voir le fichier «Ordre 5»). Nous posons : $r = 2k \text{ et } t = 6r.$

Cette structure générale est un carré arithmétique, associatif et vertical-alpha dès que $k \geq 1$ est un entier qui n'est pas un multiple de $5,$ avec a, un entier $\geq 1.$ Si k est un multiple de $5 (k = 5, 10, 15, ...),$ alors tous les entiers du carré vont se terminer par le même chiffre.

Dans tous les autres cas $(k = 1, 2, 3, 4, \; 6, 7, 8, 9, \; 11, ...),$ le carré obtenu sera vertical-alpha.

Cette structure générale a pour somme $5a+140k$. Deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours $2a+56k$.

$a+32k$	$a+50k$	$a+18k$	$a+36k$	$a+4k$
$a+2k$	$a+30k$	$a+48k$	$a+16k$	$a+44k$
$a+42k$	a	$a+28k$	$a+56k$	$a+14k$
$a+12k$	$a+40k$	$a+8k$	$a+26k$	$a+54k$
$a+52k$	$a+20k$	$a+38k$	$a+6k$	$a+24k$

Carré 1 $r=2k;\ t=6r$

L'ensemble des carrés issus de cette structure générale est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. C'est évidemment un sous espace de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 des carrés arithmétiques d'ordre 5.

Mais nous nous intéressons seulement à certains carrés de ce sous-espace de dimension 2, plus précisément, ceux déterminés par a, un entier ≥ 1 et $k \geq 1$, un entier non multiple de 5.

Deuxième façon :

En utilisant la structure générale suivante :

$36+20k$	$54+40k$	$22+10k$	$40+30k$	8
6	$34+20k$	$52+40k$	$20+10k$	$48+30k$
$46+30k$	4	$32+20k$	$60+40k$	$18+10k$
$16+10k$	$44+30k$	12	$30+20k$	$58+40k$
$56+40k$	$24+10k$	$42+30k$	10	$28+20k$

Carré 2 $a=4, r=2, t=12+1$

Cette structure est obtenue de la structure générale des carrés arithmétiques d'ordre 5 laquelle a été construite avec l'algorithme ALG-1 (Voir le fichier «Ordre 5»). Nous avons posé : $a=4, r=2, t=12+10k$ avec k, un entier $\geq 0.$ (Voir 14.13).

L'ensemble des carrés issus de cette structure générale n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En effet, nous trouvons l'entier 8 dans une des cases puis les entiers 6, 4, 12 et 10 dans quatre autres cases.

Ces deux structures ne nous donnent pas, en général, les mêmes carrés verticaux-alpha.

Par exemple, le carré obtenu du carré 2 avec $k=1$ ne peut pas être obtenu du carré 1 ni même d'un de ses équivalents. Nous aurions :

$$\begin{matrix} a+50k=94 \\ a+18k=32 \end{matrix} \text{ d'où } k=\frac{62}{32}=1,9375 \quad \text{et} \quad \begin{matrix} a+2k=6 \\ a+30k=54 \end{matrix} \text{ d'où } k=\frac{48}{28}=1,734...$$

Puisque nous trouvons deux valeurs de k différentes, nous concluons que le carré obtenu du carré 2 avec $k=1$ ne peut pas être obtenu du carré 1. En effet, nous devons avoir la même valeur de k et la même valeur de a dans toutes les expressions du carré 1.

Nous procédons de la même façon avec les équivalents du carré 1. Par exemple, si nous tournons le carré 1 de 90°, alors nous aurons les systèmes suivants :

$$\begin{matrix} a+44k=94 \\ a+14k=32 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a+36k=6 \\ a+16k=54 \end{matrix}$$

et deux valeurs différentes pour k.

Par contre, avec $k=0$ dans le carré 2 et $a=4, k=1$ dans le carré 1, nous obtenons le même carré.

De plus, il est évident que des carrés issus du carré 1 ne le seront jamais du carré 2.

Donc le carré 1 ne donne qu'une partie des carrés verticaux-alpha et il en est de même du carré 2.

Troisième façon :

Si nous connaissons un carré vertical-alpha ou horizontal-alpha, alors nous pouvons en obtenir des nouveaux en ajoutant l'entier $k \geq 1$ dans chaque case du carré.

Nous dirons qu'un carré magique est pair (impair) si dans toutes ses cases se trouve un entier pair (impair).

Le problème 55 de 14.18 nous apprend qu'un carré vertical ou horizontal est soit pair, soit impair si son ordre est impair. Donc si nous avons un carré vertical-alpha d'ordre 5 qui est pair (impair), alors d'ajouter 1 dans toutes ses cases donnera un nouveau carré vertical-alpha qui sera impair (pair).

Nous savons maintenant fabriquer une infinité de carrés verticaux-alpha et une infinité de carrés horizontaux-alpha d'ordre 5. Notre objectif est atteint!!!

Quant aux carrés horizontaux-alpha d'ordre 5, nous savons en obtenir à partir des verticaux-alpha. Nous pouvons aussi utiliser une structure générale faite à partir de celle des carrés arithmétiques d'ordre 5 (ALG-1). Nous posons $r = 2k, t = 9r$ avec l'entier $k \geq 1$ qui n'est pas un multiple de 5 et ainsi, le carré sera horizontal-alpha.

Trouvez cette structure générale.

Mentionnons que tout le travail qui vient d'être fait ici est basé sur un premier carré vertical-alpha d'ordre 5 trouvé par hasard!!! Voir le carré de somme S = 160 dans 14.12.

Nous savons maintenant que si nous trouvons un autre carré vertical-alpha qui n'est pas d'ordre 5, alors celui-ci sera d'ordre 10, 20, 30, …

Nous allons chercher notre premier carré vertical-alpha d'ordre 10 et notre premier carré vertical-alpha d'ordre 20. Allons-nous y arriver??? Non pour l'ordre 10 puisque nous avons le résultat suivant :

Théorème 14.16.2

Il n'existe aucun carré vertical-alpha ou horizontal-alpha d'ordres $10(2k+1)$ où $k \geq 0$ est un entier.

La preuve est toute simple! Si un carré vertical-alpha est d'ordre 10, alors sa somme magique, selon les colonnes, est un entier qui se termine par 0. Mais sa somme magique, selon les rangées, est un entier qui se termine par 5. En effet, dans toutes les rangées, nous trouvons dix entiers qui se terminent par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dont la somme des derniers chiffres est 45. Voilà pourquoi un carré vertical-alpha ou un carré horizontal-alpha d'ordre 10 n'existent pas. La somme magique ne peut pas se terminer à la fois par 0 et par 5.

Dans un carré vertical-alpha d'ordre $10(2k+1)$, nous trouvons $2k+1$ groupes de dix colonnes. Dans chaque groupe, nous trouvons une colonne telle que tous ses entiers se terminent par 0 puis une autre colonne telle que tous ses entiers se terminent par 1 et ainsi de suite jusqu'à 9. Selon les colonnes, la somme magique se termine par 0 mais selon les rangées, elle se termine aussi par 5. En effet, dans chaque rangée, la somme magique est un entier qui comprend le nombre $45(2k+1)$ dans la colonne des unités et donc la somme magique se termine par 5.

Pour la même raison, le carré vertical-alpha n'existe pas. Enfin, terminons en disant que si le carré vertical-alpha n'existe pas, alors l'horizontal-alpha ne peut pas exister!!!

Ceci termine la preuve.

Maintenant, si nous voulons un autre carré vertical-alpha dont l'ordre est différent de 5, alors il nous faudra chercher parmi les ordres 20, 40, 60, … soit tous les multiples de 20 à partir de 20.

Nous allons chercher un carré vertical-alpha d'ordre 20 ou tenter de démontrer qu'il n'existe pas. C'est donc à suivre!!!

Pour l'instant, nous n'avons peut-être pas encore de carré vertical-alpha d'ordre 20 mais nous avons trouvé de magnifiques carrés arithmétiques d'ordre 20 que nous vous invitons à trouver avec EXCEL, MAPLE ou MATHEMATICA en posant :

a = 1, r = 10, t = 195 : le carré est presque normal et renferme dans chaque colonne, dix entiers qui se terminent par 1 et dix entiers qui se terminent par 6. De même, dans chaque rangée, nous trouvons dix entiers qui se terminent par 1 et dix entiers qui se terminent par 6. Il en est de même des deux grandes diagonales!!! Tous les entiers de ce carré se terminent donc par 1 ou 6. Observez comment les 1 et les 6 sont regroupés!!!

a = 1, r = 10, t=196 : le carré est presque normal et dans quatre colonnes, tous les entiers se terminent par 3. Dans chacune des autres colonnes, dix entiers se terminent par le chiffre u et les dix autres par le chiffre v, différent de u.

1 7 3 9 5   5 9 3 7 1   5 9 3 7 1   1 7 3 9 5
5 9 3 7 1   1 7 3 9 5   1 7 3 9 5   5 9 3 7 1

Ce tableau nous indique que dans la première colonne (nous allons de gauche à droite), tous les entiers se terminent soit par 1, soit par 5. Dans cette colonne, de haut en bas, nous trouvons cinq 1, dix 5 et de nouveau cinq 1. Dans la deuxième colonne, nous trouvons, de haut en bas, cinq 7, dix 9 et cinq 7. Dans la troisième colonne, tous les entiers se terminent par 3, et ainsi de suite. Observez les colonnes en positions symétriques par rapport à la verticale qui passe par le centre du carré!!! Observez chaque groupe de cinq colonnes, de gauche à droite. Enfin, dans chaque rangée et dans chaque grande diagonale, nous trouvons quatre fois les chiffres 1, 3, 5, 7 et 9.

Nous vous laissons observer ce qui se passe avec : a = 1, r = 10, t = 198 puis a = 1, r = 10, t = 205.

Ce que nous observons ici est étroitement relié à l'algorithme ALG-2 et à notre choix de r et de t; r = 10 et t se termine par 5 puis r = 10 et t est pair.

Voyons maintenant un carré magique arithmétique d'ordre 8 défini par a = 1, r = 10 et t = 75 :

1	76	446	371	296	221	451	526
11	86	436	361	286	211	461	536
576	501	171	246	321	396	126	51
566	491	181	256	331	406	116	41
556	481	191	266	341	416	106	31
546	471	201	276	351	426	96	21
61	136	386	311	236	161	511	586
71	146	376	301	226	151	521	596

Ce carré est presque normal. Trente deux de ses entiers se terminent par 1 et les trente deux autres se terminent par 6. Dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, nous trouvons quatre entiers qui se terminent par 1 et quatre entiers qui se terminent par 6.

Le carré magique suivant d'ordre 8 est arithmétique et presque normal; il est défini par a = 1, r = 10 et t = 76 :

1	77	451	375	299	223	457	533
11	87	441	365	289	213	467	543
583	507	173	249	325	401	127	51
573	497	183	259	335	411	117	41
563	487	193	269	345	421	107	31
553	477	203	279	355	431	97	21
61	137	391	315	239	163	517	593
71	147	381	305	229	153	527	603

Nous trouvons deux colonnes dans lesquelles tous les entiers se terminent par 7. Comme pour le cas a = 1, r = 10, t = 196 vu plus haut, voici le tableau qui décrit chaque colonne :

1 7 1 5   9 3 7 3

3 7 3 9   5 1 7 1

Pouvons-nous construire un carré semblable au carré précédent tel que dans ses deux colonnes vertes, les seize entiers se termineraient par le même chiffre, celui que vous désirez?

La réponse est oui. Voici comment.

1) Consultez le carré A qui nous permet de construire la structure de carrés arithmétiques d'ordre 8 avec ALG-2. (voir dans EXCEL ou MATHEMATICA, «Ordre 8»).
2) Le carré A va nous permettre de trouver qu'avec a = 1, r = 10 et t = 72, les entiers dans les deux colonnes vertes se termineront par le chiffre 3 puisque 2x1 + 1 et 2x6 + 1 se terminent par 3.
3) Si vous voulez que les seize entiers dans les deux colonnes vertes se terminent par le chiffre 8, par exemple, alors il suffira d'ajouter 5 dans toutes les cases donc de poser a = 6.

Enfin, une autre conjecture :

Si un carré est vertical-alpha ou horizontal-alpha, alors il est d'ordre 5.

Pour faire un théorème de cette conjecture, il faut démontrer que de tels carrés n'existent pas pour les ordres $n = 20k$ où $k \geq 1$ est un entier.