# Annexe 4 : Réflexion sur les inverses

Ici, notre définition de corps n'impose pas la commutativité de la multiplication.

Dans un corps K, un élément particulier, noté 0, est appelé «élément neutre pour l'addition» car nous avons :

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ pour tout } x \text{ dans K.}$$

Il existe un second élément particulier, noté 1, que nous appelons «élément neutre pour la multiplication» car nous avons :

$$x\,1 = 1\,x = x \text{ pour tout } x \text{ dans K.}$$

Soit x dans K. Si x est différent de 0, alors il existe un élément unique x' dans K tel que :

$$x\,x' = x'\,x = 1$$

Nous dirons que $x'$ est l'inverse multiplicatif de $x$. Plus simplement, $x'$ est l'inverse de $x$ et nous écrirons : $x' = x^{-1}$

Quant à l'inverse additif de x, nous l'appellerons l'opposé de x et nous le noterons $-x$ d'où :

$$x + -x = -x + x = 0$$

Nous allons porter notre réflexion sur l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n > 0.

Prenons, par exemple, l'ensemble M des matrices carrées d'ordre 4 formées de nombres réels. Il est clair que M n'est pas un corps commutatif puisqu'en général, AB est différent de BA. De plus, M n'est toujours pas un corps car il existe au moins un carré A qui n'est pas inversible. Précisons tout ça.

1) Quelle est la multiplication dans M? S'agit-t-il de la multiplication matricielle (*) ou de la multiplication terme à terme (**)?
2) Dans les deux cas, M est un anneau. Il n'est pas commutatif avec (*) mais il l'est avec (**).
3) M possède un élément neutre avec (*) différent de l'élément neutre avec (**).
4) Avec (*), une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul tandis qu'avec (**), A est inversible si et seulement si A ne renferme aucun 0.

Il est donc très important de préciser notre choix de la multiplication d'où notre choix de l'élément neutre. Également, le choix des éléments de notre ensemble de départ. Ici, M contient toutes les matrices carrées d'ordre 4 formées de nombres réels. Nous aurions pu choisir l'ensemble M des matrices carrées triviales (nous trouvons le même nombre à chaque position dans la matrice).

**Cas 1 : M contient toutes les matrices d'ordre 1 formées d'un seul nombre réel.**

Il est évident que si x est non nul, alors la matrice est inversible. Avec (*) ou (**), l'élément neutre pour la multiplication est (1) et l'inverse de (x) est (1/x).

**Cas 2 : M contient toutes les matrices carrées formées de nombres réels, d'ordre** $n, n \geq 2.$

Nous prendrons comme exemple, $n = 3.$ La généralisation sera évidente!

a) La multiplication est matricielle et la matrice unité est :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A appartient à M, alors A possède dans M une matrice inverse A' si et seulement si le déterminant de A est non nul. Nous aurons alors AA' = A'A = $I$.

b) La multiplication est terme à terme et la matrice unité est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si A est dans M, alors son inverse existe dans M si et seulement si A ne contient aucun 0. Nous aurons alors : AA' = A'A = $J$.

**Cas 3 : M contient toutes les matrices triviales d'ordre 3. La multiplication est matricielle.**

Il est clair que $I$ n'est pas dans M tandis que $J$ s'y trouve. Mais $J$ n'est pas une matrice unité puisque :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}} \underset{J}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3k & 3k & 3k \\ 3k & 3k & 3k \\ 3k & 3k & 3k \end{pmatrix}$$

De plus, $J\,J = 3J.$

Il est facile de vérifier que $(1/3)J$ est la matrice unité de M. Si $k \neq 0,$ alors la matrice $A$ est inversible et son inverse est : $A^{-1} = \dfrac{1}{9k}J.$

Maintenant, vous et moi regardons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vous me dites que $A$ n'est pas inversible puisque que nous trouvons dans $A$, deux lignes identiques d'où un déterminant nul.

Je vous réponds que cette matrice ne peut pas être vue obligatoirement comme faisant partie de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 avec $I$ comme élément neutre.

Je vois $A$ comme matrice qui appartient à un autre ensemble, celui des matrices triviales d'ordre 3, qui ne contient pas $I$ et qui possède une structure de corps commutatif.

Finalement, nous avons raison tous les deux!!! Tout est une question de point de vue!!! De plus, il n'y a aucune contradiction!!!