Annexe 32 : carrés m-ultra-magiques presque normaux

Ordres impairs :

Voici une rangée du tableau de la page 70 du chapitre 15. Elle se rapporte au m-ultra-magique d'ordre 5, de produit $36^5 = 60\ 466\ 176$.

36 ; 60 466 176	128	16	1	1296	16

Cette rangée nous indique qu'il existe 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 donc 16 primitifs. Ils contiennent tous 1 comme plus petit entier et 1296 comme plus grand entier. De plus, ils renferment tous les mêmes 25 entiers!!!

Selon le théorème 15.13.1, page 73, tous les entiers du carré sont des diviseurs de $k^2 = 36^2 = 1296$. Or 1296 possède exactement 25 diviseurs entiers positif!!! Donc, si on a un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5, alors celui-ci renfermera les 25 diviseurs de 1296. Nous avons ici 16 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 et ceux-ci renferment tous les 25 diviseurs de 1296. Ils renferment donc les mêmes 25 entiers.

Soit donné M, un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 de produit $P = k^5$. Si le nombre de diviseurs entiers positifs de k^2 est < 25, alors M n'existe pas.

Une condition nécessaire pour que M existe est que le nombre de diviseurs entiers positifs de k^2 soit ≥ 25.

Voyons ce qui se passe si l'ordre est impair ≥ 7.

Le problème 47) de 15.7 nous montre qu'un m-ultra-magique presque normal d'ordre impair $n \geq 5$ aura dans sa case centrale le nombre $P^{\frac{1}{n}}$. Puisque ce carré est presque normal, alors nous pouvons poser $P^{\frac{1}{n}} = k$, un entier ≥ 1. D'où $P = k^n$ et le théorème suivant :

Théorème 1 :

Si M est un m-ultra-magique presque normal d'ordre impair $n \geq 5$, alors sa case centrale contient l'entier $P^{\frac{1}{n}}$. De plus, $P = k^n$ où $k \geq 1$ est un entier.

Théorème 2 :

Si M est un m-ultra-magique presque normal d'ordre impair $n \geq 5$, alors tous les entiers de M sont des diviseurs de k^2.

Selon le problème 28) de 15.7, un m-ultra-magique presque normal d'ordre 3 n'existe pas.

Pourquoi un m-ultra-magique presque normal d'ordre 7 et de produit $P = 196^7$ n'existe pas?

Réponse : Il faut que $196^2 = 38\ 416$ possède au moins 49 diviseurs entiers positifs. Malheureusement, cet entier n'en possède que 25. Si le carré m-ultra-magique existe, alors il ne sera pas presque normal.

Nous avons construit un m-ultra-magique d'ordre 5 avec (UM*), page 65 du chapitre 15. Nous avons pris : $a = 1$; $d = 18$; $e = 162$; $m = 729$; $P = 54^5$. Voici ce carré :

1	<u>972</u>	36	18	729
162	81	9	324	<u>12</u>
2916	4	<u>54</u>	729	1
<u>243</u>	9	324	36	18
4	162	81	<u>3</u>	2916

Les cinq nombres soulignés se trouvent une seule fois dans le carré.

Ce carré est formé d'entiers ≥ 1 mais il y a des répétitions. En effet, tous les entiers du carré sont des diviseurs de $k^2 = 54^2 = 2916$ mais 2916 ne possède que 21 diviseurs entiers positifs. Certains diviseurs doivent donc se répéter et ainsi, ce carré ne peut pas être presque normal.

Et si nous prenions tous les diviseurs de 2916 dans $\mathbb{Z}$. Il y en aurait alors 42 :

$$(\pm 1 \; ; \; \pm 2 \; ; \; ...; \; \pm 1458 \; ; \; \pm 2916)$$

Voilà pourquoi le carré sans répétition devient possible si nous acceptons les entiers négatifs. Notre m-ultra-magique n'est toujours pas presque normal mais il contient 25 entiers non nuls différents deux à deux!!! Le voici : $a = 1$; $d = -18$; $e = 162$; $m = 729$; $P = 54^5$:

1	<u>972</u>	36	−18	−729
162	−81	−9	324	<u>12</u>
−2916	4	<u>54</u>	729	−1
<u>243</u>	9	−324	−36	18
−4	−162	81	<u>3</u>	2916

En valeur absolue, les deux carrés contiennent les mêmes entiers dans les mêmes cases.

Puisque 54^2 ne possède que 21 diviseurs entiers positifs (il en faut au moins 25), alors nous ne pouvons pas construire un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5 et de produit $P = 54^5$.

Mais 54^2 possède 42 diviseurs entiers d'où la possibilité de construire un m-ultra-magique d'ordre 5 et de produit $P = 54^5$ qui ne sera pas presque normal mais qui contiendra aucune répétition. Son seul défaut : 40% d'entiers négatifs.

Comment fabriquer un m-ultra-magique presque normal d'ordre 5?

Étape 1 : Nous prendrons la structure générale (UM*) d'ordre 5 de la page 65 du chapitre 15. Celle-ci génère tous les m-ultra-magiques d'ordre 5 formés de nombres non nuls. Pour cela, les cinq variables a, d, e, m et P doivent prendre des valeurs entières positives non nulles. En particulier, elle génère tous les m-ultra-magiques formés de nombres > 0.

Étape 2 : Nous voulons 25 entiers ≥ 1 dans notre carré. La case centrale doit donc renfermer un entier $k \geq 1$ et alors $P^{\frac{1}{5}} = k$ d'où $P = k^5$. $P = k^5$ devient une condition nécessaire.

Étape 3 : Puisque notre carré doit être un m-ultra-magique donc associatif, alors tous les entiers du carré doivent être des diviseurs de k^2. Dans MATHEMATICA, par exemple, la commande Divisors [k^2] nous donne la liste des diviseurs entiers positifs de k^2. Si nous voulons un carré qui contient 25 entiers ≥ 1, alors la liste Divisors [k^2] contiendra tous les entiers du carré. Cette liste est nécessaire.

Étape 4 : Si nous voulons un m-ultra-magique presque normal, alors k sera un entier ≥ 1. Les entiers du carré seront dans Divisors [k^2] et il est nécessaire que le nombre de diviseurs entiers positifs soit ≥ 25.

Étape 5 : Maintenant il faut choisir la valeur de $k \geq 1$ afin de trouver le produit $P = k^5$ et la valeur de k^2 qui détermine la liste des entiers qui sont susceptibles de former le carré.

Si la liste contient moins que 25 diviseurs, alors il faudra chercher une autre valeur de k.

Étape 6 : Nous avons construit dans MAPLE un programme, appelé MUM-5, qui donne les m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 à partir de la liste des diviseurs entiers positifs de k^2 et du produit $P = k^5$.

Exemple : Prenons $k = 196$ d'où $k^2 = 38\,416$ et $P = 196^5 = 289\ 254\ 654\ 976$. Voici les 25 diviseurs entiers positifs de $38\ 416$:

{1,2,4,7,8,14,16,28,49,56,98,112,196,343,392,686,784,1372,2401,2744,4802,5488,9604,19208,38416}

Notre programme, MUM-5, trouve 128 m-ultra-magiques presque normaux d'ordre 5 de produit $P = 196^5$. Puis, il nous donne les 16 primitifs qui renferment les mêmes 25 entiers soient les 25 diviseurs de $38\ 416$. Le carré qui suit est l'un des 16 primitifs dont 1 est le plus petit entier et 38 416, le plus grand entier du carré.

16	9 604	343	392	14
49	56	2	38 416	1 372
4 802	5 488	196	7	8
28	1	19 208	686	784
2 744	98	112	4	2 401

m-ultra-magique presque normal de produit $P = 196^5$

Ordres pairs :

Soit M, un m-ultra-magique de produit P, presque normal d'ordre pair $n \geq 4$. Si a et b sont deux entiers situés dans des cases symétriques par rapport au centre du carré, alors nous avons :

$$ab = P^{2/n} = \sqrt[n]{P^2} = k$$

où $k \geq 2$ est un entier.

Puisque $P^{2/n} = k$, il s'ensuit que $P = k^{n/2}$.

De plus, tous les entiers de M sont des diviseurs de k.

Par exemple, pour $n = 4$, les valeurs de k qui peuvent nous conduire à un m-ultra-magique presque normal sont celles qui possèdent au moins 16 diviseurs. L'entier $k = 120$ est le plus petit entier qui possède 16 diviseurs. Il pourrait nous conduire à un m-ultra-magique presque normal de produit $P = 120^2 = 14\,400$, si celui-ci existe. Pour $n = 6$, $k = 1260$ possède 36 diviseurs d'où la possibilité de trouver un m-ultra-magique presque normal de produit $P = 1260^3 = 2\ 000\ 376\ 000,$ si celui-ci existe.

Exemple : le carré suivant est un ultra-magique presque normal d'ordre 6, de somme $S = 252$.

39	62	26	13	81	31
25	83	32	21	77	14
17	78	16	40	65	36
48	19	44	68	6	67
70	7	63	52	1	59
53	3	71	58	22	45

Selon le théorème 15.17, en faisant l'exponentiation en base 2, nous obtenons un m-ultra-magique de produit $P = 2^{252}$.

Ici, $k = 2^{84}$ et $P = k^{n/2} = k^3 = \left(2^{84}\right)^3 = 2^{252}$. De plus, il est facile de constater que chaque entier du m-ultra-magique est un diviseur de k. Ainsi, $\dfrac{2^{84}}{2^{67}} = 2^{17}$ et 83 est le plus grand entier du carré.