Annexe 30 : Les carrés géométriques

Nous connaissons les carrés arithmétiques présentés au chapitre 11. Avec ceux-ci, trois variables suffisent pour construire un carré magique d'ordres $n \geq 3$. En est-il de même avec les carrés multiplicatifs. La réponse est oui!!!

Voyons d'abord un exemple.

Considérons la structure générale des carrés magiques d'ordre 3 :

$$\begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

Nous allons faire l'exponentiation en base B. Posons :

$$(*) \qquad B^a = r\,,\; B^b = t \;\; et \;\; B^S = P$$

Ainsi,
$$B^{4S/3-2a-b} = \frac{\left(B^S\right)^{4/3}}{\left(B^a\right)^2 B^b} = \frac{P^{4/3}}{r^2 t}$$

Puis en posant $P^{1/3} = w$, le carré multiplicatif obtenu est :

$$\begin{pmatrix} r & t & \frac{w^3}{r\,t} \\ \frac{w^4}{r^2 t} & w & \frac{r^2 t}{w^2} \\ \frac{r\,t}{w} & \frac{w^2}{t} & \frac{w^2}{r} \end{pmatrix}$$

Ce dernier carré est multiplicatif et renferme 9 nombres positifs selon (*).

Cependant, si nous prenons la seconde structure générale des carrés magiques d'ordre 3, nous voyons clairement que celle-ci est un carré arithmétique. L'exponentiation nous conduit encore plus facilement au carré multiplicatif et son tableau géométrique.

$$\begin{pmatrix} a+2r+t & a & a+r+2t \\ a+2t & a+r+t & a+2r \\ a+r & a+2r+2t & a+t \end{pmatrix}$$

Faisons l'exponentiation en base B. Posons :

$$(**) \qquad B^a = u,\ B^r = v,\ B^t = w.$$

Ainsi, $B^{a+2r+t} = B^a (B^r)^2 B^t = u\,v^2 w.$ Le carré multiplicatif obtenu est :

$$(\%) \qquad \begin{pmatrix} u\,v^2 w & u & u\,v\,w^2 \\ u\,w^2 & u\,v\,w & u\,v^2 \\ u\,v & u\,v^2 w^2 & u\,w \end{pmatrix}$$

Ce dernier carré est multiplicatif et il est géométrique dont voici son tableau géométrique :

$$\begin{pmatrix} u & u\,v & u\,v^2 \\ u\,w & u\,v\,w & u\,v^2 w \\ u\,w^2 & u\,v\,w^2 & u\,v^2 w^2 \end{pmatrix}$$

Lemme 1 :

> L'exponentiation d'une suite arithmétique nous donne une suite géométrique formée de nombres positifs.
> Logarithmer une suite géométrique de nombres réels positifs nous donne une suite arithmétique.

Preuve :

Prenons deux termes consécutifs d'une suite arithmétique : $a + n\,r \ \ et \ \ a + (n+1)\,r.$

L'exponentiation en base B donne $B^{a+nr}\,et\ B^{a+(n+1)r}$ d'où :

$$B^a (B^r)^n \ \ et \ \ B^a (B^r)^n B^r$$

Et la suite géométrique de raison B^r s'ensuit. Tous les nombres de cette suite sont positifs.

Prenons deux termes positifs consécutifs d'une suite géométrique : $a\,r^n et\ a\,r^{n+1}$ avec $a > 0\ \ et\ \ r > 0.$ En logarithmant en base B, nous trouvons :

$$\log_B a + n\log_B r \;\; et \;\; \log_B a + n\log_B r + \log_B r$$

Et la suite arithmétique de raison $\log_B r$ s'ensuit.

Corollaire 1 :

L'exponentiation d'un carré arithmétique nous donne un carré géométrique.
Logarithmer un carré géométrique nous donne un carré arithmétique.

Prenons maintenant une structure de carrés arithmétiques d'ordre 5 de somme $S = 5a + 10r + 10t.$

$$\text{(A)} \qquad \begin{pmatrix} a+4r+2t & a+r+4t & a+3r+t & a+3t & a+2r \\ a+r & a+3r+2t & a+4t & a+2r+t & a+4r+3t \\ a+3r+3t & a & a+2r+2t & a+4r+4t & a+r+t \\ a+t & a+2r+3t & a+4r & a+r+2t & a+3r+4t \\ a+2r+4t & a+4r+t & a+r+3t & a+3r & a+2t \end{pmatrix}$$

Nous allons faire l'exponentiation en base B. Par exemple, $a+4r+2t$ nous donne :

$$B^{a+4r+2t} = B^a (B^r)^4 (B^t)^2$$

Puis en posant $B^a = m,\ B^r = u,\ B^t = v,$ nous obtenons $mu^4v^2.$ Les variables dans (A) sont $a, r\, et\, t$ et dans le carré multiplicatif, $m, u\, et\, v.$ Ces dernières ne prennent que des valeurs positives. Le passage de (A) au carré multiplicatif nous montre que l'addition se change en multiplication et que les coefficients deviennent des exposants. Ainsi, la première rangée de (A) nous donne la première rangée du carré multiplicatif :

$$mu^4v^2 \quad muv^4 \quad mu^3v \quad mv^3 \quad mu^2$$

Ou encore : $$ar^4t^2 \quad art^4 \quad ar^3t \quad at^3 \quad ar^2$$

Nous pouvons maintenant écrire la structure correspondante des carrés géométriques sans effectuer le moindre calcul :

$$(M) \qquad \begin{pmatrix} ar^4t^2 & art^4 & ar^3t & at^3 & ar^2 \\ ar & ar^3t^2 & at^4 & ar^2t & ar^4t^3 \\ ar^3t^3 & a & ar^2t^2 & ar^4t^4 & art \\ at & ar^2t^3 & ar^4 & art^2 & ar^3t^4 \\ ar^2t^4 & ar^4t & art^3 & ar^3 & at^2 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons dans ce carré 25 expressions différentes. Si a est un entier positif et $r\ et\ t$ sont des nombres premiers distincts, alors les 25 nombres obtenus sont distincts deux à deux, quelle que soit la valeur de a. En effet, si deux expressions différentes donnent le même entier, alors nous aurons deux décompositions en facteurs premiers pour un même entier. D'où la contradiction.

Les propriétés de (A) sont transmises à (M). (M) est donc associatif et géométrique. Le produit P de (M) est :

$$P = a^5r^{10}t^{10} = (ar^2t^2)^5$$

Avec $a = 1, r = 2\ et\ t = 3$, nous avons un carré géométrique associatif de produit

$$P = 36^5 = 60\ 466\ 176$$

Le nombre de figures magiques dans (A) est 934 de même que dans (M). Avec $a = 1, r = 2, t = 9$, nous trouvons 940 figures magiques dans (A). Par exponentiation en base 2, nous trouvons $P = 2^{115}$. Le carré multiplicatif possède lui aussi 940 figures magiques.

Prenons ici une structure générale de carrés arithmétiques d'ordre 6. La somme est : $S = 6a + 15r + 15t$. Le produit du carré géométrique obtenu est :

$$P = a^6r^{15}t^{15} = (a^2r^5t^5)^3$$

Avec $a = 1, r = 2, t = 3$, nous trouvons $P = 470\ 184\ 984\ 576$.

Nous allons attribuer que des valeurs entières positives à nos trois variables. En procédant ainsi, nous trouverons que le plus petit produit pour un carré géométrique presque normal d'ordre n est :

$$\boxed{P = 6^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Qu’arriverait-il si nous procédions autrement? Pour l’ordre 6, pourrions-nous trouver un produit plus petit que 470 184 984 576? Pourrions-nous donner des valeurs rationnelles à nos variables r et t? La réponse est oui!!!

Voyons un exemple : posons $u = 625$, $v = \frac{2}{5}$, $w = \frac{3}{5}$ dans la structure (%) vue plus haut. Nous obtenons le carré géométrique presque normal suivant de produit $P = 3\ 375\ 000$.

$$\begin{pmatrix} 60 & 625 & 90 \\ 225 & 150 & 100 \\ 250 & 36 & 375 \end{pmatrix}$$

Nous ne trouverons pas tous les carrés géométriques presque normaux avec (%) si nous attribuons aux trois variables que des valeurs entières!!! (Voir le carré de la page 15, section 15.2 du chapitre 15).

Il est faux de croire que pour avoir un carré géométrique presque normal d’ordre 3, les variables doivent absolument prendre des valeurs entières. Le carré ci-haut le montre bien!!!

Pouvons-nous obtenir un plus petit produit pour un carré presque normal si certaines variables peuvent prendre des valeurs rationnelles non entières?

Nous vous proposons d’entreprendre une recherche afin de répondre à cette question.

Nous savons qu’il existe une structure générale de carrés arithmétiques pour tous les ordres $n \geq 3$.

Donc il existe une structure générale de carrés multiplicatifs (géométriques)
pour tous les ordres $n \geq 3$.

En effet, il suffit de faire l'exponentiation d'une structure générale de carrés arithmétiques pour obtenir une structure générale de carrés multiplicatifs géométriques.

QUESTION 1:

Je vous donne un carré magique M d'ordre 5 et un carré multiplicatif N
formé de nombres réels positifs (> 0), aussi d'ordre 5.
Existe-t-il une base B telle que par exponentiation en base B
du carré M, nous obtenions le carré N?

En général, la réponse est non. Si M et N sont donnés au hasard, alors la probabilité que M et N soient associés est nulle. En base B, un seul carré magique peut donner N soit le carré magique obtenu en logarithmant N en base B. Était-ce M???

QUESTION 2 :

Soit M, un carré magique d'ordre n. Est-il possible en logarithmant M en base B,
d'obtenir un carré magique?

La réponse est non en général mais si M est à la fois magique et multiplicatif, alors la réponse est oui. La section 13.3 nous présente 5 carrés à la fois magiques et multiplicatifs.

Tous les carrés multiplicatifs d’ordre 3 sont des carrés géométriques.

Une conséquence du théorème fondamental des carrés magiques est qu’il est possible de construire une infinité de carrés multiplicatifs presque normaux pour tous les ordres $n \geq 3$ et ce, toujours à l’aide de 3 variables seulement. Ceux-ci seront tous géométriques et si l’ordre est impair ou pair multiple de 4, alors ils seront associatifs!!!