ANNEXE 3 : Carrés magiques emboîtés appelés r-tours

Voici quatre carrés magiques emboîtés presque normaux avec :

$S_1 = 125 \quad S_3 = 375 \quad S_5 = 625 \quad S_7 = 875$

91	105	106	107	108	109	249
152	130	131	132	133	99	98
153	134	124	129	122	116	97
154	135	123	125	127	115	96
155	75	128	121	126	175	95
169	151	119	118	117	120	81
1	145	144	143	142	141	159

Les sommes magiques S_1, S_3, S_5, S_7 sont respectivement celles du carré central d'ordre 1, du carré central d'ordre 3, du carré central s'ordre 5 et du carré d'ordre 7. Ces sommes s'écrivent également :

$$S_1 = 125 \quad S_3 = 3 \times 125 \quad S_5 = 5 \times 125 \quad S_7 = 7 \times 125$$

Six carrés magiques emboîtés presque normaux

146	144	301	142	303	140	305	138	307	136	380
150	145	148	149	177	179	247	253	257	443	294
310	273	188	202	203	204	205	206	346	171	134
133	274	249	227	228	229	230	196	195	170	311
312	275	250	231	221	226	219	213	194	169	132
131	276	251	232	220	222	224	212	193	168	313
314	277	252	172	225	218	223	272	192	167	130
129	278	266	248	216	215	214	217	178	166	315
321	199	98	242	241	240	239	238	256	245	123
432	1	296	295	267	265	197	191	187	299	12
64	300	143	302	141	304	139	306	137	308	298

$S_1 = 222 \quad S_3 = 666 \quad S_5 = 1110 \quad S_7 = 1554 \quad S_9 = 1998 \quad S_{11} = 2442$

$S_1 = 222 \quad S_3 = 3\times 222 \quad S_5 = 5\times 222 \quad S_7 = 7\times 222 \quad S_9 = 9\times 222 \quad S_{11} = 11\times 222$

Quatre autres carrés magiques emboîtés presque normaux :

59	18	57	20	23	22	67
27	43	32	45	24	46	49
55	51	37	42	35	25	21
28	50	36	38	40	26	48
75	16	41	34	39	60	1
13	30	44	31	52	33	63
9	58	19	56	53	54	17

$$S_1 = 38 \quad S_3 = 3 \times 38 \quad S_5 = 5 \times 38 \quad S_7 = 7 \times 38$$

Nous observons que $S_n = n \times centre$!!! En est-il toujours ainsi?

Six carrés magiques emboîtés presque normaux

87	146	69	152	67	155	64	157	62	61	190
160	119	140	79	142	77	144	75	148	66	60
59	138	131	90	129	92	95	94	139	82	161
162	83	99	115	104	117	96	118	121	137	58
57	136	127	123	109	114	107	97	93	84	163
164	86	100	122	108	110	112	98	120	134	56
53	149	147	88	113	106	111	132	73	71	167
168	70	85	102	116	103	124	105	135	150	52
51	55	81	130	91	128	125	126	89	165	169
219	154	80	141	78	143	76	145	72	101	1
30	74	151	68	153	65	156	63	158	159	133

$S_1 = 110 \quad S_3 = 3\times 110 \quad S_5 = 5\times 110 \quad S_7 = 7\times 110 \quad S_9 = 9\times 110 \quad S_{11} = 11\times 110$

$S_1 = 110 \quad S_3 = 330 \quad S_5 = 550 \quad S_7 = 770 \quad S_9 = 990 \quad S_{11} = 1210$

Sept carrés magiques emboîtés presque normaux

189	32	187	34	185	36	183	38	181	18	179	2	166
3	87	146	69	152	67	155	64	157	62	61	190	217
24	160	119	140	79	142	77	144	75	148	66	60	196
215	59	138	131	90	129	92	95	94	139	82	161	5
214	162	83	99	115	104	117	96	118	121	137	58	6
213	57	136	127	123	109	114	107	97	93	84	163	7
28	164	86	100	122	108	110	112	98	120	134	56	192
29	53	149	147	88	113	106	111	132	73	71	167	191
40	168	70	85	102	116	103	124	105	135	150	52	180
11	51	55	81	130	91	128	125	126	89	165	169	209
200	219	154	80	141	78	143	76	145	72	101	1	20
210	30	74	151	68	153	65	156	63	158	159	133	10
54	188	33	186	35	184	37	182	39	202	41	218	31

$$S_1 = 110 \quad S_3 = 3\times110 \quad S_5 = 5\times110 \quad S_7 = 7\times110 \quad S_9 = 9\times110 \quad S_{11} = 11\times110 \quad S_{13} = 13\times110$$

$$S_1 = 110 \quad S_3 = 330 \quad S_5 = 550 \quad S_7 = 770 \quad S_9 = 990 \quad S_{11} = 1210 \quad S_{13} = 1430$$

Nous avons vu, dans 15.3.3, qu'il est toujours possible de placer une bordure autour d'un carré d'ordre $n \geq 3$, à la condition que l'unique somme possible pour que le carré d'ordre $n+2$ devienne magique soit $S = \frac{S^*}{n}$. Ici, notre carré initial d'ordre 3 est toujours magique presque normal.

Dans les exemples que nous venons de voir, le carré central d'ordre 3 a toujours comme somme magique 3 fois le nombre central. Posons : $S_3 = 3c$. Nous trouvons, selon le procédé de 15.3.3 :

$$S_5 = \frac{5\,S_3}{3} = \frac{5 \times 3c}{3} = 5c$$
$$S_7 = \frac{7\,S_5}{5} = \frac{7 \times 5c}{5} = 7\,c$$
$$S_9 = \frac{9\,S_7}{7} = \frac{9 \times 7\,c}{7} = 9\,c$$

Supposons $S_k = k\,c$. Alors $S_{k+2} = \frac{k+2}{k}\,k\,c = (k+2)\,c$. Ainsi, nous voyons bien comment se calcule chaque somme magique. Nous aurons, en continuant avec d'autres bordures autour du carré précédent, par exemple, $S_{77} = 77\,c$.

Il est important de dire ici que nous commençons toujours avec un carré magique d'ordre 3 de centre c. Nous aurons alors :

$$S_k = k\,c$$

où $k \geq 3$ est un entier impair.

Qu'arrive-t-il si $k \geq 4$ est un entier pair et que nous commençons toujours avec un carré magique presque normal d'ordre 4? À vous de répondre. Voir l'exemple qui suit.

Pour faciliter la construction du carré magique presque normal d'ordre k + 2, nous vous suggérons d'ordonner tous les entiers du carré d'ordre k puis…..

Quel que soit le carré quelconque d'ordre $n \geq 3$, nous pouvons toujours à l'aide d'une bordure construire un carré magique d'ordre $n+2$.

Trois carrés magiques emboîtés presque normaux

104	64	106	70	108	60	110	54
116	93	75	95	73	100	71	53
52	101	80	91	90	77	68	117
118	67	81	86	87	84	102	51
50	103	85	82	83	88	66	119
120	45	92	79	78	89	124	49
1	98	94	74	96	69	76	168
115	105	63	99	61	109	59	65

$$S_4 = 338 \qquad S_6 = 507 \qquad S_8 = 676$$
$$S_4 = 4\times 84,5 \qquad S_6 = 6\times 84,5 \qquad S_8 = 8\times 84,5$$

Posons S, la somme du carré magique d'ordre 4. Le procédé de construction des bordures nous donne le résultat suivant : $S_k = k\dfrac{S}{4}$ avec $k \geq 4$, un entier pair.

Ici, le carré central d'ordre 4 a pour somme $S = 338 = 4\times\dfrac{338}{4} = 4\times 84,5$.

Voici, relié au théorème 15.12, un procédé qui va nous permettre de placer une bordure autour d'un carré magique presque normal d'ordre n afin d'obtenir un carré magique presque normal d'ordre $n+2$. En fait, nous allons construire une série de carrés magiques presque normaux emboîtés à partir d'un carré magique normal d'ordre 3 ou d'un carré magique normal d'ordre 4. Si les carrés magiques presque normaux sont d'ordres impairs, alors nous parlerons d'une **r-tour-impaire** si celle-ci est formée de r carrés magiques emboîtés comme les cinq que nous venons de voir (deux 4-tours-impaires, deux 6-tours-impaires et une 7-tour-impaire). Si les carrés magiques presque normaux sont d'ordres pairs, alors nous parlerons d'une **r-tour-paire** si celle-ci est formée de r carrés magiques emboîtés comme le dernier exemple ci-haut (une 3-tour-paire).

1) Nous allons prendre M, un carré magique presque normal d'ordre n et de somme S puis nous allons construire la bordure, ici en vert.

$W+k_1$	$W+k$	$W+2k$	...					$W+nk$	X
							W		
Y	$m-k$	$m-2k$	...					$m-nk$	$m-k_1$

W est le plus grand entier de M. Posons $A=\dfrac{2S}{n}$ et $m=A-W$. Nous verrons un peu plus loin que A est un entier. Nous posons dans la case (1 ; 1) le nombre $W+k_1$ et dans la case (n+2 ; n+2), le nombre $m-k_1$. Ainsi la somme de ces deux cases est A, nombre nécessaire pour que le carré d'ordre n + 2 soit magique.

Dans la première rangée et dans la dernière rangée, nous trouvons respectivement:

$$W+k_1 \; ; W+k \; ; W+2k \; ; \ldots ; W+nk \; ; \; X$$
$$Y \; ; \; m-k \; ; \; m-2k \; ; \ldots ; \; m-nk \; ; \; m-k_1$$

La somme magique du carré d'ordre $n+2$ est $S'=\dfrac{n+2}{n}S=S+A.$

2) Nous allons donner à $k_1 \geq 1$ une valeur entière qui rend négatif $m-k_1$. Puis nous allons donner à $k \geq 1$ une valeur entière qui fait de X, un entier négatif en précisant que $k_1 < k.$

3) Parmi les entiers que nous avons maintenant dans le carré d'ordre n + 2, nous affirmons que X est le plus petit entier et que Y est le plus grand entier. En effet :

$$\begin{aligned} X &= S'-(n+1)W-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k)-nk \\ &= S+A-nW-W-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k)-nk \\ &= (A-W)+(S-nW)-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k)-nk \\ &= (m-nk)-(nW-S)-k_1-(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k) < m-nk \end{aligned}$$

puisque $nW-S>0.$ Trouvons maintenant :

$$\begin{aligned} Y = A-X &= m+W-(m-nk)-(S-nW)+k_1+(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k) \\ &= (W+nk)+(nW-S)+k_1+(k+2k+3k+\ldots+(n-1)k) > W+nk \end{aligned}$$

4) Ainsi nous voyons que dans le carré d'ordre n+2, les n colonnes centrales, les deux grandes diagonales et les première et dernière rangées sont de somme $S'=S+A.$ De plus, tous les nombres sont des entiers différents deux à deux.

5) Il reste à compléter les première et dernière colonnes. Nous savons maintenant que $X+Y=A.$ De plus, X est le plus petit entier négatif et Y, le plus grand entier positif. Voici comment nous allons remplir les deux colonnes (voir le carré qui suit).

6) Nous allons donner à la variable u des valeurs entières $\geq 1.$ Sauf R dans la colonne de gauche, les nouveaux nombres forment une suite strictement croissante ce qui nous donne des nombres différents des autres. De même, excepté T dans la colonne de droite, les nouveaux nombres forment une suite strictement décroissante ce qui donne des nombres différents des autres.

7) Nous allons ensuite montrer que R deviendra le plus petit nombre négatif du carré et que T deviendra le plus grand nombre positif du carré. Ainsi, nous n'aurons pas de répétitions. Mais actuellement, la case bleue contient le plus grand nombre et la case grise, le plus petit.

8) Trouvons R :

$$R = S + A - W - k_1 - nY - (u + 2u + 3u + ... + (n-2)u) - (n-1)u$$
$$= S + X + Y - W - k_1 - nY - (u + 2u + 3u + ... + (n-2)u) - (n-1)u$$
$$= (X - (n-1)u) + [S - (n-1)Y - W - k_1 - (u + 2u + 3u + ... + (n-2)u]$$

Il est clair qu'avec u suffisamment grand, le nombre entre crochets sera négatif et R deviendra le plus petit entier du carré.

9) Trouvons T :

$$T = S + X + Y - m + k_1 - nX + (u + 2u + 3u + ... + (n-2)u) + (n-1)u$$
$$= (Y + (n-1)u) + [S + (1-n)X + k_1 + (u + 2u + 3u + ... + (n-2)u) - m]$$

Il est clair qu'avec u suffisamment grand, le nombre entre crochets sera positif et T deviendra le plus grand entier du carré.

10) Il est facile de vérifier que la rangée qui contient $R\ et\ T$ est magique et que $R + T = A$.

11) Le carré final est magique et renferme que des entiers tous différents deux à deux.

$W + k_1$	$W + k$	$W + 2k$	...	...	...	...	...	$W + nk$	X
$Y + (n-1)u$									$X - (n-1)u$
...									...
...							W		...
...									...
$Y + 3u$									$X - 3u$
$Y + 2u$									$X - 2u$
$Y + u$									$X - u$
R									T
Y	$m - k$	$m - 2k$	...	...	...	...	...	$m - nk$	$m - k_1$

Ainsi, nous avons le théorème suivant :

Soit M un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$. Il est toujours possible de construire à l'aide d'une bordure, un carré magique M'd'ordre $n+2$ formé exclusivement d'entiers différents deux à deux. En ajoutant un entier correcteur dans toutes les cases de M', celui-ci deviendra presque normal. Nous pouvons donc construire une infinité de r-tours avec r > 0, un entier.

Quelques remarques :

1) Pourquoi A sera un entier et donc que tous les nombres du carré d'ordre n+2 seront des entiers?
2) Dans la construction des r-tours, nous partirons toujours avec un carré magique normal d'ordre 3 pour les r-tours- impaires et avec un carré magique normal d'ordre 4 pour les r-tours -paires. Nous verrons alors pourquoi A sera un entier.
3) L'algorithme que nous venons de voir ne sera pas utilisé tel quel pour construire un carré magique à l'aide d'une bordure. Celui-ci n'avait pour but que de montrer l'existence d'un carré magique presque normal obtenu à l'aide d'une bordure donc de montrer l'existence des r-tours.
4) Dans une r-tour, tous les carrés de même case centrale doivent être magiques et presque normaux.

En terminant, voici une 8-tour-impaire de centre 160 et une de centre 122. La toute première que nous avions trouvée avait pour centre 236. Pouvez-vous améliorer cette 8-tour avec un centre plus petit que 122?

Pourquoi pour construire le carré d'ordre 15, il a fallu augmenter le centre 110?

Voici une 8-tour-impaire de centre 160

266	58	261	62	257	64	255	66	253	69	249	72	247	220	1
221	239	82	237	84	235	86	233	88	231	68	229	52	216	99
3	53	137	196	119	202	117	205	114	207	112	111	240	267	317
223	74	210	169	190	129	192	127	194	125	198	116	110	246	97
96	265	109	188	181	140	179	142	145	144	189	132	211	55	224
225	264	212	133	149	165	154	167	146	168	171	187	108	56	95
94	263	107	186	177	173	159	164	157	147	143	134	213	57	226
227	78	214	136	150	172	158	160	162	148	170	184	106	242	93
92	79	103	199	197	138	163	156	161	182	123	121	217	241	228
243	90	218	120	135	152	166	153	174	155	185	200	102	230	77
76	61	101	105	131	180	141	178	175	176	139	215	219	259	244
245	250	269	204	130	191	128	193	126	195	122	151	51	70	75
50	260	80	124	201	118	203	115	206	113	208	209	183	60	270
20	104	238	83	236	85	234	87	232	89	252	91	268	81	300
319	262	59	258	63	256	65	254	67	251	71	248	73	100	54

$S_1 = 160 \quad S_3 = 3\times 160 \quad S_5 = 5\times 160 \quad S_7 = 7\times 160 \quad S_9 = 9\times 160$

$S_{11} = 11\times 160 \quad S_{13} = 13\times 160 \quad S_{15} = 15\times 160$

Une 8-tour-impaire de centre 122

228	20	223	24	219	26	217	28	215	31	211	34	237	55	62
183	201	44	199	46	197	48	195	50	193	30	191	14	178	61
60	15	99	158	81	164	79	167	76	169	74	73	202	229	184
185	36	172	131	152	91	154	89	156	87	160	78	72	208	59
35	227	71	150	143	102	141	104	107	106	151	94	173	17	209
187	226	174	95	111	127	116	129	108	130	133	149	70	18	57
56	225	69	148	139	135	121	126	119	109	105	96	175	19	188
186	40	176	98	112	134	120	122	124	110	132	146	68	204	58
39	41	65	161	159	100	125	118	123	144	85	83	179	203	205
206	52	180	82	97	114	128	115	136	117	147	162	64	192	38
37	23	63	67	93	142	103	140	137	138	101	177	181	221	207
12	212	231	166	92	153	90	155	88	157	84	113	13	32	232
233	222	42	86	163	80	165	77	168	75	170	171	145	22	11
1	66	200	45	198	47	196	49	194	51	214	53	230	43	243
182	224	21	220	25	218	27	216	29	213	33	210	7	189	16

$S_1 = 122 \quad S_3 = 3\times122 \quad S_5 = 5\times122 \quad S_7 = 7\times122 \quad S_9 = 9\times122$

$S_{11} = 11\times122 \quad S_{13} = 13\times122 \quad S_{15} = 15\times122$