Annexe 27 :   Carrés magiques vers carrés multiplicatifs

Nous allons construire des structures générales de carrés multiplicatifs à partir de structures générales de carrés magiques. Le théorème 15.17 nous sera très utile.

Commençons par un exemple.

Prenons la structure générale des super-Dürer (hyper-magiques d'ordre 4).

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & a-c+d & b+c-d \\ \frac{S}{2}-c & a+b+c-\frac{S}{2} & \frac{S}{2}-a & \frac{S}{2}-b \\ \frac{S}{2}-a+c-d & \frac{S}{2}-b-c+d & \frac{S}{2}-d & a+b+d-\frac{S}{2} \end{pmatrix}$$

Pour construire la structure générale des m-super-Dürer, S devient P, les variables ne changent pas, la somme devient un produit, la soustraction devient un quotient et ½ devient la racine carrée. Ainsi nous trouvons la structure cherchée :

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & \frac{P}{abc} \\ d & \frac{P}{abd} & \frac{ad}{c} & \frac{bc}{d} \\ \frac{\sqrt{P}}{c} & \frac{abc}{\sqrt{P}} & \frac{\sqrt{P}}{a} & \frac{\sqrt{P}}{b} \\ \frac{c\sqrt{P}}{ad} & \frac{d\sqrt{P}}{bc} & \frac{\sqrt{P}}{d} & \frac{abd}{\sqrt{P}} \end{pmatrix}$$

Cette structure est un m-super-Dürer.

Voyons cela de plus près.

Nous allons faire l'exponentiation de (*) en base A où $A \neq 1$ est > 0.

Nous obtenons alors :

$$(\%)\qquad \begin{pmatrix} A^a & A^b & A^c & A^{S-a-b-c} \\ A^d & A^{S-a-b-d} & A^{a-c+d} & A^{b+c-d} \\ A^{\frac{S}{2}-c} & A^{a+b+c-\frac{S}{2}} & A^{\frac{S}{2}-a} & A^{\frac{S}{2}-b} \\ A^{\frac{S}{2}-a+c-d} & A^{\frac{S}{2}-b-c+d} & A^{\frac{S}{2}-d} & A^{a+b+d-\frac{S}{2}} \end{pmatrix}$$

Ce carré (%) est un carré multiplicatif de produit $P = A^S$. Les carrés (*) et (%) sont donc associés et selon le théorème 15.17 de la partie 2, les deux carrés ont les mêmes figures magiques. Nous concluons que si (*) est un super-Dürer alors (%) est un m-super-Dürer. De plus, les 16 nombres de (%) sont > 0 puisque $A^x > 0, \forall x\, dans\, \mathbb{R}$. Le carré (%) génère donc tous les m-super-Dürer formés de 16 nombres réels > 0.

Simplifions le carré (%) en posant :

$$(1)\qquad A^a = r \ ;\ A^b = t \ ;\ A^c = u \ ;\ A^d = v \ ;\ A^S = P$$

Le carré (%) devient :

$$(\%\%)\qquad \begin{pmatrix} r & t & u & \frac{P}{r\,t\,u} \\ v & \frac{P}{r\,t\,v} & \frac{r\,v}{u} & \frac{t\,u}{v} \\ \frac{\sqrt{P}}{u} & \frac{r\,t\,u}{\sqrt{P}} & \frac{\sqrt{P}}{r} & \frac{\sqrt{P}}{t} \\ \frac{u\sqrt{P}}{r\,v} & \frac{v\sqrt{P}}{t\,u} & \frac{\sqrt{P}}{v} & \frac{r\,t\,v}{\sqrt{P}} \end{pmatrix}$$

Les variables dans (%) prennent des valeurs réelles quelconques mais dans (%%), elles prennent des valeurs réelles > 0 selon (1).

Si nous renommons les variables de (%%) ainsi :

$$r = a \ ;\ t = b \ ;\ u = c \ ;\ v = d$$

alors, nous retrouvons (**) :

$$(**)\quad \begin{pmatrix} a & b & c & \frac{P}{a\,b\,c} \\ d & \frac{P}{a\,b\,d} & \frac{a\,d}{c} & \frac{b\,c}{d} \\ \frac{\sqrt{P}}{c} & \frac{a\,b\,c}{\sqrt{P}} & \frac{\sqrt{P}}{a} & \frac{\sqrt{P}}{b} \\ \frac{c\sqrt{P}}{a\,d} & \frac{d\sqrt{P}}{b\,c} & \frac{\sqrt{P}}{d} & \frac{a\,b\,d}{\sqrt{P}} \end{pmatrix}$$

Dans le carré (**), les variables doivent prendre des valeurs réelles > 0. Dans (*), les mêmes variables peuvent prendre des valeurs réelles quelconques. ATTENTION à la confusion!!!

C'est pourquoi nous avons changé le nom des variables dans (%%).

Remarque 1:

Pour l'exponentiation, le choix de la base est arbitraire. Ainsi, avec la base 2, le carré magique M nous donnera le carré multiplicatif W. Pour obtenir W avec la base 3, ce sera un autre carré magique M' qui nous conduira à W.

Remarque 2 :

Dans le chapitre 15, nous avons construit des structures générales de carrés multiplicatifs de la même façon que pour les carrés magiques. Les nombreuses observations faites nous montrent une grande ressemblance entres les carrés magiques et les multiplicatifs. Lorsqu'un carré magique est associé à un multiplicatif, alors ces deux carrés ont les mêmes figures magiques!!!

Maintenant, l'exemple ci-haut nous montre qu'à partir d'une structure générale de carrés magiques, nous trouvons facilement une structure générale de carrés multiplicatifs. La réciproque est aussi vraie.

Rappelons notre définition de carrés associés :

Soit A, un carré magique d'ordre n et B, un carré multiplicatif d'ordre n tel que tous ses nombres soient > 0. Nous dirons que A et B sont associés si B est obtenu par exponentiation de A ou A est obtenu en prenant le logarithme de chaque nombre de B.

Y a-t-il vraiment une différence entre carré magique et carré multiplicatif?

Considérons E, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ formé de tous les carrés magiques d'ordre n qui sont caractérisés par une famille F de propriétés. Nous allons appliquer l'exponentiation sur chaque carré de E afin d'obtenir un ensemble G de carrés multiplicatifs formés de nombres réels positifs (> 0). G est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. (Voir annexe 26).

Toutes les propriétés des carrés de E sont alors transmises aux carrés de G.

Si M est un carré multiplicatif qui possède toutes les propriétés de F, alors en logarithmant M, nous obtenons un carré magique dans E. Donc M est dans G. En logarithmant tous les carrés de G, nous obtenons tous les carrés de E et les propriétés des carrés de G sont transmises aux carrés de E. (Voir le théorème 15.17).

L'exponentiation est une fonction bijective de E dans G.
De plus, E et G sont isomorphes.
E et G ont donc la même dimension.

Voyons un exemple :

E est l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés ultra-magiques d'ordre 5. Ici, la famille F renferme les propriétés suivantes :

1) Le carré est associatif.
2) Le carré est pandiagonal.

Nous allons faire l'exponentiation en base b.

1) Soient u et v, deux nombres situés dans des cases symétriques par rapport au centre d'un carré de E. Alors u + v = 2S/5. Par exponentiation, nous trouvons dans le carré multiplicatif les nombres $b^u \, et \; b^v$ situés dans des cases symétriques par rapport au centre du carré. Le produit est $b^{u+v} = b^{2S/5} = (b^S)^{2/5} = P^{2/5}$ puisque $b^S = P$. Ceci correspond bien à la définition des carrés m-ultra-magiques.
2) Considérons une diagonale quelconque, grande ou brisée, qui renferme les nombres r, t, w, x, y. Dans le carré multiplicatif, nous trouvons dans la diagonale correspondante, les nombres b^r, b^t, b^w, b^x, b^y d'où $b^r b^t b^w b^x b^y = b^{r+t+w+x+y} = b^S = P$.
Donc, si M et N sont deux carrés différents de E, alors par exponentiation, nous obtenons évidemment deux carrés multiplicatifs distincts M' et N' puisque la fonction exponentielle b^x est injective. Selon le théorème 15.17, si un carré multiplicatif vérifie

les propriétés de la famille F, alors en le logarithmant en base b, nous obtenons un carré de E.