Annexe 26 : L'espace vectoriel des m-Dürer (MD*)

Considérons F, l'ensemble des m-Dürer formés exclusivement de nombres réels > 0. Celui-ci forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 7. Voyons comment se construit cet espace.

Soient U et V, deux m-Dürer de F. Nous allons définir la multiplication $*$, l'opération du groupe, comme suit :

A	B	C	D
E	F	G	H
K	M	N	P
Q	R	S	T

U

a	b	c	d
e	f	g	h
k	m	n	p
q	r	s	t

V

Aa	Bb	Cc	Dd
Ee	Ff	Gg	Hh
Kk	Mm	Nn	Pp
Qq	Rr	Ss	Tt

$U * V$

C'est la multiplication terme à terme, notée U $*$ V qui se distingue du produit matriciel noté UV.

Quant à la multiplication par un scalaire, notée $\circ$, elle se définit comme suit :

A^W	B^W	C^W	D^W
E^W	F^W	G^W	H^W
K^W	M^W	N^W	P^W
Q^W	R^W	S^W	T^W

$W \circ U$

Ici, la multiplication par un scalaire est une exponentiation où W est un nombre réel et U, un carré m-Dürer de F.

L'élément neutre pour la multiplication est le trivial formé de 1. Nous le notons T.

Vérifions que F est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Si U et V sont dans F, alors U $*$ V est dans F. Évident!
2) Il existe un élément neutre dans F soit le trivial formé de 1. Évident!

3) Si U est dans F, alors il existe dans F un carré U' tel que U $*$ U' = T. En effet, chaque réel > 0 est inversible.
4) La multiplication $*$ est associative et commutative car la multiplication des réels est associative et commutative.
5) Donc {F, $*$ } est un groupe abélien.
6) Si U est dans F, alors W $\circ$ U est dans F puisqu'un nombre réel > 0 affecté d'un exposant réel, ici W, est toujours bien défini.
7) W $\circ$ (U $*$ V) = (W $\circ$ U) $*$ (W $\circ$ V). Les nombres u et v occupent la même position respectivement dans U et V. Le membre de gauche est $(u\,v)^W$. Le membre de droite est $u^W v^W = (uv)^W$.
8) (W + W') $\circ$ U = (W $\circ$ U) $*$ (W' $\circ$ U). Le membre de gauche est $u^{W+W'}$. Le membre de droite est $u^W u^{W'} = u^{W+W'}$.
9) W $\circ$ (W' $\circ$ U) = (WW') $\circ$ U. Le membre de gauche est $(u^{W'})^W = u^{W'W}$. Le membre de droite est $u^{WW'}$. Puisque $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, nous avons $u^{W'W} = u^{WW'}$.
10) 1 U = U. En effet, si u est un nombre réel, alors $u^1 = u$.

Au chapitre 15, nous avons établi une structure générale (MD) des m-Dürer puis une seconde structure (MD*). La première possède sept variables libres mais la seconde en possède 8.

(MD)

a	b	c	$\dfrac{P}{a\,b\,c}$
d	$\dfrac{P}{a\,b\,d}$	f	$\dfrac{a\,b}{f}$
g	$\dfrac{a^2 b\,c\,d\,g}{f\,P}$	$\dfrac{P}{a\,c\,g}$	$\dfrac{f\,P}{a\,b\,d\,g}$
$\dfrac{P}{a\,d\,g}$	$\dfrac{f\,P}{a\,b\,c\,g}$	$\dfrac{a\,g}{f}$	$\dfrac{a\,b\,c\,d\,g}{P}$

En posant $a = mn; b = uv; c = xy; d = yr; f = mu; g = us; P = mnuvxyrs$ dans (MD), nous trouvons (MD*).

(MD*)

$m\,n$	$u\,v$	$x\,y$	$r\,s$
$r\,y$	$s\,x$	$m\,u$	$n\,v$
$s\,u$	$n\,y$	$r\,v$	$m\,x$
$v\,x$	$m\,r$	$n\,s$	$u\,y$

Si nous prenons tous les carrés issus de (MD), ceux-ci ne forment pas nécessairement un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Par contre, si nous exigeons que tous les nombres du carré soient >0, alors nous aurons un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et ce, avec les deux opérations définies plus haut.

(MD) représente l'ensemble de tous les m-Dürer à produits non nuls. Si nous prenons que les carrés m-Dürer formés de nombres >0, alors ceux-ci forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qui est représenté par (MD) et qui est de dimension 7 car dans (MD), le nombre minimum de variables libres est 7.

Mais dans (MD*), nous avons huit variables!!!

Les structures (MD) et (MD*) sont équivalentes lorsque toutes leurs variables sont non nulles.

En effet, pour retrouver (MD) à partir de (MD*), nous prendrons :

$$u=\frac{abc}{P}\ ;\ y=dg\ ;\ m=\frac{fP}{abc}\ ;\ n=\frac{a^2bc}{fP}\ ;\ v=\frac{P}{ac}\ ;\ x=\frac{c}{dg}\ ;\ r=\frac{1}{g}\ ;\ s=\frac{gP}{abc}$$

Prenons tous les m-Dürer formés de nombres >0 qui sont issus de (MD). Ils forment un espace vectoriel. Prenons tous les m-Dürer formés de nombres >0 qui sont issus de (MD*). Ils forment le même espace vectoriel.

Voyons maintenant ce qu'est une combinaison linéaire. Nous prendrons ici une structure générale de carrés multiplicatifs d'ordre 3 (voir annexe 30):

$$(\%)\qquad \begin{pmatrix} u\,v^2w & u & u\,v\,w^2 \\ u\,w^2 & u\,v\,w & u\,v^2 \\ u\,v & u\,v^2w^2 & u\,w \end{pmatrix}$$

L'ensemble des carrés formés de nombres réels positifs issus de (%) forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Trouvons une base de cet espace vectoriel. D'abord, décomposons (%) en un produit puis illustrons la base :

$$M = \begin{pmatrix} u v^2 w & u & u v w^2 \\ u w^2 & u v w & u v^2 \\ u v & u v^2 w^2 & u w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & u & u \\ u & u & u \\ u & u & u \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v^2 & 1 & v \\ 1 & v & v^2 \\ v & v^2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix} =$$

$$\left\{ (\log_b u) \circ \underbrace{\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}}_{A} \right\} * \left\{ (\log_b v) \circ \underbrace{\begin{pmatrix} b^2 & 1 & b \\ 1 & b & b^2 \\ b & b^2 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \right\} * \left\{ (\log_b w) \circ \underbrace{\begin{pmatrix} b & 1 & b^2 \\ b^2 & b & 1 \\ 1 & b^2 & b \end{pmatrix}}_{C} \right\}$$

Les coordonnées du carré multiplicatif sont, relativement à la base ordonnée $\{A , B , C\}$:

$$(\log_b u, \log_b v, \log_b w)$$

Nous pouvons donc écrire : $M = \{(\log_b u) \circ A\} * \{(\log_b v) \circ B\} * \{(\log_b w) \circ C\};$ c'est la **combinaison linéaire** qui donne M. Nous pourrions aussi écrire notre combinaison linéaire comme suit :

$$M = A^{\log_b u} * B^{\log_b v} * C^{\log_b w}$$

L'ensemble $\{A, B, C\}$ est clairement un système de générateurs. Pour être une base, il faut l'indépendance linéaire. Or il est facile de montrer que ni A, ni B, ni C n'est une combinaison linéaire des deux autres.

En effet, supposons que $A = (x \circ B) * (y \circ C)$. Nous aurions alors $b = b^y$ d'où $y = 1$. Mais nous aurions aussi $b = b^{2y}$ d'où $y = \frac{1}{2}$. Contradiction!!!

Si $B = (x \circ A) * (y \circ C)$, alors nous aurions $b^2 = b^x$ d'où $x = 2$. Mais nous aurions aussi $b = b^x$ d'où $x = 1$. Contradiction!!!

Si $C = (x \circ A) * (y \circ B)$, alors nous aurions $b^x = 1$ d'où $x = 0$. Mais nous aurions aussi $b^x = b^2$ d'où $x = 2$. Contradiction!!!

Nous venons de montrer l'indépendance linéaire de $\{A, B, C\}$.

Notez que la base $\{A, B, C\}$ dépend du choix de la base b du logarithme.

Voyons un exemple en posant $u=1,\ v=2,\ w=3$ dans le carré M. Nous obtenons :

$$F = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 18 \\ 9 & 6 & 4 \\ 2 & 36 & 3 \end{pmatrix}$$

Retrouvons ce carré à l'aide des coordonnées de F :

$$F = \left(\log_b 1, \log_b 2, \log_b 3\right)$$

$$F = \left\{(\log_b 1) \circ \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 2\right) \circ \begin{pmatrix} b^2 & 1 & b \\ 1 & b & b^2 \\ b & b^2 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 3\right) \circ \begin{pmatrix} b & 1 & b^2 \\ b^2 & b & 1 \\ 1 & b^2 & b \end{pmatrix}\right\}$$

$$F = \left\{(0) \circ \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 2\right) \circ \begin{pmatrix} b^2 & 1 & b \\ 1 & b & b^2 \\ b & b^2 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\left(\log_b 3\right) \circ \begin{pmatrix} b & 1 & b^2 \\ b^2 & b & 1 \\ 1 & b^2 & b \end{pmatrix}\right\}$$

$$F = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right\} * \left\{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 18 \\ 9 & 6 & 4 \\ 2 & 36 & 3 \end{pmatrix}$$

Le carré F est un carré géométrique et son tableau géométrique est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \end{pmatrix}$.

Tous les carrés multiplicatifs d'ordre 3 sont des carrés géométriques.

Une conséquence du théorème fondamental des carrés magiques est qu'il est possible de construire une infinité de carrés multiplicatifs presque normaux pour tous les ordres $n \geq 3$ et ce, toujours à l'aide de 3 variables seulement. Ceux-ci seront tous géométriques et si l'ordre est impair ou pair multiple de 4, alors ils seront associatifs!!!

Poursuivons en montrant une autre façon de vérifier l'indépendance linéaire. Si $A = B^x * C^y$, alors $A, B\,et\,C$ sont linéairement dépendants. Il s'ensuit que $A^{-1} * A = A^{-1} * B^x * C^y = T$ où T est l'élément neutre pour la multiplication $*$ (le trivial formé du nombre 1). Nous avons donc une combinaison linéaire, avec des coefficients non tous nuls, qui donne T.

Si nous avons $A^w * B^x * C^y = T$ avec au moins un des exposants non nul, alors $A, B\,et\,C$ sont linéairement dépendants. En effet, supposons $w \neq 0$. Nous aurons : $A^w = B^{-x} * C^{-y}$ et puisque $w \neq 0$, alors $\left(A^w\right)^{\frac{1}{w}} = B^{\frac{-x}{w}} * C^{\frac{-y}{w}} = A$ ce qui montre que A est une combinaison linéaire de $B\,et\,C$.

De plus, nous avons toujours : $A^0 * B^0 * C^0 = T$

Les carrés multiplicatifs $A, B\,et\,C$ formés de nombres réels > 0 sont linéairement dépendants si et seulement si :
$A^w * B^x * C^y = T \Leftrightarrow$ au moins qu'un des exposants (scalaires) est non nul.

Les carrés multiplicatifs $A, B\,et\,C$ formés de nombres réels > 0 sont linéairement indépendants si et seulement si :
$A^w * B^x * C^y = T \Leftrightarrow w = x = y = 0.$

Considérons une structure générale des carrés Dürer donc d'ordre 4.

a) Trouvons la structure des m-Dürer.
b) Trouvons une base pour l'espace vectoriel des m-Dürer formés de nombres réels positifs.

a) Nous allons procéder à l'exponentiation en base B de la structure générale des Dürer :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & S-a-b-d & f & a+b-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & a+b+d-f-g & a+c-g \\ a+b+c-f-g & a+d-g & S-a-b-c-d+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

Nous posons : $B^S = P,\ B^a = m,\ B^b = n,\ B^c = p,\ B^d = r,\ B^f = v,\ B^g = w$

Il est clair que toutes ces quantités sont des nombres réels positifs (> 0).

Nous trouvons :

(MD**) $$\begin{pmatrix} m & n & p & \dfrac{P}{mnp} \\ r & \dfrac{P}{mnr} & v & \dfrac{mn}{v} \\ \dfrac{Pvw}{m^2npr} & w & \dfrac{mnr}{vw} & \dfrac{mp}{w} \\ \dfrac{mnp}{vw} & \dfrac{mr}{w} & \dfrac{Pw}{mnpr} & \dfrac{vw}{m} \end{pmatrix}$$

Voilà la structure des m-Dürer formés de nombres réels positifs. Il est bien entendu que les variables de (MD**), tout comme celles de (MD), peuvent prendre des valeurs négatives (< 0) mais cela ne nous intéresse pas!!! Pourquoi? Dès qu'une case de (MD**) renferme 0 ou un nombre < 0, alors le carré ne peut pas faire partie d'un espace vectoriel défini avec les opérations décrites au début de l'annexe 26 ($*$ et $\circ$).

b) Trouvons la base

$$MD^{**}=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k^{-1} \\ 1 & k^{-1} & 1 & k \\ k^{-2} & 1 & k & k \\ k & k & k^{-1} & k^{-1} \end{pmatrix}^{\log_k m} * \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k^{-1} \\ 1 & k^{-1} & 1 & k \\ k^{-1} & 1 & k & 1 \\ k & 1 & k^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{\log_k n} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & k^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ k^{-1} & 1 & 1 & k \\ k & 1 & k^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{\log_k p} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k^{-1} & 1 & 1 \\ k^{-1} & 1 & k & 1 \\ 1 & k & k^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{\log_k r} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & k^{-1} \\ k & 1 & k^{-1} & 1 \\ k^{-1} & 1 & 1 & k \end{pmatrix}^{\log_k v} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k & k^{-1} & k^{-1} \\ k^{-1} & k^{-1} & k & k \end{pmatrix}^{\log_k w} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}^{\log_k P}$$

Il est clair que ces sept carrés forment un système de générateurs pour l'espace vectoriel qui contient tous les m-Dürer formés de nombres réels positifs.

Montrons qu'ils sont linéairement indépendants. Il est facile de constater qu'une combinaison linéaire de ces sept carrés qui donne T implique que les sept scalaires soient nuls d'où l'indépendance linéaire de ces sept carrés.

Ceux-ci forment donc une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En terminant, prenons une structure générale des carrés Ariane :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 2b & -57a+54h+S & 84a-2b-80h & -29a+26h+S \\ -110a+2b+110h & S-3a & 42a-40h & 2h & 71a-2b-72h+S \\ 43a-46h+S & 40h-38a & 18a-16h & -13a+10h+S & 12h-10a \\ 74a-2b-70h & 20a-18h & -33a+30h+S & -23a+20h+S & -38a+2b+38h \\ -9a+6h+S & 21a-2b-22h+S & 30a-28h & -48a+2b+48h & 6a-4h \end{pmatrix}$$

Nous allons faire l'exponentiation en base B de celle-ci puis nous poserons :

$$B^S=P \qquad B^a=u \qquad B^b=v \qquad B^h=t$$

Nous allons ensuite renommer nos nouvelles variables comme suit : $u=a$; $v=b$; $t=h$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} a & b & \dfrac{h^{27}\sqrt{P}}{a^{57/2}} & \dfrac{a^{42}}{b\,h^{40}} & \dfrac{h^{13}\sqrt{P}}{a^{29/2}} \\ \dfrac{b\,h^{55}}{a^{55}} & \dfrac{\sqrt{P}}{a^{3/2}} & \dfrac{a^{21}}{h^{20}} & h & \dfrac{a^{71/2}\sqrt{P}}{b\,h^{36}} \\ \dfrac{a^{43/2}\sqrt{P}}{h^{23}} & \dfrac{h^{20}}{a^{19}} & \dfrac{a^{9}}{h^{8}} & \dfrac{h^{5}\sqrt{P}}{a^{13/2}} & \dfrac{h^{6}}{a^{5}} \\ \dfrac{a^{37}}{b\,h^{35}} & \dfrac{a^{10}}{h^{9}} & \dfrac{h^{15}\sqrt{P}}{a^{33/2}} & \dfrac{h^{10}\sqrt{P}}{a^{23/2}} & \dfrac{b\,h^{19}}{a^{19}} \\ \dfrac{h^{3}\sqrt{P}}{a^{9/2}} & \dfrac{a^{21/2}\sqrt{P}}{b\,h^{11}} & \dfrac{a^{15}}{h^{14}} & \dfrac{b\,h^{24}}{a^{24}} & \dfrac{a^{3}}{h^{2}} \end{pmatrix}$$

où cette fois, les variables a,b,h sont $>0.$ Nous pouvons donc poser $a=m^2$ afin de rendre entier chaque exposant rationnel. Voici notre version finale :

$$\begin{pmatrix} m^2 & b & \dfrac{h^{27}\sqrt{P}}{m^{57}} & \dfrac{m^{84}}{b\,h^{40}} & \dfrac{h^{13}\sqrt{P}}{m^{29}} \\ \dfrac{b\,h^{55}}{m^{110}} & \dfrac{\sqrt{P}}{m^{3}} & \dfrac{m^{42}}{h^{20}} & h & \dfrac{m^{71}\sqrt{P}}{b\,h^{36}} \\ \dfrac{m^{43}\sqrt{P}}{h^{23}} & \dfrac{h^{20}}{m^{38}} & \dfrac{m^{18}}{h^{8}} & \dfrac{h^{5}\sqrt{P}}{m^{13}} & \dfrac{h^{6}}{m^{10}} \\ \dfrac{m^{74}}{b\,h^{35}} & \dfrac{m^{20}}{h^{9}} & \dfrac{h^{15}\sqrt{P}}{m^{33}} & \dfrac{h^{10}\sqrt{P}}{m^{23}} & \dfrac{b\,h^{19}}{m^{38}} \\ \dfrac{h^{3}\sqrt{P}}{m^{9}} & \dfrac{m^{21}\sqrt{P}}{b\,h^{11}} & \dfrac{m^{30}}{h^{14}} & \dfrac{b\,h^{24}}{m^{48}} & \dfrac{m^{6}}{h^{2}} \end{pmatrix}$$