Annexe 19 : Comment j'ai trouvé ALG-1?

Comment **l'algorithme ALG-1**, qui nous permet de construire des carrés arithmétiques (voir chapitre 11, Partie 2) et associatifs d'ordres impairs, a-t-il été trouvé?

Je pense qu'il est intéressant de montrer le cheminement qui m'a conduit à ALG-1.

1) D'abord, je constate que les carrés **super-Dürer-alpha** sont des carrés arithmétiques (voir section 5.6, Partie 2).
2) Également, je constate que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont arithmétiques.
3) D'où la question : **trouvons-nous des carrés arithmétiques pour tous les ordres?**
4) Regardons pour l'ordre 5. Pour cela, j'ai considéré le tableau arithmétique suivant :

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ 30 & 32 & 34 & 36 & 38 \\ 39 & 41 & 43 & 45 & 47 \end{array}$$

   et je me suis demandé si je pouvais construire un carré magique formé avec ces vingt-cinq nombres.
5) Pour cela, j'ai utilisé un procédé tiré de «Célèbres problèmes mathématiques» d'Edouard Callandreau, problème 8 sur les carrés magiques. Voir [4] de la bibliographie.
6) Ce procédé, pour les carrés d'ordres impairs, m'a permis de construire un carré magique. Donc, des carrés magiques arithmétiques existent pour les ordres 3, 4 et 5.
7) Voici ce carré magique de somme S = 125 : il est arithmétique et associatif (deux cases symétriques par rapport au centre du carré totalisent toujours 2S/n = 2x125/5 = 50).

21	45	14	38	7
9	23	47	16	30
32	11	25	39	18
20	34	3	27	41
43	12	36	5	29

8) J'ai repris le même procédé avec cette fois le tableau arithmétique suivant dans lequel $n = 5$.

$$
\begin{array}{ccccc}
a & a+r & a+2r & \ldots & a+(n-1)r \\
a+t & a+t+r & a+t+2r & \ldots & a+t+(n-1)r \\
a+2t & a+2t+r & a+2t+2r & \ldots & a+2t+(n-1)r \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
. & . & . & & . \\
a+(n-1)t & a+(n-1)t+r & a+(n-1)t+2r & \ldots & a+(n-1)t+(n-1)r
\end{array}
$$

J'ai obtenu le carré magique qui suit de somme $S=5a+10r+10t$:

a + 2t	a + 3r + 4t	a + r + t	a + 4r + 3t	a + 2r
a + 3r	a + r + 2t	a + 4r + 4t	a + 2r + t	a + 3t
a + r + 3t	a + 4r	a + 2r + 2t	a + 4t	a + 3r + t
a + 4r + t	a + 2r + 3t	a	a + 3r + 2t	a + r + 4t
a + 2r + 4t	a + t	a + 3r + 3t	a + r	a + 4r + 2t

9) Maintenant, il est évident que ce carré magique M est la combinaison linéaire suivante :

$$
M = r \begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{matrix} + t \begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{matrix} + a \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}
$$

$$
\qquad\qquad A \qquad\qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad\qquad C
$$

$M = r\,A + t\,B + a\,C.$

Nous observons que dans A, chaque diagonale secondaire (*), grande ou brisée, renferme le même entier dans chacune de ses cases. Deux diagonales différentes, deux entiers différents.

Nous observons que B est la rotation de -90° (90° dans le sens des aiguilles d'une montre) de A.

Puis, C est un carré trivial formé du nombre 1. Enfin, $A, B\,et\,C$ sont linéairement indépendants.

Maintenant, tous les ingrédients pour passer à la démonstration générale sont en place (voir chapitre 11).

Voilà comment j'ai trouvé ALG-1. Plus précisément, pour construire A, j'ai utilisé les diagonales principales au lieu des diagonales secondaires (*) comme dans le A ci-haut.

J'ai ensuite construit le« Lemme sur les diagonales brisées». Voir annexe 6.

Ce lemme permet de démontrer que le carré $M = r\,A + t\,B + a\,C$ est toujours un carré magique arithmétique!!!

Avec ALG-1, nous pouvons construire une infinité de carrés magiques presque normaux et au moins un carré magique normal. Ces carrés sont tous associatifs.

L'algorithme ALG-2 permet de construire des carrés arithmétiques associatifs d'ordres pairs multiples de 4. (Voir chapitre 11).

L'algorithme ALG-3 permet de construire des carrés arithmétiques d'ordres pairs non multiples de 4. (Voir chapitre 11). Ce fut le plus difficile à trouver!!!