Annexe 17 : Réflexion sur les rotations d'un carré

Voir dans la Partie 2 : le glossaire et les pages 15 et 16 du chapitre 4.

Nous avons déjà posé $R^2(R_*(A)) = R_*^2(A)$. Mais le résultat est-il le même si nous avons $R_*(R^2(A))$? Nous allons montrer que :

1) $R^2(R_*(A)) = R_*(R^2(A))$
2) $R^1(R_*(A)) \neq R_*(R^1(A))$

Mais avant de démontrer ces résultats, voyons la notation suivante : $R^1(R_*(A)) = R_*^1(A)$. À cause de 2), il nous faut une autre façon d'écrire $R_*(R^1(A))$. Nous aurions, par exemple,

$$(1) \qquad \begin{aligned} R^1(R_*(A)) &= R_*^1(A) \\ R_*(R^1(A)) &= R_1^*(A) \end{aligned}$$

D'où $R_*^1(A) \neq R_1^*(A)$ mais $R_*^2(A) = R_2^*(A)$.

Finalement, pourquoi ne pas employer (1)?

Pour démontrer 1), nous allons nous donner un carré A d'ordre n et considérer ses quatre coins :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

Puis trouvons ses équivalents :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$$

Démontrons 1) :

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \dots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R^2} \begin{pmatrix} c & & d \\ u_n & \dots & u_1 \\ b & & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \color{red}{\begin{pmatrix} d & & c \\ u_1 & \dots & u_n \\ a & & b \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \dots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \begin{pmatrix} b & & a \\ u_n & \dots & u_1 \\ c & & d \end{pmatrix} \xrightarrow{R^2} \color{red}{\begin{pmatrix} d & & c \\ u_1 & \dots & u_n \\ a & & b \end{pmatrix}}$$

Démontrons 2) :

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \cdots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R^1} \begin{pmatrix} b & u_n & c \\ & \vdots & \\ a & u_1 & d \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \begin{pmatrix} c & u_n & b \\ & \vdots & \\ d & u_1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & b \\ u_1 & \cdots & u_n \\ d & & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_*} \begin{pmatrix} b & & a \\ u_n & \cdots & u_1 \\ c & & d \end{pmatrix} \xrightarrow{R^1} \begin{pmatrix} a & u_1 & d \\ & \vdots & \\ b & u_n & c \end{pmatrix}$$

Mais qu'arrive-t-il avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$? Notez que ce carré n'est pas magique!!!

Nous trouvons $R_*^1(A) = R_1^*(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ce résultat, qui contredit $R_*^1(A) \neq R_1^*(A)$, est dû au fait qu'il y a des répétitions dans A. C'est pourquoi nous allons exiger la condition suivante sur A :

Le carré A doit contenir des nombres différents deux à deux.

Les propriétés 1) et 2) sont donc vérifiées si A est presque normal.