Annexe 15 : Polynômes rationnels à valeurs entières

Théorème :

Soit donné un polynôme $p(x)$ de degré n à coefficients rationnels dont m est le plus petit dénominateur commun; nous pouvons donc écrire :

$$p(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{m}$$

où les a_i sont des entiers et m, un entier ≥ 1. Si les nombres $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,..., $p(m-1)$ sont des entiers, alors $p(x)$ est un entier quel que soit l'entier x.

preuve :

Nous savons que tout entier peut s'écrire sous la forme :

$$mr+k \qquad \text{où } r \text{ parcourt } \mathbb{Z} \text{ et } k=0,1,2,...,m-1.$$

$$p(mr+k)=\frac{a_0+a_1(mr+k)+a_2(mr+k)^2+...+a_n(mr+k)^n}{m}=\frac{a_0+a_1k+a_2k^2+...+a_nk^n+Em}{m}=$$

$=p(k)+E$ où E est un entier.

Ainsi, nous voyons que $p(mr+k)$ est entier **si et seulement si** $p(k)$ est entier. Enfin, nous pouvons affirmer que si $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,..., $p(m-1)$ sont entiers, alors $p(x)$ est entier pour tout entier x .

Ce théorème nous fournit donc un moyen de connaitre les entiers x qui feront de $p(x)$ un entier.

Enfin, le nombre de cas à regarder est au plus m. Nous verrons dans les exemples qui suivent.

Exemple 1 :

Pour quelles valeurs entières de x , le polynôme $\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ prend-il des valeurs entières?

Nous trouvons $m=12$. Les valeurs de $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$,..., $p(11)$ sont respectivement :

$$-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{11}{12}\ ;\ \frac{11}{3}\ ;\ \frac{31}{4}\ ;\ \frac{79}{6}\ ;\ \frac{239}{12}\ ;\ 28\ ;\ \frac{449}{12}\ ;\ \frac{289}{6}\ ;\ \frac{241}{4}\ ;\ \frac{221}{3}\ ;\ \frac{1061}{12}$$

Donc $p(x)$ est entier si et seulement si $x=12r+6$ c'est-à-dire si et seulement si :

$$x=...;-42\ ;\ -30\ ;\ -18\ ;\ -6\ ;\ 6\ ;\ 18\ ;\ 30\ ;\ 42\ ;...$$

Exemple 2 :

Quel que soit l'entier x, montrez que le polynôme $\frac{x^3}{5}+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}$ ne sera jamais un entier.

Ici, $m=30$ et $p(0);p(1);p(2);...;p(29)$ ne sont pas entiers. Donc, si x est entier, $p(x)$ ne sera jamais entier.

Exemple 3 :

L'extraordinaire polynôme :

$$p(x)=-1769+\frac{121409}{28}x-\frac{161307}{40}x^2+\frac{56981}{30}x^3-\frac{3981}{8}x^4+\frac{881}{12}x^5-\frac{57}{10}x^6+\frac{19}{105}x^7$$

prend une valeur entière quel que soit l'entier x.

En effet, ici $m=840$ et $p(0);p(1);p(2);...;p(839)$ sont tous entiers d'où $p(x)$ est entier dès que x est entier.

Cependant, puisque $p(420r+k)=p(k)+entier$, il suffit de montrer que $p(0);p(1);p(2);...;p(419)$ sont entiers.

Enfin, puisque $p(210r+k)=p(k)+entier+\frac{u}{2}$ où il est facile de montrer que u est un entier pair, il suffit de montrer que $p(0);p(1);p(2);...;p(209)$ sont entiers.

Ici, le nombre de cas à regarder est 210 au lieu de 420 ou 840.