Annexe 14 : Preuve du théorème 14.9

Théorème 14.9 :

> Soit P_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques de sommes nulles qui possèdent l'antisymétrie centrale, alors :
>
> $$Dim(P_n) = \frac{n(n-2)}{2} \; si\, n\, pair \qquad Dim(P_n) = \frac{(n-1)^2}{2} \; si\, n\, impair$$

Preuve :

Cas 1 : $n \geq 4$ est pair.

C_1	C_2	C_3		…	$C_{n/2}$	$C_{n/2+1}$		…		C_{n-1}	C_n
u_1	u_2	…	…	…	$u_{n/2}$	$-a_{n/2}$	…	…	…	$-a_2$	$-a_1$
a_1	a_2	…	…	…	$a_{n/2}$	$-u_{n/2}$	…	…	…	$-u_2$	$-u_1$
$-C_n$	$-C_{n-1}$				$-C_{n/2+1}$	$-C_{n/2}$			$-C_3$	$-C_2$	$-C_1$

Décrivons ce carré d'ordre pair $n \geq 4$.

1) Les deux rangées centrales sont en bleu.
2) Les cases des colonnes en vert situées au-dessus des rangées centrales renferment chacune une variable libre. Il y en a donc $(n-1)(n-2)/2$.
3) Appelons C_i, la somme des cases de la colonne i à partir de la gauche avec $1 \leq i \leq n-1$. Ces colonnes sont situées au-dessus des rangées centrales (en bleu).
4) Dans la colonne n, en gris pâle, l'expression située dans chaque case rend nulle la somme des cases de la rangée correspondante.
5) Étant donnée l'antisymétrie centrale, les colonnes en-dessous des rangées centrales ont des sommes de signes contraires.
6) Par exemple, la somme des cases en gris pâle est C_n et la somme des cases en gris foncé est $-C_n$.
7) **En dehors des rangées centrales, toutes les autres sont donc de sommes nulles.**
8) Maintenant, nous allons remplir les deux rangées centrales de sorte que la somme dans chaque colonne du carré d'ordre n soit nulle.
9) Pour cela, nous aurons besoin de $n/2$ nouvelles variables libres, $u_1, u_2, ..., u_{n/2}$. Elles sont placées de gauche à droite dans les $n/2$ premières cases.
10) Afin que la somme dans chaque colonne soit nulle, nous remplirons la dernière case avec l'expression a_1 pour la première colonne à gauche, a_2 pour la deuxième, …
11) Par exemple, nous aurons : $C_1 + u_1 + a_1 - C_n = 0$ d'où $a_1 = C_n - C_1 - u_1$.
12) Nous voyons ainsi que a_1 est une expression linéaire des variables libres.
13) Avec l'antisymétrie centrale, nous remplissons les autres cases en bleu.
14) Nous avons maintenant $(n-2)$ rangées de sommes nulles, n colonnes de sommes nulles ainsi que les deux grandes diagonales.
15) Il nous reste à rendre nulle, la somme des cases de la première rangée centrale; la somme des cases de l'autre rangée centrale sera alors nulle elle aussi.
16) Pour ce faire, additionnons les cases de la première rangée centrale et posons cette somme égale à 0. Ainsi, nous pourrons isoler la variable u_1 pour obtenir :

$$u_1 = -(u_2 + u_3 + ... + u_{n/2}) - (C_1 + C_2 + ... + C_{n/2})$$
$$a_1 = (u_2 + u_3 + ... + u_{n/2}) - C_1 - (C_{1+n/2} + C_{2+n/2} + ... + C_{n-1})$$

17) Le nombre minimum de variables libres est donc :

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n(n-2)}{2} = Dim(P_n) = \frac{Dim(E_n)}{2}$$

Cas 2 : $n \geq 3$ est impair.

C_1	C_2		$C_{(n-1)/2}$		.....		C_{n-1}	C_n
a_1	a_2	…	$a_{(n-1)/2}$	0	$-a_{(n-1)/2}$	…	$-a_2$	$-a_1$
$-C_n$	$-C_{n-1}$				$-C_{(n-1)/2}$		$-C_2$	$-C_1$

1) Dans les cases grises au-dessus de la rangée centrale, se trouvent $(n-1)^2 / 2$ variables libres.
2) Dans les cases de la rangée centrale se trouvent les nombres qui nous assurent que la somme des colonnes soit nulle. Par exemple, $C_1 - C_n + a_1 = 0$ d'où $a_1 = C_n - C_1$.
3) Dans la colonne n, nous trouvons dans chaque case en haut de la rangée centrale, un nombre qui nous assure que la somme de la rangée soit nulle.
4) L'antisymétrie centrale nous assure que les rangées, sous la rangée centrale, soient de somme nulle.
5) Ainsi, le carré est magique de somme nulle et possède l'antisymétrie centrale.

6) Le nombre minimum de variables libres est donc :

$$\frac{(n-1)^2}{2} = Dim(P_n) = \frac{Din(E_n)+1}{2}.$$