Annexe 13 : Preuves des théorèmes 14.14 et 14.15

Théorème 14.14 :

Pour tous les ordres n, $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés presque normaux.

Établissons d'abord les résultats suivants :

Lemme 1 :

Si $n \geq 3$ est un entier, alors $n! > n$.

Preuve :

Nous savons que $n! > 1$ dès que $n \geq 2$. Il s'ensuit que $(n+1)\,n! > n+1$ d'où $(n+1)! > n+1$ lorsque $n \geq 2$. De façon équivalente, $n! > n$ lorsque $n \geq 3$.

Lemme 2 :

Pour l'entier $n \geq 2$, les entiers consécutifs $n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ \ldots\ ,\ n! + n$ sont tous composés (non premiers).

Preuve :

Ces $(n-1)$ entiers sont respectivement divisibles par $2, 3, 4, \ldots, n$. De plus, pour $n \geq 2$, les quotients sont des entiers ≥ 2. Remarquez que :

$$n! + k = k\,[1 + 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times (k+1) \times \ldots \times n]$$

où $2 \leq k \leq n$ est un entier. Le nombre dans le crochet est ≥ 2 dès que $n \geq 2$.

Il s'ensuit que ces nombres sont tous composés.

Il est donc possible de trouver un intervalle aussi long qu'on le veut dans lequel il n'y aura aucun nombre premier.

Par exemple, nous pouvons trouver une suite de $10^{100^{1000}}$ entiers consécutifs tous ≥ 1 dans laquelle il n'y aura aucun nombre premier.

Lemme 3 :

Soit $I = [a \,;\, b]$, un intervalle formé d'entiers ≥ 2 qui contient $m = b - a + 1$ entiers où $b \geq 3$.
Nous pouvons construire un intervalle $J = [b! + 2 \,;\, b! + b - a + 2]$ tel que :

a) $I \cap J = \varnothing$

b) J est à droite de I, en général très loin.

c) J contient m entiers composés consécutifs.

Preuve :

En vertu du lemme 1, $I \cap J = \varnothing$ puisque $b \geq 3$ d'où $b! > b$ et enfin, $b! + 2 > b$.

Évidemment, J est à droite de I. La différence entre b et $b!$ grandit extrêmement vite!!!

Pour pouvoir appliquer le lemme 2, il faut $b - a + 2 \leq b$, ce qui se produit dès que $a \geq 2$ et c'est le cas ici puisque les entiers de I sont ≥ 2.

Notez la taille de l'entier $50!$:

30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000

L'intervalle J s'appelle **l'intervalle composé** de I.

Première preuve du théorème 14.14 (voir les deux autres preuves plus bas) :

Nous voulons construire une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre n, $n \geq 3$, qui renferment n^2 entiers consécutifs non premiers. Pour ce faire, nous allons prendre un intervalle I_1 tel que défini dans l'énoncé du lemme 3 qui contient $m = n^2$ entiers, $n \geq 3$. Nous allons ensuite construire son intervalle composé J_1 et donc notre premier carré magique M_1. Puis nous poserons $I_2 = J_1$ et trouverons l'intervalle composé de I_2 soit J_2 donc notre deuxième carré magique M_2. Nous continuerons ainsi indéfiniment et obtiendrons une suite infinie de carrés magiques $M_1,\ M_2,\ M_3,\ldots,\ M_i,\ \ldots$ Ces carrés magiques sont :

a) Tous presque normaux et différents deux à deux.
b) Renferment tous n^2 entiers consécutifs non premiers.

Le schéma de cette preuve est donc :

$$
\begin{array}{llllllll}
I_1 & \rightarrow & J_1 = I_2 & & & & & \\
 & & I_2 & \rightarrow & J_2 = I_3 & & & \\
 & & & & I_3 & \rightarrow & J_3 = I_4 & \\
 & & & & & & I_4 \ldots &
\end{array}
$$

Soit J, l'intervalle composé de I. Nous allons déplacer J vers la droite jusqu'au premier nombre premier p rencontré de sorte que le plus grand entier ce cet intervalle J^* soit l'unique nombre premier $p\ de\ J^*$.

J^* s'appelle **l'intervalle complété** de I.

$$I \rightarrow J \rightarrow J^*$$

Théorème 14.15 :

Pour tous les ordres $n, n \geq 3$, il existe une infinité de carrés magiques presque normaux qui renferment n^2 entiers consécutifs dont un seul est un nombre premier.

Preuve :

Cette preuve est très semblable à celle du théorème 14.14. Au lieu de trouver l'intervalle $J\ de\ I$, nous allons trouver son intervalle J^*. Le schéma de la preuve est le suivant :

$$
\begin{array}{llllllll}
I_1 & \rightarrow & J_1^* = I_2 & & & & & \\
 & & I_2 & \rightarrow & J_2^* = I_3 & & & \\
 & & & & I_3 & \rightarrow & J_3^* = I_4 & \\
 & & & & & & I_4 \ldots &
\end{array}
$$

Chaque intervalle J_i^* nous permet de construire un carré magique presque normal qui contient n^2 entiers consécutifs dont un seul est un nombre premier lequel est le plus grand entier du carré. Nous avons :

a) Que tous ces carrés sont différents et presque normaux.
b) Que le plus grand entier de chaque carré est le seul nombre premier du carré.
c) Que tous les nombres premiers de tous ces carrés forment une suite strictement croissante.

Si nous voulons trouver douze carrés magiques différents d'ordre 5 qui renferment vingt-cinq entiers consécutifs dont un seul est premier, alors comment allons-nous procéder? Le théorème 14.15 règle le problème de l'existence mais ne nous donne pas un procédé simple de construction!!!

Les carrés renferment très rapidement des nombres gigantesques!!!

Voici un procédé beaucoup plus simple.

Pour $n \geq 3$, nous allons trouver une suite de n^2 entiers ≥ 2, consécutifs et tous non premiers? Il est clair qu'une telle suite est située entre deux nombres premiers consécutifs. Il suffit donc de regarder entre les deux nombres premiers consécutifs de toutes les paires de nombres premiers consécutifs $\{2\ ;\ 3\}$; $\{3\ ;\ 5\}$; $\{5\ ;\ 7\}$; $\{7\ ;\ 11\}$; ... . Nous savons que l'intervalle cherché existe et qu'il est très loin. Nous pouvons donc nous mettre à sa recherche en espérant en trouver un beaucoup plus proche. C'est ce qui arrive en général.

Entre 2 et 3, nous ne trouvons aucun entier. Entre 3 et 5, nous trouvons l'entier 4. Entre 13 et 17, nous trouvons les entiers 14, 15 et 16; et ainsi de suite. La première suite d'entiers positifs, consécutifs et non premiers que nous chercherons devra contenir neuf entiers afin de pouvoir construire notre premier carré composé parfait d'ordre 3.

Nous avons créé pour cela un programme dans MAPLE qui regarde ce qu'il y a entre les deux nombres premiers consécutifs de toutes les paires de nombres premiers consécutifs et cela, jusqu'à ce que nous trouvions, pour une première fois, au moins n^2 entiers consécutifs. **Ce programme s'appelle «Nombres composés».**

Le tableau suivant nous donne l'ordre n du carré, le premier intervalle $[p_1\ ;\ p_2]$ dont les extrémités sont des nombres premiers consécutifs dans lequel nous trouvons au moins n^2 entiers consécutifs compris entre p_1 *et* p_2, ce nombre d'entiers et enfin la somme magique du carré construit avec les n^2 entiers consécutifs qui commencent par $p_1 + 1$. Par exemple, pour $n = 5$, nous trouvons l'intervalle $[1327\ ;\ 1361]$ dans lequel il y a trente-trois entiers consécutifs $1328;1329;...;1360$. Nous prendrons les vingt-cinq premiers afin de construire le carré composé parfait qui aura la plus petite somme magique. Les sommes magiques du tableau sont les plus petites pour les carrés composés parfaits d'ordre n.

	3	$[113\,;127]$	13	$S=354$
	4	$[523\,;541]$	17	$S=2126$
	5	$[1327\,;1361]$	33	$S=6\,700$
	6	$[15683\,;15727]$	43	$S=94\,209$
(*%)	7	$[19609\,;19661]$	51	$S=137\,438$
	8	$[31397\,;31469]$	71	$S=251436$
	9	$[155921\,;156\,007]$	85	$S=1403658$
	10	$[370\,261\,;370\,373]$	111	$S=3703115$

Avec ce tableau, nous pouvons :

a) Trouver des carrés magiques formés de n^2 entiers consécutifs non premiers.

b) Trouver des carrés magiques formés de n^2 entiers consécutifs dont un seul est premier.

Nous venons de voir une autre façon de démontrer les théorèmes 14.14 et 14.15. En effet, il suffit de prolonger indéfiniment la suite d'intervalles ci-haut (Voir remarque 1). Tous les intervalles qui correspondent aux ordres $n \geq 7$, par exemple, vont nous permettent de construire une infinité de carrés magiques presque normaux d'ordre 7, sans nombre premier et une infinité avec un seul nombre premier.

Nous appelons «**carré composé»**, un carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ qui ne renferme aucun nombre premier.
Si les n^2 entiers d'un carré composé sont consécutifs, alors nous dirons que ce carré est un **«carré composé parfait».**
Si les n^2 entiers d'un carré composé forment une suite arithmétique de raison r, où r est un entier ≥ 2, alors nous dirons que ce carré est un **«carré hyper-composé».**

Pour tous les ordres n, $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés parfaits.

Voyons maintenant quatre carrés composés parfaits, chacun ayant la plus petite somme :

$$\begin{pmatrix} 119 & 120 & 115 \\ 114 & 118 & 122 \\ 121 & 116 & 117 \end{pmatrix}$$
$$S = 354$$

$$\begin{pmatrix} 524 & 535 & 531 & 536 \\ 538 & 529 & 533 & 526 \\ 537 & 530 & 534 & 525 \\ 527 & 532 & 528 & 539 \end{pmatrix}$$
$$S = 2126$$

$$\begin{pmatrix} 1342 & 1349 & 1336 & 1343 & 1330 \\ 1329 & 1341 & 1348 & 1335 & 1347 \\ 1346 & 1328 & 1340 & 1352 & 1334 \\ 1333 & 1345 & 1332 & 1339 & 1351 \\ 1350 & 1337 & 1344 & 1331 & 1338 \end{pmatrix}$$
$$S = 6700$$

19637	19654	19629	19646	19621	19638	19613
19612	19636	19653	19628	19645	19620	19644
19643	19611	19635	19652	19627	19651	19619
19618	19642	19610	19634	19658	19626	19650
19649	19617	19641	19616	19633	19657	19625
19624	19648	19623	19640	19615	19632	19656
19655	19630	19647	19622	19639	19614	19631

$$S = 137\,438$$

Remarque 1 :

Comment allons-nous prolonger la suite des intervalles (*%)? Nos huit premiers intervalles ont les propriétés suivantes :

a) Deux intervalles consécutifs sont disjoints.
b) Ils ont tous la forme $[p_1\,; p_2]$ où p_1 *et* p_2 sont des nombres premiers avec $p_1 < p_2$.
c) L'intervalle ouvert $]p_1\,; p_2[$ ne contient aucun nombre premier.

d) Si $[p_1 ; p_2]$ *et* $[p_3 ; p_4]$ sont deux intervalles consécutifs, alors $p_3 > p_2$. Par exemple, nous avons $523 > 127, 1327 > 541, \ldots$

Nous allons poursuivre avec des intervalles qui auront les mêmes propriétés ou presque.

Si l'intervalle qui correspond à $n = 11$, obtenu avec le programme **«Nombres composés»,** respecte les quatre propriétés, alors c'est lui qui sera dans la suite (*%).

Si ce n'est pas le cas, alors les intervalles qui correspondent à $n = 10$ *et* $n = 11$ pourraient être identiques (cet intervalle serait le premier à contenir à la fois au moins cent entiers composés et cent vingt et un entiers composés, par exemple, il pourrait en contenir cent vingt-trois). Voici ce que nous allons faire :

a) Nous allons prendre l'intervalle $I = [370261; 370382]$ qui contient 122 entiers consécutifs.
b) Nous allons ensuite trouver son intervalle J^*.
c) J^* sera alors dans la suite (*%).
d) Avec J^*, nous pourrons construire un carré magique d'ordre 11 formé de 121 entiers consécutifs tous composés et un formé de 121 entiers consécutifs dont un seul est premier soit le plus grand entier de J^*.
e) Nous allons laisser de côté le programme «Nombres composés» et continuer d'ajouter d'autres intervalles dans (*%) en nous servant de J^*.

Ces deux intervalles pourraient aussi vérifier $p_3 = p_2$. Nous accepterions alors l'intervalle qui correspond à $n = 11$ dans la suite (*%).

Notez que l'intervalle J^* renferme un seul nombre premier soit le plus grand entier de J^*.

Nous pourrions passer de J^* à J^{**} qui aurait la forme $[p_1 ; p_2]$!!! Comment?

Remarque 2 :

Si nous voulons, par exemple, trouver seize carrés magiques différents presque normaux d'ordre 5 formés de vingt-cinq entiers consécutifs dont un seul est premier, alors comment procéderions-nous? Nous n'allons pas trouver ces intervalles J^* qui sont extrêmement loin. Ceux-ci nous ont permis de régler le problème d'existence mais concrètement, il faut trouver une meilleure façon de procéder.

Avec notre programme «Nombres composés», nous allons compléter le tableau (*%) ci-haut jusqu'à $n = 12$. Ce programme nous permet de trouver des intervalles $[p_1 ; p_2]$ qui contiennent au moins k entiers composés situés entre les deux seuls nombres premiers $p_1 \; et \; p_2$ de l'intervalle.

Par exemple, pour $n = 5$, nous avons trouvé l'intervalle $[1327 \; ; \; 1361]$ qui contient trente-trois entiers composés entre les nombres premiers $1327 \; et \; 1361$. Dans la table (*%), nous avons pris les vingt-cinq premiers entiers sur les trente-cinq de l'intervalle d'où le carré magique correspondant. Avec les vingt-cinq derniers entiers, nous pouvions construire un second carré magique.

Maintenant, il est facile de trouver seize carrés magiques différents presque normaux formés de vingt-cinq entiers consécutifs dont un seul est premier. Pour huit carrés, leur nombre premier sera le plus petit entier et pour les huit autres, leur nombre premier sera le plus grand entier.

Voici les intervalles, ceux de gauche, que nous donne le programme «Nombres composés» :

$n = 3$	$[113 \, ; 127]$	13	$[139 \, ; 149]$
$n = 4$	$[523 \, ; 541]$	17	$n'existe \;\; pas$
$n = 5$	$[1327 \, ; 1361]$	33	$[2\,477 \; ; \; 2\,503]$
$n = 6$	$[15\,683 \, ; 15\,727]$	43	$n'existe \;\; pas$
$n = 7$	$[19\,609 \, ; 19\,661]$	51	$[31\,907 \; ; \; 31\,957]$
$n = 8$	$[31397 \; ; \; 31469]$	71	$n'existe \;\; pas$
$n = 9$	$[155\,921 \, ; 156\,007]$	85	$[265\,621 \, ; \, 265\,703]$
$n = 10$	$[370\,261 \, ; 370\,373]$	111	$n'existe \;\; pas$
$n = 11$	$[1\,357\,201 \, ; 1\,357\,333]$	131	$[3\,117\,299 \, ; \, 3\,117\,421]$
$n = 12$	$[2\,010\,733 \, ; \, 2\,010\,881]$	147	$n'existe \;\; pas$
$n = 13$	$[17\,051\,707 \, ; 17\,051\,887]$	179	$[27\,915\,737 \; ; \; 27\,915\,907]$
$n = 14$	$[20\,831\,323 \, ; \, 20\,831\,533]$	209	$n'existe \; pas$
$n = 15$	$[189\,695\,659 \, ; 189\,695\,893]$	233	$[519\,653\,371 \, ; \, 519\,653\,597]$

La colonne de gauche nous donne le premier intervalle qui contient **au moins** n^2 entiers composés entre les deux nombres premiers consécutifs. Le nombre qui suit indique le nombre de nombres composés dans l'intervalle qui le précède. La colonne de droite nous donne le premier intervalle qui contient **exactement** n^2 entiers composés entre les deux nombres premiers consécutifs. Nous savons que les intervalles de gauche existent. Quant à ceux de droite, nous savons qu'ils n'existent pas pour les ordres pairs (voir problème 63 de 14.18). **Pour l'instant, nous ne sommes pas certains qu'ils existent pour tous les ordres impairs!!!**

Notez que l'intervalle de droite s'éloigne de plus en plus de celui de gauche. Sans avoir trouvé l'intervalle de gauche pour $n = 17$, voici celui de droite :

$$n = 17 : \quad [1\,948\,819\,133 \; ; \; 1\,948\,819\,423]$$

Théorème 14.15.1 :

Soit $[p\ ;\ q]$, un intervalle fermé tel que $p \geq 3$ *et* q soient des nombres premiers consécutifs. Alors le nombre d'entiers de cet intervalle est un entier impair. Dans un tel intervalle, il y a donc un nombre impair de nombres composés entre p *et* q.

Pour la preuve de ce théorème, voir le problème 62 de 14.18. Le théorème explique les «n'existe pas» du tableau ci-haut.

Deuxième preuve du théorème 14.14 :

Nous allons construire les intervalles suivant :

$$
\begin{array}{ll}
n = 7: & [50!+2\ ;\ 50!+50] \\
n = 8: & [65!+2\ ;\ 65!+65] \\
n = 9: & [82!+2\ ;\ 82!+82] \\
\ldots & \\
 & [(n^2+1)!+2\ ;\ (n^2+1)!+n^2+1] \\
\ldots &
\end{array}
$$

Dans chaque intervalle, nous trouvons n^2 entiers composés consécutifs d'où la possibilité de construire un carré composé parfait d'ordre n. Mais chaque intervalle nous permet aussi de construire des carrés composés parfaits d'ordres 3, 4, 5, ..., $n-1$ puis un seul d'ordre n.

Chaque intervalle qui suivra nous donnera plusieurs carrés d'ordre n. Donc, nous trouverons une infinité de carrés composés pour tous les ordres $n \geq 3$.

Notez que l'intervalle $[50!+2\ ;\ 50!+50]$, par exemple, nous donne :

1 carré composé parfait d'ordre 7

14 carrés composés parfaits d'ordre 6

25 carrés composés parfaits d'ordre 5

34 carrés composés parfaits d'ordre 4

41 carrés composés parfaits d'ordre 3.

Pour construire un carré composé parfait d'ordre 7, vous pourriez :

a) Construisez un carré normal M d'ordre 7.
b) Ajoutez 1 dans toutes les cases de M pour obtenir M'.
c) Ajoutez 50! dans toutes les cases de M'pour obtenir M''.
d) Le carré M''renferme aucun nombre premier.

Le carré M'' renferme ainsi des entiers gigantesques!!!

Cependant, l'annexe 11 vous indique qu'il suffit de prendre un carré normal d'ordre 7 et d'ajouter dans toutes ses cases le nombre 19 609. Le carré ainsi obtenu ne contiendra aucun nombre premier et tous ses entiers seront de petites tailles.

Troisième preuve du théorème 14.14 :

Pour chaque ordre $n \geq 3$, nous savons qu'il existe une infinité de carrés magiques presque normaux dont au moins un normal. Soit M, un tel carré. Le carré 4M est composé!!!

La troisième preuve nous montre que pour chaque ordre $n \geq 3$, il existe une infinité de carrés composés.

Les première et deuxième preuves nous montrent qu'il existe, pour chaque ordre $n \geq 3$, une infinité de carrés composés parfaits.

Une conséquence du théorème 14.15 :

Nous pouvons trouver un intrus pour tous les ordres $n \geq 3$.