

## Annexe 12 : 5040 permutations, 5040 carrés magiques d'ordre 5

Voici 7 carrés magiques d'ordre 5 et de somme magique  $S = 24$ , tous formés que des chiffres allant de 1 à 9. En plus, tous ces carrés renferment la figure magique (fusée) suivante :

$$(*) \quad (1; 2) (2; 2) (3; 2) (4; 1) (4; 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 8 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 1 & 8 \\ 9 & 6 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Le carré  $M = 10^6 A + 10^5 B + 10^4 C + 10^3 D + 10^2 E + 10 F + G$  est toujours un carré magique avec la fusée (\*); il est de somme  $1\ 111\ 111 \times 24$ . Nous pouvons permuter A, B, C, D, E, F et G de 5040 façons et donc obtenir 5040 carrés magiques qui possèdent la figure magique (\*) et qui ont tous la même somme soit 26 666 664. Tous ces carrés sont formés de 25 nombres de 7 chiffres. Voici  $M$  :

$$M = \begin{pmatrix} 3567894 & 4432115 & 2343436 & 8899877 & 7423342 \\ 7633238 & 6654433 & 6555544 & 1234556 & 4588893 \\ 5322124 & 6677867 & 8766666 & 2232123 & 3667884 \\ 6467963 & 5566655 & 2434286 & 4444443 & 7753317 \\ 3675445 & 3335594 & 6566732 & 9855665 & 3233228 \end{pmatrix}$$

Si nous appliquons aux 7 chiffres des 25 nombres de  $M$ , par exemple, la permutation :

$$a b c d e f g \rightarrow g b c d e f a$$

alors, le travail sera un peu long avec risque d'erreurs, surtout si la permutation est plus compliquée. De façon équivalente, il suffit de permuter dans l'expression de  $M$ ,  $A$  et  $G$ . Nous obtiendrons :

$$10^6 G + 10^5 B + 10^4 C + 10^3 D + 10^2 E + 10 F + A$$

soit :

4567893	5432114	6343432	7899878	2423347
8633237	3654436	4555546	6234551	3588894
4322125	7677866	6766668	3232122	4667883
3467966	5566655	6434282	3444444	7753317
5675443	4335593	2566736	5855669	8233223

**Tous les 5040 carrés magiques contiendront (\*), auront la même somme, seront différents (à cause de 3567894 dans M) et renfermeront 25 entiers différents (car c'est le cas pour M).**

Si nous voulons un carré formé de 25 nombres de 4 chiffres, alors il suffira de choisir 4 carrés parmi les 7 présentés ci-haut. De même, si on veut des nombres de 3 chiffres.

Le carré  $100A + 10B + C$  sera formé de 25 entiers positifs différents de 3 chiffres. En permutant  $A$ ,  $B$  et  $C$ , nous aurons 6 carrés magiques (avec (\*)), de somme 2664.

Voir section 14.14 du chapitre 14.