Annexe 10 : Diviseurs universels

Dans la section 14.3 de la partie 2, nous avons présenté un aperçu des diviseurs universels pour l'ordre 3. Nous allons ici détailler l'étude de ceux-ci. Commençons par définir ce qu'est un diviseur universel.

Définition :

Un **diviseur universel** pour les carrés semi-magiques d'ordre n **est un carré semi-magique** W d'ordre n formé de deux nombres entiers $X \geq 0$ et $Y \geq 0, X \neq Y,$ tel que toutes les cases de la diagonale principale renferment l'entier X et toutes les autres cases renferment l'entier $Y.$

De plus, quel que soit le carré semi-magique A, il existe un seul carré semi-magique B tel que :

$$A = BW = WB$$

Puis, quel que soit le carré magique A, il existe un seul carré magique B tel que :

$$A = BW = WB$$

Notons qu'il s'agit ici de la multiplication matricielle.

Si W est un diviseur universel alors celui-ci **divise** tous les carrés semi-magiques d'ordre $n \geq 3$ car le résultat de cette division est toujours un carré semi-magique unique.

Nous allons considérer l'ensemble SM_n des carrés semi-magiques d'ordre n. Il est évident que SM_n contient tous les carrés magiques du même ordre. Un diviseur universel W est un carré qui appartient à SM_n et qui divise tous les carrés de SM_n. Ce qui est remarquable est que le quotient $\dfrac{A}{W} = B$ est toujours un carré semi-magique lorsque A est semi-magique et qu'il est toujours magique lorsque A est magique!!!

Nous allons montrer que pour l'ensemble des carrés de SM_n, le carré W est un diviseur universel lorsque $\det(W) \neq 0$. Nous verrons plus loin que la définition d'un diviseur universel implique $\det(W) \neq 0$. Voyons cela de plus près en commençant par établir quelques propriétés du carré W que nous verrons à travers les différents théorèmes qui suivent. Nous allons trouver l'inverse de W sans même connaître son déterminant!!! Nous démontrerons plus loin le résultat suivant :

Théorème 1 :

Si W est d'ordre n, alors :

$$\det(W) = (X-Y)^{n-1}(X+(n-1)Y)$$

Notre définition de W et le théorème 1 impliquent que $\det(W) \neq 0$. Donc l'inverse W^{-1} existe toujours.

Indiquons déjà que la somme magique de W, soit $X+(n-1)Y$, se note S et que S est toujours un entier > 0. Pour les ordres $n = 3, 4\, et\, 5$, nous trouvons :

$$\det(W) = X^3 - 3XY^2 + 2Y^3 = (X-Y)^2(X+2Y) = (X-Y)^2 S.$$

$$\det(W) = X^4 - 6X^2Y^2 + 8XY^3 - 3Y^4 = (X-Y)^3(X+3Y) = (X-Y)^3 S.$$

$$\det(W) = (X-Y)^4(X+4Y) = (X-Y)^4 S.$$

Pour ces valeurs de n, nous voyons que $\det(W) \neq 0$ puisque $X \neq Y\; et\; S > 0$.

Regardons W^{-1} pour les ordres 3, 4 et 5.

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{X+2Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+2Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+2Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+2Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} \\ \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{-Y}{(X-Y)S} & \frac{X+3Y}{(X-Y)S} \end{pmatrix}$$

Nous observons que la structure de W^{-1} est la même que celle de $W.$ Pour démontrer qu'il en sera toujours ainsi, considérons Z, un carré semi-magique d'ordre n, qui contient dans toutes les cases de sa diagonale principale, le nombre $\dfrac{X+(n-2)Y}{(X-Y)S}$ et dans toutes les autres cases, le nombre $\dfrac{-Y}{(X-Y)S}$. Ce carré Z est très bien défini puisque que $X \neq Y \; et \; S \neq 0,$ ce qui est le cas avec $W.$ De plus, il est facile de voir que **les deux nombres qui forment Z sont différents.** Cependant, ils seront toujours de signes contraires lorsque $Y \neq 0.$ Si $Y = 0,$ alors le nombre sur la diagonale principale sera $\dfrac{1}{S}$. Ainsi, W^{-1} ne répond pas à notre définition de diviseur universel.

Montrons maintenant que $W\,Z = I.$ Trouvons d'abord $W\,Z.$ Nous commencerons par trouver les nombres situés sur sa diagonale principale. Nous trouvons ainsi, dans la case $(i\,;i),$ le nombre :

$$X\frac{X+(n-2)Y}{(X-Y)S}+(n-1)Y\frac{-Y}{(X-Y)S}=\frac{(X-Y)S}{(X-Y)S}=1 \qquad X\neq Y\; et\; S>0$$

Puis, nous trouvons dans la case $(i\,;\,j)$ *avec* $i\neq j$, le nombre :

$$X\frac{-Y}{(X-Y)S}+Y\frac{X+(n-2)Y}{(X-Y)S}+(n-2)Y\frac{-Y}{(X-Y)S}=\frac{0}{(X-Y)S}=0 \qquad X\neq Y\; et\; S>0$$

D'où : $$WZ=I.$$

Puisque $\det(I)=1$, nous déduisons que $\det(W)\neq 0\; et\; \det(Z)\neq 0$. Donc W est inversible et son inverse W^{-1} est unique. Finalement :

$$\boxed{Z=W^{-1}.}$$

Puisque $WW^{-1}=W^{-1}W=I$, nous pouvons écrire $WZ=ZW=I$.

Théorème 2 :

Pour tout $n\geq 3$, W est inversible et son inverse W^{-1} a la même structure que W.
Quel que soit n, nous pouvons trouver W^{-1} de façon immédiate!!!
W^{-1} est semi-magique.

Nous avons donc trouvé W^{-1} sans l'aide du déterminant de W. En regardant W^{-1}, nous voyons bien que les conditions de son existence sont les mêmes que celles qui rendent non nul le déterminant de W.

Nous allons montrer que $AW=WA$ où A est un carré semi-magique de somme T. Nous montrerons que le nombre en position $(i\,;\,j)$ dans AW est le même que celui en position $(i\,;\,j)$ dans WA. Le nombre en position $(i\,;\,j)$ dans AW est le produit scalaire de la rangée i de A avec la colonne j de W, soit dans cet ordre:

$$(q_1,q_2,\ldots,q_j,\ldots,q_n).(Y,Y,\ldots,X,Y,\ldots,Y)=q_1Y+q_2Y+\ldots+q_jX+\ldots+q_nY=YT+q_j(X-Y)$$

Le nombre en position $(i\,;\,j)$ dans WA est le produit scalaire de la rangée i de W avec la colonne j de A, soit dans cet ordre:

$$(Y, Y, ..., X, Y, ..., Y).(r_1, r_2, ..., r_i, ..., r_n) = Yr_1 + Yr_2 + ... + Xr_i + ... + Yr_n = YT + r_i(X - Y)$$

Mais $q_j = r_i$. C'est la clé de la démonstration!!! En effet, q_j est en position $(i\,;\,j)$ dans A et r_i occupe la même position dans A.

Nous concluons que $AW = WA$ quel que soit le carré semi-magique A. Ce résultat est indépendant de la valeur de $X \; et \; Y$. D'où :

Théorème 3 :

Si A est semi-magique, alors $AW = WA$.

Il est clair que si A est magique, alors $AW = WA$.

Puisque $W \; et \; W^{-1}$ ont la même structure, alors $AW^{-1} = W^{-1}A$, que A soit semi-magique ou magique.

Nous allons montrer maintenant un autre théorème très important.

Théorème 4 :

Si A est un carré semi-magique, alors AW est semi-magique.

Si A est un carré magique, alors AW est magique.

Preuve :

Le théorème 9.1 nous assure que AW est semi -magique puisque $A \, et \, W$ le sont. Montrons que si A est magique, alors AW le sera.

Le carré AW est semi-magique de produit $T\,S$ avec $S = X + (n-1)Y$. Il reste à montrer que la somme des nombres de chaque grande diagonale de AW est $T\,S$.

Dans la case $(i\,;i)$ de la diagonale principale, nous trouvons un nombre qui est le produit scalaire de la rangée i de A avec la colonne i de W, soit dans cet ordre :

$$(q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_n).(Y, Y, \ldots, X, Y, \ldots, Y) = q_1 Y + q_2 Y + \ldots + q_i X + \ldots + q_n Y = T\,Y + q_i (X - Y)$$

La somme des nombre de la diagonale principale est donc :

$$n T\,Y + T\,(X - Y) = T\,(nY + X - Y) = T\,(X + (n-1)Y) = T\,S$$

Observons que les q_i remplissent la diagonale principale.

De façon très semblable, nous trouvons que la somme des nombre de la diagonale secondaire est aussi $T\,S$. Les nombres de la diagonale secondaire de A sont aussi en position $(i\,;i)$ si les rangées de A sont notées 1 à n de bas en haut. Cela facilite l'écriture lorsque nous identifions les nombres de la diagonale secondaire.

Le carré AW est donc magique. D'où :

Si A est magique, alors le carré $AW^{-1} = W^{-1}A$ est magique.

Soit maintenant A, la structure générale des carrés magiques d'ordre n et de somme T. Nous voulons résoudre les équations :

$$A = B_1 W \qquad \det(W) \neq 0$$
$$A = W\,B_2 \qquad \det(W) \neq 0$$

Nous trouvons :

$$B_1 = AW^{-1}$$
$$B_2 = W^{-1}A$$

D'où : $$B_1 = B_2 = B$$

Nous venons de trouver un carré magique unique $B = AW^{-1}$ tel que :

$$A = BW = WB$$

Et ce, quel que soit le carré magique A.

Également, nous venons de trouver un carré semi-magique unique $B = AW^{-1}$

tel que : $A = BW = WB$

Et ce, quel que soit le carré semi-magique A.

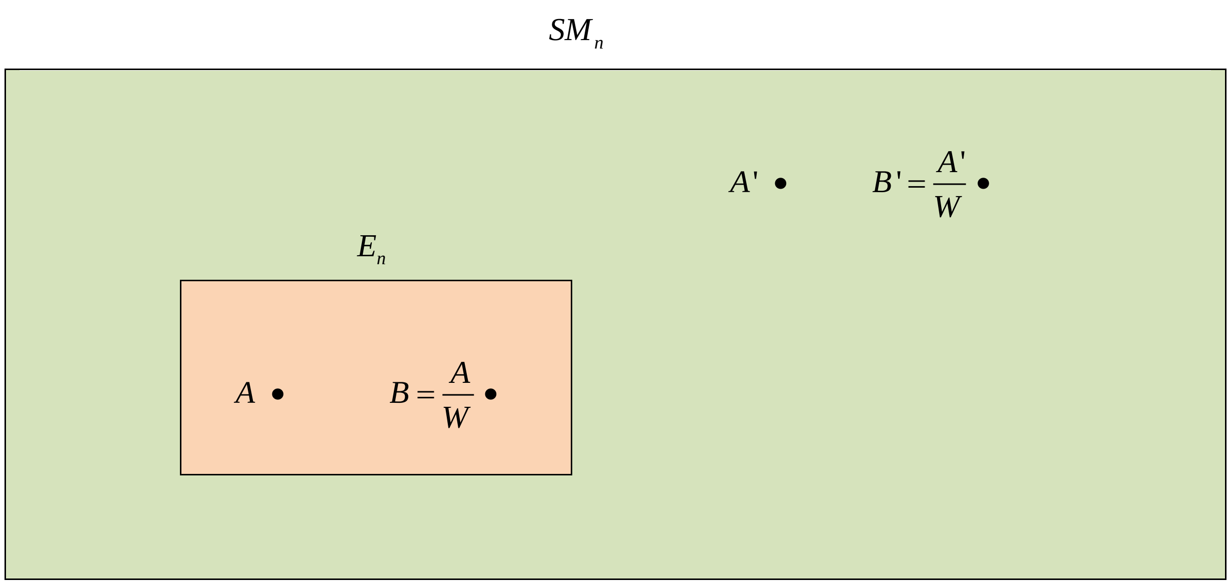
Théorème 5 :

W est un diviseur universel pour tous les carrés semi-magiques d'ordres $n \geq 3$.

Si A est semi-magique, alors B est semi-magique.

Si A est magique, alors B est magique.

Soit SM_n, l'ensemble des carrés semi-magiques d'ordre $n \geq 3$ et E_n, le sous-ensemble des carrés magiques de SM_n.



Le carré W est un diviseur universel et nous écrirons : $\frac{A}{W} = B$.

Si A est semi-magique, alors $\frac{A}{W} = B$ est semi-magique.

Si A est magique, alors $\frac{A}{W} = B$ est magique.

Maintenant avec $\det(W) \neq 0$, nous avons $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(B) \neq 0$ ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{A}{W} = B \ ou \ \frac{A}{B} = W$$

Puis avec $\det(W) \neq 0$, nous avons $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(B) = 0$ ce qui nous permet d'écrire seulement :

$$\frac{A}{W} = B$$

Puisque la somme magique de A est T et que celle de W est S, alors celle de W^{-1} est $\frac{1}{S}$ et celle de B est $\frac{T}{S}$. (Voir théorème 9.1).

Il existe une infinité de diviseurs universels d'ordre n.

Dans tous les exemples qui suivent, A sera arithmétique et pourra être construit avec les algorithmes ALG-1, ALG-2 et ALG-3 ou encore les fichiers «Ordre 3», «Ordre 4», …de MATHEMATICA ou d'EXCEL ou avec les programmes correspondants dans MAPLE.

Exemple 1 :

Avec $a = 19$; $r = -2$; $t = -3$; $X = 0$; $Y = 1$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 \\ 19 & 14 & 9 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = WB$$

Avec $a = 17$; $r = -3$; $t = -2$; $X = 0$; $Y = 1$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 9 & 13 & 14 \\ 17 & 12 & 7 \\ 10 & 11 & 15 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 11 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = WB$$

Même si A renferme neuf entiers, il se peut que B renferme des nombres rationnels non entiers.

Exemple 2:

Avec $a=7$; $r=1$; $t=3$; $X=0$; $Y=1$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 8 \\ 7 & 11 & 15 \\ 14 & 9 & 10 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\underset{B}{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 19 & 11 & 3 \\ 5 & 15 & 13 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Nous voyons ici que B renferme neuf nombres rationnels. Puisque nous préférons construire des exemples où $A, B et W$ renferment que des entiers, alors de cet exemple, nous allons en trouver un autre où les trois carrés seront formés d'entiers.

En effet, $A=BW \Leftrightarrow 2A=2(BW)=(2B)W$ d'où :

$$\underset{2A}{\begin{pmatrix} 24 & 26 & 16 \\ 14 & 22 & 30 \\ 28 & 18 & 20 \end{pmatrix}} = \underset{2B}{\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 19 & 11 & 3 \\ 5 & 15 & 13 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Avec $a=19$; $r=-2$; $t=-3$; $X=7$; $Y=2$, nous trouvons :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 \\ 19 & 14 & 9 \\ 11 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = \frac{1}{55}\underset{B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{55A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{55B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}}\underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

Exemple 3 :

Avec $a = 124; r = 5; t = -30; X = 7; Y = 2$,
$a = 114; r = 5; t = -20; X = 7; Y = 2$, $a = 119; r = 10; t = -30; X = 7; Y = 2\, et$
$a = 61; r = 15; t = -10; X = 7; Y = 2, nous\, obtenons\, respectivement$:

$$\begin{pmatrix} 104 & 64 & 129 \\ 124 & 99 & 74 \\ 69 & 134 & 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 15 \\ 14 & 9 & 4 \\ 3 & 16 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 104 & 74 & 119 \\ 114 & 99 & 84 \\ 79 & 124 & 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 12 & 9 & 6 \\ 5 & 14 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 109 & 59 & 129 \\ 119 & 99 & 79 \\ 69 & 139 & 89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 13 & 9 & 5 \\ 3 & 17 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 81 & 41 & 76 \\ 61 & 66 & 71 \\ 56 & 91 & 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Nous venons de voir deux diviseurs universels pour les carrés magiques d’ordre 3. Enfin voyons comment un carré magique d’ordre 3 peut se décomposer en facteurs d’au moins deux façons différentes :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 48 & 59 & 103 \\ 125 & 70 & 15 \\ 37 & 81 & 92 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 660 & 715 & 935 \\ 1045 & 770 & 495 \\ 605 & 825 & 880 \end{pmatrix}} = \underset{B'}{\begin{pmatrix} 495 & 440 & 220 \\ 110 & 385 & 660 \\ 550 & 330 & 275 \end{pmatrix}} \underset{W'}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exemple 4 :

Avec $a=3; r=-1; t=3; X=0; Y=1$, nous obtenons :

$$\underset{2A}{\begin{pmatrix} 8 & 18 & 4 \\ 6 & 10 & 14 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix}} = \underset{2B}{\begin{pmatrix} 7 & -3 & 11 \\ 9 & 5 & 1 \\ -1 & 13 & 3 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Mais $2B$ renferme des entiers négatifs!!! Nous allons les faire disparaître comme suit :

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 11 \\ 9 & 5 & 1 \\ -1 & 13 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 13 & 9 & 5 \\ 3 & 17 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 18 & 4 \\ 6 & 10 & 14 \\ 16 & 2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 26 & 12 \\ 14 & 18 & 22 \\ 24 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} 16 & 26 & 12 \\ 14 & 18 & 22 \\ 24 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 15 \\ 13 & 9 & 5 \\ 3 & 17 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rappelons ici que le produit d'un trivial par un semi-magique est toujours un trivial (voir chapitre 9).

Exemple 5 :

Nous venons de voir deux diviseurs universels W pour l'ordre 3 avec $\det(W) \neq 0$. Cette condition était nécessaire. Nous allons prendre ici un autre carré semi-magique W tel que $\det(W) \neq 0$ et voyons ce qui se passe :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 11 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Ici, A est magique et $\det(W) = 288$. Nous trouvons :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 25 & -41 & 19 \\ 1 & 7 & -5 \\ -23 & 37 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -9 & 19 & -5 \\ 7 & -11 & 9 \end{pmatrix}$$

en observant que W^{-1} est aussi semi-magique. Le carré B est donc semi-magique avec ses deux diagonales non magiques. **Le carré B n'est pas magique!!!**

La condition $\det(W) \neq 0$ est nécessaire mais non suffisante. Ici, W n'a pas la structure particulière $\begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}$, laquelle a permis d'obtenir B magique!!!

Enfin, observons aussi que $W^{-1}A \neq AW^{-1}$ ce qui implique que les équations $A = WB\,et\; A = BW$ ne nous donnent pas la même solution B. Terminons avec :

$$\underset{8A}{\begin{pmatrix} 32 & 72 & 16 \\ 24 & 40 & 56 \\ 64 & 8 & 48 \end{pmatrix}} = \underset{8B}{\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -9 & 19 & -5 \\ 7 & -11 & 9 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 6 & 14 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 11 & 1 & 12 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & 72 & 16 \\ 24 & 40 & 56 \\ 64 & 8 & 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 14 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 11 & 1 & 12 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -9 & 19 & -5 \\ 7 & -11 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 6 & 14 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 11 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Finalement, nous trouvons :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 320 & 360 & 304 \\ 312 & 328 & 344 \\ 352 & 296 & 336 \end{pmatrix}} = \underset{N}{\begin{pmatrix} 19 & 9 & 13 \\ 3 & 31 & 7 \\ 19 & 1 & 21 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 6 & 14 & 4 \\ 7 & 9 & 8 \\ 11 & 1 & 12 \end{pmatrix}}$$

Le carré M est magique, le carré W est semi-magique mais N n'est que semi-magique!!!

Le carré W n'est donc pas un diviseur universel puisque N n'est pas magique.

Si $A = BW$ et si le carré magique A est presque normal, alors

qu'en est-il du carré magique B ?

Celui-ci ne renfermera que des nombres rationnels et certains ou tous pourraient être des entiers.

Quel que soit A, un carré magique presque normal, nous trouverons un carré magique unique B tel que $A = WB$. Mais B peut contenir des rationnels et peut-être même des négatifs.

Alors nous pourrons toujours trouver, à partir de A, un nouveau carré magique presque normal A' et à partir de B, un nouveau carré magique unique B' tel que $A' = WB'$ où B' ne renferme que des entiers ≥ 1. (Voir les exemples 2, 4 et 5 plus haut).

Mais avons-nous des répétitions dans B' ?

Nous verrons qu' il y aura des répétitions dans B' si et seulement si il y en a dans B.

Mais avons-nous des répétitions dans B ? Nous allons montrer que s'il n'y a pas de répétition dans A, alors il n'y en a pas dans B. Nous nous dirigeons maintenant vers un résultat très important!!!

Soit $B = AW^{-1}$. L'élément b_{ij} de B est le produit scalaire de la rangée i de A avec la colonne j de W^{-1}. Nous pouvons donc écrire :

$$b_{ij} = (a_{i1}y + a_{i2}y + \ldots + a_{ij}x + \ldots + a_{in}y = yT + a_{ij}(x - y)$$

Mais : $$x = \frac{X + (n-2)Y}{(X - Y)S} \quad et \quad y = \frac{-Y}{(X - Y)S}$$

Nous trouvons alors :

Théorème 6 :

$$b_{ij} = \frac{-YT}{(X - Y)S} + \frac{a_{ij}}{(X - Y)}$$

Nous voyons maintenant que $b_{i\,j}$ dépend directement de $a_{i\,j}$. À deux entiers différents de A correspondent donc deux entiers différents de B. Nous savons maintenant que si tous les entiers de A sont différents deux à deux, alors il en sera de même pour les entiers de B.

Lorsque le carré A est presque normal, nous aimerions aussi que B le soit!!! Quel serait alors $A et W$?

Le théorème 6 nous conduit à une deuxième façon de construire le carré B et nous montre le lien important entre $A et\ B$.

Théorème 7 : Théorème fondamental des diviseurs universels :

Nous avons $b_{i\,j} = \dfrac{-YT}{(X-Y)S} + \dfrac{a_{i\,j}}{(X-Y)}$ qui implique $\boxed{B = \dfrac{1}{X-Y}\,A + \dfrac{-YT}{(X-Y)S}.}$

Ainsi, $A et\ B$ possèdent les mêmes propriétés!!!

Par exemple, avec $n = 4$, si A est un Dürer associatif, alors B est un Dürer associatif. Si le carré A est arithmétique, alors il en est de même du carré B.

Voici les deux façons de construire B :

$$\boxed{B = W^{-1}A}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{X-Y}\,A + \frac{-YT}{(X-Y)S}}$$

Cette deuxième façon de construire B nous montre le lien entre A *et* B. Cependant, si A est presque normal, il est possible que B ne le soit pas. Nous devrons «réparer» B et donc trouver un nouveau A.

Pouvons-nous trouver un carré magique A presque normal afin que $\frac{A}{W} = B$ soit presque normal et ce, d'une façon très simple? La réponse est oui. Nous allons construire A en se donnant B, un carré magique presque normal (ou même normal) de somme T et un diviseur universel W. Montrons qu'alors $A = BW$ est magique presque normal.

$$a_{ij} = (b_{i1}Y + b_{i2}Y + \ldots + b_{ij}X + \ldots + b_{in}Y = TY + b_{ij}(X - Y) = (T - b_{ij})Y + b_{ij}X$$

Dans notre carré B, il est évident que tous ses entiers b_{ij} vérifient $b_{ij} < T$. Donc, tous les a_{ij} sont des entiers différents deux à deux (selon l'expression en rouge) et ils sont tous ≥ 1 (selon l'expression en bleu). Le carré A est magique puisque B l'est. Nous avons donc le résultat :

Théorème 8 :

Soient donnés le carré magique presque normal B et un diviseur universel W.

Si $A = BW$, alors A est magique presque normal.

Nous savons donc qu'il existe une infinité de carrés magiques presque normaux A tels que $\frac{A}{W}$ soit un carré magique presque normal.

Exemple 6 :

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 290 & 304 & 278 & 292 & 266 \\ 264 & 288 & 302 & 276 & 300 \\ 298 & 262 & 286 & 310 & 274 \\ 272 & 296 & 270 & 284 & 308 \\ 306 & 280 & 294 & 268 & 282 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 15 & 22 & 9 & 16 & 3 \\ 2 & 14 & 21 & 8 & 20 \\ 19 & 1 & 13 & 25 & 7 \\ 6 & 18 & 5 & 12 & 24 \\ 23 & 10 & 17 & 4 & 11 \end{pmatrix}} \underset{W}{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}}$$

Ici, B est normal donc A est presque normal.

Exemple 7 :

$$\begin{pmatrix} 112 & 136 & 129 & 135 & 123 & 142 \\ 146 & 119 & 134 & 125 & 137 & 116 \\ 145 & 121 & 126 & 132 & 139 & 114 \\ 144 & 138 & 127 & 133 & 120 & 115 \\ 113 & 122 & 131 & 128 & 140 & 143 \\ 117 & 141 & 130 & 124 & 118 & 147 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 25 & 18 & 24 & 12 & 31 \\ 35 & 8 & 23 & 14 & 26 & 5 \\ 34 & 10 & 15 & 21 & 28 & 3 \\ 33 & 27 & 16 & 22 & 9 & 4 \\ 2 & 11 & 20 & 17 & 29 & 32 \\ 6 & 30 & 19 & 13 & 7 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad W$$

Ici, B est normal donc A est presque normal.

Théorème 9 :

Si W_1 *et* W_2 sont des diviseurs universels, alors W_1W_2 *et* kW_1 sont des diviseurs universels où $k \geq 1$ est un entier.

Preuve :

Le carré W_1 est défini avec X *et* Y et le carré W_2, avec R *et* V. Ces quatre nombres sont des entiers ≥ 0 avec $X \neq Y$ *et* $R \neq V$.

Dans $W_1 W_2$, nous trouvons en position $(i;i)$ l'entier $XR+(n-1)YV$. C'est donc l'entier qui se trouve dans toutes les cases de la diagonale principale.

En position $(i;j)$, $i \neq j$, nous trouvons l'entier $XV+YR+(n-2)YV$. C'est donc l'entier qui se trouve dans toutes les autres cases.

Ces deux entiers sont ≥ 0 et sont différents. En effet,

$$XR+(n-1)YV = XV+YR+(n-2)YV \Rightarrow (X-Y)R=(X-Y)V$$

d'où la contradiction $R=V$. Ainsi, dans W_1W_2, les deux entiers sont différents et ≥ 0. Le carré W_1W_2 est donc un diviseur universel.

Puisque W_1 est semi-magique, le théorème 3 nous permet d'écrire $W_1W_2 = W_2W_1$.

Quant à kW_1, c'est un diviseur universel de toute évidence!!!

Si A est un carré magique d'ordre n et si $W_1, W_2, ..., W_k$ sont des diviseurs universels, alors :
$A = W_1W_2...W_kB_1$ et $A = W_i^mB_2$ où B_1 et B_2 sont des carrés magiques, $1 \le i \le k$ et m, un entier

Théorème 10 :

> Si A est un carré magique d'ordre n et si $W_1, W_2, ..., W_k$ sont des diviseurs universels, alors :
> $A = W_1W_2...W_kB_1 = W_i^mB_2$ où B_1 et B_2 sont des carrés magiques, $1 \le i \le k$ et m, un entier ≥ 1.

Terminons avec la preuve du théorème 1.

Théorème 1 :

> Si W est d'ordre n, alors :
>
> $$\det(W) = (X - Y)^{n-1}(X + (n-1)Y)$$

Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur l'ordre $n \ge 3$. Illustrons les deux carrés que nous allons rencontrer, par exemple, pour l'ordre $n = 5$.

X	Y	Y	Y	Y
Y	X	Y	Y	Y
Y	Y	X	Y	Y
Y	Y	Y	X	Y
Y	Y	Y	Y	X

W_5

Y	Y	Y	Y	Y
Y	X	Y	Y	Y
Y	Y	X	Y	Y
Y	Y	Y	X	Y
Y	Y	Y	Y	X

Z_5

Nous noterons W_n le diviseur universel W d'ordre n. Voyons maintenant les déterminants suivants :

$$\det(W_3) = (X-Y)^2(X+2Y) \qquad \det(Z_3) = (X-Y)^2 Y$$
$$\det(W_4) = (X-Y)^3(X+3Y) \qquad \det(Z_4) = (X-Y)^3 Y$$
$$\det(W_5) = (X-Y)^4(X+4Y) \qquad \det(Z_5) = (X-Y)^4 Y$$

Supposons que les égalités $\det(W_n) = (X-Y)^{n-1}(X+(n-1)Y)$ *et* $\det(Z_n) = (X-Y)^{n-1}Y$ soient vraies pour $n = 3, 4, 5, \ldots, k-1$. Alors nous devons établir que les deux égalités sont vraies pour $n = k$. Nous savons déjà qu'elles sont vraies pour $n = 3, 4$ *et* 5.

Nous allons calculer $\det(W_k)$ en développant selon la première rangée de W_k.

$$\det(W_k) = X(-1)^2 \det(W_{k-1}) + Y(-1)^3 \det(Z_{k-1}) + Y(-1)^4 \det(M_3) + Y(-1)^5 \det(M_4) + \ldots$$

où M_3 est le mineur relativement au Y en position $(1;3)$, M_4 est le mineur relativement au Y en position $(1;4)$, et ainsi de suite.

Le passage de Z_{k-1} à M_3 se fait en permutant la rangée qui ne renferme que des Y dans Z_{k-1} avec la rangée juste en dessous. Le déterminant de M_3 est celui de Z_{k-1} changé de signe. Cependant, le cofacteur reste le même. Il en sera de même pour le passage de M_i à M_{i+1}. En fait, tous les cofacteurs seront les mêmes. Nous avons alors :

$$\det(W_k) = X\,(X-Y)^{k-2}(X+(k-2)Y) + (-Y)(X-Y)^{k-2}Y(k-1) = (X-Y)^{k-1}(X+(k-1)Y).$$

Cependant, pour continuer, il nous faut trouver $\det(Z_k)$. De façon semblable, nous trouvons :

$$\det(Z_k) = Y\,(X-Y)^{k-2}(X+(k-2)Y) + (-Y)(X-Y)^{k-2}Y(k-1) = (X-Y)^{k-1}Y.$$

Le théorème est ainsi démontré.

Nous venons de créer une classe magnifique de carrés semi-magiques appelés **diviseurs universels.**

Il y en a une infinité.

Tous divisent tous les carrés semi-magiques pour donner un carré semi-magique et tous les carrés magiques pour donner un carré magique.

Il y a une infinité de carrés magiques presque normaux tels que la division par un diviseur universel donne un carré magique presque normal!!!

Un carré semi-magique est un diviseur universel s'il est conforme avec la définition donnée.

Nous pourrions généraliser cette définition de diviseur universel mais à quoi bon puisque nous voulons dans nos carrés que des entiers non négatifs. Quant à nos carrés magiques, nous les voulons au moins presque normaux.

Quelques remarques :

La définition de W implique que $\det(W) \neq 0$ pour tout W.

Dans l'exemple 5, W est un diviseur à gauche de A et un diviseur à droite de A mais n'est pas un diviseur de A.

En effet, nous avons $A = BW = WB'$ avec $B \neq B'$. W est un diviseur de A si et seulement si $B = B'$. Nous prenons la notation $\frac{A}{W}$ seulement si W est un diviseur de A.

Problèmes :

1) Soit M, un carré magique quelconque d'ordre 3.

a) Pourquoi M^2 est-il un bon candidat pour devenir un diviseur universel?

b) Sous quelles conditions M^2 sera-t-il un diviseur universel?

2) Soient A et B, deux carrés magiques quelconques d'ordre 3. Montrez que les carrés AB et BA possèdent un centre de symétrie.

3) Pour $n = 4$ et $n = 5$, combien pouvez-vous trouver de carrés presque normaux A tels que

$A = BW$ où B est normal et W, un diviseur universel fixe?

4) $W_1 + W_2$ est-il toujours un diviseur universel?