1. Introduction

La deuxième partie du livre s'adresse principalement à tous ceux qui veulent aller plus loin dans l'étude des carrés magiques. La théorie y sera beaucoup plus présente et une bonne base en mathématiques et en particulier en algèbre linéaire sera très utile. Nous allons présenter un bon nombre de nouveaux résultats en y mentionnant les principales idées qui permettront au lecteur de construire ou de compléter la démonstration de ceux-ci. Pour d'autres résultats, les démonstrations seront complètes.

Nous allons voir que l'ensemble des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels. La dimension de cet espace est n (n - 2). Nous allons nous intéresser à de nombreux sous-espaces vectoriels de dimensions inférieures. Dans le cas des carrés magiques d'ordre 4, nous avons créé un certain nombre de sous-espaces vectoriels de différentes dimensions à partir de figures magiques imposées, ce qui est un peu arbitraire. Mais le lecteur peut voir comment nous avons fait et il peut, à son tour, créer de nouveaux sous-espaces avec ses propres figures magiques qu'il imposera.

Une question importante se pose dès que nous avons un sous-espace de carrés magiques qui eux, ont été fabriqués à partir de figures imposées : existe-t-il des carrés magiques normaux dans ce sous-espace? Et si oui, combien y en a-t-il? S'il y en a, alors nous allons tenter de les trouver tous, dans la mesure du possible!!! En effet, les carrés magiques normaux d'ordre 8 sont tellement nombreux que nous n'avons pas encore réussi à en déterminer le nombre exact; il s'agit ici de plusieurs centaines de milliards!!!

De grandes nouveautés se retrouvent dans la partie 2 : les carrés arithmétiques et le nouveau procédé de construction de carrés magiques d'ordre $n \geq 3$ relié au théorème fondamental des carrés magiques. Les carrés fonctionnels dans lesquels des fonctions prennent la place des nombres dans les cases des carrés. Par exemple, la somme magique d'un tel carré magique pourrait être $x^2 + 2\cos(3x)$. Des résultats très intéressants sur les carrés fonctionnels nous attendent. Puis les produits matriciels de carrés magiques. Le résultat d'un tel produit est-il un carré magique? En général, la réponse est non. Le produit est cependant toujours un carré semi-magique. Si A et B sont deux carrés magiques, alors nous sommes certains que le produit AB est semi-magique. Avec de nombreux sous-espaces, nous verrons qu'il arrive souvent que le produit (AB) B soit magique.

Nous verrons aussi que si nous appliquons une certaine permutation à tous les nombres de certains carrés magiques, alors le nouveau carré obtenu est encore magique et de même somme. Tout simplement extraordinaire!!! Il y aura aussi les carrés magiques de sommes consécutives puis les carrés doublement magiques.

Et ce n'est pas fini!!!

2. Opérations sur les carrés magiques, espaces vectoriels

Nous pouvons regarder les carrés magiques comme des matrices carrées. Certains parlent même de matrices magiques.

L'addition de deux carrés magiques de même ordre se fait exactement comme l'addition de deux matrices carrées de même taille.

La **multiplication** d'un carré magique par un nombre réel (un scalaire) se fait de la même façon qu'avec une matrice.

Dans le but de simplifier, nous allons souvent représenter un carré magique par une matrice.

4	15	14	1
5	10	11	8
9	6	7	12
16	3	2	13

Ainsi, le carré magique ci-haut peut prendre la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

Voyons un exemple d'addition de carrés magiques et de multiplication d'un carré magique par un nombre mais avant, rappelons que nous notons souvent un élément d'une matrice A par a_{ij} qui n'est rien d'autre que l'élément situé à l'intersection de la i-ème rangée et de la j-ème colonne. Si nous appelons B, le carré précédent, alors l'élément b_{23} est le nombre 11 et l'élément b_{42} est le nombre 3.

$$A = \begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 75 & 94 & 97 & 104 \\ 102 & 117 & 120 & 31 \\ 166 & 119 & 14 & 71 \\ 27 & 40 & 139 & 164 \end{pmatrix}$$

$$5B = \begin{pmatrix} 20 & 75 & 70 & 5 \\ 25 & 50 & 55 & 40 \\ 45 & 30 & 35 & 60 \\ 80 & 15 & 10 & 65 \end{pmatrix}$$

Pour faire A + B, nous additionnons les nombres qui occupent les mêmes positions dans chaque carré. L'élément c_{ij} dans A + B s'obtient donc comme suit : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Pour faire 5B, nous devons multiplier chaque nombre de B par 5. L'élément c_{ij} de 5B est donné par $c_{ij} = 5b_{ij}$ et d'une façon générale, l'élément c_{ij} de k B s'écrit $c_{ij} = k\,b_{ij}$.

Il est clair que si A et B sont des carrés magiques respectivement de sommes S et T, alors A + B est un carré magique de somme S + T et k A est un carré magique de somme k S. De plus, les propriétés des opérations sur les matrices s'appliquent aux carrés magiques d'où le théorème 2.1 qui suit. Nous pouvons aussi faire le produit (matriciel) de deux carrés magiques A et B. Ce produit AB, en général, n'est pas un carré magique. Nous verrons dans le chapitre 9 le théorème qui affirme que si A et B sont des carrés magiques respectivement de sommes S et T, alors le produit AB est un carré semi-magique de somme ST. Nous verrons aussi que les puissances impaires de certains carrés magiques sont encore des carrés magiques!

Soient M un carré magique d'ordre n et W, le carré trivial d'ordre n qui renferme l'entier 1 dans toutes ses cases. Ajouter le nombre k dans toutes les cases de M revient à faire M + k W qui est toujours un carré magique. Nous pourrons écrire M + k au lieu de M + kW.

Théorème 2.1 :

L'ensemble des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Les carrés magiques d'ordre n sont donc formés de n^2 nombres réels mais ce que nous voulons, ce sont des carrés magiques formés d'entiers positifs tous différents (carrés presque normaux) ou mieux encore, des carrés magiques formés de tous les entiers consécutifs de 1 à n^2 (carrés normaux). Nous allons en faire un **objectif important : pouvoir construire des carrés magiques normaux et presque normaux. Cet objectif sera atteint!!!**

3. Structures générales des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, formés de carrés magiques et dimensions

Considérons l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre n. Nous allons trouver un carré magique général, formé de n^2 expressions algébriques linéaires, chaque expression renfermant un certain nombre de variables. Pour avoir un carré magique particulier, il suffira de remplacer chaque variable par un nombre réel. Chaque fois que nous ferons cela, nous obtiendrons un carré magique particulier et de plus, tout carré magique sera obtenu de cette façon. Ce carré magique général est appelé **structure générale.** Celle-ci n'est pas unique.

Nous pouvons voir la structure générale comme une «machine» à fabriquer des carrés magiques d'ordre n et à les fabriquer tous. Une autre structure générale est équivalente à la première en ce sens qu'elle permettra de construire les mêmes carrés magiques.

Il est bien évident que cette structure générale dépend de n. Comment allons-nous la construire? **Nous commençons avec n = 3.** Pour que le carré suivant soit magique, il faut avoir :

a	b	c
d	e	f
g	h	k

$$a+b+c=S$$
$$d+e+f=S$$
$$a+d+g=S$$
$$b+e+h=S$$

Il s'ensuit que :

$$c=S-a-b$$
$$f=S-d-e$$
$$g=S-a-d$$
$$h=S-b-e$$

et ainsi, quatre variables (c, f, g, h) ne sont plus dans le carré mais la variable S, elle, vient d'apparaitre. Si nous posons :

$$A=a+b+d+e$$

alors, $c+f=2S-A=g+h$ d'où $k=S-(2S-A)=A-S.$ Ainsi notre carré est semi-magique; la somme dans chaque rangée et chaque colonne donne S et ce, quelle que soit la valeur attribuée aux cinq variables $a, b, d, e, S.$

Maintenant, pour que notre carré soit magique, il faut et il suffit que la somme dans chaque grande diagonale donne S :

$$(*) \qquad \begin{cases} a+e+A-S=S \\ (S-a-d)+e+(S-a-b)=S \end{cases}$$

Puis le système $(*)$ est équivalent au système :

$$(**) \qquad \begin{cases} d+2e+2a+b=2S \\ d-e \quad +2a+b=S \end{cases}$$

Il est très important d'observer ici que le système (**) possède une **solution unique** en $d \ et \ e.$ Enfin, le système $(**)$ est équivalent au système suivant :

$$(***) \qquad \begin{cases} e=\dfrac{S}{3} \\ d=\dfrac{4S}{3}-2a-b \end{cases}$$

Il ne reste plus que trois variables dans notre carré magique : $a, b, S.$ Le voici :

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

$$\textit{Structure générale des carrés magiques d'ordre } 3$$

Ce carré est la structure générale des carrés magiques d'ordre 3. D'abord, c'est bien un carré magique de somme S puis, étant donnée l'unicité de la solution du système (**) , tout carré magique d'ordre 3 provient de cette structure générale. Ainsi, en faisant varier $a, b \ et \ S$ dans l'ensemble des nombres réels, nous obtiendrons tous les carrés magiques d'ordre 3 à partir de (1).

Par exemple, avec $a=4,\ b=9,\ S=15$, nous obtenons : $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Puis avec $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{2}{7}$, $S=4$, nous obtenons : $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{2}{7} & \frac{31}{14} \\ \frac{43}{21} & \frac{4}{3} & \frac{13}{21} \\ \frac{19}{42} & \frac{50}{21} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$

Avec $a=\pi, b=\sqrt{2},\ S=5\sqrt{3},$ nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} & 5\sqrt{3}-\sqrt{2}-\pi \\ \frac{20}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}-2\pi & \frac{5}{\sqrt{3}} & -\frac{10}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}+2\pi \\ -\frac{5}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}+\pi & \frac{10}{\sqrt{3}}-\sqrt{2} & \frac{10}{\sqrt{3}}-\pi \end{pmatrix}$$

Regardons maintenant le cas n = 4. Pour que le carré suivant soit magique, il faut avoir :

a	b	c	i
d	e	f	j
u	g	v	m
r	s	t	k

$$
\begin{aligned}
a+b+c+i &= S\\
d+e+f+j &= S\\
u+g+v+m &= S\\
a+d+u+r &= S\\
b+e+g+s &= S\\
c+f+v+t &= S
\end{aligned}
$$

Il s’ensuit que :

$$
\begin{aligned}
i &= S-a-b-c\\
j &= S-d-e-f\\
m &= S-u-g-v\\
r &= S-a-d-u\\
s &= S-b-e-g\\
t &= S-c-f-v
\end{aligned}
$$

et ainsi, six variables (i, j, m, r, s, t) ne sont plus dans le carré mais la variable S, elle, vient d’apparaitre. Si nous posons :

$$A = a+b+c+d+e+f+u+g+v$$

alors, $i+j+m = 3S-A = r+s+t$ d’où $k = S-(3S-A) = A-2S.$ La variable k vient de disparaitre du carré qui lui devient semi-magique. Quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, a, b, c, d, e, f, u, g, v et S, nous obtenons toujours un carré semi-magique.

Maintenant notre carré semi-magique sera magique si et seulement si nous avons :

$$(*) \quad \begin{cases} a+e+v+A-2S = S \\ (S-a-b-c)+f+g+(S-a-d-u) = S \end{cases}$$

lequel est équivalent au système $(**)$ suivant :

$$(**) \quad \begin{cases} u + 2v + a + e + A - u - v = 3S \\ u \qquad + 2a + b + c + d - f - g = S \end{cases}$$

Ce système possède une **solution unique** en $u \; et \; v$ d'où le système équivalent suivant :

$$(***) \quad \begin{cases} u = S - 2a - b - c - d + f + g \\ v = S - e - f - g \end{cases}$$

Il ne reste plus que huit variables dans notre carré magique : a, b, c, d, e, f, g et S. Le voici :

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a & b & c & S-a-b-c \\ d & e & f & S-d-e-f \\ S-2a-b-c-d+f+g & g & S-e-f-g & 2a+b+c+d+e-g-S \\ a+b+c-f-g & S-b-e-g & -c+e+g & -a+f+g \end{pmatrix}$$

$$Structure \; générale \; des \; carrés \; magiques \; d'ordre \, 4 \; et \; de \; somme \; S$$

(2) est la structure générale des carrés magiques d'ordre 4. D'abord, c'est bien un carré magique de somme S puis, étant donnée l'unicité de la solution du système $(**)$, tout carré magique d'ordre 4 provient de cette structure générale. Ainsi, en faisant varier $a, b, c, d, e, f, g \; et \; S$ dans l'ensemble des nombres réels, nous obtiendrons tous les carrés magiques d'ordre 4 à partir de (2). Par exemple, nous obtenons le carré magique suivant avec :

$$a = 18 \; ; \; b = 6 \; ; \; c = 11 \; ; \; d = 10 \; ; \; e = 13 \; ; \; f = 14 \; ; \; g = 5 \; ; \; S = 56$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 6 & 11 & 21 \\ 10 & 13 & 14 & 19 \\ 12 & 5 & 24 & 15 \\ 16 & 32 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc construire tous les carrés magiques d'ordre 3 et d'ordre 4 à partir des structures générales $(1) \; et \; (2)$.

Théorème 3.1 :

Considérons un carré magique d'ordre 3 tel que les variables $a \; et \; b$ soient des entiers. Alors, tous les nombres du carré magique seront des entiers si et seulement si S est un entier multiple de 3.

Théorème 3.2 :

Les seize nombres d'un carré magique d'ordre 4 sont des entiers dès que les huit variables prennent des valeurs entières.

Si nous donnons aux huit variables, des valeurs entières, alors tous les nombres du carré magique seront des entiers mais quels entiers? Il pourrait y avoir des négatifs et pire encore, des répétitions!!!

Si nous trouvons des négatifs et que le plus petit soit, par exemple, -11, alors il suffira d'ajouter 12 dans toutes les cases et le carré restera magique et ne renfermera que des entiers positifs. Évidemment, nous pourrions tout aussi bien ajouter à toutes les cases un entier ≥ 12.

S'il y a des répétitions après avoir donné à toutes les variables une valeur entière, alors nous regarderons dans la structure générale, les expressions responsables d'une répétition donnée et nous pourrons, en général, la faire disparaître. Cependant, il peut arriver que nous fassions apparaître alors une autre répétition (ou même plusieurs autres). Nous devons donc choisir convenablement les valeurs entières que nous allons attribuer à nos variables, ce qui n'est pas toujours simple.

Ce problème sera résolu un peu plus loin. Par exemple, pour les 4x4, nous allons trouver une structure générale, celle des super-Dürer-alpha, qui nous permettra de construire très facilement une infinité de carrés magiques formés d'entiers positifs, sans répétition.

Terminons en observant que les structures générales $(1)\ et\ (2)$ renferment dans chaque case, une expression linéaire des variables; par exemple, dans (2), nous trouvons les expressions linéaires $S-e-f-g$ et $S-2a-b-c-d+f+g$.

Enfin, énonçons de nouveau un **grand objectif** que nous poursuivons :

Construire des carrés magiques **presque normaux** (tous les nombres du carré sont des entiers ≥ 1 tous différents deux à deux) et des carrés magiques **normaux** (le carré renferme tous les entiers consécutifs de $1\ à\ n^2$).

Nous dirons que ces carrés magiques sont de **beaux carrés**!!!

Enfin, regardons le cas $n \geq 5$. Pour que le carré suivant soit magique, il faut avoir :

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\cdots$	$a_{1(n-1)}$	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\cdots$	$a_{2(n-1)}$	b_2
$a_{(n-1)1}$	$a_{(n-1)2}$	$a_{(n-1)3}$	$\cdots$	$a_{(n-1)(n-1)}$	b_{n-1}
c_1	c_2	c_3		c_{n-1}	d

$$(*) \qquad \begin{cases} b_i = S - (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \ldots + a_{i(n-1)}) \\ c_j = S - (a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + \ldots + a_{(n-1)j}) \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, (n-1).$$

Ainsi, les variables b_i et c_j vont disparaître du carré tandis que s'ajoutera la variable S.

Posons : $\sum a_{ij} = A \quad où \;\; i, j = 1, 2, 3, \ldots, (n-1).$ Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{n-1} b_i = (n-1)S - A = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \;\; \text{d'où } d = A - (n-2)S$$

La variable d disparaît et notre carré est semi-magique. Enfin, le carré semi-magique sera magique si et seulement si :

$$(**)\quad \begin{cases} a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{(n-1)(n-1)} + A - (n-2)S = S \\ (S - a_{11} - a_{12} - \ldots - a_{1(n-1)}) + (a_{2(n-1)} + a_{3(n-2)} + \ldots + a_{(n-1)2}) + (S - a_{11} - a_{21} - \ldots - a_{(n-1)1}) = S \end{cases}$$

Nous allons voir que le système (**) est compatible en montrant que deux variables s'exprimeront, **de façon unique**, en fonction des autres variables. Nous choisirons de faire disparaître a_{12} et a_{23}. Le système (**) est équivalent au système suivant :

$$(***)\quad \begin{cases} a_{23} + a_{12} + (\ldots) = (n-1)S \\ \qquad\quad a_{12} + (\ldots) = S \end{cases} \qquad\qquad n \geq 5$$

et nous voyons que le système possède une **solution unique** en $a_{23}\ et\ a_{12}$; ces deux dernières variables s'expriment de façon unique en fonction des $(n^2 - 2n)$ variables qui restent dans le carré. En effet, ce nombre est :

$$(n-1)^2 + 1 - 2 = n^2 - 2n$$

Nous venons de construire une structure générale d'ordre n. De plus, étant donnée l'unicité de la solution du système (***), nous pouvons conclure que cette structure générale génère tous les carrés magiques d'ordre $n \geq 5$.

En observant ces structures générales, pour $n \geq 4$, nous voyons que nos carrés magiques renfermeront seulement des entiers si à nos variables, nous avons attribué des valeurs entières.

À partir des structures générales pour $n \geq 4$, nous pouvons donc affirmer ceci :

Théorème 3.3 :

Si dans la structure générale des carrés magiques d'ordre $n \geq 4$, nous attribuons des valeurs entières à toutes les variables, alors tous les nombres du carré magique ainsi obtenu sont des entiers.

Nous verrons plus loin le théorème fondamental des carrés magiques et le nouveau procédé de construction de carrés magiques lequel a déjà été présenté dans la partie 1. Nous pourrons alors construire des carrés magiques de tous les ordres $n \geq 3$, formés de nombres entiers positifs et tous différents et ce d'une façon très simple. Les répétitions seront choses du passé!!!

Appelons E_n, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des carrés magiques d'ordre n formés de nombres réels. Nous pouvons toujours associer à E_n, une structure générale laquelle permettra de construire tous les carrés magiques d'ordre n. Nous dirons que cette structure générale représente E_n.

Nous avons vu que le nombre de variables nécessaires pour construire un carré magique d'ordre n est $n^2 - 2n$. Par exemple, pour construire un carré magique d'ordre 20, nous devrons attribuer à $20^2 - 2\times 20 = 360$ variables, une valeur entière dans la mesure où nous voulons construire un carré magique formé d'entiers. De plus, si nous souhaitons avoir que des entiers différents, nous devrons attribuer 360 entiers différents à nos 360 variables, ce qui est tout de même un certain travail!! Pour construire un carré d'ordre 12, nous aurons besoin de 120 variables.

Le résultat sera un carré magique qui contiendra peut-être des nombres négatifs et peut-être des répétitions. «Réparer» un tel carré n'est pas toujours simple et peut demander un certain temps. «Réparer» signifie ici : faire disparaître le zéro, les négatifs et les répétitions.

Voilà le principal inconvénient de notre approche par les structures générales. Construire un carré normal d'ordre 20 à partir de la structure générale de E_{20} est un travail très difficile pour ne pas dire presqu'impossible!!! Par contre, si nous voulons un carré magique quelconque, il n'y a pas de problème. Si nous le voulons presque normal, c'est déjà plus facile.

Construire un carré magique normal d'ordre 20 avec le nouveau procédé présenté dans la partie 1, section 6, sera un jeu d'enfant!!!

Mais notre approche par les structures générales nous offre un grand nombre de possibilités lorsque l'ordre n'est pas trop grand. Avec $n \leq 8$, nous arrivons à construire des carrés magiques extraordinaires voire fantastiques!!! Nous pourrions aller jusqu'à $n = 12$, ce qui est encore raisonnable!

Nous verrons, plus loin, les nombreux sous-espaces de carrés magiques d'ordre 4 à partir desquels nous avons trouvé des résultats remarquables.

Le nombre de variables dans chaque structure générale est la **dimension** de E_n. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 3.4 :

La dimension de l'espace vectoriel E_n sur le corps $\mathbb{R}$ des réels est $n(n-2)$.

Cela signifie que tout carré magique d'ordre n est une combinaison linéaire de $n(n-2)$ carrés magiques linéairement indépendants qui forment une base de E_n. Cette base découle facilement de la structure générale qui représente E_n.

En imposant des figures magiques à la structure générale de E_n, nous trouverons une nouvelle structure générale qui représentera un sous-espace vectoriel de dimension inférieur à $n(n-2)$. Nous verrons cela de plus près à partir du chapitre 5.

Enfin, ces structures générales ne sont pas uniques; elles dépendent de notre choix des deux dernières variables à éliminer (voir les systèmes (**)).

4. Les carrés magiques d'ordre 1, 2 et 3

4.1 Les carrés magiques d'ordre 1

Il s'agit d'un carré formé d'une seule case dans laquelle nous avons placé un nombre :

35

Par exemple, le carré ci-dessus renferme le nombre 35. Il n'y a qu'une seule rangée, une seule colonne et par défaut, nous dirons que les diagonales se confondent avec la rangée qui elle-même, se confond avec la colonne.

De tels carrés ne présentent pas vraiment d'intérêt. En quelque sorte, ils s'identifient aux nombres réels. Personne ne sera impressionné si nous disons que la somme dans chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale est 35.

Afin de simplifier, nous écrirons un carré magique sous la forme matricielle. Ainsi, le carré ci-haut s'écrira :

$$(35)$$

L'addition de tels carrés se fait comme pour les nombres réels :

$$(35)+(18)=(53)$$

et le produit d'un nombre par un carré se fait comme suit :

$$7(35)=(245)$$

Nous ne reviendrons pas sur ces carrés magiques d'ordre 1.

4.2 Les carrés magiques d'ordre 2

Un carré magique d'ordre 2 est formé de 4 cases et doit obligatoirement avoir la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Puisqu'il est magique, il faut $2A = A + B \text{ et } 2B = A + B$ d'où $A = B$. Si un carré d'ordre 2 est magique, il est donc forcément trivial :

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$$

Théorème 4.1 :

Un carré d'ordre 2 est magique si et seulement s'il est trivial.

Il est évident que la somme de deux carrés triviaux de sommes S et T est un carré trivial de somme S + T et que le carré trivial de somme S, s'il est multiplié par le nombre k, deviendra un carré trivial de somme k S.

Ces carrés magiques ne sont pas très spectaculaires puisqu'ils sont triviaux. Cependant, les carrés triviaux seront d'une grande utilité un peu plus loin.

4.3 Les carrés magiques d'ordre 3, première structure générale

Un des plus anciens carrés magiques d'ordre 3 est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sa somme est S = 15 et de plus, il est normal puisqu'il renferme tous les entiers de 1 à 9. Un carré magique d'ordre 3 possède une propriété très intéressante : le nombre central est toujours $\frac{S}{3}$. Dans notre exemple, $\frac{S}{3} = \frac{15}{3} = 5$, le centre du carré. Donc, si un carré magique d'ordre 3 est normal, alors son centre doit être le nombre 5. Nous ne pouvons pas construire un carré magique d'ordre 3, de somme S = 36, si son centre n'est pas 12.

Tous les carrés magiques d'ordre 3 proviennent de la structure générale (1) ci-dessous, laquelle a été trouvée dans le chapitre 3 :

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix}$$

Structure générale des carrés magiques d'ordre 3

En général, nous allons construire des carrés magiques formés d'entiers positifs tous différents (carrés magiques presque normaux) et si possible, des carrés magiques normaux c'est-à-dire des carrés magiques formés de tous les entiers de $1 \text{ à } n^2$ (ici, de 1 à 9).

4.3.1 Carrés magiques normaux et équivalents

Nous voulons trouver tous les carrés magiques formés des entiers consécutifs de 1 à 9. Avec MATHEMATICA, nous pouvons construire une table formée de 81 carrés magiques en attribuant à a et à b les valeurs entières de 1 à 9 et à S, la valeur 15. Parmi ces 81 carrés magiques, seulement 8 sont retenus car les 73 autres renferment des entiers négatifs ou nuls ou des entiers qui se répètent et même des entiers autres que ceux de 1 à 9. Voici donc les huit carrés magiques normaux d'ordre 3 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix};\ M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix};\ M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix};\ M_4 = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix};\ M_6 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix};\ M_7 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix};\ M_8 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Cependant, tous proviennent du même carré magique M_1 comme suit :

$$M_1 = R^0(M_1)\ ;\ M_2 = R^1(M_1)\ ;\ M_3 = R^2(M_1)\ ;\ M_4 = R^3(M_1)$$
$$M_5 = R_*(M_1)\ ;\ M_6 = R_*^1(M_1)\ ;\ M_7 = R_*^2(M_1)\ ;\ M_8 = R_*^3(M_1)$$

en précisant que :

La notation $R^0(A)$ définit une rotation planaire de 0° du carré A.

La notation $R^1(A)$ définit une rotation planaire de 90° du carré A.

La notation $R^2(A)$ définit une rotation planaire de 180° du carré A.

La notation $R^3(A)$ définit une rotation planaire de 270° du carré A.

$R_*(A)$ n'est rien d'autre que A vu par derrière. Placez-vous derrière M_1 et vous verrez M_5.

Ainsi, nous pourrions écrire, par exemple : $M_7 = R^2(M_5) = R^2(R_*(M_1)) = R_*^2(M_1)$. Les huit carrés magiques ci-haut s'expriment donc tous à l'aide de M_1 qui sera, par choix arbitraire, notre **carré primitif**. Les sept autres sont les **équivalents** de M_1. Nous parlerons souvent des huit équivalents de M_1 en considérant M_1 comme un équivalent de lui-même. **Voir annexe 17.**

Revenons à $R_*(A)$. De regarder A par derrière est équivalent à effectuer une rotation spatiale de 180°est-ouest de A. C'est aussi équivalent à transposer $R^1(A)$.

Suspendons un carré magique au plafond d'une pièce à l'aide d'une corde d'un mètre et demi. Sans toucher au carré, nous pouvons le regarder de huit façons différentes et voir en tout, huit carrés magiques. Ce sont les huit équivalents. Ceux-ci sont en général différents.

Théorème 4.2 :

> Si les quatre coins d'un carré magique d'ordre n renferment des nombres différents, alors les huit équivalents sont différents.

Preuve :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$$

Nous venons d'illustrer les quatre nombres a, b, c, d situés dans les quatre coins d'un carré d'ordre n. Il est évident que si ces quatre nombres sont différents, alors les huit équivalents sont différents.

Si M est symétrique (M est égal à sa transposée), alors il y aura au moins 2 équivalents égaux.

Soit maintenant le carré magique A et ses sept équivalents B, C, D, E, F, G et H définis ainsi :
$B = R^1(A);\ C = R^1(B);\ D = R^1(C);\ E = R_*(A),\ F = R^1(E);\ G = R^1(F); H = R^1(G).$

Nous présenterons toujours les sept équivalents de A dans cet ordre. Maintenant, si dans A, nous considérons le nombre u en position $(i\ ;\ j)$, alors dans ses équivalents, quelle position occupera ce même nombre u? La réponse se trouve dans le tableau suivant :

A	$(i\ ;\ j)$
B	$(n+1-j\,;\, i)$
C	$(n+1-i\,;\, n+1-j)$
D	$(j\ ;\ n+1-i)$
E	$(i\ ;\ n+1-j)$
F	$(j\ ;\ i)$
G	$(n+1-i\,;\ j)$
H	$(n+1-j\,;\, n+1-i)$

Nous appellerons les trois premiers équivalents de A, ses rotations et ses quatre autres, ses transposées. En effet, le tableau nous montre immédiatement les résultats suivants :

$$E=B^t\ ;\ F=A^t\ ;\ G=D^t\ ;\ H=C^t$$

où B^t représente la transposée de B, A^t représente la transposée de A,...

Corollaire 4.3 :

Les huit équivalents de tout carré magique presque normal d'ordre $n \geq 3$ sont tous différents.

Théorème 4.4 :

Il n'existe qu'un seul carré magique normal primitif d'ordre 3.

Remarque :

Pendant une rotation planaire ou spatiale, les nombres dans les cases ne changent pas.

4.3.2 Seconde structure générale pour l'ordre 3

À l'aide de plusieurs exemples numériques, nous pouvons observer, dans la structure (1), que les neuf nombres se retrouvent en six suites arithmétiques de trois nombres :

$$(\#) \qquad \begin{array}{ccc} A & A+r & A+2r \\ A+t & A+t+r & A+t+2r \\ A+2t & A+2t+r & A+2t+2r \end{array}$$

Les trois suites horizontales sont arithmétiques de raison r et nous constatons que les trois suites verticales sont aussi arithmétiques mais de raison t. Nous trouvons :

$$A = b$$
$$r = a - \frac{S}{3}$$
$$t = \frac{2S}{3} - a - b$$

La nouvelle structure des carrés magiques d'ordre 3 est donc :

$$(1.1) \qquad \begin{pmatrix} A+t+2r & A & A+2t+r \\ A+2t & A+t+r & A+2r \\ A+r & A+2t+2r & A+t \end{pmatrix}$$

$$\textit{Seconde structure générale}$$

où la somme magique est $S = 3A + 3r + 3t$. (Voir problèmes 21 et 23 de 4.3.8)

Notons que les deux structures générales renferment chacune trois variables. Tous les carrés magiques d'ordre 3 s'obtiennent en donnant une valeur réelle à chaque variable, que ce soit dans (1) ou dans (1.1). Cette seconde structure générale est beaucoup plus simple que la première. Il est évident que si A, r, t sont des entiers positifs, alors les neuf nombres du carré sont des entiers positifs. De plus, si $t > 2r \text{ } ou \text{ } r > 2t$, alors les neuf entiers positifs du carré sont tous différents. Ceci est une condition suffisante pour s'assurer que les neuf nombres du carré magique soient neuf entiers positifs tous différents.

Nous savons maintenant comment éviter les répétitions!!!

Théorème 4.5 :

> Pour qu'un carré magique d'ordre 3 soit presque normal, il suffit que $A, r \text{ } et \text{ } t$ soient des entiers positifs avec $t > 2r \text{ } ou \text{ } r > 2t$. Il sera normal dès que $A=1, r=1 \text{ } et \text{ } t=3$ ou $A=1, r=3 \text{ } et \text{ } t=1$.

Preuve : évident si on observe bien les suites arithmétiques de (#).

Par exemple, avec $A=13, r=2, t=5,$ nous trouvons le carré magique suivant formé de neuf entiers positifs tous différents ; il est de somme 36.

$$\begin{pmatrix} 6 & 13 & 17 \\ 23 & 12 & 1 \\ 7 & 11 & 18 \end{pmatrix}$$

La condition du théorème 4.5 est suffisante mais non nécessaire; en effet, avec $A=15, r=-2, t=-5,$ nous obtenons le carré magique suivant formé de neuf entiers positifs tous différents ; il est de somme 24.

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 3 \\ 5 & 8 & 11 \\ 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Par contre, avec $A=15, r=2, t=-1,$ nous obtenons le carré magique suivant formé de neuf entiers positifs mais non tous différents; il est de somme 48.

$$\begin{pmatrix} 18 & 15 & 15 \\ 13 & 16 & 19 \\ 17 & 17 & 14 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus loin que le tableau (#) sera appelé **«tableau arithmétique»** et que le carré magique (1.1) sera appelé **«carré arithmétique».**

4.3.3 Quelques propriétés

Voici trois propriétés que possède tout carré magique d'ordre 3 :

1. Dans tout carré magique d'ordre 3, le centre Y est toujours $\frac{S}{3}$.
2. La somme des quatre coins est toujours égale à $\frac{4S}{3}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ X & Y & X \\ 0 & X & 0 \end{pmatrix}$ La somme des quatre nombres dans les positions X est toujours $\frac{4S}{3}$.

Ces propriétés sont très faciles à montrer en se servant des structures générales (1) ou (1.1).

4.3.4 Carrés magiques d'ordre 3 formés de neuf entiers différents donnés à l'avance

Soient donnés neuf entiers différents. Avec ceux-ci, pouvons- nous construire un carré magique d'ordre 3?

Si ce carré magique est possible, alors la somme S_9 de ces neuf entiers doit être un multiple de 3 puisque la somme magique S est donnée par $S = \frac{S_9}{3}$; de plus, l'entier central est $\frac{S}{3}$ donc S_9 doit être un multiple de 9. Enfin, $\frac{S}{3}$ doit faire partie des neuf entiers donnés à l'avance. Par exemple, pouvons-nous construire un carré magique avec les entiers :

a) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 13 ; 15$? Non car la somme de ces neuf entiers, 73, n'est pas un multiple de 3 (73 ne se divise pas par 3 dans les entiers).
b) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 13 ; 17$? Non car la somme de ces 9 entiers, 75, est divisible par 3 mais non par 9.
c) $1 ; 2 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14$? Non car la somme, 72, est bien divisible par 9 (donc divisible par 3) mais 8 ne se trouve pas dans la liste des 9 entiers donnés.
d) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14$? Ici, la somme 72 est divisible par 9 et le quotient 8, est bien dans la liste. Le carré magique semble donc possible. Cependant, il ne l'est pas. Si le carré est magique, son centre est 8 et sa somme 24. Le 8 et le 14 sont forcément sur une même rangée, colonne ou diagonale et la somme 8 + 14 = 22 sera augmenté de 1, ce qui donne 23 ou de 3, ce qui donne 25, ou de 5, ce qui donne 27, … . Dans tous les cas, nous n'aurons jamais 24. Le carré ne sera jamais magique.
e) $1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 11 ; 13 ; 15$? Enfin, la somme 72 est divisible par 9 et le quotient 8 est bien dans la liste. Cette fois, le carré magique de centre 8 et de somme 24 est possible. Pourquoi? La réponse nous vient de la seconde structure générale. Les neuf entiers se placent dans les suites arithmétiques suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{array}$$

Les trois suites arithmétiques horizontales sont de raison $r = 2$ et les trois suites arithmétiques verticales, de raison $t = 5$. Voilà pourquoi le carré magique est possible :

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 13 \\ 11 & 8 & 5 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.6 :

Pour que neuf nombres forment un carré magique d'ordre 3, il faut et il suffit que ceux-ci puissent se mettre sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} A & A+r & A+2r \\ A+t & A+t+r & A+t+2r \\ A+2t & A+2t+r & A+2t+2r \end{array}$$

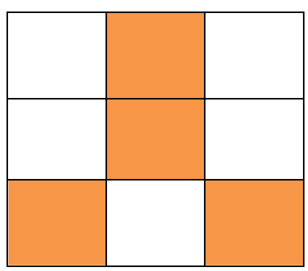
appelé tableau arithmétique.

Autrement dit, qu'ils puissent se mettre sous la forme de six suites arithmétiques dont trois sont horizontales de raison r et trois sont verticales de raison t.

Dès que les neuf nombres sont dans un tableau arithmétique, pour construire le carré magique, il suffit alors de placer les neuf nombres comme dans la structure générale (1.1).

4.3.5 Comment fabriquer des carrés magiques spéciaux?

Avec les structures générales (1) ou (1.1), nous pouvons fabriquer tous les carrés magiques d'ordre 3 formés de nombres réels. Partons de (1.1) et formons un carré magique de somme S qui possède la fusée illustrée ci-dessous :



Cela signifie que la somme des quatre cases donne S. Pour se faire, posons l'égalité suivante :

$$A+(A+t+r)+(A+r)+(A+t) = 3A+3t+3r$$

d'où : $$A=t+r$$

Donc un carré magique d'ordre 3 possède cette fusée si et seulement si $A=t+r$. En remplaçant A par $t+r$ dans (1.1), nous trouvons la structure générale (1.2) des carrés magiques d'ordre 3 munis de cette fusée. La voici :

$$(1.2)\qquad \begin{pmatrix} 2t+3r & t+r & 3t+2r \\ 3t+r & 2t+2r & t+3r \\ t+2r & 3t+3r & 2t+r \end{pmatrix}$$

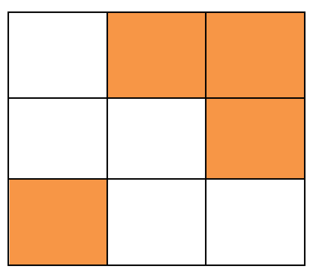
Notez qu'en remplaçant A par $t+r$, nous avons une variable de moins dans (1.2). Nous dirons que (1.2) renferme deux variables libres; cela signifie qu'il suffit de donner à t et à r une valeur de notre choix afin d'obtenir un carré magique avec fusée. Les structures (1) et (1.1), quant à elles, renferment trois variables libres.

Voyons deux exemples :

$$\begin{array}{cc} S=24 & S=18 \\ \begin{pmatrix} 9 & 4 & 11 \\ 10 & 8 & 6 \\ 5 & 12 & 7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 11 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \end{pmatrix} \\ t=3; r=1 & t=4; r=-1 \end{array}$$

Ces deux carrés magiques renferment respectivement la fusée (4; 8; 5; 7) et la fusée (3; 6; 2; 7).

Trouvons maintenant les carrés magiques d'ordre 3 qui possèdent la flèche illustrée ci-dessous :



Un carré magique d'ordre 3 possède cette flèche si et seulement si nous avons l'égalité :

$$A+(A+2t+r)+(A+2r)+(A+r)=3A+3t+3r$$

c'est-à-dire si et seulement si : $A=t-r$

En remplaçant A par $t-r$ dans (1.1), nous obtenons la structure générale (1.3) des carrés magiques d'ordre 3 qui possèdent la flèche illustrée plus haut. La voici :

$$(1.3)\qquad \begin{pmatrix} 2t+r & t-r & 3t \\ 3t-r & 2t & t+r \\ t & 3t+r & 2t-r \end{pmatrix}$$

Nous avons deux variables libres dans cette structure; en fait, l'égalité précédente implique qu'une variable va disparaitre dans (1.1) et ici, nous avons choisi d'éliminer A. Nous aurions pu éliminer la variable t en remplaçant dans (1.1), t par $A+r$ puisque $A=t-r$ est équivalent à $t=A+r$.

Voyons deux exemples :

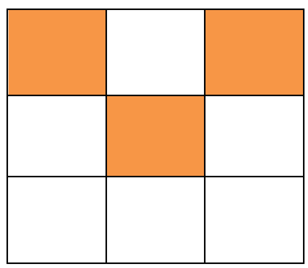
$$S=18 \qquad\qquad S=18$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 8 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$t=3;\ r=1 \qquad t=3; r=2$$

Ces deux carrés magiques renferment la flèche (2 ; 9 ; 4 ; 3) et la flèche (1;9; 5; 3).

Terminons avec la construction d'un carré magique d'ordre 3 qui possède la figure magique illustrée ci-dessous :



Rappelons que dans un carré d'ordre 3, une **figure** est un groupe de 3 cases qui occupent des positions différentes dans le carré. La somme d'une figure est la somme des nombres situés dans ses cases. Une figure est **magique** si la somme des nombres de ses cases donne la somme magique S.

Un carré magique d'ordre 3 possède cette figure magique si et seulement si nous avons l'égalité suivante :

$$(A+t+2r)+(A+t+r)+(A+2t+r) = 3A+3t+3r$$

c'est-à-dire si et seulement si : $r=-t$

La structure générale (1.4) est donc :

$$(1.4) \qquad \begin{pmatrix} A-t & A & A+t \\ A+2t & A & A-2t \\ A-t & A & A+t \end{pmatrix}$$

Nous constatons que les carrés magiques qui possèdent cette figure magique renferment des nombres qui se répètent. Par exemple :

$$S = 15$$
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$A = 5; t = 1$$

Nous verrons, dans la section 4.3.7, que la fréquence de la structure générale (1.4) est $f(3A) = 18$. Cela signifie que tout carré magique qui provient de (1.4) possède au moins 18 figures magiques. Tous les carrés issus de (1.4) ont en commun les 18 figures magiques que nous trouvons dans (1.4). Cependant, il est possible que certains carrés magiques issus de (1.4) en possèdent plus que 18. L'exemple ci-dessus donne $f(15) = 18$. Ce carré possède donc exactement 18 figures magiques. Vous pouvez les trouver sans difficulté!!

Terminons en montrant que tout carré issu de (1.4) possède exactement 18 figures magiques si t est non nul. Nous avons :

$$\begin{pmatrix} A-t & A & A+t \\ A+2t & A & A-2t \\ A-t & A & A+t \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AP + tQ$$

où : $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont des carrés magiques.

Notons que Q est de somme 0 et que $f(0) = 18$; donc nous devons conclure qu'il en est de même pour tout carré magique issu de (1.4) avec t non nul.

4.3.6 Carrés magiques formés de nombres premiers

Rappelons qu'un nombre premier est un entier ≥ 2 qui n'est divisible que par 1 et lui-même (il s'agit bien entendu de la divisibilité dans les entiers naturels). Voici les 14 premiers nombres premiers :

$$\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; ...\}$$

Dans une table de nombres premiers, cherchons les suites arithmétiques du théorème 4.6; nous aurons alors un carré magique formé de neuf nombres premiers. Soulignons que cette recherche n'est pas évidente!!

Dans un premier temps, nous trouvons : (7 ; 13 ; 19) ; (31 ; 37 ; 43) ; (55 ; 61 ; 67) soit huit nombres premiers différents d'où le carré magique suivant formé de huit nombres premiers :

$$\begin{pmatrix} 43 & 7 & 61 \\ 55 & 37 & 19 \\ 13 & 67 & 31 \end{pmatrix}$$

Il est de somme magique S = 111.

Ici, nous trouvons beaucoup mieux : (11 ; 29 ; 47) ; (71 ; 89 ; 107) ; (131 ; 149 ; 167) d'où le carré magique :

$$\begin{pmatrix} 107 & 131 & 29 \\ 11 & 89 & 167 \\ 149 & 47 & 71 \end{pmatrix}$$

C'est un carré magique de somme S = 267 formé de neuf nombres premiers tous différents.

Puis, nous trouvons : (5 ; 17 ; 29) ; (47 ; 59 ; 71) ; (89 ; 101 ; 113) d'où le carré magique :

$$\begin{pmatrix} 71 & 89 & 17 \\ 5 & 59 & 113 \\ 101 & 29 & 47 \end{pmatrix}$$

de somme S = 177, formé de neuf nombres premiers tous différents.

Nous pourrions sans aucun doute en trouver d'autres.

Si un carré magique ne renferme que des nombres premiers, alors nous dirons que c'est un **carré magique premier**. Le premier de somme S = 111 n'est pas un carré magique premier tandis que les deux autres avec S = 267 et S = 177, sont des carrés magiques premiers.

Nous avons également construit un programme dans MAPLE qui nous permet de trouver des carrés magiques premiers d'ordres 3, 4 et 5 (voir le CD). En voici trois :

(1) $\begin{pmatrix} 43 & 67 & 109 \\ 139 & 73 & 7 \\ 37 & 79 & 103 \end{pmatrix}$

$S = 219$

(2) $\begin{pmatrix} 71 & 79 & 83 & 103 \\ 97 & 107 & 109 & 23 \\ 157 & 113 & 7 & 59 \\ 11 & 37 & 137 & 151 \end{pmatrix}$

$S = 336$

(3) $\begin{pmatrix} 11 & 23 & 139 & 31 & 227 \\ 137 & 103 & 29 & 73 & 89 \\ 127 & 113 & 83 & 101 & 7 \\ 151 & 43 & 17 & 173 & 47 \\ 5 & 149 & 163 & 53 & 61 \end{pmatrix}$

$S = 431$

Le carré (1), d'ordre 3, a pour somme 219, un entier non premier.

Le carré (2), d'ordre 4, a pour somme 336, un entier non premier.

Le carré (3), d'ordre 5, a pour somme 431, un **nombre premier**.

Ce dernier, d'ordre 5, est un **carré magique super-premier** car il est formé de 25 nombres premiers et sa somme magique est aussi un nombre premier!!! Notons que les six carrés magiques ci-haut sont tous presque normaux.

Une question importante se pose ici : existe-t-il un carré magique premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$?

La réponse est oui pour $n = 3, n = 4 \, et \, n = 5$ puisque nous avons (1), (2) et (3) ci-haut. Vous trouverez sur Internet des carrés magiques premiers d'ordres supérieurs à 5 mais pouvons-nous affirmer l'existence d'un carré magique premier presque normal d'ordre n = 28224 ?

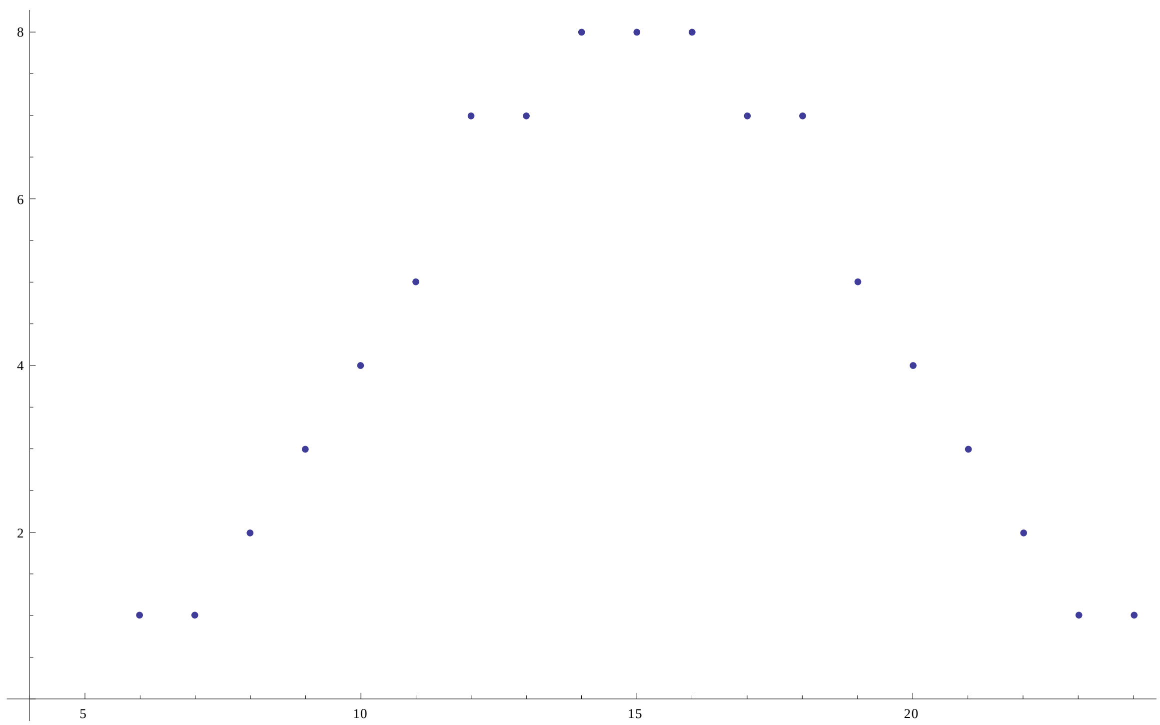
La réponse est toujours **oui** selon le théorème de Green-Tao et son corollaire que nous verrons au chapitre 10.

Oui, il existe un carré magique premier presque normal pour tous les ordres $n \geq 3$.

Pour les carrés magiques premiers, retrouvons-nous au chapitre 10.

4.3.7 Les fréquences des sommes

Le tableau suivant indique la fréquence des sommes obtenues à partir des 84 figures d'un carré magique normal d'ordre 3 :



Dans un carré magique d'ordre 3, nous pouvons choisir trois cases distinctes (chacune ayant une position différente des deux autres dans le carré) parmi les neuf, de 84 façons différentes. Les sommes de trois cases varient de 6 = (1 + 2 + 3) à 24 = (7 + 8 + 9). Le tableau ci-haut nous indique que nous avons une seule somme 6, une seule somme 7, deux sommes 8, trois sommes 9, et ainsi de suite.

La somme magique S = 15 apparaît huit fois (les trois rangées, les trois colonnes et les deux grandes diagonales). Les sommes 14 et 16 se trouvent également huit fois. Nous dirons que la fréquence de la somme 15 est 8, ce qui s'écrit $f(15)=8$ et ce qui signifie qu'en faisant toutes les sommes de trois cases différentes, nous trouverons huit fois la somme 15. La fréquence de la somme magique indique aussi le nombre de figures magiques que possède le carré magique.

Nous avons donc :

$$f(6)=1\;;\; f(7)=1\;;\; f(8)=2\;;\; f(9)=3\;;\; f(10)=4\;;\;\ldots\;;\; f(15)=8\;;\; f(16)=8\;;\;\ldots$$

et nous remarquons que la fréquence de la somme magique est la plus élevée.

Au chapitre suivant, nous verrons qu'avec un carré magique normal d'ordre 4, la somme magique 34 apparaît 86 fois!!! C'est beaucoup plus que (les quatre rangées, les quatre colonnes et les deux grandes diagonales)!!!

Comment trouvons-nous ces fréquences? À l'aide de ce petit programme fait dans MATHEMATICA :

```
<<Combinatorica`

A = KSubsets[{liste des n^2 expressions ou nombres du carré}, n ]

B = Expand[Simplify[Plus@@@A]]

Count [B, S]
```

lequel nous permet de trouver la fréquence de la somme S.

Par exemple, considérons le carré magique suivant formé de neuf entiers impairs :

$$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 17 \\ 15 & 11 & 7 \\ 5 & 19 & 9 \end{pmatrix}$$

Nous plaçons les neuf nombres entre les accolades comme suit : $\{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$et remplaçons n par 3 et S par 33. MATHEMATICA donne f(33) = 8 ce qui montre que ce carré magique ne renferme que huit figures magiques. Notons que l'ordre des nombres entre les accolades est sans importance. Trouvons maintenant la fréquence des autres sommes.

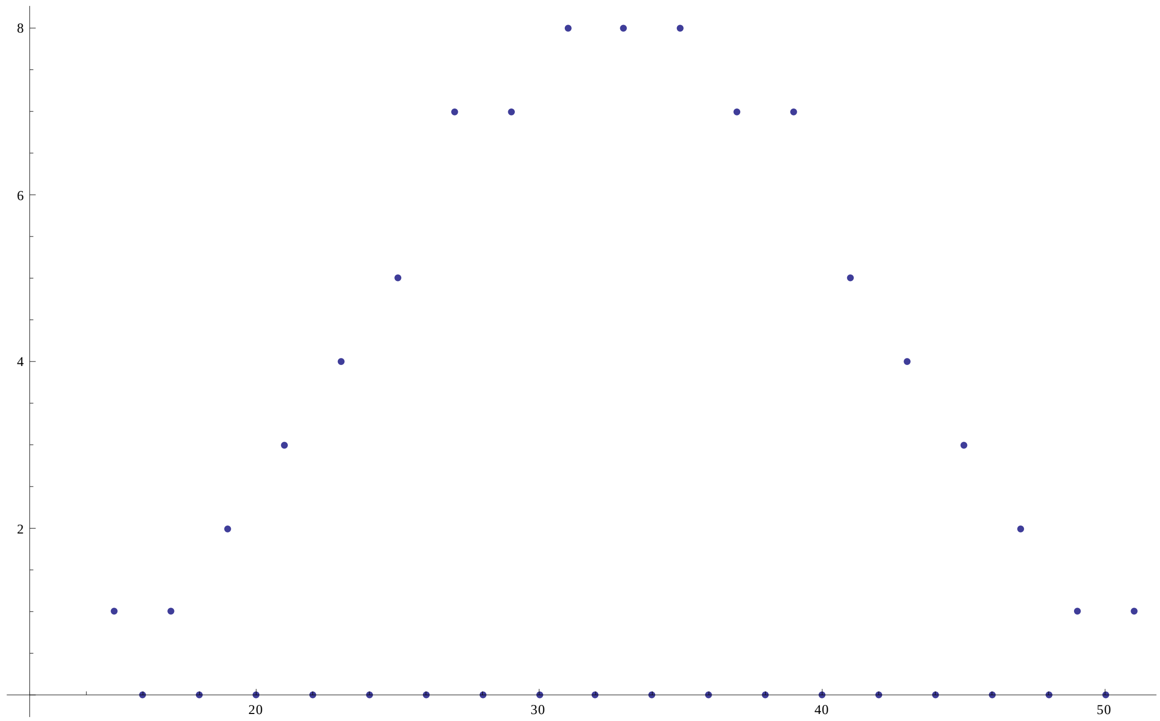
La plus petite somme est 15 et la plus grande somme est 51; la somme magique est S = 33. Nous allons trouver la fréquence de chaque somme allant de 15 à 51 à l'aide du programme ci-haut dans lequel nous changeons Count [B, S] pour Table [Count [B, S], {S, 15, 51}]. Nous trouvons :

$$1;0;1;0;2;0;3;0;4;0;5;0;7;0;7;0;8;0;8;0;8;0;7;0;7;0;5;0;4;0;3;0;2;0;1;0;1$$

Nous pouvons écrire :

$$f(15)=1\ ;\ f(16)=0\ ;\ f(17)=1\ ;\ f(18)=0\ ;\ f(19)=2\ ;\ \ldots\ ;\ f(33)=8\ ;\ \ldots$$

ce qui signifie qu'une seule figure est de somme 15, qu'aucune figure n'est de somme 16, que 8 figures sont de somme 33, la somme magique. Ce carré magique possède donc huit figures magiques. Remarquez que si m est un entier pair situé entre 15 et 51, alors $f(m)=0$; en effet, l'addition de trois nombres impairs ne peut jamais donner un nombre pair. Donc dans ce carré, aucune figure n'est de somme paire. Voici le tableau des fréquences :



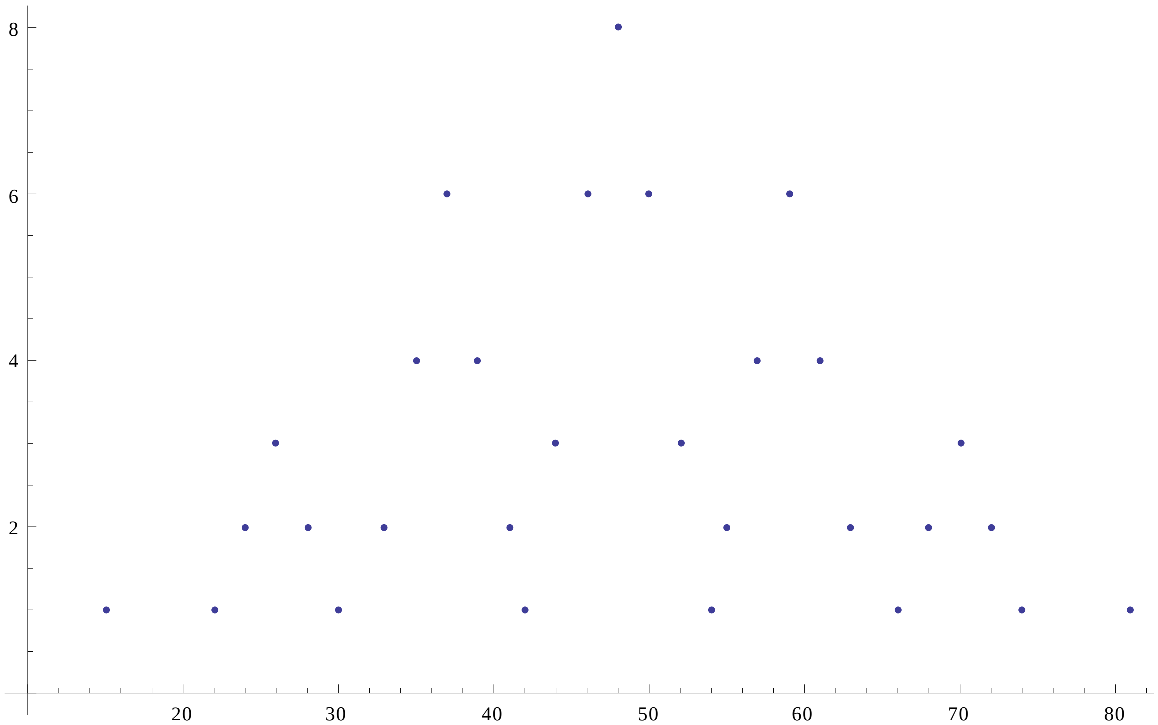
On observe que la somme magique a la fréquence la plus élevée.

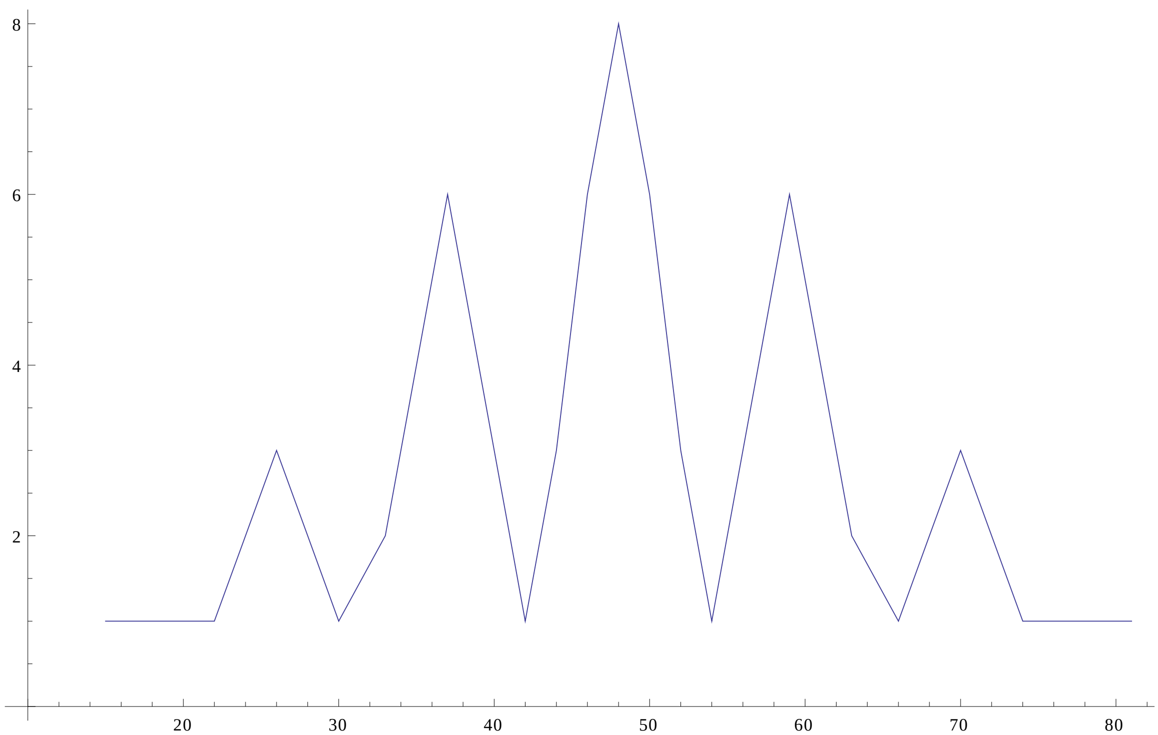
Voyons un autre exemple avec le carré magique suivant :

$$S = 48$$
$$\begin{pmatrix} 18 & 3 & 27 \\ 25 & 16 & 7 \\ 5 & 29 & 14 \end{pmatrix}$$
$$A = 3; r = 2; t = 11$$

La plus petite somme est 15 = (3 + 5 + 7) et la plus grande est 81 = (25 + 27 + 29). Le premier tableau qui suit indique les fréquences non nulles seulement. Ainsi, le point $(16;0)$ n'apparait pas dans le tableau puisque $f(16) = 0$. Comme $f(48) = 8$, le point $(48;8)$ est dans le tableau.

Quant au deuxième tableau, ce n'est rien d'autre que le premier tableau dans lequel les points ont été reliés.





Nous voyons que la fréquence de la somme magique est la plus élevée : $f(48) = 8$.

Enfin, voyons comment le programme ci-haut permet de trouver le nombre de figures magiques d'une structure générale. Prenons la structure (1.4) :

$$\begin{pmatrix} A-t & A & A+t \\ A+2t & A & A-2t \\ A-t & A & A+t \end{pmatrix}$$

et servons-nous de :

```
<<Combinatorica`

A = KSubsets[{A, A, A, A-t, A-t, A+t, A+t, A+2t, A-2t},3]

B = Expand[Simplify[Plus@@@A]]

Count [B, 3A]
```

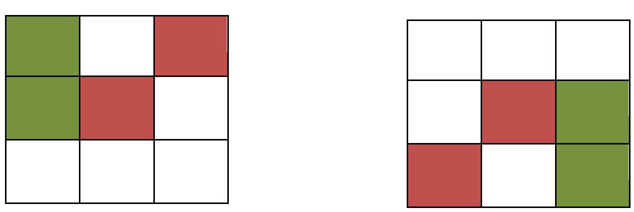
MATHEMATICA donne f (3A) = 18. Cela signifie que tous les carrés magiques issus de (1.4) ont en commun les 18 figures magiques que possède cette structure générale.

Ce programme nous permet de trouver le nombre de figures magiques d'un carré magique d'ordre $3 \leq n \leq 7$. Si $n \geq 8$, alors le travail sera beaucoup plus long et difficile. Enfin, avec n trop grand, le travail deviendra « impossible »!!! Avec $n = 356884225456$ par exemple!!! Évidemment, en tenant compte de nos ordinateurs actuels!!!

Nous avons aussi construit un programme dans MAPLE qui permet de trouver le nombre de figures magiques et de les illustrer pour $n = 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6.$ Vous le trouverez sur le CD.

4.3.8 Problèmes

1) Voici deux carrés magiques d'ordre 3. Montrez que dans chacun, la somme des deux cases vertes est égale à la somme des deux cases rouges.



2) Considérons un carré magique d'ordre 3 qui renferme les nombres suivants :

A	B	C
D	E	F
G	H	K

Démontrez que nous avons :

$$2K = B + D$$
$$2G = B + F$$
$$2A = F + H$$
$$2C = D + H$$

3) Un carré magique d'ordre 3 a pour centre le nombre 80. Trouvez la somme des huit autres cases.

4) Montrez qu'un carré d'ordre 3 n'a pas de figure complète.

5) Dans le carré magique suivant, montrez que la somme des cases bleues est la même que la somme des cases vertes. En déduire que la somme des cases vertes est 4S/3.

A	B	C
D	E	F
G	H	K

6) Dans une case d'un carré magique d'ordre 2, nous trouvons le nombre 19. Quel est ce carré et quelle est sa somme magique?

7) Dans un carré magique d'ordre 3, montrez que la somme des nombres situés dans 2 cases symétriques par rapport au centre du carré est toujours 2S/3. Pour cela, nous dirons que tous les carrés magiques d'ordre 3 sont **associatifs**.

8) Démontrez les trois propriétés de 4.3.3, que possèdent tous les carrés magiques d'ordre 3.

9) Voici un carré magique M d'ordre 3 qui est presque normal :

3	y	9
11		17

a) Pouvons-nous avoir y = 19?
b) Trouvez M.

10) Construisez un carré magique presque normal d'ordre 3 formé de neuf entiers impairs multiples de 7.

11) Est-il possible de construire un carré magique d'ordre 3 formé de neuf nombres premiers dont la somme magique serait un nombre premier?

12) Construisez la structure générale des carrés magiques d'ordre 5 en suivant à la lettre le procédé décrit au chapitre 3.

13) Voici un carré magique d'ordre 3 :

a	b	
	c	

Si a, b et c sont des entiers multiples de 7, alors tous les nombres du carré sont des entiers multiples de 7. Montrez-le.

14) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre 3. Les sommes magiques possibles sont :

$$15\ ;\ 18\ ;\ 21\ ;\ 24\ ;\ 27\ ;\ \ldots;\ 3k\ ;\ \ldots,\ \text{ où } k \geq 5 \text{ est un entier.}$$

Montrez-le. Pouvons-nous atteindre toutes ces sommes?

15) Montrez que dans un carré magique normal d'ordre 3, aucun entier impair ne peut occuper un coin.

16) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre 3. Si la somme magique de M est impaire, alors il ne peut pas y avoir un impair dans un coin. Vrai ou faux? Justifiez.

17) Soit M, un carré magique presque normal d'ordre n > 2 et de somme magique S. Puis considérons le carré M' = 2kM + h où k est un entier > 0 et h est un entier impair > 0.

a) Montrez que M'est magique presque normal.

b) Montrez que M'renferme que des entiers impairs.

c) Quelle est la somme magique de M'?

d) Quand la somme magique de M'est-elle impaire? Est-elle paire?

e) Que devons-nous faire pour que M' renferme que des entiers pairs?

18) À partir de la structure générale (1.1) des carrés magiques d'ordre 3, montrez qu'un carré magique d'ordre 3 renferme que des entiers si et seulement si A, r et t sont des entiers.

19) Soit M un carré magique presque normal d'ordre n et r, un entier positif formé de k chiffres. Le carré magique obtenu de M en ajoutant le nombre r dans toutes ses cases se note $M+r$.

a) Qu'observez-vous dans la carré magique $A=10^k M + r$?

b) Quelle est la somme magique de A ?

20) À partir d'un carré magique normal d'ordre 6, construisez un carré magique presque normal d'ordre 6 tel que ses trente six entiers se terminent tous par 11111. Quelle sera la somme magique de votre carré?

21) Démontrez que les structures générales (1) et (1.1) des carrés magiques d'ordre 3 sont équivalentes c'est-à-dire qu'elles génèrent les mêmes carrés magiques.

22)   Montrez qu'il n'existe que 8 carrés magiques normaux d'ordre 3 donc 1 seul primitif.

23)   À la page 18, comment avons-nous trouvé A = b, r = a – S/3 et t = 2S/3 – a – b?