# 9. Produit matriciel de carrés magiques

## 9.1 Introduction

Nous avons vu comment additionner deux carrés magiques et nous savons que le résultat de cette addition est encore un carré magique. De même, un carré magique multiplié par un nombre k est toujours un carré magique. Mais qu'en est-il du produit, au sens matriciel, de deux carrés magiques?

Connaissant ce produit, il est surprenant de voir les résultats inattendus qui vont suivre. Nous connaissons beaucoup d'exemples où le produit de deux carrés magiques n'est pas un carré magique mais aussi, des exemples où le produit de deux carrés magiques est un carré magique. De même, qu'en est-il de la puissance entière positive d'un carré magique? Si, par exemple, A est un carré magique d'ordre 3, alors que pouvons-nous dire de A affecté de la puissance 323 456 549 877? Avons-nous toujours un carré magique? Nous verrons, un peu plus loin, que ce carré sera bien magique!

## 9.2 Produit matriciel de carrés magiques

Rappelons qu'un carré est semi-magique si la somme des nombres de chaque rangée et de chaque colonne est toujours égale à un même nombre S et que le produit de deux carrés d'ordre n est un carré d'ordre n. Voyons maintenant ce magnifique résultat :

**Théorème 9.1 :**

Soient $A$ et $B$, deux carrés semi-magiques quelconques d'ordre $n$ de sommes $S\ et\ T$, alors le produit $AB$ est un carré semi-magique de somme $ST$.

Nous pouvons donc affirmer que si $A\ et\ B$ sont des carrés magiques de sommes $S\ et\ T$, alors le produit $AB$ est au moins un carré semi-magique de somme $ST$.

Puis, si $A$ est un carré semi-magique de somme $S$, alors $A^k$ est un carré semi-magique de somme $S^k$ où $k$ est un entier $\geq 1$.

**Preuve du théorème** :

Les éléments de $A$ sont $a_{i\,j}$, ses rangées sont $A_i$ ; les éléments de $B$ sont $b_{i\,j}$, ses colonnes sont $B_j$ ; les éléments de $C = AB$ sont $c_{i\,j}$.

Trouvons la somme des éléments de la rangée $i$ de $AB$ :

$$c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in} = A_i \cdot B_1 + A_i \cdot B_2 + \ldots A_i \cdot B_n = A_i \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) =$$
$$= A_i \cdot (T,\, T, \ldots, T) = a_{i1}T + a_{i2}T + \ldots + a_{in}T = (a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in})T = ST$$

La somme des éléments de chaque rangée de $AB$ est donc $ST$.

Trouvons maintenant la somme des éléments de la colonne $j$ de $AB$ :

$$c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{nj} = A_1 \cdot B_j + A_2 \cdot B_j + \ldots + A_n \cdot B_j = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \cdot B_j =$$
$$= (S, S, \ldots, S) \cdot B_j = S\,b_{1j} + S\,b_{2j} + \ldots + S\,b_{nj} = S\,(b_{1j} + b_{2j} + \ldots + b_{nj}) = ST$$

La somme des éléments de chaque colonne de $AB$ est donc $ST$. Ainsi, le produit $AB$ est un carré semi-magique de somme $ST$.

Nous savons maintenant que le produit de deux carrés magiques d'ordre $n$ de sommes $S\ et\ T$ est au moins un carré semi-magique de somme $ST$. Mais quand le produit est-il magique?

**Théorème 9.2 :**

Si $A\ et\ B$ sont deux carrés magiques triviaux quelconques d'ordre $n$ de sommes $S\ et\ T$, alors le produit $AB$ est un carré magique trivial de somme $ST$. De plus, $AB = BA$.

Preuve :

Soit $C$, le carré magique trivial d'ordre $n$ formé que du nombre 1. Nous pouvons donc écrire :

$A = \left(\frac{S}{n}\right) C\ \ et\ \ B = \left(\frac{T}{n}\right) C$. Puis $AB = \left(\frac{ST}{n^2}\right) C^2 = \left(\frac{ST}{n^2}\right) nC = \left(\frac{ST}{n}\right) C$. Donc le produit $AB$ est un carré magique trivial de somme $ST$ car chaque nombre dans ce carré égale $\frac{ST}{n}$.

Nous avons $AB = BA$ (Voir le problème 5 de 9.6)

### 9.3 Le procédé $AB^2$ et les puissances impaires d'un carré magique

Soient $A\ et\ B$, deux carrés magiques de sommes $S\ et\ T$. En général, $AB$ n'est pas magique mais il arrive souvent que $AB^2$ le soit.

Les carrés magiques étudiés jusqu'à maintenant appartiennent à des espaces vectoriels. Tous les carrés magiques d'un même espace vectoriel muni d'une structure générale possèdent les mêmes figures magiques caractéristiques c'est-à-dire celles de la structure générale. Ainsi, nous pouvons parler de l'espace des carrés magiques d'ordre 3, l'espace des super-Dürer, celui des A-Dürer, celui des diaboliques, celui des diaboliques-alpha, etc. Dans le but de simplifier, nous dirons simplement «espace» au lieu d'espace vectoriel.

Si $A\ et\ B$ sont dans un même espace, alors Il arrive souvent que $AB^2$ soit aussi dans cet espace. Cela va nous conduire à de magnifiques résultats.

Considérons l'espace $F$ et sa structure générale de somme $S$. Puis prenons dans $F$ deux carrés quelconques $A\ et\ B$ où $A$ est la structure générale elle-même et $B$, la structure générale dans laquelle nous avons changé le nom des variables. Par exemple, si les variables dans $A$ sont $a, b, c, S$ alors nous prendrons les variables $r,\ s,\ t, T$ pour $B$ où $S\ et\ T$ sont les sommes. Voyons de près l'exemple qui suit.

Considérons l'espace $F$ des diaboliques qui est de dimension 2. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{11S-26a}{18} & \frac{5S-11a}{9} & \frac{10a-S}{6} \\ \frac{14a+S}{18} & \frac{S-a}{3} & \frac{7S-10a}{18} & \frac{a+2S}{9} \\ \frac{5S-2a}{18} & \frac{5a+S}{9} & \frac{2a+S}{6} & \frac{4S-7a}{9} \\ \frac{2S-5a}{3} & \frac{22a-S}{18} & \frac{13a-S}{9} & \frac{S-2a}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & \frac{11T-26x}{18} & \frac{5T-11x}{9} & \frac{10x-T}{6} \\ \frac{14x+T}{18} & \frac{T-x}{3} & \frac{7T-10x}{18} & \frac{x+2T}{9} \\ \frac{5T-2x}{18} & \frac{5x+T}{9} & \frac{2x+T}{6} & \frac{4T-7x}{9} \\ \frac{2T-5x}{3} & \frac{22x-T}{18} & \frac{13x-T}{9} & \frac{T-2x}{2} \end{pmatrix}$$

avec A, la structure générale des diaboliques et B, la même structure générale dans laquelle nous avons remplacé a par x et S par T. Maintenant, nous allons effectuer, avec MATHEMATICA, le produit ABB. Selon le théorème 9.1, nous savons déjà que ABB est un carré semi-magique de somme $ST^2$ . Nous allons nous assurer que les deux grandes diagonales sont de la même somme. Puis nous allons vérifier qu'il s'agit bien d'un diabolique.

Toujours avec MATHEMATICA, nous avons trouvé que la somme des deux grandes diagonales était $ST^2$ . Puis nous avons vérifié que ABB est un A-Dürer et enfin que ABB est un diabolique en trouvant que les figures EBGQ, JFNQ et JFCD sont de somme $ST^2$ et ce, en référence avec (*) de 5.1.

Nous pouvons alors conclure que $ABB = AB^2$ est un diabolique quels que soient les diaboliques $A \textit{ et } B$ . Donc, en remplaçant $A$ par $B; B^3; B^5,$ …, nous trouvons que

$$B \quad B^3 \quad B^5 \quad B^7 \ldots$$

sont des diaboliques respectivement de sommes

$$T \quad T^3 \quad T^5 \quad T^7 \ldots$$

Tout simplement extraordinaire!!! Toutes les puissances impaires positives d'un diabolique sont des diaboliques. Non seulement ces puissances sont encore des carrés magiques mais celles-ci possèdent les 86 figures magiques qui caractérisent les diaboliques non triviaux.

Exemple : partons du diabolique normal suivant :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 16 & 3 & 2 & 13 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 233 & 297 & 321 & 305 \\ 297 & 265 & 273 & 321 \\ 321 & 273 & 265 & 297 \\ 305 & 321 & 297 & 233 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 10186 & 9306 & 9386 & 10426 \\ 10106 & 9706 & 9626 & 9866 \\ 9786 & 10026 & 9946 & 9546 \\ 9226 & 10266 & 10346 & 9466 \end{pmatrix}$$

$$D^5 = \begin{pmatrix} 11330056 & 11400456 & 11394056 & 11310856 \\ 11336456 & 11368456 & 11374856 & 11355656 \\ 11362056 & 11342856 & 11349256 & 11381256 \\ 11406856 & 11323656 & 11317256 & 11387656 \end{pmatrix}$$

Nous vous laissons le soin de vérifier que $D, D^3$ $et$ $D^5$ sont bien des diaboliques et que $D^2$ est un carré semi-magique avec sa diagonale secondaire magique. Sa principale ne l'est pas. Donc $D^2$ n'est pas un diabolique. **Voici une observation intéressante** : à partir de $k \geq 3$, les seize entiers de $D^k$ se terminent tous par 6 lorsque k est impair et se terminent tous par 4 lorsque k est pair. Nous avons vérifié ce résultat jusqu'à k = 24 puis pour k = 170 et k = 171. En est-il toujours ainsi? (voir problème 1 de 9.6)

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

**Théorème 9.3 :**

Considérons $A$, la structure générale qui représente un espace $F$ de carrés magiques et $B$, la même structure générale dans laquelle nous avons changé le nom de chaque variable afin qu'aucune variable de $A$ ne se retrouve dans $B$. Si $AB^2$ est dans $F$, alors toutes les puissances entières positives impaires de $B$ sont des carrés magiques dans $F$. Donc $B, B^3, B^5, ..., B^{2k-1}, ...$ sont des carrés magiques dans $F$ respectivement de sommes $T, T^3, T^5, ..., T^{2k-1}, ...$ où $k$ est entier $\geq 1$.

Nous allons voir que cela se produit pour plusieurs espaces. Par exemple, si $A$ est un super-Dürer de somme $S$, alors $A^{2k-1}$ est un super-Dürer de somme $S^{2k-1}$ où $k$ est un entier $\geq 1$.

C'est tout à fait remarquable de voir qu'un super-Dürer $A$ de somme $S$, à la puissance 2019, est toujours un super-Dürer dont la somme est $S^{2019}$ !!! Les carrés $A$ $et$ $A^{2019}$ sont des carrés magiques qui ont en commun les 52 figures magiques caractéristiques des super-Dürer!!!

Considérons maintenant l'espace $F$ des carrés magiques d'ordre 3 qui est de dimension 3. Nous allons prendre deux carrés magiques quelconques $A et B$ :

$$A=\begin{pmatrix} a & b & S-a-b \\ \frac{4S}{3}-2a-b & \frac{S}{3} & 2a+b-\frac{2S}{3} \\ a+b-\frac{S}{3} & \frac{2S}{3}-b & \frac{2S}{3}-a \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} x & y & T-x-y \\ \frac{4T}{3}-2x-y & \frac{T}{3} & 2x+y-\frac{2T}{3} \\ x+y-\frac{T}{3} & \frac{2T}{3}-y & \frac{2T}{3}-x \end{pmatrix}$$

Le produit $AB^2$, calculé avec MATHEMATICA, est bien un carré magique de somme $ST^2$, quels que soient les carrés magiques $A \, et \, B$. Nous pouvons donc conclure que $B^{2k-1}$ est un carré magique de somme $T^{2k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$.

Pour répondre à la question de 9.1, si $A$ est un carré magique de somme $S$, alors le carré $A^{323\,456\,549\,877}$ est bien un carré magique de somme $S^{323\,456\,549\,877}$.

Que dire du carré $B^2$ ? En général, c'est un carré semi-magique. Lorsque $B$ est un carré magique d'ordre 3, nous trouvons que $B^2$ possède une structure très spéciale; en fait :

$$B^2 = \begin{pmatrix} X & Y & Y \\ Y & X & Y \\ Y & Y & X \end{pmatrix}$$

où $X \; et \, Y$ sont des fonctions de $x, y \; et \, T$. Nous voyons que $B^2$ est un carré semi-magique avec sa grande diagonale secondaire magique. Nous aurions la grande diagonale principale magique si et seulement si $X = Y$. Observons que : **(carré magique $A$)** $\times$ **(carré semi-magique $B^2$)** $=$ **(carré magique $AB^2$).**

Nous allons maintenant trouver $AB^2$ où $A \, et \, B$ sont quelconques et appartiennent à un même espace $E$ connu :

1) $E =$ l'espace des carrés magiques d'ordre 3 $\Rightarrow AB^2$ magique.
2) $E =$ l'espace des super-Dürer $\Rightarrow AB^2$ est un super-Dürer.
3) $E =$ l'espace des super-Dürer-alpha $\Rightarrow AB^2$ est un super-Dürer-alpha.
4) $E =$ l'espace des super-Dürer-bêta $\Rightarrow AB^2$ est un super-Dürer-bêta (trivial).
5) $E =$ l'espace des A-Dürer $\Rightarrow AB^2$ est un A-Dürer.
6) $E =$ l'espace des diaboliques $\Rightarrow AB^2$ est un diabolique.
7) $E =$ l'espace des diaboliques-alpha $\Rightarrow AB^2$ est un diabolique-alpha.
8) $E =$ l'espace des ultra-magiques d'ordre 5 $\Rightarrow AB^2$ est un ultra-magique

**Théorème 9.4 :**

Soit $A$ un carré magique quelconque d'ordre $n$ et de somme $S$ , qui appartient à l'espace $E$ . Pour les espaces $E$ énumérés ci-dessous, $A^{2k-1}$ est un carré magique de somme $S^{2k-1}$ qui appartient à l'espace $E$ , avec $k$ , un entier $\geq 1$ :

1) Les carrés magiques d'ordre 3
2) Les super-Dürer
3) Les super-Dürer-alpha
4) Les super-Dürer-bêta
5) Les A-Dürer
6) Les diaboliques
7) Les diaboliques-alpha
8) Les ultra-magiques d'ordre 5.

Notez que cette liste n'est pas exhaustive.

Par exemple, si $A$ est un ultra-magique d'ordre 5 et de somme $S$ , alors :

$$A\ ,\ A^3\ ,\ A^5\ ,\ldots,A^{2k-1},\ \ldots$$

sont des ultra-magiques respectivement de sommes

$$S\ ,\ S^3\ ,\ S^5,\ \ldots,S^{2k-1},\ldots$$

avec $k$ , un entier $\geq 1$. Tout à fait extraordinaire de voir ces puissances impaires de $A$ qui sont toujours des carrés magiques et de plus, qui sont toujours des ultra-magiques avec les 362 figures magiques qui les caractérisent.

Si $A\ et\ B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors nous savons que $AB^2$ est un ultra-magique et que :

$$AB^2 = A(B^2) = (AB)B\,.$$

Mais $B^2$ et $AB$ ne sont pas des ultra-magiques. Le problème 6 de 9.6 montre que $AB$ et $B^2$ ne sont plus ni pandiagonaux ni associatifs, ils ne sont même plus magiques; de plus, ils ont perdu au moins une super-figure (la croix par exemple). Cependant, $B^2$ et $AB$ sont semi-magiques selon le théorème 9.1. Pourtant $A(B^2)$ et $(AB)B$ sont des ultra-magiques!!!

Nous avons utilisé le procédé $AB^2$ qui nous a conduit aux puissances impaires de $A$ et $B.$ De plus, $AB^2$ est un nouveau carré magique dans $E$ lorsque $A\ et\ B$ le sont et que $E$ est dans la liste du théorème 9.4. Ce nouveau carré magique est du même ordre que celui de $A et\ B.$

Mais que dire du procédé $A^2B$?

Pour les ultra-magiques d'ordre 5, nous avons :

$$(*) \qquad AB^2 = B^2A$$

En effet, nous avons trouvé, avec MATHEMATICA, $AB^2\ et\ B^2A$ puis nous avons fait la différence $AB^2 - B^2A$ pour trouver le carré nul. Nous allons montrer que le procédé $AB^2$ est le même que le procédé $A^2B$ pour les ultra-magiques d'ordre 5.

Avec $AB^2$ : prenons $A = M\ et\ B = N$ , des ultra-magiques d'ordre 5. Nous obtenons $M\ N^2$ , un ultra-magique.

Avec $A^2B$ : prenons $A = N\ et\ B = M$ , les mêmes ultra-magiques d'ordre 5. Nous obtenons $N^2M$ . En vertu de (*), nous avons : $M\ N^2 = N^2M.$

Les deux procédés sont donc les mêmes pour les ultra-magiques d'ordre 5!!!

En est-il de même avec les super-Dürer? Pour ceux-ci, nous avons $AB^2 \neq B^2A$. Cependant, $AB^2\ et\ B^2A$ sont des super-Dürer. Dans ces deux cas, nous trouvons les puissances impaires d'un super-Dürer comme pour les ultra-magiques ci-haut. Par contre, si nous fabriquons un super-Dürer avec le procédé $AB^2$, pourrons-nous obtenir le même avec le procédé $A^2B$? Soient $M$ et $N$, deux super-Dürer. Avec le procédé $AB^2$, nous trouvons $M\ N^2 et\ N\ M^2$ puis avec le procédé $A^2B$, nous trouvons $M^2N\ et\ N^2M.$ Mais ces quatre carrés, tous super-Dürer, sont différents deux à deux!!! Les deux procédés ne sont donc pas les mêmes ici. Voir problème 16 de 9.6.

Dans tous les cas, les procédés $AB^2\ et\ A^2B$ nous permettent de construire les puissances impaires des super-Dürer. Chaque procédé nous assure la construction de super-Dürer dès que $A et\ B$ le sont.

**Remarque** : Le $A$ dans $AB^2$ n'est pas forcément le même que dans $A^2B$ ; de même pour le $B.$ Ces deux procédés pourraient tout aussi bien se noter $AB^2\ et\ C^2D.$

Voici, en terminant, quelques nouveaux résultats :

1) $AB^2 = B^2A$ pour les carrés magiques d'ordre 3.
2) $AB^2 = B^2A$ pour les super-Dürer-alpha.
3) $AB^2 = B^2A$ pour les super-Dürer-bêta.
4) $AB^2 = B^2A$ pour les diaboliques.
5) $AB^2 = B^2A$ pour les diaboliques-alpha.
6) $AB^2 = B^2A$ pour les ultra-magiques d'ordre 5.
7) $AB^2 \neq B^2A$ pour les super-Dürer mais $AB^2$ *et* $B^2A$ sont des super-Dürer.
8) $AB^2 \neq B^2A$ pour les A-Dürer mais $AB^2$ *et* $B^2A$ sont des A-Dürer.

Dans ce tableau, les deux procédés sont identiques pour les six cas de la zone verte. Pour les deux autres cas, c'est l'incertitude.

Enfin, si $A$ est un super-Dürer-Bêta de somme $S$, alors toutes les puissances entières positives de $A$ sont des super-Dürer-bêta respectivement de somme $S, S^2, S^3, \ldots$

$A^n$ est un super-Dürer-bêta de somme $S^n$ où $n$ est un entier $\geq 1$,

et si $n \geq 2$, *alors* $A^n$ est trivial.

## 9.4 Autres produits

**Théorème 9.5 :**

Soit $A$ un carré semi-magique d'ordre $n$ de somme $S$ et $B$, un carré magique trivial d'ordre $n$ et de somme $T$. Alors, le produit $AB$ est un carré magique trivial d'ordre $n$ et de somme $ST$. De plus, $AB = BA$.

Preuve :

L'élément $c_{ij}$ de $AB$ est $\dfrac{ST}{n}$ et ce, pour tout $1 \leq i, j \leq n$. De même pour l'élément $c_{ij}$ de $BA$.
Donc, $AB = BA$ est un trivial de somme $ST$.

**Théorème 9.6:**

Soient $A\ et\ B$, deux super- Dürer-bêta de sommes $S\ et\ T$, alors le produit $AB$ est un trivial de somme $ST$. De plus, $AB = BA$.

Preuve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \\ a & a+r & a+3r & a+2r \\ a+3r & a+2r & a & a+r \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \\ b & b+s & b+3s & b+2s \\ b+3s & b+2s & b & b+s \end{pmatrix}}_{B} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\lambda = (2a+3r)(2b+3s)$. La somme magique de $AB$ est $4\lambda = (4a+6r)(4b+6s) = ST.$

Nous trouvons également $BA = AB$.

Ce résultat est très intéressant car il montre que le produit de deux super-Dürer-bêta quelconques est toujours un trivial. Cela va nous conduire à de très beaux problèmes d'algèbre (Voir 14.15).

**Théorème 9.7:**

Si $A$ est un super- Dürer-bêta de somme $S$ alors $A^k$ est un trivial de somme $S^k$ et ce, quel que soit l'entier $k \geq 2$.

Preuve :

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 9.5 et 9.6.

## 9.5 L'inverse d'un carré magique

Si nous prenons, dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, la matrice identité standard $I$, alors pour qu'une matrice M soit inversible, il faut et il suffit que son déterminant soit non nul.

Il est facile, avec MATHEMATICA ou MAPLE, de calculer le déterminant de la structure générale des super-Dürer. Nous trouvons zéro. Donc aucun super-Dürer n'est inversible. Il en est donc de même pour tous les super-Dürer-alpha et bêta; aucun n'est inversible puisque ce sont tous des super-Dürer.

Le déterminant des A-Dürer est également nul. Donc aucun A-Dürer, aucun diabolique et aucun diabolique-alpha n'est inversible.

Par contre, le déterminant de la structure générale (1) des carrés magiques d'ordre 3 (voir 4.3) est :

$$(*) \qquad S^3 - 4bS^2 - 2aS^2 + 3b^2S + 6abS = S\,(S-2a-b)\,(S-3b)$$

Ainsi, nous voyons qu'un carré magique M d'ordre 3 est inversible si et seulement si :

$$S \neq 0,\ S \neq 3b,\ S \neq 2a+b$$

Si ces trois conditions sont respectées simultanément, alors M est inversible. La grande question : l'inverse est-il un carré magique?

Nous avons trouvé, avec MATHEMATICA, l'inverse de la structure générale (1) des carrés magiques d'ordre 3. Nous voyons que les neuf membres de l'inverse sont des fractions qui ont toutes le même dénominateur à savoir le déterminant (*) de M. Lorsque nous faisons la somme dans chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale, nous trouvons toujours le même numérateur soit :

$(S-2a-b)(S-3b)$. L'inverse de M est donc un carré magique de somme :

$$\frac{(S-2a-b)(S-3b)}{S\,(S-2a-b)(S-3b)} = \frac{1}{S}$$

Nous dirons qu'un carré magique $M$ est inversible en tant que carré magique si et seulement si il existe un carré magique $M'$ tel que $M\,M' = M'M = I$. Nous dirons qu'un carré semi-magique $M$ est inversible en tant que carré semi-magique si et seulement si il existe un carré semi-magique $M'$ tel que $M\,M' = M'M = I$.

Soit maintenant $M$, un carré semi-magique ou magique d'ordre n et de somme $S$ dont le déterminant est non nul. C'est une condition nécessaire pour que $M$ soit inversible. Si $M$ est inversible en tant que carré semi-magique (magique), alors il existe un carré semi- magique (magique) $M'$ d'ordre n et de somme $T$ tel que $M\,M' = I$. Cela implique $S\,T = 1$ et $T = \frac{1}{S}$.

Une autre question se pose ici : $M$ est-il inversible en tant que carré semi-magique ou en tant que carré magique? La réponse est apportée par le théorème suivant :

**Théorème 9.8 :**

Soit $M$ , un carré semi-magique d'ordre $n \geq 3$ dont la somme est $S$. Si $Det(M) \neq 0$ alors il existe un carré $M'$ d'ordre $n$ tel que $M\,M' = M'M = I$. De plus, $S \neq 0$ et $M'$ est semi-magique de somme $\frac{1}{S}$ ; avec $n = 3$, si $M$ est magique alors $M'$ est magique.

Preuve :

Soit $M$, un carré semi-magique d'ordre $n$ et de somme $S$ avec $Det(M) \neq 0$. Nous avons donc :

$$M\,M' = M'M = I$$

1) Avec l'égalité $M\,M' = I$ , montrons que les colonnes de $M'$ ont la même somme $\frac{1}{S}$.

   Appelons $R_1, R_2, \ldots, R_n$, les rangées de $M$ et $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$, les éléments de la colonne $C_j$ $de\, M'$. Nous avons alors, dans la colonne $j$ de $M\,M'$, les éléments suivants :

   $R_1 \cdot C_j$ ; $R_2 \cdot C_j$ ; ... ; $R_n \cdot C_j$ dont la somme est :

   $$\left(R_1 + R_2 + \ldots + R_n\right) \cdot C_j = \left(S ; S ; \ldots ; S\right) \cdot \left(a_{1j} ; a_{2j} ; \ldots ; a_{nj}\right) = S\,a_{1j} + S\,a_{2j} + \ldots + S\,a_{nj} =$$
   $$= S\,(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj}) = 1 \quad (**)$$

   Donc $Det(M) \neq 0$ implique l'égalité $(**)$ . Ainsi, nous voyons que $S \neq 0$ et qu'il en est de même pour la parenthèse. La somme des nombres de chaque colonne de $M'$ est $\frac{1}{S}$ .

   Nous venons de voir : $Det(M) \neq 0 \;\Rightarrow\; S \neq 0 \;\; d'où \;\; S = 0 \;\Rightarrow\; Det(M) = 0.$

2) Avec l'égalité $M'M = I$ , montrons que les rangées de $M'$ ont la même somme $\frac{1}{S}$.

   Appelons $R_i$, la rangée $i$ de $M'$ dont les éléments sont $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ et $C_1, C_2, \ldots, C_n$, les colonnes de $M$. La rangée $i$ de $M'M$ renferme les éléments suivants :

   $R_i \cdot C_1$ ; $R_i \cdot C_2$ ; ... ; $R_i \cdot C_n$ et leur somme est :

   $$R_i \cdot \left(C_1 + C_2 + \ldots + C_n\right) = R_i \cdot \left(S, S, \ldots, S\right) = a_{i1}S + a_{i2}S + \ldots + a_{in}S =$$
   $$\left(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}\right)S = 1.$$

La somme des nombres de chaque rangée de $M'$ est $\frac{1}{S}$. Le carré $M'$ est alors un carré semi-magique de somme $\frac{1}{S}$.

En général, $M$ magique n'implique pas que $M'$ soit magique lorsque $n \geq 4$ ; par contre, $M$ magique avec $Det(M) \neq 0$, est toujours inversible en tant que carré semi-magique. Nous avons vu plus haut que pour $n=3$, si $M$ est magique alors $M'$ est magique.

Enfin, nous savons maintenant qu'un carré semi-magique (magique) de somme nulle n'est jamais inversible en tant que matrice carrée. Rappelons que $M'$ se note généralement $M^{-1}$.

Nous vous laissons avec cette question : Quand l'inverse d'un carré magique d'ordre $n \geq 4$ est-il magique?

Poursuivons en disant que si $M$ renferme seulement des entiers, alors $S$ est un entier. Si $S \neq \pm 1$, alors $\frac{1}{S}$ ne sera pas un entier et $M'$ contiendra des nombres non entiers.

Nous laisserons de côté le cas $S = \pm 1$. Disons seulement qu'avec un carré magique $M$ d'ordre 3, $S = \pm 1$ implique que $M$ a pour centre $\frac{\pm 1}{3}$, donc $M$ ne renferme pas que des entiers. De plus, il se peut que $M'$ ne renferme aucun entier.

**En général, lorsque le carré magique renferme que des entiers, son inverse, s'il existe, n'est pas un beau carré.**

Voici $M$, un carré magique d'ordre 4 formé seulement d'entiers avec $Det(M) = 1 \; et \; S = 1$. Nous pouvons affirmer que l'inverse $M'$ renferme que des entiers. Mais $M'$ est-il magique?

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}} \underset{M'}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$M$ est donc inversible en tant que carré semi-magique mais ne l'est pas en tant que carré magique. En effet, nous voyons bien que $M'$ est un carré semi-magique mais non magique.

L'inverse d'un carré magique d'ordre 3, lorsqu'il existe, est toujours un carré magique. L'exemple ci-dessus montre que ce n'est pas le cas pour l'ordre 4.

Nous allons poursuivre avec deux carrés magiques Dürer $M$ qui sont inversibles en tant que carrés magiques et deux questions : comment avons-nous trouvé $M$ et $M^{-1}$ peut-il être un Dürer?

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 50 & 661 & 9 & -640 \\ 8 & -639 & 13 & 698 \\ -671 & 14 & 692 & 45 \\ 693 & 44 & -634 & -23 \end{pmatrix}} \qquad \underset{M^{-1}}{\frac{1}{711360}\begin{pmatrix} 8869643 & 8381483 & -8386397 & -8855837 \\ -9371357 & -8855837 & 8869643 & 9366443 \\ 9365923 & 8850403 & -8855317 & -9352117 \\ -8855317 & -8367157 & 8380963 & 8850403 \end{pmatrix}}$$

Ici $M$ est un Dürer de somme 80; il est formé de seize entiers différents dont cinq sont négatifs. $M^{-1}$ est magique de somme $\frac{1}{80}$.

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 23 & 44 & 10 & 3 \\ 8 & 5 & 13 & 54 \\ -1 & 14 & 48 & 19 \\ 50 & 17 & 9 & 4 \end{pmatrix}} \qquad \underset{M^{-1}}{\frac{1}{336960}\begin{pmatrix} -2807 & -127 & -887 & 8033 \\ 9793 & 233 & -1247 & -4567 \\ -3007 & -2807 & 8033 & 1993 \\ 233 & 6913 & -1687 & -1247 \end{pmatrix}}$$

$M$ est encore un Dürer de somme 80; il est formé de seize entiers différents dont un seul est négatif. $M^{-1}$ est magique de somme $\frac{1}{80}$. Comment avons-nous trouvé $M$ ?

Avec MATHEMATICA, nous avons d'abord inversé la structure générale $M$ des Dürer. Puis nous avons fait la somme des termes de chaque grande diagonale de l'inverse pour obtenir $S_1\ et\ S_2$. Nous avons ensuite posé :

$$(\&) \qquad S_1 = \frac{1}{S}\ ;\ S_2 = \frac{1}{S}$$

Nous avons donné les valeurs suivantes aux variables suivantes :

$$c = 9\ ;\ d = 8\ ;\ f = 13\ ;\ g = 14\ ;\ S = 80$$

Nous avons ensuite isolé la variable a dans chacune des équations (&). Nous avons obtenu :

$$a=-8+2\sqrt{b+180}\ \ et\ \ a=22+\frac{2\sqrt{b-73}}{\sqrt{3}}$$

Et enfin, l'équation : $-8+2\sqrt{b+180}\ =22+\dfrac{2\sqrt{b-73}}{\sqrt{3}}$ donne $b=76\ ou\ b=661.$

$b=76$ donne $a=24$ et $b=661$ donne $a=50$ (premier exemple ci-haut). Par contre, le deuxième exemple est obtenu avec :

$$c=10\ ;\ d=8\ ;\ f=13\ ;\ g=14\ ;\ S=80$$

L'équation : $a\ =-5+2\sqrt{2}\sqrt{b+54}\ =\dfrac{67+2\sqrt{6b-263}}{3}$

donne : $b=44\ et\ a=23\ puis\ b=\dfrac{621}{2}\ et\ a=49.$

Pour le deuxième exemple ci-haut, nous avons choisi $b=44\,et\,a=23.$ Cela nous assure que $M$ renferme seulement des entiers.

Avec les valeurs $c=11,12,13,14,15,16$, nous trouvons $b$, un rationnel non entier. Donc $M$ ne sera pas formé que d'entiers.

Plus l'ordre du carré est grand, plus il est difficile de rendre $M$ inversible en tant que carré magique.

**La dernière question : pouvons-nous trouver un Dürer $M$ tel que $M^{-1}$ soit aussi un Dürer? La réponse est oui!!!**

En procédant de façon semblable, voici un Dürer $M$ dont l'inverse $M^{-1}$ est aussi un Dürer!!!

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 14 & 13 & 45 & 8 \\ 8 & 45 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 8 & 45 \\ 45 & 8 & 14 & 13 \end{pmatrix}} \qquad \underset{M^{-1}}{\frac{1}{711360}\begin{pmatrix} -4877 & -557 & -4357 & 18683 \\ -4357 & 18683 & -4877 & -557 \\ 18683 & -4357 & -557 & -4877 \\ -557 & -4877 & 18683 & -4357 \end{pmatrix}}$$

$M$ est un Dürer de somme 80. C'est aussi un carré latin diagonal. Il renferme quatre entiers, chacun apparaissant quatre fois. $M^{-1}$ est aussi un Dürer de somme $\dfrac{1}{80}$. C'est également un carré latin diagonal. Notez que $M$ suggère le Dürer général $P$ qui suit et qui est un carré latin diagonal :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| D | C | B | A |
| B | A | D | C |
| C | D | A | B |

Ce carré latin diagonal $P$ est un Dürer. Qu'en est-il de son inverse? Trouvons d'abord le déterminant de $P$.

$Det(P) = (A+B-C-D)(A-B+C-D)(A-B-C+D)(A+B+C+D)$. Si $Det(P) \neq 0$, alors nous pouvons trouver $P^{-1}$. Puisque $P$ est un Dürer, alors nous savons que $P^{-1}$ est déjà semi-magique. Il reste à faire la somme des cases des deux grandes diagonales et la somme des quatre cases du sous-carré 2 x 2 dans le coin haut gauche et de s'assurer que la somme est bien $\dfrac{1}{A+B+C+D}$. C'est exactement ce qui arrive et $P^{-1}$ est un Dürer!!!

Notez que MATHEMATICA nous donne $Det(M)$ sous la forme d'un polynôme du quatrième degré en $A, B, C\, et\, D.$ Pour arriver à la décomposition ci-haut, nous utilisons la commande FullSimplify de MATHEMATICA. Nous faisons de même lorsque, par exemple, nous additionnons les quatre cases de la grande diagonale principale. Le numérateur doit être décomposé en facteurs avec cette même commande.

Ainsi, pour la grande diagonale principale, nous avons obtenu :

$$\frac{(A+B-C-D)(A-B+C-D)(A-B-C+D)}{(A+B-C-D)(A-B+C-D)(A-B-C+D)\ (A+B+C+D)} = \frac{1}{A+B+C+D} = \frac{1}{S}.$$

Il en sera de même avec la grande diagonale secondaire et avec le sous-carré 2x2 dans le coin haut gauche.

**Remarque** : décomposer soi-même en facteurs le déterminant demande un bon tour de force technique!!! Si l'ordre du carré est 7200, par exemple, alors j'ose parler d'impossibilité de décomposer le déterminant en facteurs linéaires!!!

Terminons avec un dernier exemple avant de passer à un tout autre produit :

$$\underset{M}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{M^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

où $M\ et\ M^{-1}$ sont des Dürer et $Det(M) = Det(M^{-1}) = S = S^{-1} = 1$.

Nous constatons bien que l’inverse d’un carré semi-magique ou magique n’est pas, en général, un beau carré. Ceux-ci renferment des nombres non entiers et même des nombres négatifs.

Nous avons utilisé jusqu’à maintenant le produit matriciel mais pourrions-nous prendre un autre produit? Par exemple, le produit terme à terme. Cela signifie que si A et B sont des carrés d’ordre n, alors l’élément $c_{i\,j}$ de AB, également d’ordre n, n’est rien d’autre que le produit $a_{i\,j}b_{i\,j}$ où $a_{i\,j}$ est dans A et $b_{i\,j}$ est dans B.

Mais si A et B sont magiques, qu’en est-il du produit A B ?

A

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

B

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 10 | 3 |
| 4 | 6 | 8 |
| 9 | 2 | 7 |

A B

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 90 | 6 |
| 12 | 30 | 56 |
| 72 | 2 | 42 |

Ce n’est pas une surprise de constater que A B n’est pas un carré magique, ni même semi-magique.

Nous n’allons pas utiliser ce produit avec les carrés magiques mais nous allons nous en servir avec les carrés multiplicatifs. Voir le chapitre 15. Dans un carré multiplicatif, le produit des nombres de chaque rangée, chaque colonne et chaque grande diagonale est toujours le même soit P, appelé produit magique ou simplement produit.

C

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 512 | 4 |
| 8 | 32 | 128 |
| 256 | 2 | 64 |

D

| | | |
|---|---|---|
| 32 | 1024 | 8 |
| 16 | 64 | 256 |
| 512 | 4 | 128 |

F

| | | |
|---|---|---|
| 512 | 524 288 | 32 |
| 128 | 2048 | 32 768 |
| 131 072 | 8 | 8192 |

Vous pouvez vérifier que ces trois carrés sont bien multiplicatifs et que F = C D. De plus, le produit de C est 32 768, celui de D est 262 144 et celui de F, 8 589 934 592 et bien entendu,

nous trouvons : **(produit de C) x (produit de D) = produit de F.**

L’explication est toute simple car ces carrés peuvent se mettre sous la forme suivante :

| | | |
|---|---|---|
| $2^4$ | $2^9$ | $2^2$ |
| $2^3$ | $2^5$ | $2^7$ |
| $2^8$ | $2^1$ | $2^6$ |

C

| | | |
|---|---|---|
| $2^5$ | $2^{10}$ | $2^3$ |
| $2^4$ | $2^6$ | $2^8$ |
| $2^9$ | $2^2$ | $2^7$ |

D

| | | |
|---|---|---|
| $2^9$ | $2^{19}$ | $2^5$ |
| $2^7$ | $2^{11}$ | $2^{15}$ |
| $2^{17}$ | $2^3$ | $2^{13}$ |

F

Le produit de C est bien 32 768 = $2^{15}$.

Le produit de D est bien 262 144 = $2^{18}$.

Le produit de F est bien 8 589 934 592 = $2^{33}$.

Une loi des exposants nous dit que $2^{15} \times 2^{18} = 2^{33}$.

Observez les exposants dans C et les entiers dans A. De même avec D et B.

Vous pouvez voir comment nous avons construit C et D à partir de A et B. Comment retrouver A et B à partir de C et D; à vous d'y répondre.

C'est ce nouveau produit qui nous permettra de montrer l'étroite relation qui existe entre les carrés magiques et les carrés multiplicatifs!!!

## 9.6 Problèmes

1) Revenez à l'observation faite dans 9.3, juste au-dessus du théorème 9.3, et démontrez que celle-ci est vraie pour tout entier $k \geq 3$.
2) Soit $A$, un diabolique de somme $S$. Que pouvons- nous dire de $A^{111222333444555}$ ? Est-il magique? Si oui, quelle est sa somme magique? Est-il un diabolique?
3) Que dire des puissances paires d'un diabolique?
4) Soient $A et B$, deux Dürer. Que pouvons-nous dire du produit $AB^2$ ?
5) Dans la preuve du théorème 9.2, montrez que $AB = BA$.
6) Avec la structure générale des ultra-magiques d'ordre 5 (voir 6.3), construisez $A et B$ en posant : pour $A$: a = 1, b = 15, c = 22, f = 19, k = 13 et pour $B$: a = 2, b = 16, c = 23, f = 20, k = 14. Vérifiez que $AB^2\ et\ A^2B$ sont des ultra-magiques. Trouvez $AB et B^2$. Qu'observez-vous?
7) Montrez que si $A et B$ sont des ultra-magiques d'ordre 5, alors $A^3B^8$ et $A^7B^{30}$ sont des ultra-magiques.

8) Un carré magique d’ordre 2 est-il inversible? Un carré semi-magique d’ordre 2 est-il inversible?
9) Un carré magique d’ordre 1 est-il inversible?
10) Soit donné $M$ , un carré semi-magique de somme $S$ et d’ordre $n \geq 3$, formé seulement d’entiers avec $Det(M) = \pm 1.$ Montrez qu’alors $S = \pm 1$ et que l’inverse de $M$ est un carré semi-magique formé seulement d’entiers dont la somme magique est aussi $\pm 1.$
11) Soit $M$, un carré magique d’ordre 3 formé de neuf entiers avec $Det(M) \neq 0.$ Montrez que $Det(M) \neq \pm 1.$
12) Un A-Dürer $M$ est de somme S = 64.
    a) Le carré $M^{35}$ est-il un A-Dürer?
    b) Si oui, quelle est sa somme?
13) $M$ est un A-Dürer de somme 64. Que pouvons-nous dire de $M^{24}$ ? Quelle est sa somme s’il y a lieu?
14) $A\,et\,B$ sont des super-Dürer-bêta. Montrez que $AB^2 = B^2A.$
15) $A\,et\,B$ sont des ultra-magiques quelconques d’ordre 5. $AB^2$ possède-t-il les quatorze super-figures et les deux ultra-figures présentées dans la section 6.3?
16) Soient $M$ et $N$ , deux super-Dürer définis par a = 21, b = 18, c = 22, d = 27, S = 120 pour $N$ et a = 20, b = 17, c = 21, d = 16, S = 102 pour $M$ . Montrez que les procédés $AB^2$ et $A^2B$ ne sont pas les mêmes. Trouvez ensuite $M^5$.